پاسخ‌های تشریحی

ویندوز ۱۲

فیزیک ۳ جامع

ویراست سوم

رضا خالو، امیرعلی میری

رشتهٔ تجربی

جلد دوم

نشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

سلام

همکاران گرامی و دانش‌آموزان عزیز

به دنیای پنجره‌های کتاب فیزیک ۳ (ویندوز ۱۲) خوش آمدید.

پس از انتشار کتاب جامع فیزیک پایه (ویندوز ۱۰ و ۱۱) به این نتیجه رسیدیم که کتاب فیزیک ۳ (دوازدهم) را با همان شکل و شمایل تحت عنوان ویندوز ۱۲ ویرایش و منتشر کنیم.

کتاب دو جلدی است. یک جلد شامل درسنامه و تست‌ها و جلد دوم پاسخ‌نامهٔ کاملاً تشریحی

اما حکایت پنجره‌ها چیست؟

هر فصل به پنج پنجره و هر پنجره به زیرموضوع‌هایی به نام «نما» که دارای شماره و عنوان است تقسیم شده است.

در هر پنجره ابتدا درسنامه و سپس تست‌های همان پنجره آورده شده است.

۱) درسنامه: در این کتاب با یک درسنامهٔ کامل و جامع روبه‌رو هستید که در آن تمام نکات درسی در قالب مسئله‌های تشریحی و به همراه تست‌های مربوط به آن نکات به‌صورت طبقه‌بندی شده در نماهای مختلف ارائه شده است.

۲) تست‌ها: تست‌ها بخش مهم کتاب را تشکیل می‌دهند که شامل تست‌های کنکور، تست‌های برگرفته از کتاب درسی و تست‌های تألیفی هستند.

الف- چینش تست‌ها در هر «نما» از ساده به سخت بوده تا بتوانید گام به گام پیش رفته و پله‌پله مهارتتان را بالا ببرید.

ب- معمولاً دانش‌آموزان در ابتدا بدون مطالعه درسنامه به سراغ حل تست‌ها می‌روند. اگر چنین کردید و در تست‌هایی دچار مشکل شدید برای رجوع به درسنامه و یادگیری بهتر کافی است به سراغ همان شماره «نما» در درسنامه بروید.

پ- برای مرور سریع تست‌ها حدود ۳۰٪ آن‌ها را با لوگوی مشخص کرده‌ایم.

ت- در کنار بعضی از تست‌ها لوگوی مشاهده می‌کنید. در پاسخ این تست‌ها، یک تست اضافی تحت عنوان «بازی با سؤال» قرار دارد که شما با حل آن می‌توانید اطمینان پیدا کنید که تست مورد نظر را یاد گرفته‌اید.

ث- پنجرهٔ روبه‌رو (آزمونک) - پنجرهٔ تودرتو (آزمون فصل)

در آزمون‌هایی که شما خواهید دید، تست‌ها طبقه‌بندی ندارند و این شما هستید که باید موضوع تست را تشخیص دهید. به همین دلیل بین هر دو پنجرهٔ پشت سر هم یک بخش به نام پنجرهٔ روبه‌رو و یا آزمونک و در انتهای هر فصل یک بخش به نام پنجرهٔ تودرتو به عنوان آزمون فصل قرار دارد که در آن‌ها خبری از طبقه‌بندی تست‌ها نیست و تست‌ها ترتیب مشخصی ندارند و در واقع شما یک کتاب با تست‌های ریز طبقه‌بندی و یک مینی کتاب با تست‌های درهم و برهم در اختیار دارید.

ج- پنجرهٔ رو به گذشته: در این پنجره مسائل ترکیبی دینامیک و حرکت‌شناسی با کار و انرژی جنبشی ارائه شده است.

پیشگفتار

اما جلد دوم یا جلد پاسخنامه[1]

تمام زحماتی که شما و ما در درسنامه و تست‌ها کشیده‌ایم، در جلد ۲ به سرانجام می‌رسد. به قول معروف شاهنامه آخرش خوش است. برای همین سعی کردیم در این قسمت کامل‌ترین و بهترین پاسخ‌ها ارائه شود.

به سراغ ویژگی‌های جلد دوم برویم.

خط فکری: بارها شما از ما سر کلاس پرسیده‌اید که چرا این مسئله از این راه حل شده یا چرا از این فرمول استفاده می‌کنیم؟ برای پاسخ به این نیاز شما، خط فکری ارائه شده تا با خواندن آن شما استراتژی حل مسئله را به دست بیاورید. بنابراین اگر تستی را حل نکرده‌اید، پیشنهاد می‌کنیم که ابتدا خط فکری آن را بخوانید و سعی کنید مسئله را حل کنید. در بیشتر تست‌ها با خواندن خط فکری مشکل شما در حل مسئله برطرف خواهد شد.

نکته: مطالب مهم و مطالبی که باید به آن دقت کنید را تحت عنوان «نکته» آورده‌ایم تا از چشم شما دور نماند.

یادآوری: اگر در حل یک تست نیاز به مطلبی باشد که قبلاً بیان شده، برای راحتی شما آن مطلب را دوباره بیان کرده‌ایم.

یادداشت ریاضی: گاهی در حل تست شما به یک مطلب ریاضی نیاز دارید که ممکن است آن را به خاطر نداشته باشید از این رو آن مطلب و یا اثبات آن را برای شما آورده‌ایم.

میان‌بر: بعد از حل تشریحی و کامل تست در آخر بعضی از تست‌ها برای سرعت بخشیدن به حل تست راه‌حل‌های کوتاه با تکیه بر فیزیک و ریاضی ارائه شده است.

بازی با سؤال: در برخی از تست‌ها، همان تست به نحو دیگری بیان شده تا اگر شما تست مورد نظر را حل نکرده‌اید، بعد از مطالعهٔ پاسخ، بازی با سوال را حل کرده و با پاسخ ارائه شده مقایسه کنید.

پاسخ پنجره‌های روبه‌رو و تودرتو: در پاسخ این تست‌ها، شمارهٔ «نمای» مربوط به آن تست ارائه شده تا شما متوجه شوید این تست مربوط به چه موضوعی است و درسنامهٔ آن کجاست.

در آخر باید بگوییم که پاسخ همهٔ تست‌ها به صورت گام به گام انجام شده تا پله‌پله با هم تست را به طور کامل حل کرده و یاد بگیریم.

در پایان لازم است از تلاش صمیمانهٔ کارکنان نشر الگو سپاسگزاری کنیم، در واحد ویرایش خانم‌ها زهره نوری و زهرا امیدوار و محسن شعبان شمیرانی. همچنین آقای عرفان شاهین‌پور که ویرایش این کتاب بی‌یاری ایشان امکان‌پذیر نبود. در واحد حروف‌چینی از خانم فاضله محسنی و همچنین خانم سکینه مختار مدیر واحد فنی و ویرایش و نیز از همکارانی که نظرات اصلاحی داده‌اند، آقایان علی جیرودی و وحید کرابی قدردانی می‌کنیم.

رضا خالو - امیرعلی میری

۱- با اسکن QR Code یا با مراجعه به سایت نشر الگو به آدرس olgoobooks.ir می‌توانید جلد دوم این کتاب را دانلود کنید.

فهرست › فیزیک دوازدهم › فیزیک ۳ جامع (الگو)

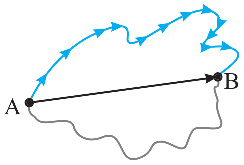
فصل اول

حرکت بر خط راست

پنجره ۱

A ۱ ۲

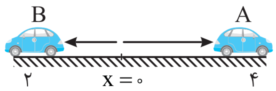
در زندگی روزمره وقتی متحرکی مطابق شکل بر مسیر آبی رنگ از A به B می‌رود، طول مسیر حرکت مهم است که به آن **مسافت** طی شده می‌گویند. اما در فیزیک علاوه بر مسافت (l)



که به مسیر حرکت بستگی دارد، فاصلهٔ مستقیم A تا B نیز اهمیت دارد که این فاصله را توسط یک بردار نمایش می‌دهند و به آن **بردار جابه‌جایی** گویند، بنابراین جابه‌جایی کمیت برداری و مسافت کمیت نرده‌ای است و گزینهٔ (۱) نادرست است. مسافت و جابه‌جایی هر دو برحسب یکای متر در SI بیان می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. مسافت به مسیر حرکت بستگی دارد. به‌طور مثال، اگر متحرک بر مسیر خاکستری از A به B برود، مسافت آن با مسیر آبی رنگ متفاوت است اما جابه‌جایی در هر دو مورد برابر بردار $\overrightarrow{AB}$ است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

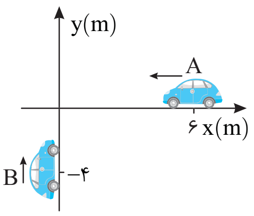
A ۲ ۴

خط فکری ابتدا مفهوم مکان، جهت حرکت را باید در ذهن خود یادآوری کنید.



بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=۰)$ یا $(y=۰)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین اگر این بردار در جهت مثبت محور باشد، مکان متحرک مثبت است. برای مثال مکان متحرک A $(\vec{x}_A=۴\vec{i})$ است و اگر در خلاف جهت محور باشد مکان متحرک منفی است همچنین مکان متحرک B $(\vec{x}_B=-۲\vec{i})$ است. اگر متحرک در جهت مثبت محور حرکت کند، جهت حرکت مثبت و اگر در خلاف جهت محور حرکت کند جهت حرکت منفی است.

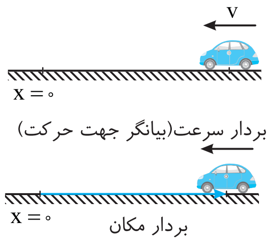
A: خودروی A در xهای مثبت و در ۶ متری مبدأ قرار دارد، بنابراین بردار مکان آن $+۶\vec{i}$ است و گزارهٔ (الف) نادرست است.



از طرفی خودروی A در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) درست است.

B: خودروی B در مکان‌های منفی محور yها است و بردار مکان آن $-۴\vec{j}$ است و در جهت مثبت محور yها در حال حرکت است بنابراین بردار مکان B و جهت حرکت آن، خلاف جهت هم هستند. در نتیجه گزارهٔ (پ) نادرست و گزارهٔ (ت) درست است.

بازی با سؤال **کدام گزینه جهت بردار مکان و جهت حرکت متحرک را درست نشان می‌دهد؟**



۱) → و →   ۲) → و ←

۳) ← و ←   ۴) ← و →

پاسخ **خودرو در خلاف جهت محور xها (←) در حرکت است و در لحظهٔ نشان داده شده خودرو در مکان‌های مثبت محور xهاست و بردار مکان آن به سمت راست (→) است.**

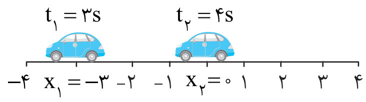
گزینه ۲

A ۳ ۳

یادآوری معادلهٔ حرکت یا معادلهٔ مکان - زمان به یک رابطهٔ ریاضی بین مکان و زمان گفته می‌شود که به کمک آن می‌توان مکان متحرک را در هر لحظه مشخص کرد.

معادلهٔ حرکت به صورت $x=t^۲-۴t$ است بنابراین کافی است زمان‌های $t_۱=۳s$ و $t_۲=۴s$ را در معادله قرار دهیم و مکان‌ها را به‌دست آوریم و روی محور مشخص کنیم.

$$x=t^۲-۴t \begin{cases} \xrightarrow{t_۱=۳s} x=۹-۱۲=-۳m \\ \xrightarrow{t_۲=۴s} x=۱۶-۱۶=۰ \end{cases}$$



A ۴ ۲

خط فکری یک معادلهٔ مکان - زمان (معادلهٔ حرکت) در اختیار داریم که در آن دو مجهول a و b وجود دارد. اما شما در دو لحظهٔ مبدأ زمان یعنی $t_۱=۰$ و همچنین $t_۲=۳s$ مکان متحرک را در اختیار دارید و در این دو لحظه متحرک به ترتیب از $x=۱۲m$ و مبدأ مکان یعنی $x=۰$ می‌گذرد، بنابراین کافی است شما اعداد زمان را در معادله قرار دهید و یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل کنید.

اعداد را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=t^۲+at+b \begin{cases} \xrightarrow{t_۱=۰,\ x=۱۲m} ۱۲=۰+۰+b \Rightarrow b=۱۲m \\ \xrightarrow{t_۲=۳s,\ x=۰} ۰=۹+۳a+b \xrightarrow{b=۱۲} \end{cases}$$

$$۰=۳a+۲۱ \Rightarrow a=-۷m/s$$

نکته اما از کجا یکای a را تشخیص داده‌ایم؟ با توجه به بحث سازگاری یکاها در فیزیک دهم باید یکای at با یکای x یعنی متر یکسان باشد بنابراین:

$$a(\text{ثانیه})=\text{متر} \Rightarrow [\text{یکای } a]=m/s$$

A ۵ ۴

خط فکری به دو عبارت «مبدأ حرکت» و «مبدأ مکان» باید دقت کنید و دو نکته زیر را فرابگیرید.

نکته مبدأ مکان یعنی $x=۰$ و مکان متحرک از مبدأ مکان یعنی فاصلهٔ متحرک از $x=۰$.

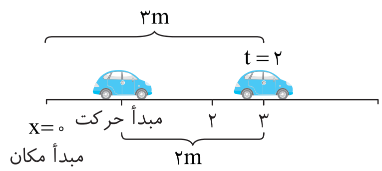
نکته مبدأ حرکت یعنی مکانی که متحرک در لحظهٔ $t=۰$ در آن قرار دارد که به آن **مکان اولیه** گویند.

معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^۳-۳t+۱$ است. در لحظهٔ $t=۰s$ متحرک در مکان $x=+۱m$ قرار دارد یعنی مکان اولیهٔ متحرک (مبدأ حرکت) $x=+۱m$ است.

لحظهٔ $t=۲s$ را در معادلهٔ حرکت قرار می‌دهیم و مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^۳-۳t+۱ \xrightarrow{t=۲s} x=۲^۳-(۳\times۲)+۱=۸-۶+۱ \Rightarrow x=+۳m$$

بنابراین وقتی متحرک در $x=+۳m$ قرار دارد فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت $(x=+۱m)$ برابر $۳-۱=۲m$ و از مبدأ مکان $(x=۰)$ برابر ۳m است.



B ۶ ۱

یادداشت ریاضی برای تعیین علامت یک تابع درجه ۲ به صورت $y=ax^۲+bx+c$ ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم و سپس با رسم یک جدول معادله را تعیین علامت می‌کنیم، بین دو ریشه مخالف علامت a (ضریب $x^۲$) و بیرون دو ریشه موافق علامت a.

خط فکری وقتی مسئله به شما می‌گوید بردار مکان منفی باشد یعنی x باید منفی باشد بنابراین شما باید این معادله را تعیین علامت کنید.

۱ ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^۲+t-۱۲=۰ \Rightarrow (t+۴)(t-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۳s \\ t=-۴s \end{cases}$$

۲ ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم و معادله را تعیین علامت می‌کنیم.

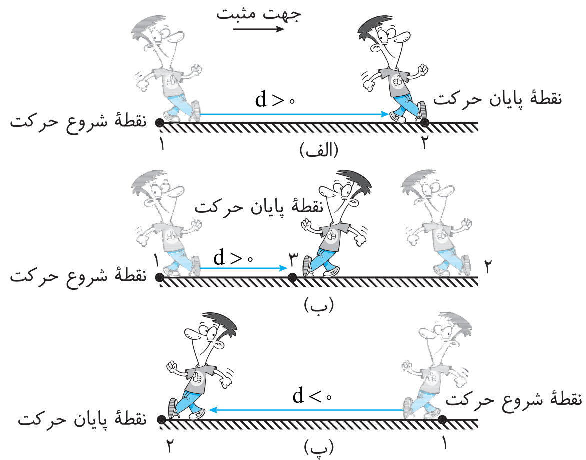
t	−∞		−۴		۰		۳		+∞
x		+		−		−		+	

۳ اما زمان منفی در فیزیک دبیرستان تعریف نمی‌شود بنابراین قسمت $t<۰$ را هاشور زده‌ایم بنابراین در بازهٔ $t=۰$ تا $t=۳s$ مکان منفی است در نتیجه در بازهٔ $t=۲s$ تا $t=۳s$ $(\Delta t=۱s)$ مکان منفی و از $t>۳$ مکان مثبت است و گزینهٔ (۱) درست است.

B ۷ ۲

نکته هرگاه حرکت روی خط راست و بدون تغییر جهت صورت گیرد مسافت و بزرگی جابه‌جایی با هم برابر است.

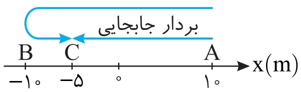
در شکل (الف) و (پ) شخص روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد و جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند. در شکل (الف) جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست و در شکل (ب) نیز جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست. در شکل (پ) جابه‌جایی در جهت منفی محور xهاست.



A ۸ ۱

خط فکری طول مسیر حرکت را با رسم شکل به‌دست بیاورید. سپس بردار جابه‌جایی را از ابتدای مسیر یعنی نقطهٔ A به انتهای مسیر یعنی نقطهٔ C رسم کنید و مقدار آن را حساب کنید و مقدارهای به‌دست آمده را بر هم تقسیم کنید.

۱) مسیر حرکت جسم به صورت روبه‌رو است، بردار جابه‌جایی برابر با برداری است که مکان اولیه را به مکان نهایی وصل می‌کند. $|\vec{d}|=x_C-x_A \Rightarrow |\vec{d}|=|-5-10|=15m$



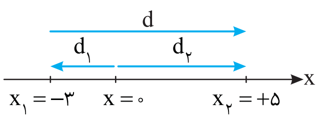
۲) مسافت طی شده برابر طول مسیر حرکت است یعنی متحرک از $A=10m$ به $B=-10m$ رفته و سپس از $B=-10m$ به $C=-5m$ می‌رود بنابراین مسافت طی شده برابر است با: $\ell=|d_{AB}|+|d_{BC}|=25m$

۳) نسبت خواسته شده برابر است با: $\frac{\ell}{d}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$

A ۹ ۲

نکته هرگاه متحرک از مبدأ مکان عبور کند، بردار مکان تغییر جهت و تغییر علامت می‌دهد.

شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم، به شکل دقت کنید. ابتدا بردار مکان منفی است و سپس مثبت می‌شود و گزارهٔ (الف) نادرست است.

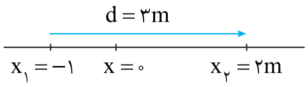


بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ در جهت مثبت و بردار مکان ابتدا منفی $(d_1<0)$ و سپس مثبت $(d_2>0)$ است و بردار جابه‌جایی و بردار مکان در طول مسیر همواره هم‌جهت نیستند و گزارهٔ (ب) نادرست است. مسافت طی‌شده و جابه‌جایی مطابق شکل هم‌اندازه هستند و گزارهٔ (پ) درست است.

A ۱۰ ۳

نکته مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است $(\ell \ge |\vec{d}|)$.

متحرک از مکان $x_1=-1m$ به مکان $x_2=2m$ رفته است. بنابراین قطعاً جابه‌جایی آن مطابق شکل $3m$ است. اما مسافت طی شده برابر و یا بزرگ‌تر از $3m$ است $(\ell \ge 3m)$ و تنها گزینهٔ بزرگ‌تر از $3m$ گزینهٔ (۳) است.



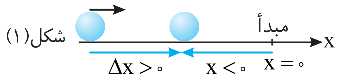
B ۱۱ ۴

یادآوری تغییر جهت بردار مکان هنگام عبور متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ اتفاق می‌افتد.

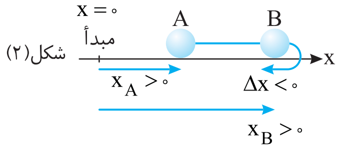
یادآوری تغییر جهت حرکت متحرک یعنی متحرک به یک نقطه برود و از آن برگردد.

برای بررسی گزینه‌های این تست به شکل‌های زیر دقت کنید.

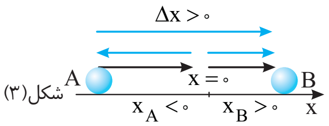
با توجه به شکل (۱) متحرک در جهت مثبت محور جابه‌جا شده اما بردار مکان آن منفی است و گزینهٔ (۱) درست است.



ممکن است مطابق شکل (۲) متحرک در مکان مثبت در جهت مثبت جابه‌جا شده سپس تغییر جهت داده باشد و در جهت منفی جابه‌جا شود اما از مبدأ نگذرد و بردار مکان با آن‌که تغییر می‌کند اما تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



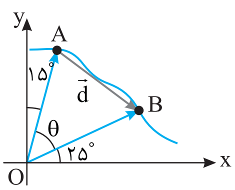
اگر متحرک مطابق شکل (۳) در یک جهت از مبدأ بگذرد بردار مکان تغییر جهت می‌دهد اما جهت حرکت تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۳) درست است. در شکل (۲) در نقطهٔ B متحرک تغییر جهت داده است اما بردار مکان هم‌چنان مثبت است و تغییر جهت نداده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست و پاسخ تست است. (نادرستی آن نیز با توجه به شکل دوم کاملاً مشخص است.)



A ۱۲ ۱

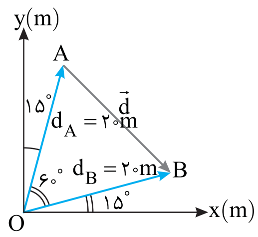
خط فکری بردارهای مکان متحرک را در نقاط A و B از مبدأ مکان رسم کنید. سپس به کمک هندسه زاویهٔ θ را حساب کنید.

زاویهٔ اولیهٔ بردار مکان با محور xها برابر $\theta_1=90-15=75^\circ$ و زاویهٔ نهایی آن $\theta_2=25^\circ$ است یعنی بردار مکان 50° ساعتگرد چرخیده است.



A ۱۳ ۱

بردار جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B را رسم کنید، مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است زیرا طول بردارهای مکان d_A و d_B یکی است مثلث متساوی‌الساقین است و چون زاویهٔ رأس آن 60° است، پس مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ بردار جابه‌جایی $d=20m$ است.

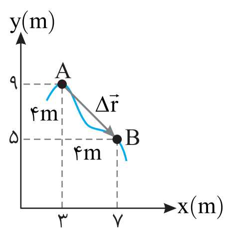


A ۱۴ ۲

یادداشت ریاضی فاصلهٔ دو نقطه در صفحهٔ xoy با مختصات $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

از نقطهٔ A به نقطهٔ B برداری رسم کرده سپس به کمک قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ بردار جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta r=\sqrt{(7-3)^2+(5-9)^2}=4\sqrt{2}m$$



B ۱۵ ۲

خط فکری باید به سراغ ریاضی بروید و فاصله بین دو نقطهٔ A و B را در ریاضی از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ به‌دست می‌آوریم، بنابراین بردار جابه‌جایی راحت به‌دست می‌آید. اما یادمان باشد که مسافت طی شده (l) همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی است. در نتیجه مسئله به راحتی قابل حل است.

۱ بردار جابه‌جایی خواهد شد:

$$\vec{d}=\vec{d}_2-\vec{d}_1\Rightarrow\vec{d}=(1-4)\vec{i}+(-1-3)\vec{j}\Rightarrow\vec{d}=-3\vec{i}-4\vec{j}$$

۲ بردار جابه‌جایی بین دو نقطهٔ $\vec{d}_1=4\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{d}_2=\vec{i}-\vec{j}$ خواهد شد:

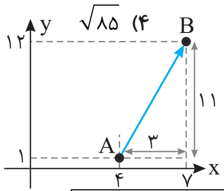
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2}$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{9+16}=5m$$

۳ مسافت طی شده باید بزرگ‌تر یا مساوی $5m$ بیشتر باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ مسئله است.

بازی با سوال **متحرکی در صفحهٔ مختصات از نقطهٔ $A(4m\,,1m)$ به نقطهٔ $B(7m\,,12m)$ می‌رود. جابه‌جایی متحرک چند متر است؟**

۱) $\sqrt{130}$ ۲) $\sqrt{65}$ ۳) $\sqrt{170}$ ۴) $\sqrt{85}$



پاسخ **از A تا B بردار جابه‌جایی را رسم می‌کنیم. اندازهٔ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B همان اندازهٔ جابه‌جایی است. به کمک ریاضی مسئله قابل حل است.**

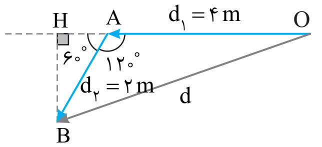
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(7-4)^2+(12-1)^2}$$

$$=\sqrt{3^2+11^2}\Rightarrow d=\sqrt{9+121}=\sqrt{130}m$$

گزینهٔ ۱

B ۱۶ ۴

خط فکری برای حل این نوع مسائل باید ابتدا شکل ساده‌ای از موضوع مسئله مطابق داده‌های مسئله رسم کنید. سپس اعداد مسئله را روی شکل قرار دهید. برای به‌دست آوردن مسافت کافی است، تمام اعداد مسیر از ابتدا تا انتهای مسیر را با هم جمع کنیم. اما برای به‌دست آوردن بردار جابه‌جایی نیاز به محاسبات مثلثاتی و ریاضی خواهیم داشت.



۱ ابتدا یک شکل ساده از مسئله رسم می‌کنیم. جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای آن وصل می‌کند. مطابق شکل خط عمودی از B بر خط OA رسم می‌کنیم. در مثلث AHB ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30° نصف وتر است از این رو $AH=\frac{2}{2}=1m$ و ضلع BH خواهد شد:

$$\cos 30^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{2}\Rightarrow BH=\sqrt{3}m$$

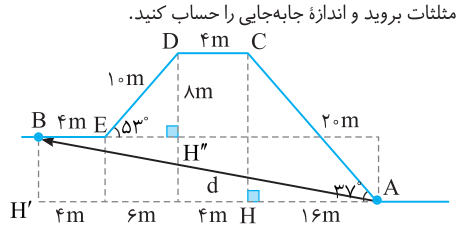
اکنون در مثلث OHB، طول وتر (d) را به دست می‌آوریم.

$$d^2=BH^2+OH^2=(\sqrt{3})^2+(4+1)^2\Rightarrow d^2=3+25=28\Rightarrow d=2\sqrt{7}m$$

۲ مسافت طی‌شده برابر مجموع طول مسیر $4m$ و طول مسیر $2m$ یعنی $6m$ است.

C ۱۷ ۴

خط فکری برای به‌دست آوردن مسافت کافی است اعداد روی شکل از A تا B با هم جمع کنید اما برای جابه‌جایی باید برداری از A تا B رسم کنید سپس به سراغ هندسه و مثلثات بروید و اندازهٔ جابه‌جایی را حساب کنید.



۱ مسافت طی شده را حساب می‌کنیم. $\ell=20+4+10+4\Rightarrow\ell=38m$

۲ فاصلهٔ CH و AH خواهد شد:

$$\triangle AHC:\cos 37^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow 0/8=\frac{AH}{20}\Rightarrow AH=16m$$

$$\sin 37^\circ=\frac{CH}{AC}\Rightarrow 0/6=\frac{CH}{20}\Rightarrow CH=12m$$

۳ DH'' و EH'' را به‌دست می‌آوریم:

$$\triangle DEH'':\cos 53^\circ=\frac{EH''}{DE}\Rightarrow 0/6=\frac{EH''}{10}\Rightarrow EH''=6m$$

$$\sin 53^\circ=\frac{DH''}{DE}\Rightarrow 0/8=\frac{DH''}{10}\Rightarrow DH''=8m$$

۴ جابه‌جایی افقی متحرک برابر است با: $AH'=16+4+6+4\Rightarrow AH'=30m$

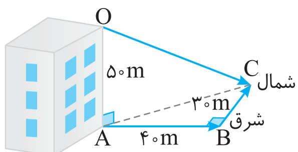
۵ جابه‌جایی قائم متحرک را حساب می‌کنیم: $BH'=CH-DH''=12-8=4m$

۶ اکنون اندازهٔ بردار جابه‌جایی را می‌توان به‌دست آورد.

$$AB=\sqrt{BH'^2+AH'^2}=\sqrt{4^2+30^2}=\sqrt{916}\simeq 30/3m$$

C ۱۸ ۲

خط فکری با یک مسئلهٔ سه‌بعدی سر و کار داریم. شما ابتدا باید جابه‌جایی متحرک روی سطح زمین وقتی ابتدا $40m$ به سمت شرق و سپس $30m$ به سوی شمال می‌رود را حساب کنید سپس به سراغ جابه‌جایی کل بروید.



۱ شکل مسیر حرکت را رسم می‌کنیم، پرنده از نقطهٔ O به نقطهٔ A روی سطح زمین آمده سپس $40m$ از A تا B به سمت شرق سپس $30m$ به سوی شمال رفته است.

۲ جابه‌جایی روی زمین را حساب می‌کنیم.

$$AC^2=AB^2+BC^2=40^2+30^2\Rightarrow AC=50m$$

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC، اندازهٔ وتر OC را حساب می‌کنیم که همان اندازهٔ جابه‌جایی است.

$$OC^2=OA^2+AC^2\Rightarrow OC^2=50^2+50^2\Rightarrow OC=50\sqrt{2}m$$

میانبر هرگاه امتداد سه مسیر بر هم عمود باشد مانند محورهای x، y و z جابه‌جایی کل خواهد شد:

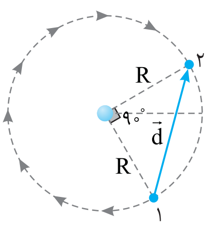
$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بازی با سوال **مسافت طی شده توسط پرنده چندمتر است؟**

پاسخ **کافی است اعداد $50m$، $40m$ و $30m$ را با هم جمع کنیم**

$$\ell=50+40+30=120m$$

A ۱۹ ۲



دقت کنید که در صورت مسئله بیان شده که ماه در جهت ساعتگرد از مکان (۱) به مکان (۲) می‌رود بنابراین مسیر حرکت مطابق شکل روبه‌روست و ماه، مسافتی که طی کرده است $\frac{3}{4}$ محیط دایرهٔ مسیر حرکت است. $\ell=\frac{3}{4}(2\pi R)\Rightarrow\ell=\frac{3}{2}\pi R$

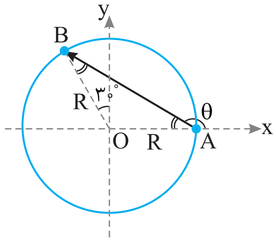
بردار جابه‌جایی از مکان (۱) به مکان (۲) رسم می‌شود و با توجه به شکل و اندازهٔ آن بنا به رابطهٔ فیثاغورس جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. $d=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R$

در این صورت:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{\frac{3}{2}\pi R}{\sqrt{2}R}=\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$$

B ۲۰ ۲

یادآوری بردار جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود.



بردار جابه‌جایی را از A تا B رسم می‌کنیم. مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن مطابق شکل $\hat{O}=۹۰^\circ+۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$ است، بنابراین زاویهٔ دو ساق آن با قاعده (جابه‌جایی) ۳۰° است. یعنی زاویهٔ بین بردار جابه‌جایی و جهت مثبت محور xها خواهد شد:

$$\theta=۱۸۰^\circ-۳۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

بازی با سؤال **در این سؤال اگر شعاع حرکت ۱۵cm باشد، مسافت طی شده توسط متحرک چند سانتی‌متر است؟ $(\pi=۳/۱۴)$**

۱) ۳۱/۴ ۲) ۱۵/۷ ۳) ۱/۵۷ ۴) ۳/۱۴

پاسخ **متحرک از A تا B کمان ۱۲۰° یعنی $\frac{۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳}$ محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین مسافت خواهد شد:**

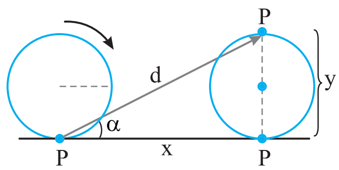
$$\text{مسافت}\ \ell=\frac{۱}{۳}(۲\pi R)\Rightarrow \ell=\frac{۱}{۳}\times(۲\times ۳/۱۴\times ۱۵)\Rightarrow \ell=۳۱/۴\text{cm}$$

گزینهٔ ۱

B ۲۱ ۲

خط فکری به این فکر کنید که اگر چرخ، نیم‌دور بچرخد نقطهٔ P در چه وضعیتی قرار می‌گیرد تا بتوانید جابه‌جایی افقی و قائم نقطهٔ P را مشخص کرده و بزرگی جابه‌جایی را به‌دست بیاورید.

با چرخش نیم دور مطابق شکل، نقطهٔ P از سطح زمین به بالاترین نقطه می‌رود در این حالت نقطهٔ P در امتداد قائم به اندازهٔ قطر لاستیک بالا می‌رود $(y=۶۰\ \text{cm})$ و روی سطح افقی به اندازهٔ نصف محیط جابه‌جا می‌شود $x=\frac{۱}{۲}(۲\pi R)$.



$$x=\frac{۱}{۲}\pi\times ۶۰\Rightarrow x=۳۰\pi\ \text{cm}\Rightarrow x=۳۰\times ۳=۹۰\ \text{cm}$$

اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۹۰^۲+۶۰^۲}\Rightarrow d=۳۰\sqrt{۳^۲+۲^۲}\Rightarrow d=۳۰\sqrt{۱۳}\text{cm}$$

بازی با سؤال **در این حرکت بردار جابه‌جایی با سطح افقی زاویهٔ α می‌سازد. کدام گزینه درست است؟**

۱) $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ ۲) $\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$ ۳) $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\tan\alpha=\sqrt{۳}$

پاسخ **با توجه به شکل خواهیم داشت:** $\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{۶۰}{۹۰}=\frac{۲}{۳}$

گزینهٔ ۱

A ۲۲ ۳

سرعت متوسط بنابه تعریف برابر نسبت بردار جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی است $(\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{t})$، بنابراین سرعت متوسط کمیت برداری است و همواره بردار سرعت متوسط هم‌جهت بردار جابه‌جایی است. تندی متوسط بنابه تعریف برابر نسبت مسافت به زمان طی مسیر است $s_{av}=\frac{\ell}{t}$. تندی متوسط کمیت نرده‌ای و همواره مثبت بیان می‌شود. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۳ ۱

سرعت متوسط برابر با $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ بنابراین:

متحرک اول:

$$\begin{cases}x_۱=-۲\\ x_۲=۶/۴\end{cases}\Rightarrow \Delta x=x_۲-x_۱=۸/۴\text{m}\ ,\ v_{av}=\frac{۸/۴}{۴}=۲/۱\,\text{m/s}$$

متحرک دوم: با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$-۲/۸=\frac{\Delta x}{۲}\Rightarrow \Delta x=-۵/۶\text{m}\Rightarrow x_۲-x_۱=-۵/۶\Rightarrow -۲/۵-x_۱=-۵/۶$$

$$\Rightarrow \vec{x}_۱=۳/۱\,\vec{i}$$

متحرک سوم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۳/۳=\frac{۸/۶-۲}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=۲\text{s}$$

	مکان آغازین	مکان پایانی	زمان	سرعت متوسط
متحرک (۱)	$-۲\vec{i}$	$۶/۴\vec{i}$	۴s	A
متحرک (۲)	B	$-۲/۵\vec{i}$	۲s	$-۲/۸\vec{i}$
متحرک (۳)	$۲\vec{i}$	$۸/۶\vec{i}$	C	$۳/۳\vec{i}$

A ۲۴ ۳

یادآوری هرگاه مختصات نقطهٔ ابتدایی و انتهای مسیر حرکت را داشته باشیم می‌توانیم جابه‌جایی متحرک را حساب کنیم و اما نمی‌توانیم در مورد مسافت اظهارنظر کنیم. مگر آنکه مسیر حرکت از ابتدا تا انتهای مسیر مشخص باشد.

۱ متحرک روی محور xها از مکان $+۴\text{m}$ به مکان -۶m رفته است یعنی جابه‌جایی آن برابر است با: $d=-۶-۴=-۱۰\text{m}$

۲ سرعت متوسط متحرک برابر خواهد شد با:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۱۰}{۶-۲}\Rightarrow v_{av}=-۲/۵\text{m/s}$$

۳ مسیر حرکت مشخص نیست یعنی معلوم نیست که متحرک مستقیم و بدون تغییر جهت از مکان $+۴\text{m}$ به مکان -۶m رفته است یا نه؟ بنابراین در مورد تندی متوسط نمی‌توان اظهارنظر کرد.

B ۲۵ ۳

خط فکری در بررسی سرعت متوسط، مهم نیست که متحرک چه مسیری را طی کرده است تنها شما باید ببینید متحرک از چه نقطه‌ای به چه نقطه‌ای رفته و فاصلهٔ دو نقطه را حساب کنید و جابه‌جایی را به‌دست آورده تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید.

متحرک در مبدأ زمان یعنی $t=۰$ در مکان -۴۰m و در لحظهٔ آخر یعنی $t_۲=۱۰\text{s}$ در مکان $+۲۰\text{m}$ بوده یعنی $d=۲۰-(-۴۰)=۶۰\text{m}$ در جهت مثبت محور xها جابه‌جا شده است، بنابراین سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{۶۰}{۱۰-۰}\Rightarrow v_{av}=۶\text{m/s}$

دقت کردید لحظهٔ $t=۶\text{s}$ و مکان $x=۱۰۰\text{m}$ در حل این تست تأثیری ندارد.

بازی با سؤال **متحرکی که روی محور x در حرکت است، در لحظهٔ $t_۱=۲/۴\text{s}$ از مکان $x_۱=-۴\text{m}$ و در لحظهٔ $t_۲=۴/۴\text{s}$ از مکان $x_۲=۲\text{m}$ می‌گذرد و سپس در لحظهٔ $t_۳$ به مکان $x_۳=۶\text{m}$ می‌رسد. اگر در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ سرعت متوسط ۲m/s باشد، سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ **با توجه به تعریف سرعت متوسط، لحظهٔ $t_۳$ را حساب می‌کنیم.**

$$t_۲\to t_۳: v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{۶-۲}{t_۳-۴/۴}\Rightarrow ۲=\frac{۴}{t_۳-۴/۴}\Rightarrow t_۳-۴/۴=۲$$

$$\Rightarrow t_۳=۶/۴\text{s}$$

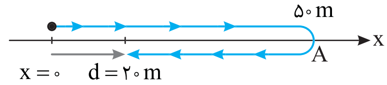
اکنون می‌توانیم سرعت متوسط از $t_۱=۲/۴\text{s}$ تا $t_۳=۶/۴\text{s}$ را به‌دست بیاوریم:

$$t_۱\to t_۳: v_{av}=\frac{۶-(-۴)}{۶/۴-۲/۴}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵\text{m/s}$$

گزینهٔ ۱

A | ۲۶ | ۱

در به‌دست آوردن سرعت متوسط، مسیر حرکت مهم نیست و تنها محل نقطهٔ ابتدایی و محل نقطهٔ انتهایی مسیر مهم است. در این مسئله ذره از مکان $x=۰$ شروع کرده و در نهایت به مکان $+۲۰m$ رسیده است بنابراین جابه‌جایی متحرک $d=+۲۰m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:



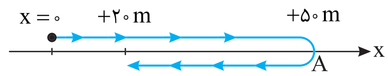
$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۲۰}{۲۰}\Rightarrow v_{av}=۱\,m/s$$

بازی با سؤال ذره‌ای در امتداد محور xها از مبدأ شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۲۰ ثانیه ابتدا تا نقطهٔ A به طول $+۵۰$ می‌رود و بعد به نقطهٔ $+۲۰$ برمی‌گردد. تندی متوسط ذره در این مدت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۳/۵

پاسخ مسافت طی‌شده برابر است با: $\ell=۵۰+۳۰=۸۰m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۸۰}{۲۰}=۴m/s$



گزینهٔ ۲

A | ۲۷ | ۲

خط فکری چرا در هر گزینه دو مکان برای لحظهٔ $t=۴s$ بیان شده است؟

چون‌که اندازهٔ سرعت متوسط داده شده بنابراین شما باید در فرمول سرعت متوسط یک بار عدد $+۳/۵m/s$ و بار دیگر عدد $-۳/۵m/s$ قرار دهید. به همین دلیل دو جواب به‌دست می‌آوریم.

رابطهٔ سرعت متوسط را نوشته و داده‌های مسئله را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{x_۱=-۱/۶m}\begin{cases}v_{av}=\frac{x_۲-(-۱/۶)}{۴}\Rightarrow\frac{x_۲+۱/۶}{۴}=۳/۵\Rightarrow x_۲=۱۲/۴m\\ v_{av}=\frac{x_۲-(-۱/۶)}{۴}\Rightarrow\frac{x_۲+۱/۶}{۴}=-۳/۵\Rightarrow x_۲=-۱۵/۶m\end{cases}$$

B | ۲۸ | ۳

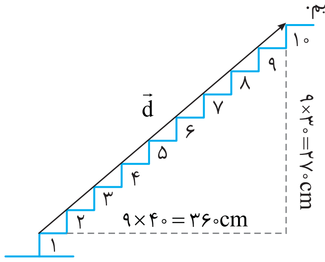
خط فکری اشتباه نکنید فاصلهٔ لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم، ۱۰ پله نیست، باید شکل رسم کنید و تعداد پله‌ها را بشمرید. سپس از لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم بردار جابه‌جایی را رسم کرده و اندازهٔ آن را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست بیاورید.

۱ شمردید؟ تعداد پله‌ها، ۹ پله است.

۲ پهنای هر پله $۴۰cm$ است و جابه‌جایی افقی مورچه $۹\times۴۰=۳۶۰cm$ می‌شود.

۳ بلندی هر پله $۳۰cm$ است و جابه‌جایی قائم مورچه $۹\times۳۰=۲۷۰cm$ خواهد شد.

۴ جابه‌جایی مورچه را حساب می‌کنیم.



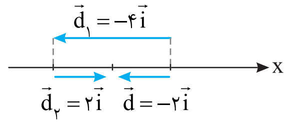
$$|\vec{d}|=\sqrt{(۲۷۰)^۲+(۳۶۰)^۲}=\sqrt{۹^۲\times(۳۰^۲+۴۰^۲)}\Rightarrow|\vec{d}|=۴۵۰cm=۴/۵m$$

۵ سرعت متوسط آن را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۴/۵}{۴۵}=۰/۱\,m/s$$

B | ۲۹ | ۱

۱ به صورت مسئله دقت کنید. متحرک ابتدا جابه‌جایی $-۴\vec{i}$ را انجام داده یعنی در مدت ۲s در خلاف جهت محور xها، ۴m جابه‌جا شده و در دو ثانیهٔ دوم جابه‌جایی $۲\vec{i}$ را انجام داده است یعنی از ۴m که در خلاف جهت محور رفته بود، ۲m را برگشته و در کل جابه‌جایی آن در مدت ۴s، $-۲m$ است. بنابراین بردار سرعت متوسط آن در این چهار ثانیه خواهد شد:



$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{v}_{av}=\frac{-۲\vec{i}}{۴}=-\frac{\vec{i}}{۲}$$

۲ مسافت طی شده در مدت ۴s برابر $l=۴+۲=۶m$ و تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۶}{۴}=۱/۵m/s$$

بازی با سؤال متحرکی روی محور xها در حال حرکت بوده و در بازهٔ زمانی $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۴s$ بردار جابه‌جایی آن $۵\vec{i}$ و در مدت $t_۲=۴s$ تا $t_۳=۵s$ بردار جابه‌جایی آن $-۳\vec{i}$ خواهد بود. سرعت متوسط در بازهٔ $t=۲s$ تا $t=۵s$ چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $-\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

پاسخ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۲s تا ۴s، ۵ متر و در جهت مثبت محور xها بوده سپس در مدت ۱s (بازهٔ $t_۲=۴s$ تا $t_۳=۵s$) از این ۵ متر، ۳m را برمی‌گردد. بنابراین جابه‌جایی آن در کل برابر $۵-۳=۲m$ و در جهت مثبت محور xها بوده و سرعت متوسط متحرک خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۲}{۵-۲}=\frac{۲}{۳}m/s$

گزینهٔ ۳

B | ۳۰ | ۲

خط فکری فاصلهٔ مستقیم تهران تا اصفهان مشخص نیست بنابراین سرعت متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید تنها به سراغ تندی متوسط یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) بروید.

۱ مدت زمان حرکت از تهران تا قم $t_۱=۱/۵h$ و مدت زمان حرکت از قم تا اصفهان ۸۰٪ بیشتر از ۱/۵h است. بنابراین زمان حرکت قم تا اصفهان خواهد شد:

$$t_۲=t_۱+\frac{۸۰}{۱۰۰}t_۱\Rightarrow t_۲=۱/۵+\frac{۴}{۵}(۱/۵)\Rightarrow t_۲=۲/۷h$$

۲ کل زمان حرکت از تهران تا اصفهان را به‌دست می‌آوریم.

$$t_{\text{کل}}=t_۱+t_۲=۱/۵+۲/۷=۴/۲h$$

۳ مسافت طی شده خودرو را حساب می‌کنیم. $\ell=۱۲۵+۲۷۴\Rightarrow\ell=۳۹۹km$

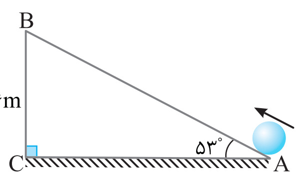
۴ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۳۹۹}{۴/۲}\Rightarrow s_{av}=۹۵km/h$$

A | ۳۱ | ۲

نکته هرگاه در یک مسیر متحرک به مکان اولیه‌اش بازگردد، جابه‌جایی متحرک صفر و در نتیجه سرعت متوسط متحرک صفر می‌شود.

۱ مسیر حرکت A تا B را حساب می‌کنیم.



$$\sin ۵۳^\circ=\frac{BC}{AB}\Rightarrow ۰/۸=\frac{۴}{AB}\Rightarrow AB=۵m$$

۲ مسافت طی شده در کل مسیر رفت و برگشت خواهد شد: $\ell=۵+۵=۱۰m$

۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=۳+۵}s_{av}=\frac{۱۰}{۸}\Rightarrow s_{av}=۱/۲۵m/s$$

A ۳۲ ۳

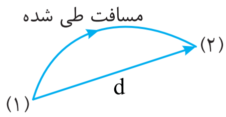
یادآوری تندی متوسط برابر مسافت پیموده شده تقسیم بر زمانِ طی این مسافت و کمیتی نرده‌ای است. (مسافت طی‌شده در یکای زمان)

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

یادآوری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر یکای زمان و کمیتی برداری است.

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

در حرکت بر خط راست بدون تغییر جهت مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابر بوده و تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. در مسیرهای خمیده مثل شکل روبه‌رو همواره مسافت طی‌شده از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر است. از این‌رو: $s_{av}>|\vec{v}_{av}|$



بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) در حالت‌های خاصی درست هستند و عبارت قطعاً نادرست در مورد آن‌ها صدق نمی‌کند. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک همواره کوچک‌تر یا برابر مسافت طی شده است $(d\le\ell)$ بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا برابر تندی متوسط بوده و هرگز اندازهٔ سرعت متوسط نمی‌تواند از تندی متوسط بیشتر شود و قطعاً گزینهٔ (۳) نادرست است.

در یک مسیر بسته مثلاً در یک مسیر رفت و برگشت به محل شروع حرکت، جابه‌جایی صفر و سرعت متوسط صفر است. هرچند تندی متوسط صفر نیست و گزینهٔ (۴) درست است.

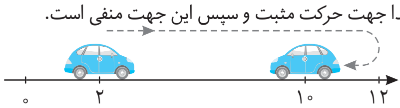
A ۳۳ ۴

برای بررسی گزینه‌های این تست از یک مثال عددی استفاده می‌کنیم. فرض کنید متحرک در مدت 2s از مکان $2\vec{i}$ به مکان $10\vec{i}$ رفته حال حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

۱ در این حالت مانند گزینهٔ (۱) جهت حرکت متحرک در طول مسیر مثبت بوده است.

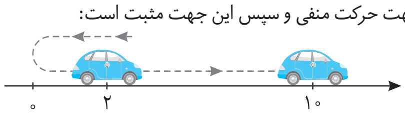
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$$

۲ فرض کنید در مدت 2s از مکان $2\vec{i}$ ابتدا به مکان $12\vec{i}$ رفته و سپس از $12\vec{i}$ به $10\vec{i}$ بازگشته بنابراین ابتدا جهت حرکت مثبت و سپس این جهت منفی است.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$$

۳ فرض کنید در مدت 2s از مکان $2\vec{i}$ ابتدا به مبدأ مکان رفته و سپس از مبدأ به $10\vec{i}$ برود، بنابراین ابتدا جهت حرکت منفی و سپس این جهت مثبت است:



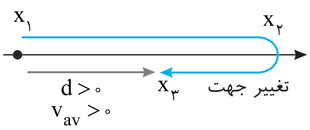
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$$

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند حرکت ما را شامل شود و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۳۴ ۳

نکته جهت بردار سرعت چگونگی مسیر حرکت را مشخص نمی‌کند.

اگر جهت حرکت مثبت باشد جهت جابه‌جایی و سرعت متوسط نیز مثبت خواهد بود اما عکس این جمله نادرست است یعنی اگر سرعت متوسط متحرک مثبت باشد ممکن است متحرک ابتدا در جهت منفی و سپس در جهت مثبت حرکت کرده باشد و یا ابتدا در جهت مثبت محور جابه‌جا شده و سپس مقدار کمتری در جهت منفی حرکت کرده است، به طوری که جابه‌جایی کل مثبت بوده و سرعت متوسط مثبت باشد اما متحرک همواره در جهت مثبت حرکت نکرده باشد. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است. در شکل زیر مشخص است که سرعت متوسط مثبت اما متحرک مدتی در خلاف جهت محور حرکت کرده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

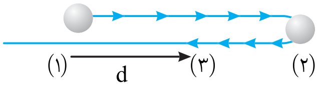


با توجه به رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ جهت سرعت و جابه‌جایی یکسان است بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

B ۳۵ ۳

۱ مسافت طی شده دو برابر اندازهٔ جابه‌جایی است. $\ell=2d$

۲ سرعت متوسط در این حرکت قطعاً از تندی متوسط کوچک‌تر است از این رو بنابه فرض مسئله خواهیم داشت:



$$s_{av}-v_{av}=2\quad(II)$$

۳ در رابطهٔ (II) به جای v_{av} و s_{av} مقدار آن‌ها را براساس فرمول آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{t},\ v_{av}=\frac{d}{t}\xrightarrow{(II)}\frac{\ell}{t}-\frac{d}{t}=2\xrightarrow[t=4s]{L=2d}$$

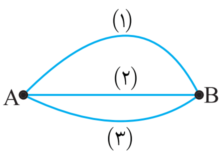
$$\frac{2d}{4}-\frac{d}{4}=2\Rightarrow\frac{d}{4}=2\Rightarrow d=8m,\ \ell=16m$$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{16}{4}=4m/s$$

B ۳۶ ۳

خط فکری تندی هر سه متحرک یکسان است، بنابراین هر متحرکی که مسیرش طولانی‌تر است در زمان بیشتری از A به B می‌رود. اما سرعت متوسط به مسیر حرکت بستگی ندارد و برداری است که ابتدای مسیر (نقطهٔ A) را به انتهای مسیر (نقطهٔ B) وصل می‌کند. با توجه به این مطالب و رابطهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}$ می‌توانید دربارهٔ پاسخ درست فکر کنید.

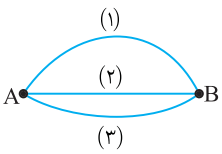


۱ طول مسیر (۱) از هر سه مسیر طولانی‌تر و طول مسیر (۲) از هر سه مسیر کوتاه‌تر است. تندی هر سه متحرک یکسان است بنابراین: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t_1>\Delta t_3>\Delta t_2$

۲ جابه‌جایی هر سه برابر است از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t_1>\Delta t_3>\Delta t_2]{d_1=d_2=d_3}v_{av_1}<v_{av_3}<v_{av_2}$$

بازی با سؤال **مطابق شکل زیر، سه متحرک با بزرگی سرعت متوسط یکسان سه مسیر نشان داده شده را طی می‌کند و تندی متوسط در مسیرهای (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب s_{av_1}، s_{av_2} و s_{av_3} خواهد بود. کدام گزینه درست است؟**



۱) $s_{av_1}=s_{av_2}=s_{av_3}$

۲) $s_{av_1}<s_{av_2}<s_{av_3}$

۳) $s_{av_1}>s_{av_3}>s_{av_2}$

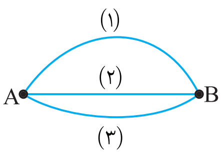
۴) $s_{av_1}>s_{av_2}>s_{av_3}$

پاسخ یادآوری **سرعت متوسط $v_{av}=d/t$ و تندی متوسط $s_{av}=\ell/t$ است که d، جابه‌جایی و L مسافت طی شده است.**

۱ **با توجه فرض مسئله سرعت متوسط هر سه متحرک برابر است از طرفی جابه‌جایی هر سه متحرک از A تا B یکسان و برابر d است.**

$$v_{av_1}=v_{av_2}=v_{av_3}\Rightarrow\frac{d}{\Delta t_1}=\frac{d}{\Delta t_2}=\frac{d}{\Delta t_3}\Rightarrow\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t_3$$

۲ **اکنون در مورد تندی متوسط می‌توان اظهارنظر کرد. مسافت طی شده توسط متحرک (۱) بیشترین و توسط متحرک (۲) کمترین است. از این‌رو می‌توان نوشت:**



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=\text{ثابت}]{\ell_1>\ell_3>\ell_2}s_{av_1}>s_{av_3}>s_{av_2}$$

گزینهٔ ۳

B ۳۷ | ۱

۱ جابه‌جایی خودرو در یک مسیر رفت و برگشت صفر است، بنابراین سرعت متوسط آن نیز صفر است. $(v_{av}=0)$

۲ تندی متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم. اگر طول مسیر رفت و طول مسیر برگشت ℓ باشد طول کل مسیر رفت و برگشت 2ℓ خواهد بود.

۳ زمان حرکت در مسیر رفت خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_1}\Rightarrow 90=\frac{\ell}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{\ell}{90}$

۴ زمان حرکت در مسیر برگشت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_2}\Rightarrow 60=\frac{\ell}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{\ell}{60}$$

۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{2\ell}{\frac{\ell}{90}+\frac{\ell}{60}}\Rightarrow s_{av}=\frac{2\ell}{\frac{2+3}{180}\ell}\Rightarrow s_{av}=\frac{2\times 180}{5}=72\,km/h$$

میانبر در یک مسیر وقتی دو نیمهٔ مسیر توسط خودرو با دو تندی متفاوت s_{av_1} و s_{av_2} طی می‌شود تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{2s_{av_1}s_{av_2}}{s_{av_1}+s_{av_2}}$$

بازی با سؤال **متحرکی نصف مسیر مستقیمی را با تندی $40\,m/s$ و بقیهٔ آن مسیر را در همان سو با تندی v طی کرده است. اگر سرعت متوسط در کل مسیر $48\,m/s$ باشد، اندازهٔ v چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۵۶ ۲) ۹۰ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

پاسخ **با توجه به تعریف سرعت متوسط می‌توان نوشت:**

$$v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{\frac{x}{2s_1}+\frac{x}{2s_2}}\Rightarrow v_{av}=\frac{2s_1s_2}{s_1+s_2}\Rightarrow 48=\frac{2\times 40\times v}{40+v}$$

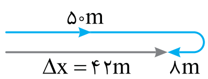
$$\Rightarrow 240+6v=10v\Rightarrow v=60\,m/s$$

گزینه ۴

B ۳۸ | ۳

خط فکری باید مدت زمان رفت و مدت زمان برگشت را حساب کنیم و ببینیم که در لحظهٔ $t=14s$، متحرک در چه مکانی است و آیا در مسیر رفت است یا مسیر برگشت؟ در این صورت می‌توانیم سرعت متوسط را به‌دست بیاوریم.

۱ زمان رفت شناگر برابر خواهد شد با:



$$t=\frac{\Delta x}{v_{av}}\Rightarrow t_1=\frac{50}{5}\Rightarrow t_1=10s$$

۲ زمان برگشت شناگر برابر خواهد شد با: $t_2=\frac{50}{2}=25s$

بنابراین در لحظهٔ $t=14s$ شناگر در مسیر برگشت است و با سرعت متوسط $2\,m/s$ در مدت $4s$، مسافت ۸ متر برگشته است، بنابراین جابه‌جایی شناگر از لحظهٔ شروع تا $t=14s$ برابر $50-8=42m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{42}{14}=\frac{6}{2}=3\,m/s$$

A ۳۹ | ۳

خط فکری دقت کنید که متحرک زمان کل حرکت خود (t) را در دو بازهٔ زمانی یکسان $(\frac{t}{2})$ طی می‌کند، بنابراین باید بررسی کنید مسافت طی شده در هریک از این بازه‌ها برحسب t چه مقدار است.

۱ مسافت طی شده در بازهٔ $\Delta t_1=\frac{t}{2}$ برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 10=\frac{\ell_1}{\frac{t}{2}}\Rightarrow \ell_1=5t$$

۲ مسافت طی شده در بازهٔ $\Delta t_2=\frac{t}{2}$ با تندی $40\,m/s$ خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 40=\frac{\ell_2}{\frac{t}{2}}\Rightarrow \ell_2=20t$$

۳ تندی متوسط در کل مدت t را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}\Rightarrow s_{av}=\frac{5t+20t}{t}=25\,m/s$$

میانبر هرگاه متحرک کل زمان حرکت را در بازه‌های زمانی یکسان با تندی‌های متفاوت $s_{av_1},s_{av_2},\dots,s_{av_n}$ طی کند آن‌گاه تندی متوسط در کل زمان حرکت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{s_{av_1}+s_{av_1}+\dots+s_{av_n}}{n}$$

A ۴۰ | ۴

۱ طول مسیر حرکت یعنی مسافت طی شده را حساب می‌کنیم ابتدا در مدت $2h$ با تندی متوسط $60\,km/h$ متحرک حرکت کرده و مسافت طی شده $\ell_1=60\times 2=120\,km$ و در مدت $30\,min$ یا $0/5h$ متوقف بوده و سپس با تندی $90\,km/h$ به مدت $2/5h$ رانندگی کرده یعنی مسافت طی شده آن $\ell_2=90\times 2/5=225\,km$ است.

۲ کل زمان حرکت متحرک $\Delta t_{کل}=2+0/5+2/5=5h$ و کل مسافت طی شده $\ell=120+225=345\,km$ است، بنابراین تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{345}{5}\Rightarrow s_{av}=69\,km/h$$

A ۴۱ | ۲

۱ جابه‌جایی در مدت t_1 و t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d_1=v_{av_1}t_1=20t_1\,,\quad d_2=v_{av_2}t_2=40t_2$$

۲ متحرک در یک جهت در حال حرکت است و جابه‌جایی کل آن برابر مجموع d_2 و d_1 است. از این رو بنا به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow 28=\frac{20t_1+40t_2}{t_1+t_2}\Rightarrow 28t_1+28t_2=20t_1+40t_2$$

$$\Rightarrow 8t_1=12t_2\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

B ۴۲ | ۳

خط فکری سرعت متوسط کل خلاف جهت محور xها یعنی $-28\,m/s$ است. شما باید جابه‌جایی در هر قسمت را حساب کنید سپس جابه‌جایی کل را به‌دست بیاورید تا بتوانید به کمک سرعت متوسط کل نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ را بیابید.

۱ در مدت t_1 جابه‌جایی متحرک با سرعت متوسط $20\,m/s$ خواهد شد:

$$d_1=v_{av_1}t_1\Rightarrow d_1=+20t_1$$

۲ در مدت t_2 جابه‌جایی متحرک در خلاف جهت محور xها بوده یعنی سرعت متوسط آن $-40\,m/s$ است و جابه‌جایی در این مدت خواهد شد:

$$d_2=v_{av_2}t_2\Rightarrow d_2=-40t_2$$

۳ اکنون رابطهٔ سرعت متوسط کل را نوشته، داده‌های به‌دست آمده را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}\Rightarrow -28=\frac{20t_1-40t_2}{t_1+t_2}\Rightarrow -14=\frac{10t_1-20t_2}{t_1+t_2}$$

$$\Rightarrow -14t_1-14t_2=10t_1-20t_2\Rightarrow -14t_2+20t_2=10t_1+14t_1$$

$$\Rightarrow 6t_2=24t_1\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

C ۴۳ ۴

خط فکری ابتدا باید بررسی کنیم که در مدت 8s جابه‌جایی متحرک چند متر است. به چه دلیل به این جابه‌جایی نیاز داریم؟ به این دلیل که جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۰ تا 3s کمتر از این مقدار است.

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت 8s با سرعت متوسط 15m/s خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow 15=\frac{d}{8}\Rightarrow d=120m$$

۲ جابه‌جایی متحرک در تمام مدت 8s در جهت مثبت محور xها بوده بنابراین در بازهٔ ۰ تا 3s قطعاً جابه‌جایی از 120m کمتر است. از این رو سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا 3s خواهد شد:

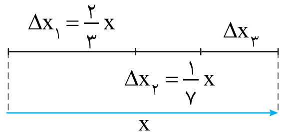
$$v_{av}<\frac{120}{3}\Rightarrow v_{av}<40m/s$$

نتیجه آنکه تمام مقدارهای زیر 40m/s می‌تواند جواب مسئله باشد و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۴۴ ۲

خط فکری کل مسیر حرکت را x فرض کنید و جابه‌جایی هر سه قسمت را برحسب x به‌دست بیاورید سپس به سراغ بازهٔ زمانی هر قسمت بروید و از فرمول سرعت متوسط بازه‌های زمانی را نیز برحسب x حساب کرده و مسئله را حل کنید.

۱ متحرک ابتدا $\Delta x_1=\frac{2x}{3}$، سپس $\Delta x_2=\frac{x}{7}$ را طی کرده بنابراین باقی مسیر خواهد شد:



$$\Delta x_3=x-\frac{2x}{3}-\frac{x}{7}\Rightarrow \Delta x_3=\frac{4x}{21}$$

۲ بازهٔ زمانی هر قسمت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow t=\frac{d}{v_{av}}$$

$$\xrightarrow{\Delta x_1=\frac{2}{3}x}\Delta t_1=\frac{\Delta x_1}{v_{av_1}}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{\frac{2}{3}x}{28}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{42}$$

$$\xrightarrow{\Delta x_2=\frac{x}{7}}\Delta t_2=\frac{\Delta x_2}{v_{av_2}}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{\frac{x}{7}}{6}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{x}{42}$$

$$\xrightarrow{\Delta x_3=\frac{4x}{21}}\Delta t_3=\frac{\Delta x_3}{v_{av_3}}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{\frac{4x}{21}}{8}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{x}{42}$$

۳ اکنون می‌توان سرعت متوسط را به‌دست آورد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}\Rightarrow v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{42}+\frac{x}{42}+\frac{x}{42}}$$

$$\Rightarrow v_{av}=14m/s$$

A ۴۵ ۳

۱ بازهٔ زمانی هر قسمت از مسیر را برحسب x و v به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta x}{v}$$

$$\xrightarrow{x_1=x,\ v_1=v}\Delta t_1=\frac{x}{v}$$

$$\xrightarrow{x_2=2x,\ v_2=2v}\Delta t_2=\frac{2x}{2v}=\frac{x}{v}$$

$$\xrightarrow{x_3=3x,\ v_3=3v}\Delta t_3=\frac{3x}{3v}=\frac{x}{v}$$

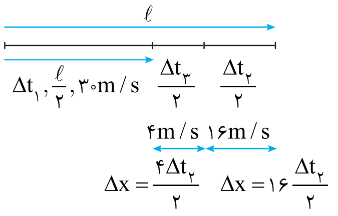
۲ جابه‌جایی کل را حساب می‌کنیم. $\Delta x_{\text{کل}}=x+2x+3x=6x$

۳ سرعت متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$v_{av_{\text{کل}}}=\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{6x}{\frac{x}{v}+\frac{x}{v}+\frac{x}{v}}\Rightarrow v_{av_{\text{کل}}}=\frac{6x}{\frac{3x}{v}}=2v$$

B ۴۶ ۱

خط فکری مسئله از دو قسمت تشکیل شده یک بار مسیر حرکت را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کرده و بار دیگر نیمهٔ دوم مسیر را به دو بازهٔ زمانی یکسان تقسیم کرده است، بنابراین شما باید تندی متوسط را در قسمت دوم مسیر (Δt_2) حساب کنید. سپس تندی در قسمت دوم و قسمت اول را برای به‌دست آوردن تندی کل مسیر به کار ببریم.



ابتدا تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب می‌کنیم:

$$s_{av_2}=\frac{\frac{\ell}{2}}{\Delta t_2}\Rightarrow s_{av_2}=\frac{4\frac{\Delta t_2}{2}+16\frac{\Delta t_2}{2}}{\Delta t_2}=\frac{4+16}{2}=10m/s$$

اکنون تندی متوسط در کل مسیر را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\ell}{\Delta t_1+\Delta t_2}\xrightarrow[\Delta t_2=\frac{\frac{\ell}{2}}{10}=\frac{\ell}{20}]{\Delta t_1=\frac{\frac{\ell}{2}}{30}=\frac{\ell}{60}}s_{av}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{60}+\frac{\ell}{20}}=\frac{60}{4}=15m/s$$

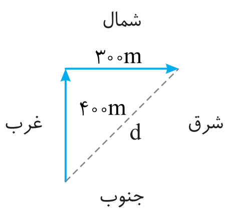
میانبر البته می‌توانستیم در قسمت دوم مسیر، مستقیماً از رابطهٔ $v_{av}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ استفاده کنیم. دقت کنید در اینجا تندی متوسط و سرعت متوسط یکی است زیرا متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کرده است.

$$v_{av}=\frac{2\times10\times30}{10+30}=15m/s$$

B ۴۷ ۱

۱ متحرک با سرعت ثابت 16m/s، 400m به سمت شمال رفته است، مدت زمان طی این مسیر را حساب می‌کنیم.

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow 16=\frac{400}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=25s$$



۲ سپس متحرک در مدت 25s با سرعت ثابت 12m/s به سمت شرق رفته و مقدار جابه‌جایی آن در این مدت برابر است با:

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow 12=\frac{\Delta x_2}{25}\Rightarrow \Delta x_2=300m$$

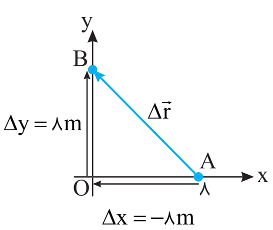
۳ جابه‌جایی کل را به‌دست می‌آوریم: $|d|=\sqrt{300^2+400^2}=500m$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{|d|}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{500}{25+25}=10m/s$$

B ۴۸ ۲

دقت کنید مسئلهٔ سرعت متوسط در امتداد محور xها یعنی از A تا O را خواسته است و شما نباید سرعت متوسط از A تا B را حساب کنید. از A تا O متحرک از مکان +8m به مکان x=0 رفته یعنی در مدت 5s جابه‌جایی آن −8m است، بنابراین سرعت متوسط در امتداد محور xها (مولفهٔ x سرعت متوسط) خواهد شد.



$$v_{av,x}=-\frac{8}{5}=-1/6m/s$$

A ۴۹ — ۱

ذره در امتداد خط راست از A به B رفته است، بنابراین ابتدا طول مسیر از A تا B را به کمک ریاضی به‌دست می‌آوریم.

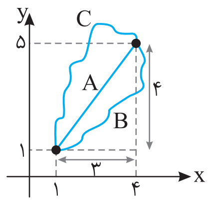
$$\ell=AB=\sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2}$$
$$=\sqrt{(-3-6)^2+(8+4)^2}=\sqrt{81+144}\Rightarrow L=15m$$

تندی متوسط متحرک خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{15}{5-3}=7/5m/s$

سؤال: آیا در این تست مانند تست اصلی می‌توانستیم تندی متوسط را به دست بیاوریم؟
پاسخ: قطعاً نه، زیرا در تست اصلی مسیر حرکت خط راست بود اما در این تست مسیر حرکت مشخص نیست.

B ۵۰ — ۴

خط فکری برای آنکه تندی متوسط جسم را حساب کنیم باید چگونگی مسیر حرکت مشخص باشد تا بتوانیم مسافت و سپس تندی را به‌دست بیاوریم در این مسئله مسیر حرکت مشخص نیست، اما ما می‌دانیم که مسافت طی شده بین دو نقطه همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی بین دو نقطه است و جابه‌جایی بین دو نقطه نیز برداری است که نقطهٔ ابتدایی را به نقطهٔ انتهایی وصل کند، بنابراین شما باید ابتدا جابه‌جایی و سپس سرعت متوسط را پیدا کنید در این صورت تندی متوسط باید از عددی که برای سرعت متوسط به‌دست می‌آورید بزرگ‌تر یا با آن مساوی باشد.



مسیر حرکت مشخص نیست اما جابه‌جایی در تمام مسیرهایی که روی شکل نشان داده‌ایم برابر است با:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$\Rightarrow d=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2}$$
$$\Rightarrow d=\sqrt{9+16}=5m$$

سرعت متوسط را حساب می‌کنیم. $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow{t=5s}v_{av}=\frac{5}{5}=1m/s$

بنابراین تندی متوسط باید بزرگ‌تر یا مساوی $1m/s$ باشد، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۵۱ — ۲

خط فکری در بررسی سرعت متوسط به مسیر حرکت کاری نداریم و تنها فاصلهٔ نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی که مشخص‌کنندهٔ اندازهٔ جابه‌جایی است مهم است، بنابراین مکان d_2 را از ذهن خود حذف کنید و در مدت $2+3=5s$ جابه‌جایی متحرک را از مکان d_1 تا d_3 حساب کنید.

یادآوری فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحهٔ xoy از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

۱ جابه‌جایی از $d_1=7\vec{i}+4\vec{j}$ تا $d_3=-5\vec{i}-\vec{j}$ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\sqrt{(-5-7)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}\Rightarrow d=13m$$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{13}{5}=2/6m/s$

بازی با سؤال اگر متحرکی مسیر بین d_1 تا d_2 و همچنین d_2 تا d_3 را روی خط راست طی کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه خواهد بود؟ $(\sqrt{41}\simeq 6/4)$

۱) ۱۳/۸ ۲) ۱۴/۰۸ ۳) ۲/۸۸ ۴) ۳۶

پاسخ برای به‌دست آوردن تندی متوسط باید مسافت طی شده در هر قسمت را به‌دست آورد.

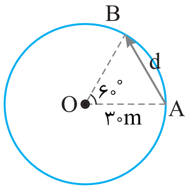
$$d_1 \text{ تا } d_2:\ell_1=\sqrt{(3-7)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}\simeq 6/4m$$
$$d_2 \text{ تا } d_3:\ell_2=\sqrt{(-5-3)^2+(-1+1)^2}=8m$$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{(\ell_1+\ell_2)}{\Delta t}=\frac{6/4+8}{2+3}=\frac{14/4}{5}=2/88m/s$

گزینهٔ ۳

A ۵۲ — ۴

۱ در شکل روبه‌رو، بردار جابه‌جایی از A تا B رسم شده است با توجه به اینکه زاویهٔ O، 60° بوده و ضلع‌های OA و OB هر دو شعاع دایره بوده و با هم برابر و مقدار آن ۳۰m است.مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و طول بردار جابه‌جایی AB نیز ۳۰m خواهد بود. بنابراین سرعت متوسط خواهد شد:



$$v_{av}=\frac{AB}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{30}{5-2}\Rightarrow v_{av}=10m/s$$

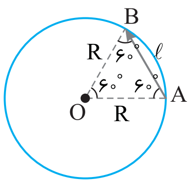
نکته هرگاه متحرک روی مسیر دایره‌ای زاویهٔ θ را طی کند مسافتی که می‌پیماید برابر $\frac{\theta}{360}$ محیط دایره است.

۲ برای تندی متوسط باید طول مسیر AB را حساب کنیم که طول این مسیر $\frac{1}{6}=\frac{60}{360}$ محیط دایره است. $\ell=\frac{1}{6}(2\pi R)\Rightarrow L=\frac{1}{6}(2\pi\times 30)\Rightarrow \ell=10\pi\ m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{10\pi}{5-2}=\frac{10\pi}{3}m/s$

A ۵۳ — ۱

ابتدا زمان حرکت از A تا B را به کمک تندی حرکت حساب می‌کنیم.



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{\ell=\frac{1}{6}(2\pi R)}4=\frac{\frac{1}{6}(2\pi R)}{\Delta t}$$
$$\Rightarrow \Delta t=\frac{\pi R}{12}$$

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع بوده بنابراین جابه‌جایی از A تا B با توجه به شکل برابر شعاع دایره $(d=R)$ است. در این صورت سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{R}{\frac{\pi R}{12}}\Rightarrow v_{av}=\frac{12}{\pi}m/s$$

A ۵۴ — ۱

نکته ثانیهٔ nام حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $n-1$ و n به‌طور مثال ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=2s$ تا $t=3s$.

خط فکری برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم شما باید مکان متحرک در $t=2s$ و $t=3s$ به‌دست بیاورید و سرعت متوسط را به کمک $v_{av}=\Delta x/\Delta t$ حساب کنید. همچنین برای سرعت متوسط در ثانیهٔ دوم باید مکان متحرک در $t=1s$ و $t=2s$ را به کمک معادلهٔ مکان - زمان حساب کرده و سرعت متوسط در این بازه را به‌دست بیاورید.

۱ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1=1s$ تا $t_2=2s$ در این صورت:

$$x=t^3-2t+1\Rightarrow\begin{cases}t_1=1s\Rightarrow x_1=1-2+1=0\\ t_2=2s\Rightarrow x_2=8-4+1=5m\end{cases}\Rightarrow v_{av}=\frac{5-0}{2-1}=5m/s$$

۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1=2s$ تا $t_2=3s$ از این‌رو:

$$\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow x_1=8-4+1=5m\\ t_2=3s\Rightarrow x_2=27-6+1=22m\end{cases}\Rightarrow v'_{av}=\frac{22-5}{3-2}=17m/s$$

۳ بنابراین خواهیم داشت: $v'_{av}-v_{av}=17-5=12m/s$

بازی با سؤال معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور x‌ها در حرکت است در SI به صورت $x=t^2-2t+1$ است. سرعت متوسط این جسم در بازهٔ زمانی $0/5s$ تا $1/5s$ چند m/s است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) صفر

پاسخ مکان جسم در لحظه‌های $t_1=0/5s$ و $t_2=1/5s$ را به‌دست می‌آوریم:

$t_1=0/5s\Rightarrow x_1=0/25-1+1\Rightarrow x_1=0/25m$

$t_2=1/5s\Rightarrow x_2=2/25-3+1\Rightarrow x_2=0/25m$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{0/25-0/25}{1/5-0/5}\Rightarrow v_{av}=0$

گزینهٔ ۴

B ۵۵ ۳

نکته هرگاه متحرک به مکان اولیهٔ خود بازگردد، یعنی جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ مشخص صفر می‌شود قطعاً سرعت متوسط در آن بازه صفر می‌شود.

با توجه به معادلهٔ $x=3t^2-15t+12$ در لحظهٔ $t_1=0$ مکان اولیه متحرک $x_0=+12m$ می‌شود و اگر در بازهٔ $t_1=0$ تا $t_2=t'$ سرعت متوسط صفر شده باشد یعنی مکان متحرک مجدداً باید $x=+12m$ شود بنابراین در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار ۱۲ را قرار می‌دهیم و t' را حساب می‌کنیم.

$$12=3t^2-15t+12\Rightarrow 3t^2-15t=0\Rightarrow 3t(t-5)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\t=5s\end{cases}$$

در نتیجه $t'=5s$ پاسخ مسئله است.

A ۵۶ ۱

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین هنگام گذر از مبدأ، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم: $x=0\Rightarrow t^2+t+1=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

معادلهٔ بالا بدون پاسخ است یعنی مکان متحرک هرگز صفر $(x=0)$ نمی‌شود و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

A ۵۷ ۲

خط فکری لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که متحرک از مکان $(x=0)$ می‌گذرد بنابراین شما باید در معادلهٔ حرکت مکان را برابر صفر قرار داده و لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان را پیدا کنید تا بتوانید سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t=0$ تا لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان به‌دست بیاورید.

۱ در لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$x=t^2-t-6\Rightarrow 0=t^2-t-6\Rightarrow(t-3)(t+2)=0\Rightarrow\begin{cases}t=3s\ ✓\\t=-2s\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{0+6}{3}=2m/s$

A ۵۸ ۲

۱ معادله حرکت زمان‌های $t=0$ و $t=3s$ را قرار می‌دهیم.

$$x=\alpha+\beta t^3\begin{cases}\xrightarrow{t_1=0}x_1=\alpha\\ \xrightarrow{t_2=3s}x_2=\alpha+27\beta\end{cases}$$

۲ با توجه به فرض مسئله $v_{av}=18m/s$ می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{\alpha+27\beta-\alpha}{3-0}=18\Rightarrow\frac{27\beta}{3}=9\beta=18\Rightarrow\beta=2$$

۳ اکنون با داشتن مقدار β و با توجه به این‌که مکان متحرک در $t=2s$ برابر $24m$ است. مقدار α را حساب می‌کنیم.

$$x=\alpha+\beta t^3\Rightarrow 24=\alpha+\beta(2)^3\xrightarrow{\beta=2}24=\alpha+16\Rightarrow\alpha=8$$

A ۵۹ ۴

خط فکری معادلهٔ مثلثاتی حرکت شما را دچار مشکل نکند روش حل همان است که بود یعنی در لحظه‌های داده شده باید مکان متحرک را به کمک معادلهٔ حرکت به‌دست آورده سپس سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ ابتدا مکان متحرک در لحظه‌های $t_1=\frac{1}{6}s$ و $t_2=\frac{4}{3}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/02\cos10\pi t\begin{cases}\xrightarrow{t_1=\frac16 s}x_1=0/02\cos\frac{10\pi}{6}\\ \xrightarrow{t_2=\frac43 s}x_2=0/02\cos\frac{40\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0/02\cos\frac{5\pi}{3}\Rightarrow x_1=0/02\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})\\ \Rightarrow x_2=0/02\cos(12\pi+\pi+\frac{\pi}{3})\Rightarrow x_2=-0/02\cos\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=+0/02\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x_1=+0/01m\\x_2=-0/01m\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{-0/01-0/01}{\frac43-\frac16}=\frac{-0/02}{\frac{8-1}{6}}\Rightarrow v_{av}=-\frac{0/12}{7}$$

$$\Rightarrow v_{av}=-\frac{12}{700}=-\frac{3}{175}m/s$$

B ۶۰ ۳

یادآوری جابه‌جایی کمیت برداری $(\vec d)$ و مسافت کمیت نرده‌ای (ℓ) است.

نکته همواره مسافت برابر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی است.

با توجه به نکته بیان شده می‌توان نوشت: $|\vec d|\le\ell\Rightarrow\frac{|\vec d|}{\ell}\le1$

یادداشت ریاضی $|x|\le1\Rightarrow-1\le x\le1$

با توجه به یادداشت ریاضی باید $-1\le\frac{|\vec d|}{\ell}\le1$ باشد.

A ۶۱ ۳

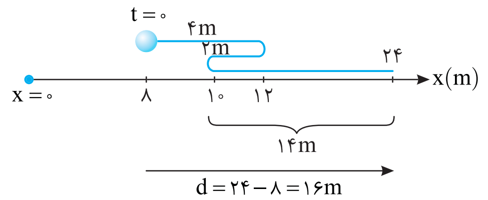
در یک لحظه دو متحرک در یک مکان قرار دارند و مبدأ را هرجا در نظر بگیریم مکان دو متحرک یکسان است.

B ۶۲ ۴

خط فکری برای حل این مسئله قطعاً شما باید مسیر حرکت را رسم کنید از طرفی به کمک تندی متوسط باید مسافت طی شده در مدت $5s$ را به‌دست بیاورید تا متوجه شوید متحرک در لحظهٔ $t=5s$ در چه مکانی است و بتوانید جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ مسافت طی‌شده در مدت $5s$ را به‌دست می‌آوریم. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow4=\frac{\ell}{5}\Rightarrow\ell=20m$

۲ مسیر را از مکان $x_0=+8m$ رسم می‌کنیم، متحرک از $+8m$ به مکان $+12m$ می‌رود یعنی $4m$ مسافت طی کرده سپس بازمی‌گردد و به مکان $+10m$ می‌رود. یعنی $2m$ مسافت طی می‌کند تا اینجا $6m$ مسافت طی کرده و هنوز $14m$ باقی مانده تا مسافت کل $20m$ شود. در نقطهٔ $+10m$ تغییر جهت می‌دهد و در امتداد محور xها به حرکت خود ادامه می‌دهد بنابراین باید از مکان $+10m$، $14m$ جلو برود پس به مکان $10+14=24m$ می‌رسد.



۳ متحرک در مدت $5s$ از مکان $+8m$ به مکان $+24m$ رفته و جابه‌جایی آن $d=24-8=16m$ است.

۴ سرعت متوسط در این مدت خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow v_{av}=\frac{16}{5}=3/2m/s$

C ۶۳ ۱

خط فکری نیمهٔ دوم مسیر را مستقل از نیمهٔ اول بررسی کنید. یعنی اگر در نیمهٔ دوم مسافت (یا جابه‌جایی) L_2 و زمان جابه‌جایی Δt_2 باشد، $\frac{1}{3}\Delta t_2$ متحرک با تندی $8m/s$ و $\frac{2}{3}\Delta t_2$ را با تندی $6m/s$ می‌رود. شما با این اطلاعات تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب کنید. سپس به سراغ تندی متوسط در کل مسیر بروید.

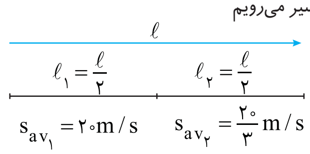
۱ جابه‌جایی در مدت $\frac{1}{3}\Delta t_2$ برابر است با: $s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow \ell'_2=8\times\frac{1}{3}\Delta t_2=\frac{8}{3}\Delta t_2$

۲ جابه‌جایی درمدت $\frac{2}{3}\Delta t_2$ خواهدشد: $s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow \ell''_2=6\times\frac{2}{3}\Delta t_2\Rightarrow \ell''_2=4\Delta t_2$

۳ تندی متوسط در نیمهٔ دوم را حساب می‌کنیم.

$$s_2=\frac{\ell_2}{\Delta t_2}=\frac{\frac{8}{3}\Delta t_2+4\Delta t_2}{\Delta t_2}=\frac{20}{3}m/s$$

اکنون به سراغ کل مسیر می‌رویم

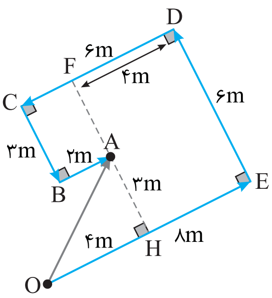


۴ اما باید زمان حرکت در هر نیمه را برحسب L به‌دست بیاوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}\Rightarrow\begin{cases}20=\frac{\frac{\ell}{2}}{t_1}=t_1=\frac{\ell}{40}\\ \frac{20}{3}=\frac{\frac{\ell}{2}}{t_2}\Rightarrow t_2=\frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{20}{3}}=\frac{3\ell}{40}\end{cases}$$

۵ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{40}+3\frac{\ell}{40}}=\frac{40}{4}=10m/s$

A ۶۴ ۳

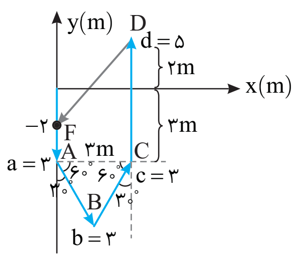


جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود، با توجه به شکل جابه‌جایی برابر طول OA است. بنابراین از نقطهٔ O تا نقطهٔ A بردار جابه‌جایی OA را رسم می‌کنیم در مثلث OAH باید طول وتر OA را به‌دست بیاوریم بنابراین باید طول اضلاع AH و OH را از روی شکل مشخص کنیم:

$$AH=DE-BC=6-3=3m\quad,\quad OH=OE-FD=8-4=4m$$

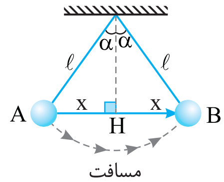
اکنون بردار جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5m$

B ۶۵ ۳



به شکل نگاه کنید. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین ضلع $AC=3m$ است. با توجه به فرض مسئله قرار است ذره خود را از نقطهٔ D به نقطه‌ای روی محور yها در مکان $-2m$ (نقطهٔ F) برساند. بنابراین ذره باید جابه‌جایی DF را طی کند یعنی از نقطهٔ D به مختصات $D(3,2)$ به نقطهٔ $F(0,-2)$ برود بنابراین روی محور xها باید $-3m$ و روی محور yها باید $-4m$ جابه‌جا شود. بنابراین بردار DF خواهد شد: $\overrightarrow{DF}=-3\vec{i}-4\vec{j}$

C ۶۶ ۱



خط فکری مسیر حرکت را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید. بردار A تا B را بکشید یعنی بردار جابه‌جایی را مشخص کنید. در این صورت مسیر حرکت از A تا B را روی شکل نشان دهید. باید طول AB را به کمک مثلثات به دست بیاورید و طول کمان مسیر AB را نیز به‌دست آورید تا بتوانید α را به کمک فرض مسئله حساب کنید.

۱ اندازهٔ جابه‌جایی AB برابر $2x$ است و هر x روی شکل را به کمک سینوس به‌دست می‌آوریم. $\sin\alpha=\frac{x}{\ell}\Rightarrow x=\ell\sin\alpha\Rightarrow AB=2\ell\sin\alpha$

نکته طول کمانی که زاویهٔ روبه‌روی آن θ است برابر $\frac{\theta}{360}(2\pi R)$ است.

۲ طول کمان AB را حساب می‌کنیم، کمان روبه‌روی AB برابر 2α است بنابراین مسافت AB خواهد شد: $\text{مسافت}=\frac{2\alpha}{360}(2\pi R)$

شعاع مسیر همان طول ریسمان آونگ است.

$$\text{مسافت}=\frac{2\alpha}{360}(2\pi\ell)\Rightarrow\text{مسافت}=\frac{\alpha\pi\ell}{90}$$

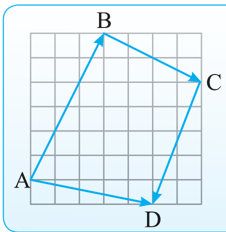
۳ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{جابه‌جایی}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Rightarrow\frac{\frac{\alpha\pi\ell}{90}}{2\ell\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Rightarrow\frac{\alpha}{\sin\alpha}=45\sqrt{2}$$

۴ اکنون باید گزینه‌ها را در این رابطه قرار داد تا اندازهٔ α مشخص می‌شود. زاویهٔ $\alpha=45^\circ$ را امتحان می‌کنیم. $\frac{45}{\sin 45^\circ}=45\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}=\sqrt{2}$

بنابراین $\alpha=45^\circ$ جواب است.

B ۶۷ ۲



یادداشت ریاضی در شکل روبه‌رو که از کتاب ریاضی پایهٔ هشتم آورده شده است مسیر ذره‌ای که به‌ترتیب جابه‌جایی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$ را طی کرده نشان داده شده است و بردار $\overrightarrow{AD}$ بردار جابه‌جایی کل است.یعنی $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

خط فکری در صورت مسئله سه جابه‌جایی برحسب بردارهای یکه بیان شده که ذره پشت سر هم آن‌ها را پیموده است بنابراین برای به‌دست آوردن جابه‌جایی کل باید جمع برداری آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی در کل مدت حرکت خواهد شد:

$$\vec{d}=\vec{d}_1+\vec{d}_2+\vec{d}_3=(5\vec{i}-2\vec{j})+(3\vec{i}+7\vec{j})+(4\vec{i}+4\vec{j})\Rightarrow\vec{d}=12\vec{i}+9\vec{j}$$

۲ اندازهٔ جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$d=\sqrt{d_x^2+d_y^2}=\sqrt{12^2+9^2}\Rightarrow d=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}\Rightarrow d=15m$$

۳ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{15}{3+5+4}\Rightarrow v_{av}=\frac{15}{12}\Rightarrow v_{av}=1/25m/s$$

A ۶۸ ۱

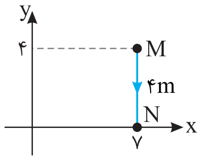
خط فکری همواره یادتان باشد که جابه‌جایی متحرک به مسیر حرکت بستگی ندارد و تنها به مختصات نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی بستگی دارد و در حل این مسئله باید از نقطهٔ B چشم‌پوشی کنید و فاصلهٔ بین نقاط A و C را به کمک ریاضی به‌دست بیاورید.

فاصلهٔ $A(1,1)$ تا $C(2,2)$ یعنی اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$$AC=d=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}\Rightarrow|d|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\,m$$

B ۶۹ ۱

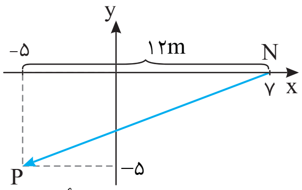
برای به‌دست آوردن تندی متوسط نیاز داریم که مسافت طی شده از M تا N و سپس از N تا P را به‌دست بیاوریم.



۱ مسـافت طی شـده از MN مطابق شکل برابر $\ell_{MN}=4m$ است.

۲ متحرک روی خط راست از N به P رفته و فاصلهٔ N تا P خواهد شد:

$$\ell_{NP}=\sqrt{5^2+12^2}=13m$$



۳ مسافت کل برابر است با:

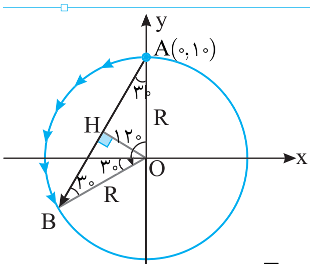
$$\ell=\ell_{MN}+\ell_{NP}=4+13=17m$$

۴ زمان کل حرکت برابر $5+3=8s$ می‌شود.

۵ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{17}{8}m/s$$

B ۷۰ ۴



۱ متحرک روی دایره‌ای به شـعاع $R=10m$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته اسـت. ارتفاع مثلث متساوی‌السـاقین OAB را رسم می‌کنیم.

۲ طـول AH را بـه کمـک $\cos 30^\circ$ حساب می‌کنیم.

$$\cos 30^\circ=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AH}{OA}\Rightarrow\frac{\sqrt3}{2}=\frac{AH}{R}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt3}{2}R$$

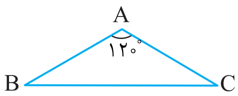
۳ بنابراین جابه‌جایی AB برابر است با:

$$d=AB=2AH=2\times\frac{\sqrt3}{2}R\Rightarrow d=\sqrt3R\xrightarrow{R=10m}d=10\sqrt3m$$

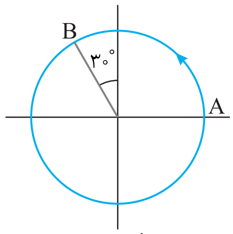
۴ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{10\sqrt3}{2}\Rightarrow v_{av}=5\sqrt3m/s$$

میانبر قاعـدهٔ مثلـث متسـاوی السـاقین با زاویهٔ رأس 120° همواره $\sqrt3$ برابر طول هر ساق آن است. $BC=\sqrt3AB$



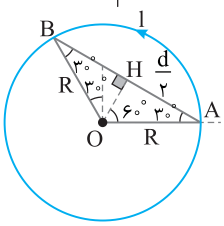
بازی با سؤال متحرکی کمان AB را طی کرده است. مسـافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟



۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\sqrt3\pi$ ۴) $\frac{2\sqrt3\pi}{9}$

پاسخ زاویـه‌ای که متحـرک طی کرده 120° است که $\frac{120}{360}=\frac13$ دایره است بنابراین مسافت طی‌شده برابر طول کمان AB بوده که $\frac13$ محیط دایره است.

$$\ell=\frac13(2\pi R)\Rightarrow\ell=\frac23\pi R$$



اگر طول وتر AB را d فرض کنیم فاصلهٔ AH برابر $\frac d2$ اسـت و با توجه به شکل

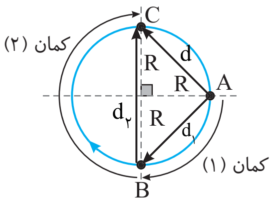
در مثلث OAH می‌توان نوشت: $\sin 60^\circ=\frac{\frac d2}{R}\Rightarrow\frac{\sqrt3}{2}=\frac{d}{2R}\Rightarrow d=\sqrt3R$

در این صورت نسبت مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد: $\frac{\ell}{d}=\frac{\frac23\pi R}{\sqrt3R}=\frac{2\sqrt3\pi}{9}$

گزینهٔ ٤

C ۷۱ ۲

خط فکری دوباره متن مسـئله را بخوانید. مسـیر حرکت ذره ساعتگرد است یعنی مطابق شـکل ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B سـپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. سـرعت متوسط یعنی جابه‌جایی تقسیم بر زمان بنابراین شما باید جابه‌جایی از A تا B و جابه‌جایی از B تا C را حسـاب کنید و به کمک سـرعت متوسط‌هایی که در مسئله داده شده، زمان حرکت را در هر مرحله به دست بیاورید.



بـا توجه به شـکل متحرک کمـان (۱) را با سـرعت $5\sqrt2m/s$ و کمـان (۲) را بـا سرعت متوسط $4m/s$ طی کرده است. حال زمان کل حرکت را به‌دست می‌آوریم.

۱ جابه‌جایی در قسمت اول

$$d_1=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt2$$

۲ زمان در قسمت اول

$$v_{av}=\frac{d_1}{\Delta t_1}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{d_1}{v_{av}}=\frac{R\sqrt2}{5\sqrt2}=\frac R5$$

۳ جابه‌جایی در قسمت دوم:

$$d_2=R+R=2R$$

۴ زمان در قسمت دوم:

$$v_{av}=\frac{d_2}{\Delta t_2}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{d_2}{v_{av}}=\frac{2R}{4}=\frac R2$$

۵ کل زمان طی شده برابر است با:

$$\Delta t_{\text{کل}}=\frac R5+\frac R2=\frac{7}{10}R$$

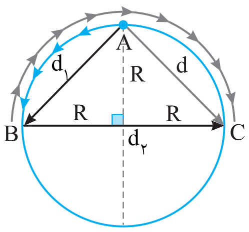
۶ جابه‌جایی از ابتدا تا انتهای مسیر برابر بردار AC است که اندازهٔ آن خواهد شد:

$$d=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt2$$

۷ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{R\sqrt2}{\frac{7}{10}R}=\frac{10\sqrt2}{7}m/s$$

بازی با سؤال ذره‌ای روی یـک مسـیر دایـره‌ای بـا سـرعت متوسـط $5\sqrt2m/s$ پادسـاعتگرد کمان $\frac\pi2$ و سپس خلاف جهت به صورت ساعتگرد با سـرعت متوسط $4m/s$ کمان π را طی می‌کند. بزرگی سرعت متوسط ذره در تمام مسیر حرکت چند متر بر ثانیه است؟



پاسخ فـرض کنید کـه ذره روی محیـط دایـره از نقطـهٔ A پادسـاعتگرد مطابق شـکل بـه نقطهٔ B بـرود. در این صورت جابه‌جایی ذره خواهد شد:

$$d_1=AB=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt2R$$

با توجه به تعریف سـرعت متوسـط زمان حرکت از A تا B خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{\sqrt2R}{5\sqrt2}=\frac R5$$

ذره ساعتگرد کمان π را طی کرده و از B به C می‌رود و جابه‌جایی ذره خواهد شد:

$$d_2=R+R=2R$$

زمان حرکت را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{d_2}{\Delta t_2}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{2R}{4}=\frac R2$$

جابه‌جایی در کل مسیر یعنی بردار AC، اندازهٔ آن را حساب می‌کنیم.

$$\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt2R$$

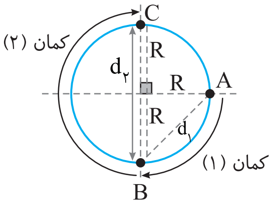
سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{\sqrt2R}{\frac R2+\frac R5}\Rightarrow v_a=\frac{10\sqrt2}{7}m/s$$

دقیقاً همان حل تکرار شد.

C ۷۲ ۳

خط فکری به کمک محاسبهٔ جابه‌جایی d_1 و d_2 و با داشتن سرعت متوسط در این جابه‌جایی‌ها یعنی $5\sqrt{2}\,m/s$ و $4\,m/s$ زمان را در هر قسمت حساب کنید تا بتوانید زمان کل حرکت از A تا C را به‌دست بیاورید. سپس مسافت طی شده که مطابق شکل $\frac{3}{4}$ محیط دایره را حساب کرده و تندی متوسط را به‌دست بیاورید.



۱ جابه‌جایی در مرحله اول از A تا B با سرعت متوسط $5\sqrt{2}\,m/s$:

$d_1=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2}$

۲ زمان جابه‌جایی در مرحله اول از A تا B:

$$v_{av}=\frac{d_1}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{d_1}{v_{av}}=\frac{R\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{R}{5}s$$

۳ جابه‌جایی در مرحله دوم از B تا C با سرعت متوسط $4\,m/s$ وقتی است که ذره کمان π را ساعتگرد طی کرده و این جابه‌جایی برابر است با: $d_2=R+R=2R$

۴ زمان جابه‌جایی در مرحله دوم: $v_{av}=\frac{d_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{d_2}{v_{av}}=\frac{2R}{4}=\frac{R}{2}s$

۵ زمان کل حرکت از A تا C خواهد شد. $\Delta t_{\text{کل}}=\frac{R}{5}+\frac{R}{2}=\frac{7}{10}R$

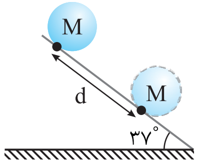
۶ مسافت طی شده $\frac{3}{4}$ محیط دایره است. $\ell=\frac{3}{4}(2\pi R)=\frac{9}{2}R$

۷ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{\frac{9}{2}R}{\frac{7}{10}R}=\frac{45}{7}m/s$

A ۷۳ ۴

خط فکری صورت مسئله شما را نترساند. وقتی استوانه یک دور کامل می‌چرخد روی سطح به اندازهٔ محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه جلو می‌رود یعنی نقطهٔ M محل تماس استوانه با سطح پس از یک دور کامل به اندازهٔ $d=2\pi r$ جلو می‌رود. بنابراین شما کافی است محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه را به‌دست بیاورید.

جابه‌جایی نقطهٔ M خواهد شد:



$$d=2\pi r\xrightarrow{\pi\simeq3,\ r=5cm}d=2\times3\times5=30\,cm$$

C ۷۴ ۲

خط فکری متوجه این نکته می‌شوید که وقتی مسئله می‌گوید پس از هر برخورد ٪۸۰ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. یعنی در ابتدا که ارتفاع آن ۱۰۰ متر است پس از برخورد اول $\frac{80}{100}\times100=80m$ و پس از برخورد دوم $80\times\frac{80}{100}=64m$ و پس از برخورد سوم $64\times\frac{80}{100}=51/2m$ و ... بالا می‌آید؟ بنابراین شما باید به کمک سرعت متوسط ابتدا مشخص کنید که در لحظهٔ $t=4s$ گلوله در چه مکانی قرار دارد، سپس مسافت طی شده را در کل زمان ۰ تا 4s به‌دست بیاورید تا بتوانید تندی متوسط را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی گلوله در بازهٔ صفر تا 4s را حساب می‌کنیم.

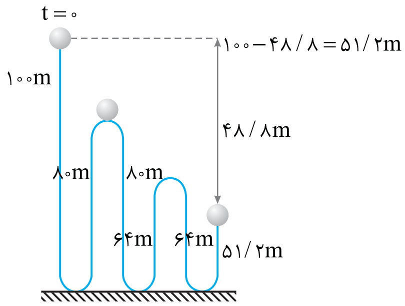
$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d=v_{av}t\Rightarrow d=12/2\times4\Rightarrow d=48/8m$$

۲ فاصلهٔ گلوله در $t=4s$ از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم.

$100-48/8=51/2m$

۳ مسیر حرکت را رسم کرده و مسافت را حساب می‌کنیم. البته حرکت روی خط راست است. گلوله روی خط راست بالا و پایین می‌شود و ما برای محاسبهٔ مسافت مسیر را این‌گونه رسم کرده‌ایم.

$\ell=100+80+80+64+64+51/2=439/2m$



۴ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{t}=\frac{439/2}{4}=109/8$

C ۷۵ ۴

خط فکری با یک مسئلهٔ ریاضی سر و کار داریم. متحرک در هر مرحله خسته شده و مسیر کمتری را با سرعت کوچک‌تری طی کرده است. اگر کل مسیر x باشد، در مرحله اول $\frac{x}{2}$ و در مرحلهٔ دوم $\frac{x}{4}$ و مرحلهٔ سوم $\frac{x}{8}$ و ... را طی می‌کند. باید زمان را در هر مرحله به‌دست بیاورید. سپس سرعت متوسط را در کل مسیر x حساب کنید.

زمان در هر مرحله خواهد شد:

$$v_{av_1}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow v=\frac{\frac{x}{2}}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_2}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \frac{v}{2}=\frac{\frac{x}{4}}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_3}=\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3}\Rightarrow \frac{v}{4}=\frac{\frac{x}{8}}{\Delta t_3}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{x}{2v}$$

$$\vdots$$

سرعت متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{x}{t_{\text{کل}}}=\frac{x}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\cdots}\Rightarrow v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\cdots}$$

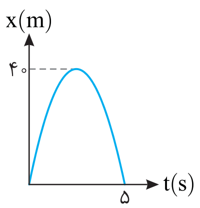
$$v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}\underbrace{(1+1+1+\cdots)}_{\text{بی‌نهایت بار}}}=\frac{2v}{\infty}$$

جمع تعداد بی‌نهایت عدد یک در مخرج برابر بی‌نهایت است و تقسیم یک عدد معین بر بی‌نهایت برابر صفر است، بنابراین: $v_{av}=\frac{2v}{\infty}=0$

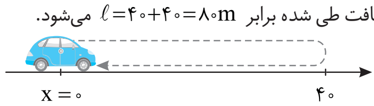
پنجره ۲

A ۷۶ ۱

خط فکری دقت کنید نمودار مکان – زمان مسیر حرکت نیست یعنی اینکه تصور نکنید که متحرک روی این مسیر بالا و پایین می‌رود. در نمودار مکان – زمان، در هر لحظه می‌توان مکان جسم را مشخص کرد و شما به کمک آن می‌توانید مسیر حرکت روی محور xها را رسم کنید. برای سادگی شما روی محور xها مسیر حرکت جسم را رسم کنید تا مسئله حل شود.



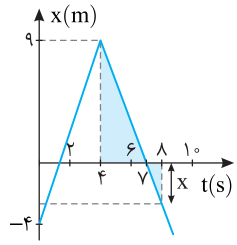
متحرک در $t=0$ در مکان $x=0$ است، سپس به مکان $+40m$ می‌رود و از آن نقطه تغییر جهت داده و برمی‌گردد. بنابراین در مدت 5s جابه‌جایی متحرک صفر است. اما در این مدت متحرک از مکان $x=0$ به مکان $x=40m$ رفته و سپس به مبدأ برمی‌گردد و مسافت طی شده برابر $\ell=40+40=80m$ می‌شود.



B ۷۷ ۱

یادآوری جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای مسیر وصل می‌کند و نقطهٔ بین راه و مسیر حرکت مهم نیست.

خط فکری جابه‌جایی در مسئله خواسته شده است. در لحظهٔ $t=0$ مکان متحرک $-4m$ است. بنابراین شما باید مکان متحرک را در لحظهٔ $t=8s$ مشخص کنید و به کمک آن اندازهٔ جابه‌جایی را به‌دست بیاورید. معمولاً در نمودارهایی که خط راست هستند از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم.

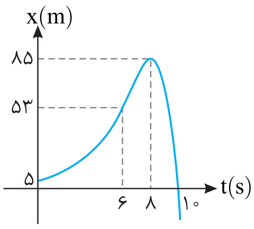


۱ دو مثلث رنگی در شکل با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه خواهد شد: $\frac{9}{x}=\frac{3}{1}\Rightarrow x=3m$

البته x زیر محور زمان بوده و منفی است. یعنی در لحظهٔ $t=8s$ متحرک در مکان $-3m$ است.

۲ متحرک در لحظهٔ $t=0$ در مکان $-4m$ و در لحظهٔ $t=8s$ در مکان $-3m$ است. بنابراین در بازهٔ ۰ تا $8s$ متحرک $+1m$ جابه‌جا شده است.

A ۷۸ ۴



گزینهٔ (۱): با توجه به نمودار مکان متحرک در لحظه‌های $8s$ تا $10s$ به‌ترتیب $85m$ و صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی $d=0-85=-85m$ بوده و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۲): در لحظهٔ $t=6s$ متحرک در مکان $+53$ و در لحظهٔ $t=10s$ متحرک در مکان $x=0$ است، یعنی جابه‌جایی آن $d=0-53=-53m$ بوده و گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳): برای مسافت طی شده باید مسیر حرکت از $t=8s$ تا $t=10s$ را مرور کنیم. در این مدت حرکت متحرک روی محور xها و در یک جهت بوده و متحرک ۸۵ متر مسافت طی کرده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): در لحظهٔ $t=6s$ مکان متحرک $+53m$ بوده و در $t=8s$ متحرک در مکان $85m$ تغییر جهت می‌دهد و در $t=10s$ به مبدأ می‌رود، بنابراین مسافتی که در این مدت طی می‌کند برابر است با $\ell=(85-53)+85=117m$.

B ۷۹ ۲

خط فکری مسافت همواره کمیتی مثبت است و هرگاه متحرک تغییر جهت دهد، مسافت همچنان مثبت می‌ماند. بنابراین نموداری می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد که از مبدأ شروع شود و تغییر جهت نداشته باشد.

با توجه به آنچه در خط فکری بیان شده، گزینهٔ (۲) می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد.

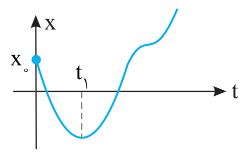
A ۸۰ ۳

۱ مکان اولیهٔ متحرک در لحظهٔ $t=0$، مثبت است.

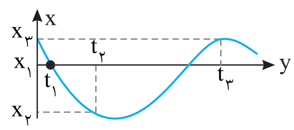
۲ حرکت متحرک از لحظهٔ صفر تا t_1 در خلاف جهت محور در حرکت است.

۳ متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت داده است.

۴ بعد از لحظهٔ t_1 متحرک تمام مدت در جهت مثبت محور x در حرکت است. بنابراین گزینهٔ (۳) پاسخ درست است.



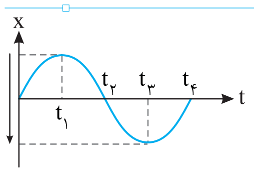
A ۸۱ ۲

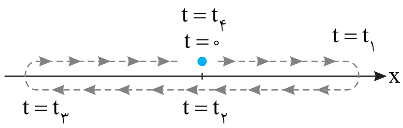


حرکت در لحظهٔ $t_1=0$ در مبدأ مکان است. در لحظهٔ t_2 در مکان x_2 و در لحظهٔ t_3 در مکان x_3 است که با توجه به نمودار فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ t_2 از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.

A ۸۲ ۳

مسیر حرکت از $t=0$ تا $t=t_4$ مطابق شکل روبه‌رو است و در بازهٔ t_1 تا t_3 متحرک در خلاف جهت محور xها یعنی در جهت منفی محور در حرکت است.

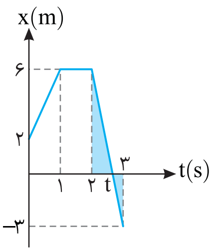




حرکت در خلاف جهت محور

A ۸۳ ۲

خط فکری در مدت ۰ تا $1s$ مورچه از مکان ۲ متری به مکان ۶ متری رفته یعنی از مبدأ مکان در حال دور شدن است. در بازهٔ $1s$ تا $2s$ مورچه در مکان $+6m$ مبدأ ساکن است و مکانش تغییر نمی‌کند. در لحظهٔ t مکان مورچه $x=0$ می‌شود. یعنی در بازهٔ $2s$ تا t مورچه در خلاف جهت محور xها از مکان $+6m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است، بنابراین شما باید زمان t را به کمک تشابه مثلث به‌دست بیاورید.



دو مثلث رنگی در شکل متشابه هستند، بنابراین نسبت تشابه خواهد شد:

$$\frac{6}{3}=\frac{t-2}{3-t}\Rightarrow 18-6t=3t-6$$

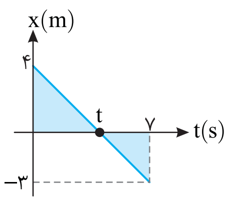
$$\Rightarrow 24=9t\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

از بازهٔ $t=2s$ تا $t=\frac{8}{3}s$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ $(x=0)$ است، بنابراین: $\Delta t=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}s$

البته شما می‌توانستید به کمک شیب خط نیز مقدار t را حساب کنید.

A ۸۴ ۳

خط فکری در حرکت متحرک هنگامی که مکان متحرک منفی است، بردار مکان منفی است و اگر مکان متحرک مثبت باشد بردار مکان مثبت است. بنابراین هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=0)$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. شما باید از تشابه مثلث، t را به دست بیاورید.

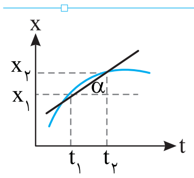


دو مثلث رنگی متشابه هستند و نسبت تشابه خواهد شد:

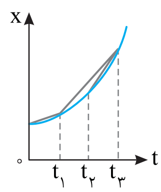
$$\frac{t}{4}=\frac{7-t}{3}\Rightarrow 3t=28-4t\Rightarrow 7t=28\Rightarrow t=4s$$

B ۸۵ ۳

یادآوری در نمودار مکان - زمان شیب خط قاطع بین دو نقطه برابر سرعت متوسط بین آن دو نقطه است. $v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\tan\alpha$.



در بازه‌های زمانی بیان شده در گزینه‌ها، خط قاطع را روی نمودار رسم می‌کنیم. در هر گزینه که شیب خط قاطع بیشتر باشد، سرعت متوسط بزرگ‌تر است. در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 شیب خط قاطع از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است بنابراین سرعت متوسط در این بازه بزرگ‌تر از بقیهٔ بازه‌هاست.

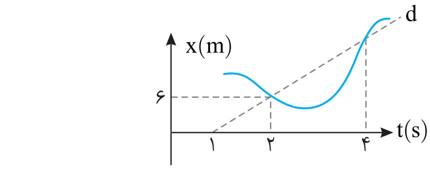


B ۸۶ ۳

خط فکری تندی متوسط به مسافت یعنی مسیر حرکت بستگی دارد که در نمودار چگونگی مسیر یعنی اینکه متحرک از چه نقاطی می‌گذرد مشخص نیست، بنابراین تندی متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید به سراغ سرعت متوسط بروید و سرعت متوسط را از شیب خط d به‌دست بیاورید.

شیب خط d در همه جای آن قطعاً یکسان است. بنابراین برای به‌دست آوردن سرعت متوسط، کافی است شیب خط d را به کمک دو نقطه که روی نمودار مختصات مشخص دارند به‌دست آوریم.

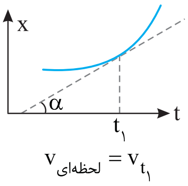
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۶-۰}{۲-۱}=۶m/s$$



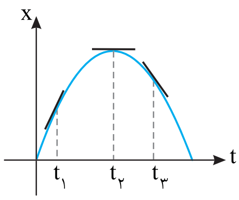
بنابراین سرعت متوسط در بازهٔ ۱s تا ۲s، ۲s تا ۴s یا ۱s تا ۴s برابر ۶m/s است.

A ۸۷ ۱

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در آن لحظه است.



دقت کنید تندی لحظه‌ای همواره مثبت است، بنابراین شما همواره باید قدرمطلق شیب خط مماس را بررسی کنید. اکنون در لحظه‌های خواسته شده، خط مماس بر نمودار را رسم می‌کنیم. شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۱$ از دو لحظهٔ دیگر بزرگ‌تر است. بنابراین تندی در لحظهٔ $t_۱$ از بقیهٔ لحظه‌های بیان شده بیشتر است.



B ۸۸ ۳

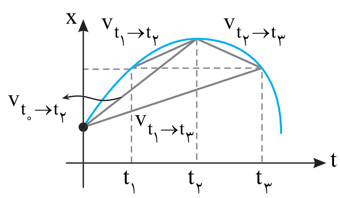
خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است. با رسم خط قاطع در بازه‌های زمانی که در گزینه‌ها بیان شده می‌توان مشخص کرد که شیب کدام خط قاطع منفی است در نتیجه سرعت متوسط منفی است.

برای سادگی روی شکل v_{av} را با حرف v نمایش داده‌ایم. در بازهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ نیز شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

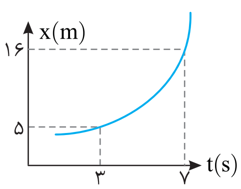
در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ شیب خط قاطع منفی و سرعت متوسط منفی بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

در بازهٔ صفر تا $t_۳$ شیب خط قاطع مثبت و سرعت متوسط مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۸۹ ۲

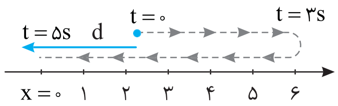
به نمودار دقت کنید. متحرک روی خط راست (محور xها) بدون تغییر جهت از مکان x=۵m به مکان x=۱۶m رفته بنابراین می‌توان نوشت:



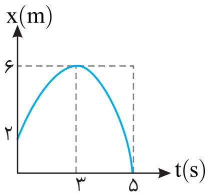
$$s_{av}=v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۶-۵}{۷-۳}=۲/۷۵m/s$$

A ۹۰ ۲

مسیر حرکت را روی محور xها رسم می‌کنیم. البته می‌توانید این کار را در ذهن خود انجام دهید.



۱ جابه‌جایی متحرک برداری است که از x=۲ باید به x=۰ برسد یعنی از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم شود. بنابراین d=−۲m و سرعت متوسط برابر است با:



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۲}{۵-۰}\Rightarrow v_{av}=-۰/۴m/s$$

۲ مطابق شکل متحرک از مکان +۲m به مکان +۶m رفته یعنی ۶−۲=۴m مسافت طی کرده سپس از مکان +۶m به مکان x=۰ می‌رود و در این مدت نیز مسافت ۶m را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده در مدت ۰ تا ۵s برابر $\ell=۴+۶=۱۰m$ می‌شود. از این‌رو تندی متوسط خواهد شد

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۱۰}{۵-۰}\Rightarrow s_{av}=۲m/s$$

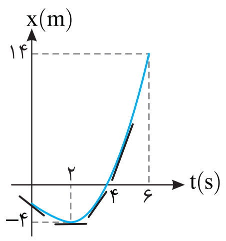
B ۹۱ ۳

یادآوری قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای متحرک است و هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود، تندی لحظه‌ای متحرک بیشتر می‌شود.

نکته حرکت تندشونده یعنی حرکتی که در آن تندی جسم افزایش می‌یابد بنابراین هرگاه قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان افزایش یابد حرکت تندشونده است.

یادآوری در نقاط بیشینه و کمینهٔ نمودار مکان - زمان شیب خط مماس صفر است، یعنی تندی لحظه‌ای متحرک صفر است.

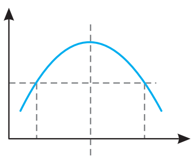
به نمودار نگاه کنید. از لحظهٔ ۰ تا ۲s قدرمطلق شیب خط مماس در حال کاهش بوده و در t=۲s تندی صفر شده و حرکت کندشونده است و از t=۲s تا t=۶s شیب خط مماس در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است. مسافت طی شده از −۴m تا +۱۴m برابر $\ell=۱۸m$ است و تندی متوسط خواهد شد:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۸}{۴}=۴/۵m/s$$

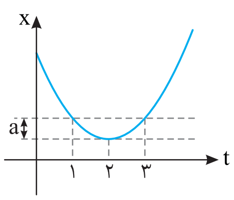
B ۹۲ ۴

یادآوری تندی متوسط برابر است با مسافت طی شده در یکای زمان. از طرفی سهمی (نمودار معادلهٔ درجه دوم) نسبت به خط قائم گذرا از رأس سهمی متقارن می‌باشد.



$x_{t=۳}$ با $x_{t=۱}$ با هم برابر است، مسافت طی شده از ۱s تا ۲s و ۲s تا ۳s را روی شکل با حرف a نشان داده‌ایم در این صورت:

در بازهٔ t=۱s تا t=۲s و در بازهٔ t=۲s تا t=۳s تندی متوسط خواهد شد:



$$t=۱s \text{ تا } t=۲s\Rightarrow s_{av}=\frac{a}{۱}=a \quad , \quad t=۲s \text{ تا } t=۳s\Rightarrow v_{av}=\frac{a}{۱}=a$$

در بازهٔ ۱s تا ۳s، مسافت طی‌شده L=a+a=۲a است و تندی متوسط در این بازه نیز برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۲a}{۳-۱}=a$$

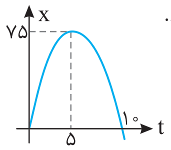
بنابراین در هر سه بازه، تندی یکسان است.

C ۹۳ ۳

یادداشت ریاضی هرگاه ریشه‌های یک معادله درجه ۲ ($x_۱$ و $x_۲$) را داشته باشیم معادلهٔ آن خواهد شد: $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$

خط فکری در حل این مسئله شما باید ابتدا معادلهٔ حرکت را به‌دست بیاورید. بنابراین باید به سراغ تمام دانسته‌های خود دربارهٔ سهمی بروید.

۱ نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است. بنابراین مختصات رأس این سهمی خواهد شد $(t=۵s\,,x=۷۵m)$



۲ ریشه‌های معادله روی نمودار مشخص است $(t=۱۰s\,,t=۰)$

۳ معادلهٔ درجه ۲ این سهمی را به کمک ریشه‌های آن می‌نویسیم:

$$x=a(t-۰)(t-۱۰)\Rightarrow x=at^۲-۱۰at \quad (I)$$

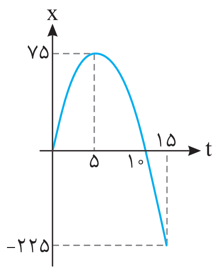
۴ باید مختصات رأس در این معادله صدق کند.

$$۱۵=a(۵)^۲-۱۰a(۵)\Rightarrow ۷۵=۲۵a-۵۰a\Rightarrow a=-۳$$

۵ بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد: $\xrightarrow{(I)} x=-۳t^۲+۳۰t$

۶ مکان متحرک در $t=۱۵s$ را حساب می‌کنیم

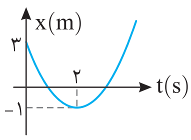
$$x=-۳(۱۵)^۲+۳۰\times۱۵=-۳\times۲۲۵+۴۵۰$$
$$\Rightarrow x=-۲۲۵m$$



۷ مسافت طی شده از ۰ تا ۱۵s را به‌دست می‌آوریم. $\ell=۷۵+۷۵+۲۲۵=۳۷۵m$

۸ تندی متوسط در مدت ۱۵s خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۷۵}{۱۵}=۲۵m/s$

بازی با سؤال نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل روبه‌رو است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۵s$ چند متر بر ثانیه است؟ از کتاب درسی



۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ در حل این تست باید به کمک داده‌های روی نمودار معادلهٔ $x=at^۲+bt+c$ را کامل کنیم.

۳ در لحظهٔ $t=۰$ مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=۳m$ است، از این رو:

$$۳=۰+۰+c\Rightarrow c=۳m$$

۴ برای مختصات رأس سهمی می‌توان نوشت:

$$t=-\frac{b}{۲a}\xrightarrow{t=۲s} ۲=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow b=-۴a \quad (I)$$

۵ مختصات رأس باید در معادله صدق کند:

$$(t=۲s\,,x=-۱m)\Rightarrow -۱=۴a+۲b+۳\Rightarrow ۴a+۲b=-۴\Rightarrow ۲a+b=-۲ \quad (II)$$

از رابطه‌های (I) و (II)، a و b را به‌دست می‌آوریم.

$$۲a+b=-۲\Rightarrow ۲a-۴a=-۲\Rightarrow -۲a=-۲\Rightarrow a=۱$$
$$b=-۴a\Rightarrow b=-۴$$

معادله کامل شد: $x=t^۲-۴t+۳$

اکنون در لحظه‌های $t=۱s$ و $t=۵s$، مکان متحرک را حساب می‌کنیم:

$$t=۱s\Rightarrow x=۱-۴+۳\Rightarrow x=۰$$
$$t=۵s\Rightarrow x=۲۵-۲۰+۳\Rightarrow x=۸m$$

مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم. متحرک در لحظهٔ $t=۱s$ از مکان $x=۰$ به مکان $-۱m$ رفته و سپس از مکان $-۱m$ به مکان $+۸m$ رفته است.

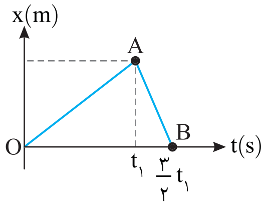
بنابراین $\ell=۱+۱+۸=۱۰m$

تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۵-۱}=۲/۵m/s$

گزینه ۳

A ۹۴ ۲

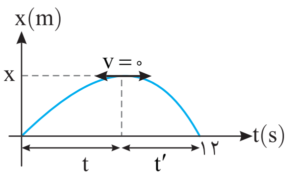
با توجه به تعریف سرعت متوسط ($v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$)، سرعت متوسط را در هر شاخه حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم. داده‌های روی نمودار را در رابطهٔ سرعت متوسط قرار می‌دهیم.



$$\frac{v_{av_{OA}}}{v_{av_{AB}}}=\frac{\frac{x_A-۰}{t_۱}}{\frac{۰-x_A}{\frac{۳}{۲}t_۱-t_۱}}=-\frac{۱}{۲}$$

B ۹۵ ۱

خط فکری ابتدا باید برای خودتان مشخص کنید که در کدام بازه حرکت تندشونده است. سپس به سراغ اطلاعات مسئله بروید و زمان حرکت تندشونده را حساب کنید.



۱ در بازهٔ ۰ تا t تندی متحرک به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است و در بازهٔ t' متحرک از $v=۰$ شروع به حرکت کرده و تندی آن در حال افزایش است. شما با رسم چند خط مماس می‌توانید این مسئله را بررسی کنید. هرچه به سمت ۱۲s بروید خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شده و قدرمطلق شیب آن در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به نمودار در بازهٔ ۰ تا t مسافت طی شده $\ell_۱=x$ و در بازهٔ ۰ تا ۱۲s مسافت طی شده $\ell_۲=۲x$ است.

۳ با توجه به فرض مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av_{۰\to t}}=۳s_{av_{۱۲}}\xrightarrow{s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}}\frac{x}{t}=۳\frac{۲x}{۱۲}\Rightarrow t=۲s$$

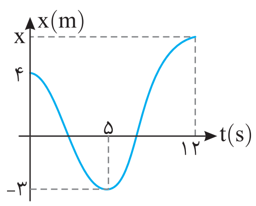
۴ بنابراین مدت زمانی که حرکت تندشونده است برابر خواهد شد با: $t'=۱۲-۲=۱۰s$

B ۹۶ ۱

خط فکری دقت کنید: هرگاه در مسئله یک مجهول غیرقابل محاسبه داشته باشیم، معمولاً آن مجهول هنگام محاسبات حذف می‌شود. بنابراین نگران مکان متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ نباشد و سرعت متوسط و تندی متوسط برحسب x یعنی مکان در $t=۱۲s$ به‌دست بیاورید و از هم کم کنید.

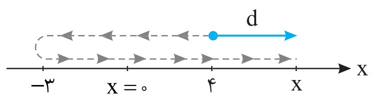
۱ مسافت طی شده در مدت ۱۲s را به کمک نمودار حساب کنید.

$$\ell=۴+۳+۳+x=۱۰+x$$



۲ تندی متوسط را در این مدت به‌دست می‌آوریم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۱۰+x}{۱۲}$

۳ در مدت ۱۲s متحرک از مکان $x=۴m$ به مکان x می‌رود و جابه‌جایی آن خواهد شد: $d=x-۴$



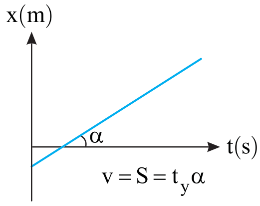
۴ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{x-۴}{۱۲}$

۵ s_{av} و v_{av} را از هم کم می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم.

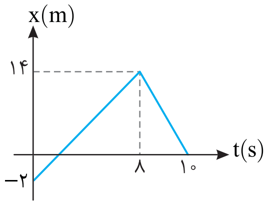
$$s_{av}-v_{av}=\frac{۱۰+x}{۱۲}-\frac{x-۴}{۱۲}\Rightarrow s_{av}-v_{av}=\frac{۱۰+x-x+۴}{۱۲}=\frac{۱۴}{۱۲}=\frac{۷}{۶}m/s$$

A ۹۷ ۱

یادآوری در هر بازه‌ای که نمودار مکان – زمان، خط راست مایل باشد، در تمام بازه‌های آن شیب خط یکسان است، یعنی در تمام لحظات سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر و مقدار آن ثابت است.



نمودار از دو قسمت در بازهٔ ۰ تا ۸s و ۸ تا ۱۰s تشکیل شده و در هر بازه تندی لحظه‌ای ثابت و برابر شیب نمودار است، بنابراین تندی در لحظهٔ $t=4s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ ۰ تا ۸s و تندی در لحظهٔ $t=9s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ ۸s تا ۱۰s از این رو خواهیم داشت:



$$v_{t=4s}=\frac{14-(-2)}{8-0}=2m/s \Rightarrow s_{t=4s}=2m/s$$

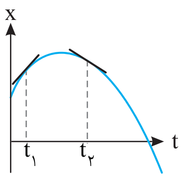
$$v_{t=9s}=\frac{0-14}{10-8}=-7\frac{m}{s} \Rightarrow s_{t=9s}=7m/s$$

در این صورت:

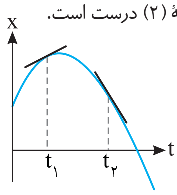
$$\frac{s_{t=4s}}{s_{t=9s}}=\frac{2}{7}$$

B ۹۸ ۲

خط فکری به دو مطلب باید دقت کنید. یکی اینکه در لحظهٔ t_1 سرعت مثبت است $(+10m/s)$ بنابراین شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در این لحظه باید مثبت باشد و در لحظهٔ t_2 سرعت منفی است $(-12m/s)$ و شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان منفی است و دیگر اینکه اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_1 از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_2 کمتر است $(|-12|>10)$، بنابراین قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_1 باید از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 کمتر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی کنید.



از گزینه‌های (۳) و (۴) شروع می‌کنیم. در گزینهٔ (۳) شیب خط مماس در لحظه‌های t_1 و t_2 هر دو منفی است یعنی سرعت در این لحظه‌ها منفی است و گزینهٔ (۳) نادرست است. در گزینهٔ (۴) شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌های t_1 و t_2 هر دو مثبت است یعنی سرعت در این لحظه‌ها مثبت است و گزینهٔ (۴) نادرست است. اما به سراغ گزینه‌های (۱) و (۲) می‌رویم. شیب خط مماس در نمودار شکل (۱) در لحظهٔ t_1 از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 بیشتر است و این گزینه نادرست است. در گزینهٔ (۲) قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 بزرگ‌تر بوده و گزینهٔ (۲) درست است.



نکته دقت کنید در فیزیک وقتی از بزرگی شیب خط مماس حرف می‌زنیم یعنی هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود بزرگی شیب خط مماس بیشتر می‌شود و تندی لحظه‌ای جسم بیشتر می‌شود.

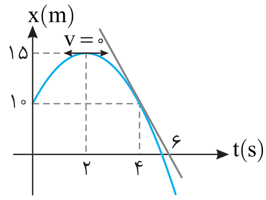
A ۹۹ ۲

خط فکری از شما در مورد سرعت لحظه‌ای سؤال شده بنابراین شما باید به سراغ شیب خط مماس در لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ بروید زیرا شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. البته در نقاط بیشینه و کمینه که خط مماس موازی محور افقی است، شیب صفر و سرعت متحرک صفر است حال با این اطلاعات مسئله را حل کنید.

۱ لحظهٔ $t=2s$، نقطهٔ بیشینه نمودار است و سرعت لحظه‌ای در این لحظه صفر است.

۲ با اطلاعات روی نمودار شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان را در لحظهٔ $t=4s$ به‌دست می‌آوریم

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-10}{6-4}=-5m/s$$



B ۱۰۰ ۱

خط فکری در این سؤال با نمودار $x-t$ سروکار داریم، به دو نکته زیر دقت کنید:

۱ سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\overset{\text{جابه‌جایی}}{\Delta x}}{\Delta t}$ یا شیب خط قاطع بین دو لحظه است و تندی متوسط برابر $s_{av}=\frac{\overset{\text{مسافت}}{\ell}}{\Delta t}$ است.

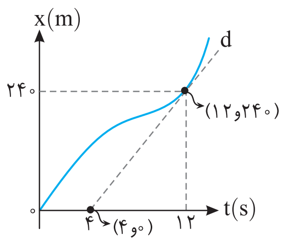
۲ سرعت در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در آن لحظه و تندی برابر اندازهٔ شیب خط مماس در آن لحظه خواهد بود.

در حل سؤال ابتدا با فرض مسئله یعنی برابری تندی در لحظهٔ $t=12s$ با تندی متوسط در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=14s$ شروع می‌کنیم، سپس خواستهٔ سؤال یعنی نسبت سرعت متوسط در دو بازهٔ گفته شده را حساب می‌کنیم.

۳ تندی در لحظهٔ $t=12s$ برابر شیب خط مماس d است.

یادآوری شیب خط برابر نسبت تغییرات محور قائم به تغییرات محور افقی است:

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تغییرات محور قائم}}{\text{تغییرات محور افقی}}=\frac{240-0}{12-4}=\frac{240}{8}=30m/s$$



شیب خط برابر تندی لحظه‌ای است، بنابراین: $s(t=12s)=30m/s \quad (I)$

۴ مکان متحرک در لحظهٔ $t=14s$ داده نشده و مطابق شکل در بازهٔ ۲s تا ۱۴s متحرک از مکان ۶۰m به مکان x می‌رسد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av}=\frac{x-60}{12} \qquad (II)$$

با توجه به فرض مسئله تندی در لحظهٔ ۱۲s با تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۱۴s باهم برابر است پس از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

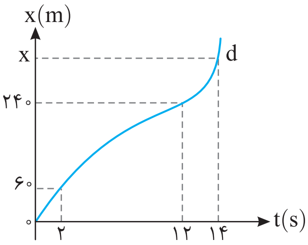
$$\frac{x-60}{12}=30 \Rightarrow x-60=360 \Rightarrow x=420m$$

یادآوری دو ثانیهٔ اول یعنی $t=0$ تا $t=2s$ و دو ثانیهٔ هفتم یعنی $t=12s$ تا $t=14s$

دو ثانیه هفتم	دو ثانیه ششم	دو ثانیه پنجم	دو ثانیه چهارم	دو ثانیه سوم	دو ثانیه دوم	دو ثانیه اول
۱۲s تا ۱۴s	۱۰s تا ۱۲s	۸s تا ۱۰s	۶s تا ۸s	۴s تا ۶s	۲s تا ۴s	۰ تا ۲s

۵ در دو ثانیهٔ اول (۰ تا ۲s) متحرک از مکان $x=0$ تا $x=60m$ جابه‌جا می‌شود و سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

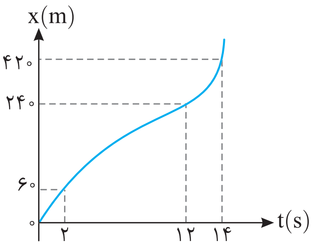
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{60-0}{2}=30m/s$$



۶ در دو ثانیهٔ هفتم (۱۲s تا ۱۴s) متحرک از مکان $x=۲۴۰m$ به مکان $x=۴۲۰m$ می‌رود و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v'_{av}=\frac{۴۲۰-۲۴۰}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰m/s$$

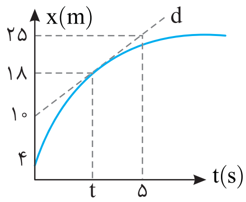
۷ نسبت v_{av} به v'_{av} را به‌دست می‌آوریم: $\frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$



B ۱۰۱ ۱

۱ لحظه‌ای که مکان متحرک $+۱۸m$ است را به راحتی به کمک شیب خط d می‌توانید به‌دست بیاورید.

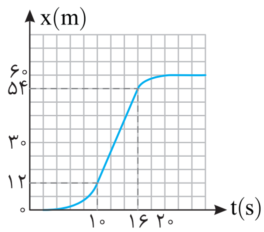
$$\frac{۲۵-۱۰}{۵-۰}=\frac{۱۸-۱۰}{t-۰}\Rightarrow ۳=\frac{۸}{t}\Rightarrow t=\frac{۸}{۳}s$$



۲ تندی لحظه‌ای در لحظهٔ t نیز شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان یعنی شیب خط d است. $v=\frac{۲۵-۱۰}{۵-۰}=۳m/s$

B ۱۰۲ ۳

قبل از حل مسئله دقت کنید تقسیم‌بندی روی محور tها ۲s، ۲s بوده و تقسیم‌بندی روی محور xها ۶m، ۶m است.



۱ به نمودار دقت کنید. در $t=۰$ نمودار بر محور t مماس شده یعنی شیب خط مماس در $t=۰$ صفر بوده و متحرک از حال سکون به راه افتاده است.

۲ تا لحظهٔ $t=۱۰s$ شیب نمودار در حال افزایش است پس به سرعت متحرک اضافه می‌شود.

۳ از لحظهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۱۶s$ شیب نمودار ثابت است و نتیجه می‌گیریم که سرعت در این بازه ثابت مانده و سرعت در این بازه همان تندی در لحظهٔ $t=۱۰s$ است.

۴ از لحظهٔ $t=۱۶s$ شیب خط مماس در حال کاهش است بنابراین سرعت در حال کاهش است.

۵ نتیجه اینکه بیشینه سرعت همان سرعت در بازهٔ ۱۰s تا ۱۶s است.

۶ از نمودار مشخص می‌شود که در لحظهٔ $t=۱۰s$ و $t=۱۶s$ مکان جسم به‌ترتیب ۱۲m و ۵۴m است. بنابراین سرعت خواهد شد: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۵۴-۱۲}{۱۶-۱۰}=\frac{۴۲}{۶}\Rightarrow v=۷m/s$

A ۱۰۳ ۴

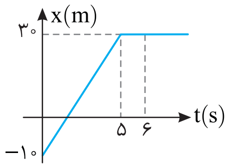
در لحظهٔ $t_۲$ خط مماس، خط افقی و شیب آن صفر است، یعنی در این لحظه سرعت برابر صفر است. بنابراین بازه‌ای را باید انتخاب کنیم که جابه‌جایی در آن بازه صفر باشد تا سرعت متوسط مانند سرعت لحظه‌ای در $t_۲$ صفر شود که با توجه به نمودار از $t_۱$ تا $t_۳$ و همچنین $t_۳$ تا $t_۵$ جابه‌جایی صفر می‌شود که در گزینه‌ها بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ را داریم.

A ۱۰۴ ۲

۱ در لحظهٔ $t=۰$ مکان متحرک $x=-۱۰m$ و در لحظهٔ $t=۶s$ مکان متحرک ۳۰m است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳۰-(-۱۰)}{۶}=\frac{۴۰}{۶}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{۲۰}{۳}m/s$$



۲ در بازهٔ ۰ تا ۵s نمودار یک خط راست مایل است و در تمام لحظات تندی (سرعت) یکسان و برابر شیب نمودار است بنابراین خواهیم داشت:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۳۰-(-۱۰)}{۵}=۸m/s\Rightarrow v_{t=۴s}=۸m/s$$

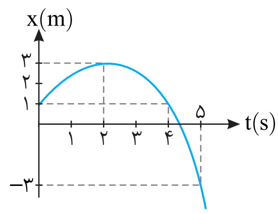
۳ اکنون نسبت را حساب می‌کنیم: $\frac{v_{av}}{v_{t=۴s}}=\frac{\frac{۲۰}{۳}}{۸}=\frac{۲۰}{۲۴}=\frac{۵}{۶}$

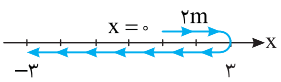
A ۱۰۵ ۴

در بازهٔ صفر تا ۴s متحرک از مکان $x=۱m$ به مکان $x=۱m$ جابه‌جا شده و جابه‌جایی آن صفر است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

در بازهٔ صفر تا ۵s مسافت طی شده متحرک برابر است با: $L=۲+۶=۸m$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۸}{۵}=۱/۶m/s$$





بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

شیب خط مماس در $t=۵s$ از شیب خط مماس در $t=۴s$ بیشتر است پس تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در $t=۵s$ از $t=۴s$ بزرگ‌تر است.

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

در لحظهٔ $t=۲s$ مکان متحرک $x=۳m$ و در لحظهٔ $t=۵s$ مکان متحرک $-۳m$ است، یعنی متحرک در خلاف جهت محور جابه‌جا شده و سرعت متوسط منفی است و در تمام بازهٔ ۲s تا ۵s سرعت منفی بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

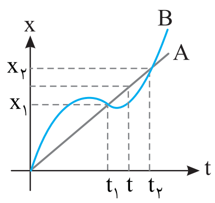
A ۱۰۶ ۴

خط فکری در تمام گزینه‌ها سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۱$ و یا $t_۱$ تا $t_۲$ برای دو متحرک A و B مقایسه شده است، بنابراین شما باید با توجه به تعریف سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ دربارهٔ مقایسهٔ سرعت متوسط‌ها اظهارنظر کنید.

در بازهٔ ۰ تا $t_۱$ مکان هر دو متحرک از صفر تا $x_۱$ تغییر کرده بنابراین جابه‌جایی متحرک A و B یکسان و برابر $\Delta x=x_۱$ بوده و سرعت متوسط A و B در این بازه برابر است.

همچنین در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ جابه‌جایی دو متحرک A و B یکسان و برابر $x_۲-x_۱$ است و در این بازه نیز سرعت متوسط یکی است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

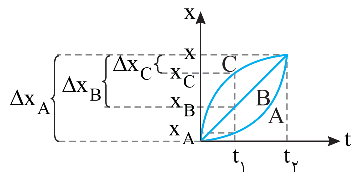
به نمودار نگاه کنید. در بازهٔ ۰ تا t جابه‌جایی A از B بیشتر بوده و سرعت متوسط A از B بیشتر است و گزینهٔ (۳) نادرست است.



B ۱۰۷ ۳

خط فکری به صورت سؤال دقت کنید، سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 از شما خواسته نشده است. بلکه سرعت متوسط از لحظهٔ t_1 تا t_2 مورد پرسش است بنابراین شما باید بررسی کنید که در این بازه جابه‌جایی A و B و C چگونه است؟ بـه نمـودار نـگاه کنید. کاملاً قابل تشـخیص که در بـازهٔ زمانی t_1 تـا t_2 جابه‌جایی‌ها به‌صورت $\Delta x_A > \Delta x_B > \Delta x_C$ اسـت و رابطهٔ سـرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta x})$ و A و B و C به‌صورت زیر است:

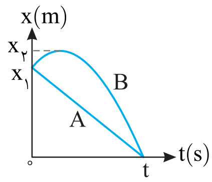
$$v_{av_A} > v_{av_B} > v_{av_C}$$



A ۱۰۸ ۴

به نمودار نگاه می‌کنیم:

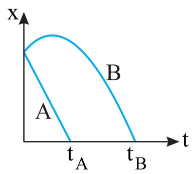
۱ در ابـتدای بـازه $(t=0)$ مـکان هـر دو متحـرک x_1 و در انتهای بـازه (t) مکان صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازه یکسان و در نتیجه سرعت متوسط A و B با هم برابر است.



۲ مسـافت طی شده توسط A کمتر از مسافت طی شده توسط B است. دقت کنید حرکت B از x_1 به x_2 رفته سپس به مکان $x=0$ می‌رسد. بنابراین تندی متوسط A از تندی متوسط B کمتر است و گزینهٔ (۴) پاسخ تست است.

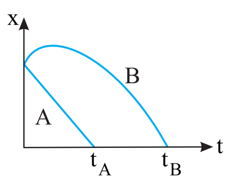
A ۱۰۹ ۴

تندی متوسط به مسیر حرکت و مسافت طی شده بسـتگی دارد. بـا توجه بـه نمـودار جابه‌جایی دو متحـرک یکسـان اسـت اما بـازهٔ زمانی B از A بزرگ‌تر اسـت و تنها می‌تـوان اظهارنظر کرد که سرعت متوسط B از سرعت متوسط A کوچک‌تر اسـت $(v_{av_B} < v_{av_A})$ اما در مورد تندی متوسـط نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد. زیرا متحرک B دارای مسـافت طی شده بیشـتری، در زمان طولانی‌تری است. به همین دلیل ممکن است تندی متوسط A با تندی متوسط B برابر یا از آن کمتر و یا بیشتر باشد.



A ۱۱۰ ۱

بـا توجـه بـه شـکل، جابه‌جایـی دو متحـرک یکسـان، اما زمـان حرکـت متحـرک B از زمان حرکت متحرک A بیشتر است $(t_B > t_A)$ از ایـن‌رو با توجه به تعریف سـرعت متوسـط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ سـرعت متوسط متحرک B از سـرعت متوسـط متحرک A کمتر می‌باشـد و گزینهٔ (۱) درست است.

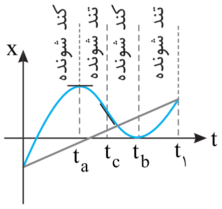


A ۱۱۱ ۴

یادآوری شـیب خط ممـاس بر نمودار مکان - زمان برابر سـرعت لحظه‌ای اسـت و شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر سرعت متوسط است.

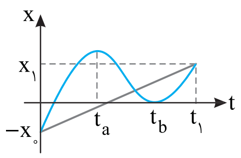
نکته اگر در هر بازهٔ زمانی، چند خط مماس بر نمودار رسـم کنیم و خط مماس به حالت قائم نزدیک شود، حرکت تندشونده و اگر به حالت افقی $(v=0)$ نزدیک شود، حرکت کندشونده است.

۱ از صفر تا t_a شـیب خط ممـاس در حال کاهش و سـرعت به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشـونده اسـت. از t_a تا t_b ابتدا قدرمطلق شـیب در حال افزایش بوده حرکت تندشـونده و سپس قدرمطلق شیب در حال کاهش بوده یعنی تندی به سـمت صفر می‌رود و در t_b تندی صفر است. یعنی حرکت کندشونده است و از t_b به بعد شیب در حال افزایش و حرکت تندشونده است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) هر دو نادرست است.



نکته جهت حرکت همان جهت سرعت است.

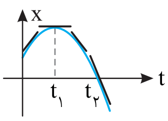
۲ در بـازهٔ ۰ تـا t_a و در بـازهٔ t_b تا t_1 شـیب خط ممـاس مثبت و سـرعت و جهت حرکت مثبت و در بازهٔ t_a تا t_b حرکت در جهت منفـی محور اسـت. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



۳ در بازهٔ ۰ تا t_1 متحرک از مکان منفی $(-x_0)$ به مکان مثبت x_1 می‌رود. بنابراین جابه‌جایی و سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ مثبت بوده و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۱۲ ۴

در هنـگام گذر از مبدأ مکان $(x=0)$ یعنی در لحظهٔ t_2 شیب خط مماس منفی است، پس سرعت منفی می‌باشد و گزینهٔ (۱) درست است. در بیشینه و کمینه نمودار $x-t$ به شرط تغییر علامت سرعت، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. در این حرکت نیز در t_1 جهت حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۲) درست است. ابتدا شیب خط مماس در حال کم شدن است تا در لحظهٔ t_1 به صفر می‌رسد پس ابتدا حرکت کندشونده بوده و پس از آن شیب خط در حال زیاد شدن است. (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بعد از t_1 حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۳) نیز درست است.



B ۱۱۳ ۳

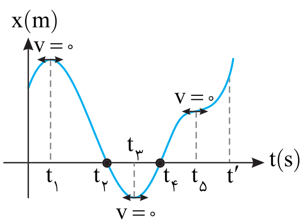
یادآوری ۱ هرگاه خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان شـود و شیب آن صفر گردد، متحرک در آن لحظه ساکن است.

یادآوری ۲ هـرگاه نمودار مکان - زمان محـور زمان را قطع کند یعنی متحرک از $x=0$ رد شود، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

یادآوری ۳ برای تغییر جهت متحرک علاوه بر صفر شـدن سرعت باید علامت سرعت قبل و بعد از آن لحظه تغییر کند.

به نمودار نگاه کنید. در سـه لحظهٔ t_1 و t_3 و t_5 مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و در این لحظات سرعت صفر است. یعنی ۳ بار سرعت صفر می‌شود. در لحظهٔ t_2 و t_4 نمودار محور زمان را قطع کرده یعنی متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. بنابراین ۲ بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

در لحظهٔ t_1 و t_3 سرعت صفر شده و در دو طرف این لحظه‌ها علامت سرعت عوض می‌شـود یعنی دو بار متحرک تغییر جهت می‌دهد اما در لحظهٔ t_5 با آنکه سـرعت صفر می‌شود، اما متحرک در جهت مثبت محور به حرکت ادامه می‌دهد و تغییر جهت نداریم.



B | ۱۱۴ | ۳

۱ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ t_1 افقی است و شیب آن صفر بوده از این رو در این لحظه سرعت صفر می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

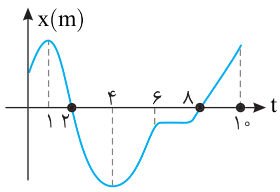
۲ علامت سرعت قبل و بعد از t_1 تغییر کرده پس جهت حرکت در این لحظه تغییر می‌کند و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ دقت کنید در این لحظه متحرک به مبدأ مکان می‌رسد. نمودار محور زمان را قطع نمی‌کند یعنی متحرک از مبدأ نمی‌گذرد و بعد از t_1 و قبل از t_1 مکان متحرک مثبت است. بنابراین علامت مکان تغییر نمی‌کند. پس بردار مکان تغییر جهت نداده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ قبل از t_1 شیب خط مماس کم می‌شود تا در t_1 صفر شود. پس قبل از t_1 حرکت کندشونده بوده و بعد از t_1 شیب خط مماس زیاد می‌شود یعنی حرکت تندشونده بوده است. پس در t_1 نوع حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۴) درست است.

A | ۱۱۵ | ۱

نکته هرگاه نمودار بالای محور زمان باشد، یعنی $x>0$ باشد، مکان متحرک مثبت و هرگاه نمودار پایین محور زمان قرار داشته باشد یعنی $(x<0)$ و مکان متحرک منفی است.



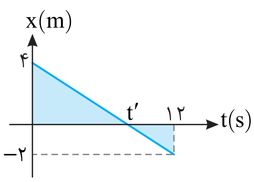
۱ در بازهٔ ۰ تا 1s متحرک در جهت مثبت محور و از 1s تا 4s در خلاف جهت محور، از 4s تا 6s در جهت مثبت محور و از 6s به بعد تا مدتی متحرک ساکن و در آخر در جهت مثبت محور در حرکت است، بنابراین کل مدتی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، $4-1=3s$ است.

۲ در بازهٔ 2s تا 8s نمودار پایین محور زمان بوده و بردار مکان متحرک منفی است. بنابراین در مدت $8-2=6s$ بردار مکان خلاف جهت محور xهاست.

۳ نسبت دو بازه بیان شده خواهد شد: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

A | ۱۱۶ | ۱

خط فکری جهت حرکت را علامت سرعت مشخص می‌کند. اگر سرعت مثبت باشد متحرک در جهت مثبت محور x ها در حال حرکت است و اگر سرعت منفی باشد متحرک در جهت منفی محور x ها در حال حرکت است. بنابراین شما باید از روی نمودار علامت سرعت را مشخص کنید و برای مشخص شدن بردار مکان‌های مثبت و منفی، باید مشخص کنید در چه بازه‌ای نمودار بالای محور زمان و در چه بازه‌ای نمودار پایین محور زمان است، یعنی شما باید t' را به‌دست بیاورید.



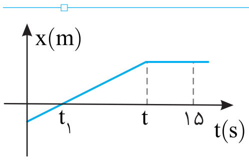
۱ در تمام مدت 12s متحرک در جهت منفی محور با تندی ثابت از مکان $+4m$ به مکان $-2m$ می‌رود.

۲ t' را به کمک نوشتن شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{4-(-2)}{12-0}=\frac{4-0}{t'-0}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4}{t'}\Rightarrow t'=8s$$

۳ در بازهٔ 8s تا 12s نمودار زیر محور زمان بوده و مکان متحرک به مدت $12-8=4s$ منفی است.

A | ۱۱۷ | ۱

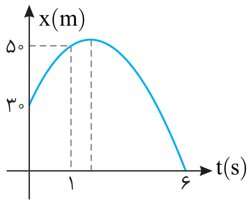


در مدت 15s متحرک ابتدا تا لحظهٔ t در یک جهت در حرکت بوده است و جابه‌جایی و مسافت با هم برابر است و از t تا 15s، جسم ساکن است. بنابراین در مدت 15s جابه‌جایی با مسافت برابر است و گزینهٔ (۱) درست است.

در بازهٔ صفر تا t_1 متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ و سپس تا لحظهٔ t در حال دور شدن از مبدأ است و بعد از t ساکن است و گزینهٔ (۲) نادرست است. در بازهٔ صفر تا t متحرک در جهت مثبت حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد، یعنی سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

C | ۱۱۸ | ۱

خط فکری وقتی نمودار سهمی است، باید معادلهٔ مکان - زمان تابع درجه ۲ شبیه $x=at^2+bt+c$ باشد و مختصات نقاط روی نمودار باید در معادله صدق کند. با توجه به این مطلب با یک مسئلهٔ ریاضی سروکار دارید و باید معادله را به‌دست بیاورید.



مختصات نقاط $(t=0, x_0=30m)$، $(t=1s, x=50m)$ و $(t=6s, x=0)$ را در معادلهٔ $x=at^2+bt+c$ جای‌گذاری می‌کنیم.

نمودار سهمی می‌باشد پس معادلهٔ حرکت به صورت $x=at^2+bt+c$ می‌باشد.

$$\begin{cases}t=0\\x=30m\end{cases}\Rightarrow 30=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow 30=c$$

$$\begin{cases}t=1s\\x=50m\end{cases}\Rightarrow 50=a(1)^2+b(1)+30\Rightarrow 20=a+b\quad(I)$$

$$\begin{cases}t=6s\\x=0\end{cases}\Rightarrow 0=a(6)^2+b(6)+30\Rightarrow -30=36a+6b\quad(II)$$

از حل دو معادلهٔ (I) و (II) مقدار a و b را به‌دست می‌آوریم:

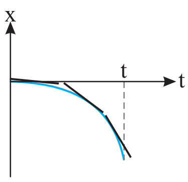
$$(I),(II)\begin{cases}(a+b=20)\times -6\\36a+6b=-30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6a-6b=-120\\ \underline{36a+6b=-30}\end{cases}+$$

$$30a=-150\Rightarrow a=-5\Rightarrow b=25$$

در رأس سهمی شیب خط مماس یعنی تندی صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

بنابراین مختصات رأس را حساب می‌کنیم. $t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{-25}{-10}=2.5s$

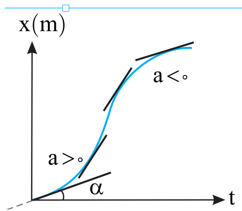
A | ۱۱۹ | ۴



با توجه به شکل روبه‌رو در لحظهٔ $t=0$ نمودار مکان - زمان بر محور زمان مماس بوده و شیب مماس یعنی سرعت لحظه‌ای، صفر است و گزینهٔ (۱) درست است. اگر به مماس‌های رسم شده دقت کنید قدرمطلق شیب خط مماس در حال افزایش است، یعنی تندی در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) درست است

از شروع حرکت، متحرک از مبدأ در جهت منفی محور و در حال دور شدن از مبدأ است بنابراین گزینهٔ (۳) نیز درست است و پاسخ گزینهٔ (۴) است.

A | ۱۲۰ | ۱

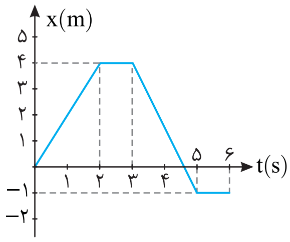


۱ با توجه به شکل روبه‌رو خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=0$ با محور زمان زاویهٔ α می‌سازد یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر نبوده بنابراین سرعت اولیه مخالف صفر بوده و متحرک دارای سرعت اولیه است $(v_0=\tan\alpha)$.

۲ با رسم چند خط مماس مشخص است که ابتدا شیب خط مماس در حال افزایش بوده یعنی تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده و سپس شیب خط مماس در حال کاهش بوده یعنی تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست و گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) نادرست است.

B ۱۲۱ ۲

۱ متحرک در بازهٔ صفر تا ۲s، چهار متر مسافت طی می‌کند، در بازهٔ ۲s تا ۳s ساکن بوده و در بازهٔ ۳s تا ۵s از مکان ۴m به مکان −۱m رفته و مسافت ۵m را می‌پیماید و از لحظهٔ t=۵s به بعد ساکن می‌ماند. بنابراین مسافت طی شده از صفر تا ۶s جمعاً l=۴+۵=۹m است و تندی متوسط برابر است با:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۹}{۶}=۱/۵m/s$$

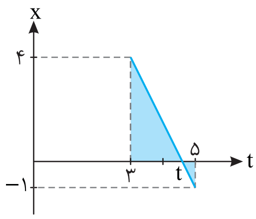
بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

۲ در بازهٔ ۰ تا ۶s متحرک از مکان $x=۰$ به مکان $x=-۱m$ می‌رود و بردار جابه‌جایی برابر $\vec{d}=-\vec{i}$ است و از این رو سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s خواهد شد:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{-\vec{i}}{۶}=-\frac{۱}{۶}\vec{i}$$

بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد لحظه‌ای است که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ می‌گذرد و نمودار محور زمان را قطع می‌کند. برای به دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم. دو مثلث رنگی متشابه است، نسبت تشابه را برای دو مثلث می‌نویسیم:



$$\frac{t-۳}{۵-t}=\frac{۴}{۱}\Rightarrow t-۳=۲۰-۴t\Rightarrow ۵t=۲۳\Rightarrow t=۴/۶s$$

بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

۴ متحرک از لحظهٔ ۳s تا لحظهٔ ۵s یعنی به مدت ۲s در خلاف جهت محور در حرکت است و گزارهٔ (ت) درست است.

B ۱۲۲ ۳

خط فکری در فیزیک دبیرستان خبری از زمان منفی نیست و همواره $t>۰$ است. از طرفی بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ بگذرد. بنابراین در تابع درجهٔ یک باید معادله دارای ریشهٔ مثبت باشد. همچنین در تابع درجهٔ ۲ باید معادله دارای ریشهٔ مثبت بوده در این صورت بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. اما اگر معادلهٔ درجهٔ ۲ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، بردار مکان در آن لحظه تغییر جهت نمی‌دهد.

الف) $x=t+۴\Rightarrow ۰=t+۴\Rightarrow t=-۴s$

ریشه منفی شد و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^۲-۴t+۵=۰\Rightarrow t=\frac{+۴\pm\sqrt{۱۶-۲۰}}{۲},\ t=\frac{۴\pm\sqrt{-۴}}{۲}$

این معادله ریشه ندارد، یعنی متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

پ)

$$x=۲t^۲-۴t-۲=۰\Rightarrow t^۲-۲t-۱=۰\Rightarrow t=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۴}}{۲}=۱\pm\sqrt{۲}=\begin{cases}۱+\sqrt{۲}>۰\\ ۱-\sqrt{۲}<۰\end{cases}$$

بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^۲-۶t+۹=۰\Rightarrow x=(t-۳)^۲$

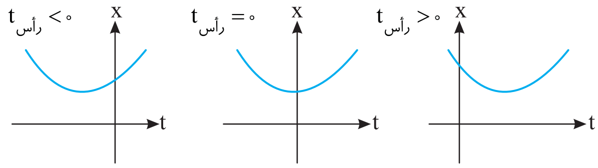
این عبارت همواره مثبت یعنی x تغییر علامت نمی‌دهد. از طرفی این معادله دارای ریشهٔ مضاعف $t=۳s$ و همان‌گونه که گفتیم در ریشهٔ مضاعف بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

بازی با سؤال در چه تعداد از معادله‌های حرکت این مسئله، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **نکته** هرگاه معادلهٔ حرکت درجهٔ اول باشد نمودار مکان - زمان آن یک خط راست مایل است، یعنی متحرک در یک جهت در حال حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

نکته در تابع‌های مکان - زمان درجهٔ ۲، در رأس سهمی متحرک تغییر جهت می‌دهد اگر زمان رأس سهمی مثبت باشد، متحرک تغییر جهت می‌دهد و اگر منفی یا صفر باشد متحرک تغییر جهت نمی‌دهد. (در فیزیک دبیرستان بازهٔ زمانی منفی را در نظر نمی‌گیریم)



الف) $x=t+۴$ تابع درجه اول بوده و متحرک روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^۲-۴t+۵\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۴}{۲\times۱}=۲s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

پ) $x=۲t^۲-۴t-۲=۰\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۴}{۲\times۲}=۱>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^۲-۶t+۹=۰\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۶}{۲}=۳s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

گزینهٔ ۱

B ۱۲۳ ۲

یادآوری برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت باید مختصات رأس سهمی $(t=\frac{-b}{۲a})$ را به‌دست آورد. اگر زمان مثبت به‌دست آمد، متحرک (در $t=\frac{-b}{۲a}$) تغییر جهت می‌دهد.

۱ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت کافی است مختصات رأس سهمی را به‌دست بیاوریم.

$$x=۲t^۲-۴t-۶\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۴}{۲\times۲}\Rightarrow t=۱s$$

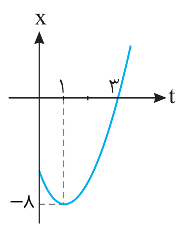
۲ مکان لحظهٔ تغییر جهت را با قرار دادن $t=۱s$ در معادلهٔ حرکت به‌دست می‌آوریم.

$$x=۲(۱)^۲-۴(۱)-۶=۲-۴-۶\Rightarrow x=-۸m$$

۳ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان، در معادلهٔ حرکت x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x=۲t^۲-۴t-۶=۰\Rightarrow t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=۳s$$

۴ بنابراین در لحظهٔ $t=۱s$ متحرک در مکان $-۸m$ و در لحظهٔ $t=۳s$ متحرک در مکان $x=۰$ بوده و در این بازهٔ زمانی $+۸m$ جابه‌جا می‌شود.



B ۱۲۴ ۲

خط فکری باید نمودار $x-t$ را رسم کنید، تا مشخص شود آیا نمودار محور زمان را قطع می‌کند یا نه، زیرا اگر محور زمان را قطع کند، کمترین فاصله از مبدأ مکان صفر می‌شود. اما اگر محور زمان را قطع نکند باید به کمک نمودار کمترین فاصله تا مبدأ مکان را مشخص کرد.

۱ مقدار $\Delta=b^2-4ac$ را به‌دست می‌آوریم:

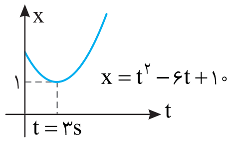
$$x=t^2-6t+10\Rightarrow\Delta=(-6)^2-4\times10\Rightarrow\Delta=36-40=-4<0$$

بنابراین این معادله ریشه ندارد.

۲ مختصات رأس سهمی این معادله را حساب می‌کنیم.

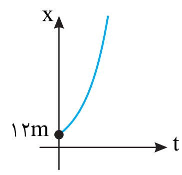
$$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=-\frac{-6}{2}\Rightarrow t=3s$$

$$x=t^2-6t+10\xrightarrow{t=3s}x=3^2-6\times3+10\Rightarrow x=+1m$$



۳ بنابراین شکل نمودار می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد و کمترین فاصله از مبدأ زمان در لحظهٔ $t=3s$ بوده و برابر $x=1m$ است.

B ۱۲۵ ۱



معادلهٔ حرکت به صورت $x=(t+3)(t+4)$ می‌باشد، هر دو ریشهٔ این معادله منفی است و می‌دانیم که زمان نمی‌تواند منفی باشد، پس نمودار $x-t$ تقریباً مشابه شکل مقابل بوده و بالای محور زمان قرار می‌گیرد. از این رو کمترین فاصله از مبدأ در $t=0$ رخ می‌دهد.

B ۱۲۶ ۱

خط فکری ابتدا بررسی کنید که در بازهٔ زمانی داده شده، متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟ برای این منظور باید به سراغ مختصات رأس سهمی $t=-\frac{b}{2a}$ بروید.

رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم. $x=2t^2+4t-8\xrightarrow{\text{رأس سهمی}}t=-\frac{4}{2\times2}=-1<0$

بنابراین این متحرک تغییر جهت نداده و همواره در یک جهت روی محور xها در حرکت است و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است.

B ۱۲۷ ۲

خط فکری باید مختصات رأس سهمی $(t=-\frac{b}{2a})$ را به‌دست بیاورید تا مشخص شود لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ زمانی ارائه شده در مسئله قرار دارد یا نه؟ اگر لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ بیان شده نبود یعنی متحرک در آن بازهٔ زمانی در یک جهت در حرکت است بنابراین مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی و در نتیجه تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر است.

مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم. $t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=-\frac{-1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}s$

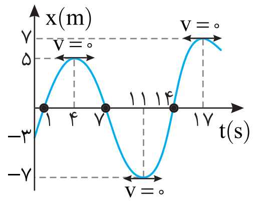
این عدد بین بازهٔ 1s تا 4s قرار ندارد. یعنی متحرک در این بازهٔ زمانی همواره در یک جهت در حال حرکت بوده و مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی در آن بازه برابر $(\ell=|\vec{d}|)$ است، در نتیجه تندی متوسط $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ با اندازهٔ سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{d}{t})$ برابر است.

B ۱۲۸ ۲

برای آنکه در تمام بازه‌های زمانی اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت با هم برابر باشند، باید متحرک در یک جهت در حال حرکت باشد یعنی متحرک تغییر جهت ندهد. برای آنکه متحرک تغییر جهت ندهد باید $t=-\frac{b}{2a}$ یعنی زمان رأس سهمی منفی شود، بنابراین باید a و b هم‌علامت باشند، در این صورت $ab>0$ خواهد بود.

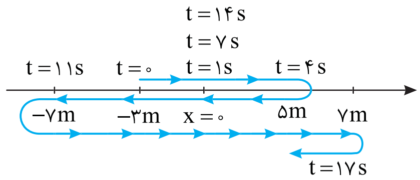
A ۱۲۹ ۲

۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان – زمان تندی صفر می‌شود. بنابراین در لحظهٔ $t=4s$ و $t=11s$ و $t=17s$ تندی متحرک صفر شده و سوی حرکت آن تغییر کرده است. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.



۲ هرگاه متحرک از مبدأ مکان بگذرد، جهت بردار مکان در آن لحظه تغییر می‌کند. در $t=1s$، $t=7s$ و $t=14s$ متحرک از مبدأ گذر کرده است بنابراین سه بار بردار مکان تغییر جهت داده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک در بازهٔ صفر تا 17s به شکل زیر است.



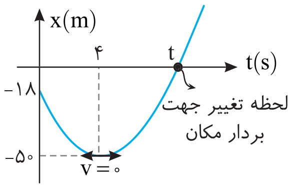
مطابق شکل مسیر، از $t=0$ تا $t=4s$ متحرک در جهت مثبت محور از مکان $-3m$ به مکان $+5m$ می‌رود سپس در بازهٔ $t=4s$ تا $t=11s$ از مکان $+5m$ تا مکان $-7m$ در جهت منفی محور در حرکت است و سرانجام در بازهٔ $t=11s$ تا $t=17s$ یعنی به مدت 6s در جهت مثبت محور از مکان $-7m$ به مکان $+7m$ می‌رود یعنی ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود.

در این صورت جمعاً 10s در جهت مثبت محور در حرکت بوده است و گزارهٔ (پ) درست است.

۴ متحرک در بازهٔ $t=11s$ تا $t=14s$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است و گزارهٔ (ت) نادرست است.

C ۱۳۰ ۱

خط فکری چاره‌ای نیست باید معادلهٔ حرکت را به کمک نقاط مشخص شده روی نمودار به‌دست آورده سپس به کمک آن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان (t) را به‌دست آورد.



۱ شکل نمودار به صورت سهمی است یعنی $x=at^2+bt+c$. مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادله صدق کند از این رو:

$$\begin{cases}t=0\\x=-18m\end{cases}\Rightarrow x=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow-18=c$$

$$\begin{cases}t=4\\x=-50m\end{cases}\Rightarrow-50=a(4)^2+b(4)-18\Rightarrow-50=16a+4b-18$$

$$\Rightarrow-32=16a+4b\quad(1)$$

۲ نقطهٔ $t=4s$ رأس سهمی می‌باشد و می‌دانیم رأس سهمی $t=-\frac{b}{2a}$ است.

پس: $t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow4=-\frac{b}{2a}\Rightarrow b=-8a\quad(2)$

۳ به کمک رابطهٔ (۱) و (۲) مقدار a و b را حساب می‌کنیم.

$$(1),(2)\Rightarrow16a+4(-8a)=-32\Rightarrow-16a=-32\Rightarrow a=2\ ,\ b=-16$$

۴ پس معادلهٔ حرکت به صورت $x=2t^2-16t-18$ است. زمانی بردار مکان تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند:

$$2t^2-16t-18=0\Rightarrow t^2-8t-9=0\Rightarrow(t-9)(t+1)=0$$

$\Rightarrow t=9s\ ,\ t=-1s$ (غ.ق.ق)

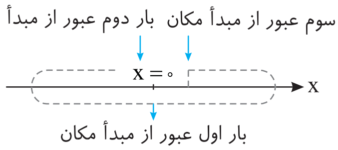
بنابراین در $t=9s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. زمانی متحرک تغییر جهت می‌دهد که سرعت متحرک صفر شود و علامت سرعت قبل و بعد از آن تغییر کند که همان رأس سهمی می‌باشد. $\Delta t=t_2-t_1=9-4=5s$

B | ۱۳۱ | ۳

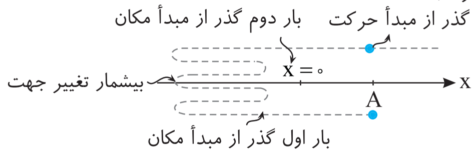
مسیرهای ممکنی که ذره طی می‌کند را بررسی می‌کنیم.

متحرک در مکان‌های مثبت قرار دارد و دو حالت ممکن است پیش بیاید.

۱ متحرک در جهت مثبت شروع به حرکت کند، در این صورت برای آنکه از مبدأ مکان بگذرد باید متوقف شـده و برگردد و پس از عبور از مبدأ باید مجدداً متوقف شـده و برگردد و برای دومین بار از مبدأ بگذرد، بنابراین حداقل دو بار از مبدأ حرکت می‌گذرد. اما چند بار تغییر جهت می‌دهد. ذره می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت داده سپس از مبدأ مکان بگذرد.

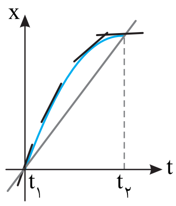


۲ متحـرک در جهت منفی محور شـروع به حرکت کند در این صورت مطابق شـکل می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت دهد و دو بار از مبدأ مکان بگذرد اما هنوز از مبدأ حرکت خود عبور نکرده باشد.

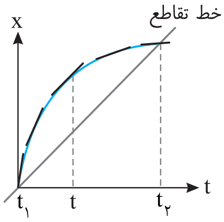


C | ۱۳۲ | ۴

خط فکری شیب خط قاطع نمودار بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر سـرعت متوسـط و شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه برابر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای (تندی لحظـه‌ای) در آن لحظـه اسـت. بنابراین شـما باید خط قاطع بین t_1 و t_2 و چند خط مماس بر نمودار از لحظهٔ t_1 تا t_2 رسـم کرده شـیب خطوط مماس را با شـیب خط قاطع مقایسه کنید تا متوجه شوید کدام بزرگ‌تر است و گزینه را انتخاب کنید.



به‌شکل خوب نگاه کنید. در ابتدا شیب خطوط مماس از شیب خط قاطع بیشتر است یعنی سرعت لحظه‌ای از سـرعت متوسط بزرگ‌تر است. بعد از لحظهٔ t خط مماس به سـمت افقی شـدن می‌رود و شـیب آن از شیب خط قاطع کمتر می‌شود یعنی سرعت لحظه‌ای از سرعت متوسط کوچک‌تر می‌شود.



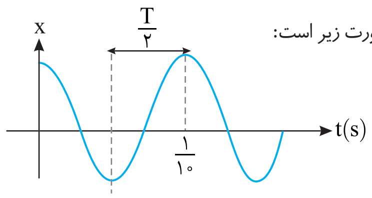
B | ۱۳۳ | ۱

خط فکری در حل این مسـئله چاره‌ای نیسـت و باید شما رسم توابع مثلثاتی را که از ریاضی فراگرفته‌اید به کار ببرید و نقاط بیشـینه و کمینهٔ نمودار را مشـخص کنید. زیرا در این نقاط سـرعت متحرک صفر شـده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و تعیین بازه‌های زمانی بین یک کمینه و بیشینهٔ متوالی یعنی حل مسئله.

یادداشت ریاضی در توابع سینوسی و کسینوسی به‌صـورت $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است.

دورهٔ تناوب تابع $x=0/4\cos 20\pi t$ خواهد شد: $T=\frac{2\pi}{20\pi}=\frac{1}{10}s$

نمودار تابع به‌صورت زیر است:



بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت متوالی خواهد شد:

$$\frac{T}{2}=\frac{\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{20}s\Rightarrow T=0/05s$$

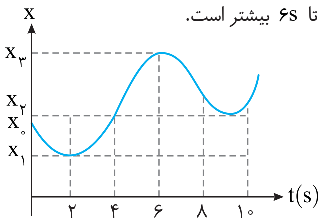
A | ۱۳۴ | ۳

خط فکری تندی متوسـط یعنی مقدار مسافت طی شده تقسیم بر مدت زمان طی کردن آن مسـافت، بنابراین شـما باید در هر بازه زمانی مسافت طی شده را بررسی کرده تا بتوانید تندی متوسط را در بازه‌های مختلف مقایسه کنید.

با توجه به نمودار مسـافت طی شـده در بازهٔ ۲s تا ۴s از مسافت طی شده در بازه صفر تا ۲s بیشـتر اسـت و هم‌چنین در بازهٔ ۴s تا ۶s مسـافت طی شده از بازهٔ صفر تا ۲s بیشتر است. یعنی در هر دو ثانیه (از ۲ تا ۶) مسافت طی شده بزرگ‌تر از بازهٔ صفر تا ۲s است بنابراین تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s از ۰ تا ۲s بیشتر می‌شود.

در مدت ۴s بین ۲s تا ۶s مسـافت طی شـده از مدت ۴s بین ۶s تا ۱۰s بیشـتر است و تندی در بازهٔ ۲s تا ۶s از تندی در ۶s تا ۱۰s بیشتر است. اگر بازه بین ۲s تا ۱۰s را به دو قسـمت ۴s تقسـیم کنیم در ۴s اول تندی از ۴s دوم بیشـتر است بنابراین تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s قطعاً از ۶s تا ۱۰s بیشتر است.

اما داستان اصلی در مورد بازهٔ صفر تا ۶s و مقایسهٔ آن با ۲s تا ۱۰s است. بازهٔ ۲s تا ۶s در هر دو مشترک است. اگر بازهٔ ۶s تا ۱۰s را به دو بازهٔ دو ثانیه‌ای ۶ تا ۸ و ۸ تا ۱۰ تقسـیم کنیم در هر دو بازه مسـافت طی شده با توجه به نمودار از مسافت طی شده در بازه ۰ تا ۲s بیشتر بوده بنابراین در بازه ۶s تا ۸s و ۸s تا ۱۰s تندی از بازهٔ ۰ تا ۲s بیشتر است در نتیجه به‌طور کلی تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۱۰s از تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s بیشتر است.



B | ۱۳۵ | ۴

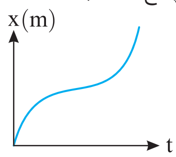
از نمودار مسافت - زمان چیز زیادی به‌دست نمی‌آوریم

۱ مسافت همواره مثبت است بنابراین متحرک می‌تواند از مکان‌های منفی یا مثبت و یا از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده باشد.

۲ متحرک ممکن اسـت متوقف شده و در همان جهت ادامهٔ حرکت داده و یا متوقف شده و تغییر جهت دهد.

۳ متحرک ممکن اسـت در جهت مثبت محـور و در مکان‌های مثبت و در مکان‌های منفی دارای جابه‌جایی‌ها مثبت یا منفی باشد.

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند پاسخ مسئله باشد.



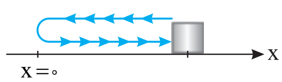
پنجره ۱ روبه‌روی ۲

B | ۱۳۵ | ۴

۱ ۱ بـردار مـکان متحـرک برابر اسـت با برداری که مبدأ مکان را به مکان جسم وصل می‌کند. مکان جسم را در لحظهٔ $t=3s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^2-4t+4\Rightarrow x(3)=3^2-4(3)+4=+1\Rightarrow \vec{x}=\vec{i}$$

۲ بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ $x=0$ بگذرد و مکان تغییر علامت دهد: $x=t^2-4t+4\Rightarrow 0=t^2-4t+4\Rightarrow (t-2)^2\geq 0\Rightarrow t=2s$



$(t-2)^2$ یـک عبـارت همیشـه مثبت اسـت، یعنـی مـکان هرگز تغییر علامت نمی‌دهد. در لحظهٔ $t=2s$ مکان متحرک صفر می‌شود، اما متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

A ۱۳۵ ۳

۲ مکان متحرک در لحظهٔ $t=۰$ (مکان اولیهٔ متحرک) خواهد شد:

$$x=at^{۲}+bt+۲ \xrightarrow{t=۰} x_{۰}=+۲m$$

لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظهٔ گذر از مبدأ مکان $(x=۰)$ بنابراین متحرک از مکان $+۲m$ به $x=۰$ می‌رود و جابه‌جایی آن $-۲m$ است.

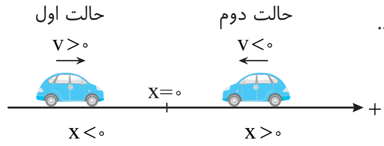
نمای ۹

A ۱۳۵ ۲

۳ وقتی متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است دو حالت دارد.

حالت اول: سرعت متحرک مثبت و مکان آن منفی باشد یعنی متحرک از مکان‌های منفی $(x<۰)$ در جهت مثبت محور در حال حرکت باشد. $(v>۰)$ بنابراین حاصل‌ضرب $xv<۰$ می‌شود.

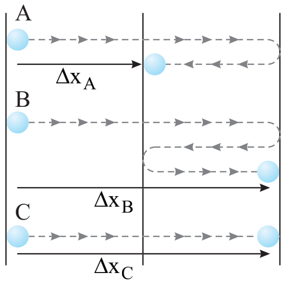
حالت دوم: سرعت متحرک منفی و مکان آن مثبت باشد یعنی متحرک از مکان‌های مثبت $(x>۰)$ در جهت منفی محور در حال حرکت باشد $(v<۰)$ در این صورت نیز $xv<۰$ می‌شود.



نمای ۶

A ۱۳۵ ۲

۴ بازهٔ زمانی برای هر سه متحرک یکسان است $(\Delta t_A=\Delta t_B=\Delta t_C=\Delta t)$.



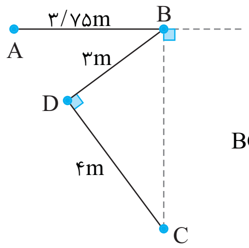
در این مدت متحرک B بیشترین مسافت را طی کرده بنابراین تندی متحرک B $(s_{av}=\ell/\Delta t)$ از بقیه بیشتر است.

جابه‌جایی متحرک B و C یکسان اما جابه‌جایی متحرک A کمتر از آن‌هاست بنابراین متحرک A دارای کمینهٔ سرعت متوسط $(v_{av}=\Delta x/\Delta t)$ است.

نمای ۲ و ۳

B ۱۳۵ ۳

۵ برای یافتن سرعت متوسط باید جابه‌جایی متحرک از A تا B را حساب کنیم.



۱ طول BC را به‌دست می‌آوریم.

$$BC^{۲}=BD^{۲}+DC^{۲}\Rightarrow BC=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵m$$

۲ فاصلهٔ AC را حساب می‌کنیم.

$$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}\Rightarrow AC^{۲}=(۳/۷۵)^{۲}+۵^{۲}$$

$$AC^{۲}=۵^{۲}(۰/۷۵^{۲}+۱^{۲})=۵^{۲}((\frac{۳}{۴})^{۲}+۱^{۲})$$

$$AC^{۲}=۵^{۲}(\frac{۹+۱۶}{۱۶})\Rightarrow AC=\frac{۵\times۵}{۴}\Rightarrow AC=۶/۲۵m$$

۳ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۶/۲۵}{۵}\Rightarrow v_{av}=۱/۲۵\frac{m}{s}$$

نمای ۲ و ۳

A ۱۳۵ ۱

۶ متحرک ابتدا از مکان ۵m به مکان ۳m رفته و مسافت $\ell_{۱}=۲m$ را طی کرده سپس از مکان ۳m به مکان ۷m $(\ell_{۲}=۴m)$ و از مکان ۷m به مکان ۵m $(\ell_{۳}=۲m)$ و سرانجام از مکان ۵m به مکان ۱۰m $(\ell_{۴}=۵m)$ می‌رود و مسافت طی شده در این مدت خواهد شد.

$$\ell=\ell_{۱}+\ell_{۲}+\ell_{۳}+\ell_{۴}=۲+۴+۲+۵\Rightarrow \ell=۱۳m$$

تندی متوسط در این مدت خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۱۳}{۲۰}\Rightarrow s_{av}=۰/۶۵\frac{m}{s}$$

نمای ۶

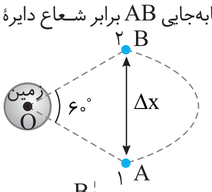
A ۱۳۵ ۲

۷

۱ زاویهٔ بین دو موقعیت ماه ۶۰° است. یعنی ماه در این مدت مسافتی برابر $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره طی می‌کند.

$$\ell=\frac{۱}{۶}(۲\pi r)\Rightarrow \ell=\frac{\pi r}{۳}$$

۲ مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است بنابراین جابه‌جایی AB برابر شعاع دایرهٔ مسیر حرکت ماه است. $\Delta x=r$

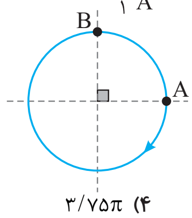


۳ نسبت را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{\frac{\pi r}{۳}}{r}=\frac{\pi}{۳}$$

نمای ۱

بازی با سؤال متحرکی مطابق شکل روی مسیر دایره شکلی به شعاع ۳۰m در مدت ۳s در جهت ساعتگرد از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. تندی متوسط متحرک از A تا B چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۵π ۲) ۱۵π ۳) ۱۰π ۴) $۳/۷۵\pi$

پاسخ از A تا B در جهت ساعتگرد $\frac{۳}{۴}$ دایره طی شده پس مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=\frac{۳}{۴}(۲\pi r)\Rightarrow \ell=\frac{۳}{۴}\times(۲\pi\times۳۰)=۴۵\pi\ m$$

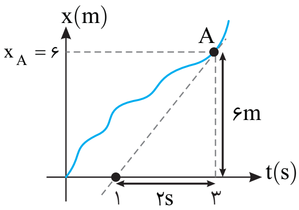
تندی متوسط خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۴۵\pi}{۳}=۱۵\pi\ m/s$$

گزینهٔ ۲

B ۱۳۵ ۲

۸ ابتدا با توجه به سرعت متوسط از لحظهٔ $t=۰$ تا $t=۳s$ مکان متحرک را در $t=۳s$ به‌دست می‌آوریم:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{x_A-۰}{۳}\Rightarrow x_A=۶m$$

سرعت در نقطهٔ A برابر شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A می‌باشد.

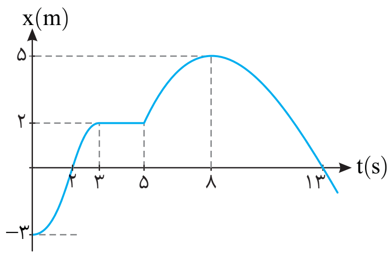
$$v=\frac{۶-۰}{۳-۱}=۳m/s$$

نمای ۶

B ۱۳۵ ۴

۹ در لحظهٔ $t=۲s$ متحرک دارای سرعت است، زیرا شیب خط مماس در این نقطه موازی محور زمان نیست و گزینهٔ (۱) نادرست است.

متحرک در بازهٔ ۳s تا ۵s ساکن است اما تغییر جهت نمی‌دهد و تنها در لحظهٔ $t=۸s$ یعنی یک‌بار تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.



متحرک از ابتدا $t=۰$ تا $t=۳s$ در جهت مثبت محور در حال حرکت بوده و در بازهٔ ۳s تا ۵s ساکن و مجدداً در بازهٔ ۵s تا ۸s در جهت مثبت حرکت می‌کند یعنی جمعاً ۶s در حال حرکت در جهت مثبت محور است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

متحرک در بازهٔ ۰ تا ۲s از مکان $-۳m$ به مکان $x=۰$ می‌رود و در بازهٔ ۸s تا ۱۳s نیز از مکان $x=۵$ به سوی $x=۰$ می‌رود یعنی جمعاً ۷s در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

نمای ۵ و ۸

B ۱۳۵ ۴

۱۰ خط فکری سرعت متوسط در مدت $۵s$ برابر $۲m/s$ است، بنابراین شما می‌توانید جابه‌جایی متحرک در این مدت را بیابید. سپس به کمک تندی متوسط، مسافت طی شده را حساب کنید تا بتوانید بیشترین فاصله متحرک از مبدأ در مدت $۵s$ را به‌دست بیاورید.

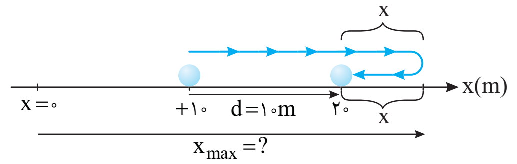
۱ جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم. $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{\Delta x}{۵}\Rightarrow \Delta x=۱۰m$

مکان متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ خواهد شد. $\Delta x=x-x_۰\Rightarrow ۱۰=x-۱۰\Rightarrow x=۲۰m$

۲ تندی متوسط $۴\frac{m}{s}$ است. مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}\Rightarrow ۴=\frac{\ell}{۵}\Rightarrow \ell=۲۰m$$

۳ متحرک یکبار تغییر جهت داده و مسیری مطابق شکل را طی کرده است.



با توجه به شکل داریم: $\ell=d+x+x\Rightarrow ۰=۱۰+۲x\Rightarrow x=۵m$

۴ بنابراین بیشترین فاصله از مبدأ خواهد شد. $x_{max}=۲۰+۵=۲۵m$

نمای ۳

پنجره ۳

A ۱۳۶ ۴

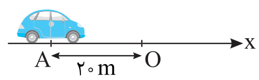
یادآوری حرکت یکنواخت روی خط راست یعنی حرکت با سرعت ثابت که در آن تندی لحظه‌ای ثابت و جهت حرکت تغییر نمی‌کند.

۱ در حرکت یکنواخت تندی ثابت است و جهت حرکت تغییر نمی‌کند و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است بنابراین در هر بازهٔ دلخواهی مثلاً $۱s$ تا $۵s$ یا $۰s$ تا $۸s$ اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر و همچنین با اندازهٔ سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر است. $(v_{av}=s_{av}=s)$

۲ جهت حرکت ثابت است اما ممکن است در مسیر حرکت متحرک از مبدأ مکان بگذرد و بردار مکان تغییر جهت دهد بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۳۷ ۳

یادآوری معادلهٔ حرکت یکنواخت روی خط راست به صورت $x=vt+x_۰$ است که در آن v سرعت لحظه‌ای متحرک و $x_۰$ مکان اولیهٔ متحرک یعنی مکان متحرک در مبدأ زمان $(t=۰)$ است.



در مبدأ زمان متحرک در نقطهٔ A بوده یعنی مکان اولیهٔ آن $x_۰=-۲۰m$ است. سرعت متحرک در جهت مثبت محور xهاست بنابراین سرعت آن $v=۸m/s$ بوده و معادلهٔ مکان - زمان این متحرک در SI خواهد شد: $x=۸t-۲۰$

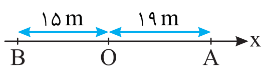
بازی با سؤال **متحرکی با سرعت ثابت مطابق شکل از نقطهٔ A روی محور xها به حرکت درمی‌آید و پس از ۱۷s به نقطهٔ B می‌رسد. معادله حرکت کدام است؟ (O مبدأ است.)** از کتاب درسی

۱) $x=-۲t+۱۹$

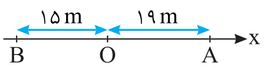
۲) $x=۳t-۱۹$

۳) $x=۲t+۱۹$

۴) $x=۵t-۱۵$



پاسخ خط فکری **در حرکت یکنواخت روی خط راست سرعت در تمام لحظات ثابت است و مقدار آن را از هر بازهٔ زمانی می‌توان حساب کرد بنابراین شما در بازهٔ زمانی حرکت از A تا B می‌توانید سرعت متحرک را حساب کنید.**



۱ مکان اولیه متحرک نقطهٔ A یعنی $x_۰=+۱۹m$ است.

۲ سرعت متحرک خواهد شد:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=۱۷s}v=\frac{-۱۵-۱۹}{۱۷-۰}\Rightarrow v=-۲m/s$$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=-۲t+۱۹$

گزینهٔ ۱

A ۱۳۸ ۲

خط فکری ذره دارای حرکت با سرعت ثابت بوده و جهت حرکت آن تغییر نمی‌کند. دو راه‌حل برای این مسئله داریم. یکی راه‌حل کلی که در آن اعداد داده شده را در معادلهٔ حرکت $x=vt+x_۰$ قرار می‌دهیم و مقدار v و $x_۰$ را به‌دست آورده و معادله را می‌نویسیم و دیگری استفاده از درک حرکت و گزینه‌ها (راه‌حل دوم).

راه‌حل اول: در معادلهٔ حرکت، زمان‌ها و مکان‌های معادل آن‌ها را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}t=۲s\,,x=۰\xrightarrow{x=vt+x_۰}۰=۲v+x_۰\\ t=۴s\,,x=-۶m\Rightarrow -۶=۴v+x_۰\end{cases}\Rightarrow -۶=۲v\Rightarrow v=-۳m/s$$

مکان اولیه را به دست می‌آوریم: $۰=۲v+x_۰\Rightarrow ۰=۲(-۳)+x_۰\Rightarrow x_۰=+۶m$

بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=-۳t+۶$

راه‌حل دوم: متحرک ابتدا به مبدأ و سپس به مکان $-۶m$ رسیده است از این‌رو مکان اولیهٔ آن مثبت اما سرعت آن منفی است و گزینهٔ (۲) این‌گونه است.

A ۱۳۹ ۴

خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است. کافی است داده‌های مسئله را در معادلهٔ حرکت قرار داده سپس با حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول $x_۰$ و v را حساب کرده، معادلهٔ حرکت را نوشته و در آخر با قرار دادن $x=-۳۰m$ در معادله، لحظهٔ گذر متحرک از مکان $x=-۳۰m$ را به‌دست بیاوریم.

معادلهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

$$x=vt+x_۰\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۲s\Rightarrow -۶=۲v+x_۰\\ t_۲=۸s\Rightarrow ۵۴=۸v+x_۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۶۰=۶v\Rightarrow v=۱۰m/s\ ,\ x_۰=-۲۶m\ ,\ x=۱۰t-۲۶$$

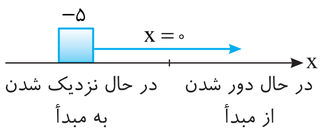
اکنون $x=-۳۰m$ را در رابطه قرار می‌دهیم.

$$-۳۰=۱۰t-۲۶\Rightarrow -۴=۱۰t\Rightarrow t=-۰/۴s$$

مفهوم زمان منفی این است که متحرک هرگز از مکان $-۳۰m$ نمی‌گذرد.

A ۱۴۰ ۳

۱ به معادلهٔ حرکت نگاه کنید $(x=۲t-۵)$، مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=-۵m$ و سرعت متحرک مثبت است و مطابق شکل مسیر، متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.



۲ سرعت متحرک ثابت بوده و برابر $۲m/s$ است یعنی در هر ثانیه متحرک $۲m$ جابه‌جا می‌شود و گزینهٔ (۳) درست است.

۳ در لحظهٔ $t=۱s$، مکان متحرک برابر $(x=۲\times۱-۵=-۳m)$ بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال معادلهٔ حرکت متحرکی $x=۲t+۵$ است. کدام گزینه در مورد حرکت این متحرک درست است؟

۱) سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۱s$ برابر $۲m/s$ می‌باشد.

۲) سرعت متوسط و تندی متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد.

۳) بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

۴) هر سه گزینه درست است.

پاسخ ۱ معادلهٔ حرکت درجه اول است یعنی معادله حرکت مربوط به حرکت با سرعت ثابت می‌باشد و مقدار سرعت با توجه به معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$\begin{cases} x=۲t+۵ \\ x=vt+v_۰ \end{cases} \Rightarrow v=۲m/s$$

بنابراین سرعت در هر لحظه برابر $۲m/s$ است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ سرعت ثابت و حرکت روی خط راست است بنابراین تندی متوسط و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند $(x=۰)$ $x=۲t+۵ \xrightarrow{x=۰} ۰=۲t+۵ \Rightarrow t=-۲/۵$ غ‌ق‌ق

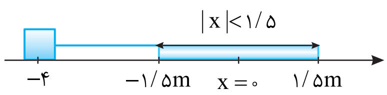
پس بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. در نتیجه هر سه گزینه درست است.

گزینه ۴

A ۱۴۱ ۲

متحرک با سرعت ثابت $۲m/s$ در جهت مثبت محور در حرکت و از مکان $-۴m$ می‌گذرد یعنی متحرک ابتدا در مکان‌های منفی بوده و در حال نزدیک شدن به مبدأ است. سؤال شده که چند ثانیه فاصلهٔ متحرک از مبدأ کمتر از $۱/۵m$ است بنابراین شما باید بازهٔ زمانی حرکت از مکان $-۱/۵m$ تا $+۱/۵m$ را حساب کنید.

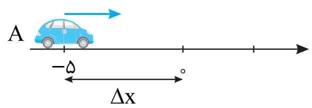
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{۱/۵-(-۱/۵)}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=۱/۵s$$



B ۱۴۲ ۲

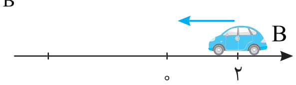
۱ متحرک A از مکان $x=-۵m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ بوده و در جهت مثبت در حال حرکت می‌باشد و در مدت ۳s به مبدأ می‌رسد بنابراین سرعت حرکت آن خواهد شد:

$$v_A=v_{av_A}=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}\Rightarrow v_A=\frac{۵}{۳}m/s$$



۲ متحرک B از مکان مثبت و در جهت منفی در حال نزدیک شدن به مبدأ می‌باشد و در مدت ۴s از مکان $x=+۲m$ به مبدأ می‌رسد و سرعت آن خواهد شد:

$$v_B=v_{av_B}=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B}\Rightarrow v_B=\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}m/s$$



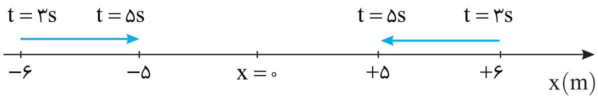
۳ نسبت v_A/v_B برابر است با: $\frac{v_A}{v_B}=\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{-۱}{۲}}=-\frac{۱۰}{۳}$

B ۱۴۳ ۴

خط فکری دقت کنید در لحظهٔ $t_۱=۳s$ و $t_۲=۵s$ مکان متحرک داده نشده بلکه فاصلهٔ متحرک از مبدأ به ترتیب ۶ متر و ۵ متر است یعنی متحرک ممکن است از مکان $+۶m$ به مکان $+۵m$ برود و یا از مکان $+۶m$ به مکان $-۵m$ برود البته متحرک می‌تواند از مکان $-۶m$ به مکان $-۵m$ و یا حتی به مکان $+۵m$ برود. بنابراین همهٔ حالت‌ها باید بررسی شود.

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از مبدأ مختصات.

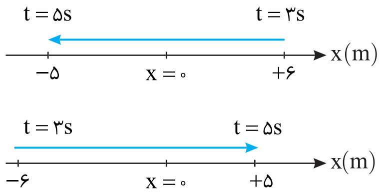
۱ اگر دو نقطه در یک طرف مبدأ مختصات باشند (از $+۶m$ به $+۵m$ و از $-۶m$ به $-۵m$) آن‌گاه سرعت ذره برابر خواهد شد با: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{|۵-۶|}{۵-۳}=۰/۵m/s$



۲ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظهٔ گذر از $x=۰$ ، بنابراین باید زمان حرکت از مکان $+۶m$ (یا $-۶m$) تا مبدأ با سرعت $۰/۵m/s$ را حساب کنیم: $\Delta t=\frac{۶}{۰/۵}\Rightarrow \Delta t=۱۲s$

۳ و لحظهٔ گذر از مبدأ برابر $t=۱۲+۳=۱۵s$ است.

۴ این بار سرعت متحرک از مکان $+۶m$ تا $-۵m$ (و یا $-۶m$ تا $+۵m$) را حساب می‌کنیم. $v=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{|۶-(-۵)|}{۵-۳}\Rightarrow v=۵/۵m/s$



۵ زمان رسیدن از مکان $+۶m$ (و یا $-۶m$) تا مبدأ با سرعت $۵/۵m/s$ را به‌دست می‌آوریم. $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۵/۵=\frac{۶}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{۱۲}{۱۱}s$

۶ لحظهٔ رسیدن به مبدأ خواهد شد: $t_۲-t_۱=\frac{۱۲}{۱۱}\Rightarrow t_۲-۳=\frac{۱۲}{۱۱}\Rightarrow t_۲=\frac{۴۵}{۱۱}s$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۴۴ ۳

نکته مدت زمان ثانیهٔ nاُم برابر ۱s است و بازهٔ آن از لحظهٔ $n-۱$ تا لحظهٔ n است. مدت زمان ثانیهٔ پنجم و مدت زمان ثانیهٔ سوم هر دو یک ثانیه است. حرکت با سرعت ثابت است، پس در هر ثانیه جابه‌جایی متحرک مقدار ثابتی است، از این‌رو جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم و ثانیهٔ پنجم یکسان است و نسبت جابه‌جایی‌ها برابر یک است.

A ۱۴۵ ۴

نکته در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی متحرک برابر است. مدت زمان دو ثانیهٔ سوم برابر ۲s است و جابه‌جایی در این ۲s با جابه‌جایی در هر دو ثانیهٔ دیگر برابر است. در صورت سؤال گفته شده جابه‌جایی در این مدت نصف جابه‌جایی در مدت n ثانیه است (کلمهٔ پنجم در این مسئله نقشی ندارد) چون سرعت ثابت است بنابراین باید $n=۴$ ثانیه باشد تا جابه‌جایی در مدت ۲s نصف جابه‌جایی در مدت $(n=۴)$ باشد.

A ۱۴۶ ۲

۱ حرکت با سرعت ثابت می‌باشد، بنابراین سرعت متوسط در هر بازه برابر سرعت جسم می‌باشد، در مدت $t=۳s$ تا $t=۱۹s$ متحرک از $x=۲۵m$ به $x=۴۹m$ منتقل شده است و می‌توان سرعت حرکت را در تمام مسیر به دست آورد.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۴۹-۲۵}{۱۹-۳}=\frac{۲۴}{۱۶}\Rightarrow v=۱/۵m/s$$

۲ حال در بازهٔ $t_۱=۳s$ تا $t_۱$ نیز سرعت همان $۲m/s$ است و مقدار $t_۱$ قابل محاسبه است:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۱/۵=\frac{۳۴-۲۵}{t_۱-۳}\Rightarrow ۹=۱/۵t_۱-۴/۵\Rightarrow t_۱=۹s$$

۳ در بازهٔ $t=۳s$ تا $t=۱۷s$ متحرک از مکان $x=۲۵m$ به $x_۱=?m$ رسیده بنابراین مجدداً به کمک رابطهٔ سرعت، مقدار $x_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۱/۵=\frac{x_۱-۲۵}{۱۷-۳}\Rightarrow x_۱=۴۶m$$

B ۱۴۷ | ۱

خط فکری مسئلهٔ قشنگی است، در بازهٔ 7s به بعد سرعت v_2 است یعنی از لحظهٔ $t=8s$ و $t=14s$ سرعت متحرک v_2 است و می‌توانید v_2 را حساب کنید. در بازهٔ $t=7s$ تا $t=8s$ متحرک همین سرعت را دارد و می‌توانید جابه‌جایی متحرک در این 1s را حساب کنید تا مشخص شود که متحرک در بازهٔ 2s تا 7s با سرعت v_1 چند متر جابه‌جا شده و v_1 را به‌دست بیاورید.

t(s)	۲	۸	۱۴
x(m)	۳۰	۵۰	۸۶

۱ سرعت ثابت v_2 را حساب می‌کنیم:

$$v_2=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_2=\frac{86-50}{14-8}\Rightarrow v_2=\frac{36}{6}=6m/s$$

۲ در مدت $t=7s$ تا $t=8s$ متحرک با سرعت 6m/s، به اندازهٔ $\Delta x=6\times1=6m$ جابه‌جا می‌شود یعنی در لحظهٔ $t=7s$ متحرک در مکان $50-6=44m$ قرار دارد.

۳ سرعت v_1 در بازهٔ 2s تا 7s را حساب می‌کنیم. (یادتان باشد سرعت در تمام بازهٔ ۰ تا 7s ثابت است.)

$$v_1=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_1=\frac{44-30}{7-2}\Rightarrow v_1=\frac{14}{5}=2/8m/s$$

۴ نسبت v_2/v_1 خواهد شد:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{2/8}{6}=\frac{28}{60}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{7}{15}$$

A ۱۴۸ | ۳

در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، مسافت همان اندازهٔ جابه‌جایی است. با توجه به فرض مسئله مسافت (جابه‌جایی) در دو حالت یکسان است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\xrightarrow{\Delta x_1=\Delta x_2}v_0\times8=(v_0+3)\times5$$

$$\Rightarrow 8v_0=5v_0+15\Rightarrow v_0=5m/s$$

بازی با سؤال متحرک A و متحرک B به‌ترتیب با سرعت‌های ثابت ۲۱ و $(v-30)$ متر بر ثانیه جابه‌جایی‌های یکسانی را در مدت t_A و t_B طی می‌کنند، اگر $\frac{t_A}{t_B}=\frac{3}{7}$ باشد v چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۱ ۳) ۳۹ ۴) ۳۷

پاسخ جابه‌جایی دو متحرک یکسان است، بنابراین:

$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow 21t_A=(v-30)t_B$$

با توجه به فرض مسئله $\frac{t_A}{t_B}=\frac{3}{7}$ از این‌رو:

$$21\times(\frac{3}{7}t_B)=(v-30)t_B\Rightarrow 9=v-30\Rightarrow v=39m/s$$

گزینهٔ ۳

A ۱۴۹ | ۳

زمان حرکت با سرعت 80km/h و 120km/h در جابه‌جایی 150km را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}\Delta t_1=\frac{150}{80}\times60=112/5\,min\\ \Delta t_2=\frac{150}{120}\times60=75\,min\end{cases}\Rightarrow 112/5-75=37/5\,min$$

بازی با سؤال رانندهٔ‌ای که با سرعت 108 km/h حرکت می‌کند، برای یک ثانیه چشم از جاده برمی‌دارد و در آینه نگاه می‌کند. در این یک ثانیه خودروی او چند متر جلوتر رفته است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۰۸ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۲۰

پاسخ سرعت 108km/h را برحسب یکای m/s می‌نویسیم:

$$v=\frac{108km}{h}=108\times\frac{1000m}{3600s}\Rightarrow v=30m/s$$

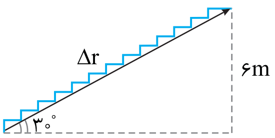
جابه‌جایی (مسافتی) که متحرک در 1s طی می‌کند خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t=30\times1=30m$$

این تست ساده بیان می‌کند که هنگام رانندگی با سرعت 108 km/h، در هر ثانیه ۳۰ متر جلو می‌روید و اگر مانعی در ۳۰ متری مقابل شما باشد، با همان سرعت به آن برخورد می‌کنید.

گزینهٔ ۲

B ۱۵۰ | ۲



۱ ارتفاع هر طبقه ۶ متر بوده یعنی فاصلهٔ بین دو طبقه 6m مطابق شکل است. طول مسیر حرکت (جابه‌جایی) بین دو طبقه را به کمک مثلثات به‌دست می‌آوریم:

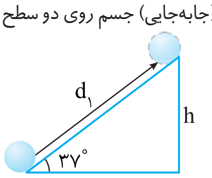
$$\sin30^\circ=\frac{6}{\Delta r}\Rightarrow\Delta r=12m$$

۲ مدت زمان جابه‌جایی ۱۲ متر با سرعت 0/6m/s را حساب می‌کنیم:

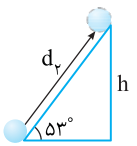
$$\Delta r=v\Delta t\Rightarrow 12=0/6\Delta t\Rightarrow\Delta t=20s$$

B ۱۵۱ | ۳

۱ این سؤال بیشتر جنبهٔ ریاضی دارد. طول مسیر (جابه‌جایی) جسم روی دو سطح شیب‌دار را به کمک مثلثات به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases}\sin37^\circ=\frac{h}{d_1}\Rightarrow d_1=\frac{h}{\sin37^\circ}\\ \sin53^\circ=\frac{h}{d_2}\Rightarrow d_2=\frac{h}{\sin53^\circ}\end{cases}$$



۲ نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ را حساب می‌کنیم:

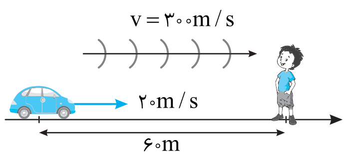
$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\sin53^\circ}{\sin37^\circ}=\frac{0/8}{0/6}=\frac{4}{3}$$

۳ جابه‌جایی d_1 و d_2 را نوشته و دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}d_1=v_1t_1\\ d_2=v_2t_2\end{cases}\Rightarrow\frac{d_1}{d_2}=\frac{5t}{v\frac{t}{2}}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{10}{v}\Rightarrow v=7/5m/s$$

B ۱۵۲ | ۳

خط فکری سرعت صوت 300m/s است، زمانی که طول می‌کشد تا صدای بوق به دانش‌آموز برسد را به‌دست بیاورید سپس مشخص کنید در این مدت خودرو با سرعت 72km/h=20m/s چند متر جلو رفته و در چه فاصله‌ای از دانش‌آموز قرار می‌گیرد.



۱ ابتدا زمان رسیدن صدای بوق به دانش‌آموز را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow 60=300\Delta t\Rightarrow\Delta t=0/2s$$

۲ حال باید مشخص کرد در این مدت خودرو چند متر جلو آمده است.

$$v=72km/h=20m/s\ ,\ \Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=20\times0/2=4m$$

۳ بنابراین خودرو در این لحظه در فاصلهٔ $60-4=56m$ دانش‌آموز است.

B ۱۵۳ ۲

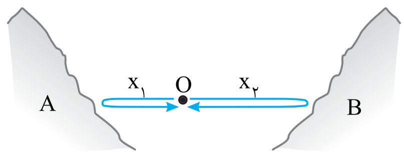
یکی از نمونه‌های طبیعی حرکت یکنواخت روی خط راست با سرعت ثابت انتشار صوت در یک محیط در یک امتداد و روی خط راست است.

۱ دقت کنید صدا از منبع O به کوه نزدیک (نقطهٔ A) رفته و از روی آن باز می‌گردد. بنابراین مسافتی که صوت در این رفت و برگشت طی می‌کند $۲x_۱$ است:

$l_۱=vt\Rightarrow ۲x_۱=v_{صوت}t_۱$ (۱)

۲ صوت از O تا B می‌رود و صدای پژواک دوم شنیده می‌شود و در این مسیر مسافت طی شده $۲x_۲$ بوده و خواهیم داشت:

$l_۲=vt\Rightarrow ۲x_۲=v_{صوت}t_۲$ (۲)



۳ با توجه به فرض مسئله $t_۲-t_۱=۳s$ و سرعت صوت $۳۴۰m/s$ است.

بنابراین رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم کرده و مسئله را حل می‌کنیم:

$۲x_۲-۲x_۱=v(t_۲-t_۱)\Rightarrow ۲(x_۲-x_۱)=۳۴۰\times۳$

$\Rightarrow x_۲-x_۱=۱/۵\times۳۴۰m$

بنابراین اختلاف فاصلهٔ O از A تا B، برابر $۱/۵\times۳۴۰m$ است.

B ۱۵۴ ۲

خط فکری هر گاه در یک مسئله دربارهٔ دو متحرک از شما سؤال شود که دو متحرک در چه لحظه‌ای و یا در چه مکانی از کنار هم می‌گذرد شما باید معادلهٔ مکان - زمان هر متحرک را بنویسید (خوشبختانه در این مسئله معادله‌ها را در اختیار دارید)، سپس مکان (x) دو متحرک را برابر قرار دهید.

۱ لحظهٔ عبور از کنار هم را حساب می‌کنیم:

$x_۱=x_۲\Rightarrow ۲t-۴=۳t-۱۲\Rightarrow t=۸s$

۲ با قرار دادن زمان $t=۸s$ در هر یک از معادله‌ها می‌توانید مکانی که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند را به‌دست بیاورید.

$x=۲t-۴\xrightarrow{t=۸s}x=۲\times۸-۴\Rightarrow x=۱۲m$

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک P و Q که همزمان روی محور x ها با سرعت‌های ثابت شروع به حرکت کرده‌اند در SI به‌ترتیب به‌صورت $x_P=vt+۱۲$ و $x_Q=۴t-۲۴$ است. اگر هر دو در یک لحظه به مکان $x=+۸m$ برسند، v چند متر بر ثانیه است؟**

۱) $-۰/۵$ ۲) $۰/۵$ ۳) $۲/۵$ ۴) $-۲/۵$

پاسخ **با قرار دادن $x=+۸m$ در معادلهٔ حرکت Q، زمان رسیدن آن را به این مکان به دست می‌آوریم:**

$x_Q=۴t-۲۴\Rightarrow ۸=۴t-۲۴\Rightarrow t=\frac{۳۲}{۴}\Rightarrow t=۸s$

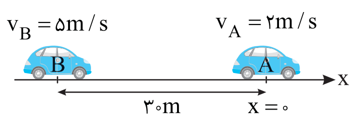
اکنون با قرار دادن $t=۸s$ و $x=۸m$ در معادلهٔ حرکت P، سرعت v را به دست می‌آوریم:

$x_P=vt+۱۲\Rightarrow ۸=v(۸)+۱۲\Rightarrow v=-۰/۵m/s$

گزینهٔ ۱

B ۱۵۵ ۱

راه‌حل اول: محل حرکت متحرک A را مبدأ در نظر می‌گیریم، معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم:



مکان اولیه متحرک A $(x_{۰A}=۰)$ و مکان اولیه متحرک B $(x_{۰B}=-۳۰m)$ است.

معادله‌های حرکت A و B را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x_A=۲t\\ x_B=۵t-۳۰\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}۲t=۵t-۳۰\Rightarrow ۳t=۳۰\Rightarrow t=۱۰s$$

مکان رسیدن دو متحرک نسبت به محل آغاز حرکت A خواهد شد: $x=۲\times۱۰=۲۰m$

راه‌حل دوم: روش نسبی: در حل این مسائل می‌توان این‌گونه فکر کرد که متحرک A با سرعت $۲m/s$ در هر ثانیه ۲ متر جلو می‌رود و متحرک B با سرعت $۵m/s$ در هر ثانیه $۵m$ حرکت می‌کند یعنی در هر ثانیه $۵-۲=۳m$ عقب ماندگی خود را جبران می‌کند بنابراین با یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{c|c}۳m & ۱s\\ \hline ۳۰ & \Delta t\end{array}\Rightarrow \Delta t=۱۰s$$

میانبر اگر دو متحرک در یک جهت در حرکت باشند می‌توان فرض کرد یک متحرک (مثلاً A) در حال سکون است و متحرک B با سرعت (v_B-v_A) در حال نزدیک شدن به آن است و می‌نویسیم:

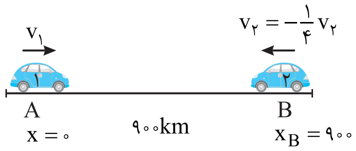
$\Delta x=|v_B-v_A|\Delta t$

C ۱۵۶ ۴

راه‌حل اول: روش کلی حل این نوع مسائل به این‌گونه است که معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به یک مبدأ اختیاری مثلاً نقطهٔ A می‌نویسیم و معادلهٔ حرکت را باهم برابر قرار می‌دهیم. جهت حرکت $v_۱$ را مثبت می‌گیریم.

$$x=vt+x_۰\begin{cases}x_۱=v_۱t\\ x_۲=-\frac{۱}{۴}v_۱t+۹۰۰\end{cases}\xrightarrow{x_۱=x_۲}v_۱t=-\frac{۱}{۴}v_۱t+۹۰۰$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۴}vt=۹۰۰\xrightarrow{t=۴s}v=۱۸۰km/h$$

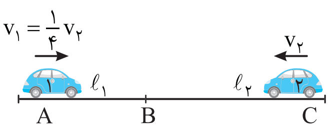


راه‌حل دوم: در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است. باید مجموع مسافت‌هایی که هر متحرک طی می‌کند تا به هم برسند را به‌دست بیاورید و آن را با فاصلهٔ ابتدایی دو متحرک برابر قرار دهیم.

$\ell_۱=v_۱t\ ,\ \ell_۲=v_۲t\Rightarrow\ell_۱+\ell_۲=(v_۱+v_۲)t$

$\xrightarrow[t=۴h]{\ell_۱+\ell_۲=۹۰۰km}۹۰۰=(v_۱+\frac{۱}{۴}v_۱)\times۴$

$\Rightarrow ۹۰۰=\frac{۵}{۴}v_۱\times۴\Rightarrow v_۱=۱۸۰km/h$



راه‌حل سوم: روش نسبی: می‌توان چنین استدلال کرد که متحرک (۱) با سرعت $v_۱$ در مدت $۱h$ به اندازهٔ $v_۱$ کیلومتر و متحرک (۲) با سرعت $v_۲$ در مدت $۱h$ به اندازهٔ $v_۲$ کیلومتر به هم نزدیک می‌شوند یعنی در مدت $۱h$ دو متحرک به اندازهٔ $v_۱+v_۲$ به هم نزدیک می‌شوند، بنابراین به کمک یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{c|c}v_۱+v_۲ & ۱h\\ \hline ۹۰۰km & ۴h\end{array}\Rightarrow v_۱+v_۲=\frac{۹۰۰}{۴}\Rightarrow v_۱+\frac{v_۱}{۴}=\frac{۹۰۰}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۵v_۱}{۴}=\frac{۹۰۰}{۴}\Rightarrow v_۱=۱۸۰km/h$$

میانبر هر گاه دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند می‌توان نوشت:

$\Delta x=|v_۱+v_۲|t$

B ۱۵۷ ۳

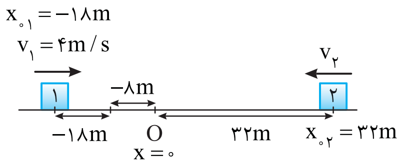
روش اول:

۱ معادلهٔ حرکت متحرک اول را می‌نویسیم:

$x=v_1t+x_{\circ 1}\Rightarrow x=۴t-۱۸$: متحرک (۱)

۲ اکنون زمانی که مکان متحرک $-۸m$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم.

$-۸=۴t-۱۸\Rightarrow ۴t=۱۰\Rightarrow t=۲/۵s$



۳ اکنون معادلهٔ حرکت متحرک دوم را می‌نویسیم:

$x_2=v_2t+x_{\circ 2}\Rightarrow -۸=v_2\times ۲/۵+۳۲\Rightarrow -۴۰=v_2\times ۲/۵$

$\Rightarrow v_2=\frac{-۴۰}{۲/۵}\Rightarrow v_2=-۱۶m/s\Rightarrow |v_2|=۱۶m/s$

روش دوم:

با توجه به فرض مسئله متحرک (۱) با حرکت از نقطهٔ $-۱۸m$ در $-۸m$ به متحرک (۲) می‌رسد، از این‌رو زمان این حرکت برابر است با:

$\Delta x=vt\Rightarrow ۱۰=۴t\Rightarrow t=۲/۵s$

متحرک (۲) در این مدت برای رسیدن به نقطهٔ C به اندازهٔ $۳۲+۸=۴۰m$ جابه‌جا می‌شود. در این صورت: $|\Delta x|=|v|\Delta t\Rightarrow ۴۰=v_2\times ۲/۵\Rightarrow v_2=۱۶m/s$

B ۱۵۸ ۲

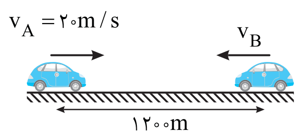
اگر دو متحرک به سمت یکدیگر در حال حرکت باشند با توجه به صورت سؤال بعد از ۸۰s به هم می‌رسند، در این مدت متحرک A با سرعت ثابت ۲۰m/s به اندازهٔ $\Delta x=vt=۱۶۰۰m$ می‌پیماید که بیشتر از فاصلهٔ اولیه بین دو متحرک است. بنابراین این دو متحرک باید قبل از $t=۸۰s$ هم را دیده باشند، پس دو متحرک در حال نزدیک شدن به‌هم نیستند و در یک جهت در حال حرکت می‌باشند. معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

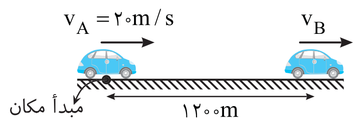
$x_A=vt=۲۰t\xrightarrow{t=۸۰s}x_A=۱۶۰۰m$

$x_B=v_Bt+۱۲۰۰\xrightarrow{t=۸۰s}x_B=۸۰v_B+۱۲۰۰$

در $t=۸۰s$ دو متحرک به هم می‌رسند: $x_A=x_B$

$۱۶۰۰=۸۰v_B+۱۲۰۰\Rightarrow ۴۰۰=۸۰v_B\Rightarrow v_B=۵m/s$





B ۱۵۹ ۴

خط فکری: می‌خواهیم یک مثال ساده و عددی را باهم بررسی کنیم. متحرک A از یک نقطه رأس ساعت ۳ بعدازظهر شروع به حرکت می‌کند و 1h بعد (یعنی در ساعت ۴ بعدازظهر) متحرک B از همان نقطه به راه می‌افتد. رأس ساعت ۸ شب متحرک B به متحرک A می‌رسد. در این صورت متحرک A (۵=۳−۸) ساعت و متحرک B، (۴h=۴−۸) در حرکت بوده‌اند یعنی زمان حرکت A بزرگ‌تر از زمان حرکت B بوده ($t_A>t_B$) و اگر مدت زمان حرکت A را t_A بنامیم، مدت زمان حرکت B تا رسیدن به A ($t_A-۱$) خواهد بود. البته بین خودمان بماند که بعضی افراد وقتی زمان حرکت A را t_A در نظر می‌گیرند زمان حرکت B را ($t_B=t_A+۱$) در نظر می‌گیرند که کاملاً غلط است. شما باید رابطهٔ جابه‌جایی $\Delta x=vt$ را برای هر دو متحرک بنویسید و آن‌ها را باهم برابر قرارداده، مسئله را حل کنید.

وقتی دو خودرو به هم می‌رسند، جابه‌جایی آن‌ها یکسان است. متحرک دوم یک ساعت پس از متحرک اول شروع به حرکت کرده بنابراین اگر زمان حرکت متحرک اول را Δt_1 در نظر بگیریم زمان حرکت متحرک دوم ($\Delta t_2=\Delta t_1-۱$) خواهد شد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow v_1\Delta t_1=v_2\Delta t_2\Rightarrow ۶۰\Delta t_1=۸۰(\Delta t_1-۱)$

$\Rightarrow ۶۰\Delta t_1=۸۰\Delta t_1-۸۰\Rightarrow \Delta t_1=۴h$

B ۱۶۰ ۱

۱ خودروی اول با سرعت ۱۰m/s پس از ۲۰ ثانیه، ۲۰۰ متر به جلو می‌رود و فاصلهٔ دو خودرو از هم $۴۷۰-۲۰۰=۲۷۰m$ می‌شود.

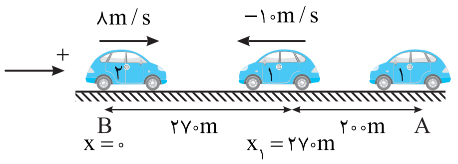
۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را از این لحظه به بعد نوشته و برای این منظور نقطهٔ B را مبدأ مکان فرض می‌کنیم:

معادلهٔ حرکت خودرو (۱): $x_1=-۱۰t+۲۷۰$

معادلهٔ حرکت خودرو (۲): $x_2=۸t$

۳ دو معادله را باهم برابر قرار می‌دهیم و زمان رسیدن دو خودرو به هم را حساب می‌کنیم: $x_2=x_1\Rightarrow ۸t=-۱۰t+۲۷۰\Rightarrow ۱۸t=۲۷۰\Rightarrow t=۱۵s$

۴ بنابراین متحرک (۲)، ۱۵ ثانیه در حرکت بوده است تا به متحرک (۱) برسد و اندازهٔ جابه‌جایی آن در این مدت خواهد شد: $\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x=۸\times ۱۵=۱۲۰m$



B ۱۶۱ ۱

خط فکری: دو متحرک از یک مبدأ به سوی یک مقصد می‌روند یعنی جابه‌جایی آن‌ها باهم برابر است ($\Delta x_1=\Delta x_2$). یکی از آن‌ها ۵۰s زودتر به مقصد می‌رسد. یعنی اگر زمان حرکت متحرک کندرو $t_1(v_1=۳۰m/s)$ باشد زمان حرکت متحرک تندرو ($v_2=۴۰m/s$) برابر $t_1-۵۰$ است بنابراین کافی است شما جابه‌جایی‌ها را مساوی قرار داده و مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک برابر است. از این‌رو:

$\Delta x_1=\Delta x_2\xrightarrow{\Delta x=vt}۳۰t_1=۴۰t_2\xrightarrow{t_2=t_1-۵۰}$

$۳۰t_1=۴۰(t_1-۵۰)\Rightarrow ۳۰t_1=۴۰t_1-۲۰۰۰\Rightarrow t_1=۲۰۰s$

۲ فاصلهٔ مبدأ تا مقصد برابر است با: $\Delta x=v_1t_1=۳۰\times ۲۰۰=۶۰۰۰m$

B ۱۶۲ ۱

خط فکری: مسئلهٔ ساده اما قابل فکر کردن است. بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر یعنی چه؟

دقت کنید متحرک تندرو با سرعت ۸m/s از مبدأ به راه می‌افتد و همزمان با آن متحرک کندرو با سرعت ۵m/s از همان نقطه به راه می‌افتد بنابراین در هر لحظه فاصلهٔ بین دو متحرک در حال افزایش است و در طول مسیر بیشینه فاصلهٔ آن‌ها از هم وقتی که متحرک تندرو به مقصد برسد است. بنابراین شما باید مدت زمان رسیدن متحرک تندرو به مقصد را حساب کرده سپس، معین کنید در این مدت متحرک کندرو چند متر جلو آمده تا مشخص شود فاصلهٔ آن‌ها در این لحظه چند متر است.

۱ زمان رسیدن متحرک تندرو را حساب می‌کنیم:

$\Delta x=v\Delta t\xrightarrow{\Delta x=۴۰۰m}۴۰۰=۸\Delta t\Rightarrow \Delta t=۵۰s$

۲ در مدت ۵۰s جابه‌جایی متحرک کندرو خواهد شد:

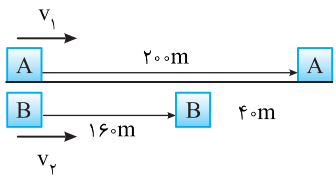
$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x_{کندرو}=۵\times ۵۰=۲۵۰m$

۳ بنابراین بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر برابر است با:

$۴۰۰-۲۵۰=۱۵۰m$

B ۱۶۳ ۳

خط فکری دونده A و B مسیر ۲۰۰ متر را می‌خواهند بدوند. دونده A وقتی به مقصد می‌رسد دوندهٔ B به اندازهٔ ۴۰m از او عقب‌تر است یعنی در مدتی که دوندهٔ A، ۲۰۰ متر دویده، دوندهٔ B، ۱۶۰m دویده است و شما به کمک این موضوع می‌توانید نسبت سرعت B به سرعت A (v_B/v_A) را پیدا کرده و به کمک آن مسئله را حل کنید.



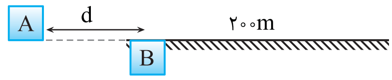
۱ با توجه به رابطهٔ جابه‌جایی زمان خواهیم داشت:

$$\Delta x = vt \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{A} ۲۰۰ = v_A t \\ \xrightarrow{B} ۱۶۰ = v_B t \end{cases} \Rightarrow \frac{۲۰۰}{۱۶۰} = \frac{v_A t}{v_B t} \Rightarrow v_B = ۰/۸ v_A$$

۲ اکنون دوندهٔ A به اندازهٔ d از دوندهٔ B عقب‌تر استارت می‌زند و قرار است باهم به مقصد برسند بنابراین:

$$\begin{matrix} A: d+۲۰۰ = v_A t' \\ B: ۲۰۰ = v_B t' \end{matrix} \Rightarrow \frac{d+۲۰۰}{۲۰۰} = \frac{v_A}{v_B} \xrightarrow{v_B=۰/۸v_A}$$

$$\frac{d+۲۰۰}{۲۰۰} = \frac{۱}{۰/۸} \Rightarrow d+۲۰۰=۲۵۰ \Rightarrow d=۵۰m$$

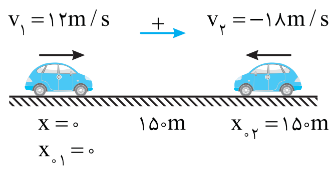


A ۱۶۴ ۲

فاصلهٔ دو خودرو از هم ۱۵۰m است، بنابراین برای آنکه فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. ابتدا باید دو خودرو به هم رسیده و از کنار هم بگذرند، از هم دور شوند تا فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. معادلهٔ حرکت دو خودرو را نوشته و از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1 = ۱۲t \\ x_2 = -۱۸t+۱۵۰ \end{cases} \xrightarrow{|x_1-x_2|=۱۸۰} ۱۲t+۱۸t-۱۵۰=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۳۰t = ۳۳۰ \Rightarrow t=۱۱s$$



اگر تفاضل را برابر ۱۸۰− قرار دهیم خواهیم داشت:

$$۱۲t+۱۸t-۱۵۰=-۱۸۰ \Rightarrow ۳۰t=-۳۰ \Rightarrow t=-۱s$$ غ.ق.ق

روش دیگر: می‌توان فرض کرد متحرک (۲) ساکن است و متحرک (۱) با سرعت $۱۲+۱۸=۳۰m/s$ از فاصلهٔ ۱۵۰ متری به آن نزدیک و سپس ۱۸۰ متر از آن دور می‌شود یعنی متحرک (۱) جمعاً $۱۵۰+۱۸۰=۳۳۰m$ را با سرعت ۳۰m/s طی می‌کند. $\Delta x = vt \Rightarrow ۳۳۰=۳۰t \Rightarrow t=۱۱s$

B ۱۶۵ ۴

خط فکری یک‌بار هنگام نزدیک شدن دو متحرک به هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر و بار دیگر بعد از رسیدن به هم و دور شدن از هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر می‌شود. بنابراین مسئله دو حالت دارد:

حالت اول: وقتی هنگام نزدیک شدن فاصلهٔ آن‌ها ۱۰۰ متر است، دو متحرک در مجموع باید مسافت $۳۰۰-۱۰۰=۲۰۰m$ را طی کرده باشند.

$$\begin{cases} |\Delta x_1| = v_1 t \\ |\Delta x_2| = v_2 t \end{cases} \Rightarrow |\Delta x_1|+|\Delta x_2| = (v_1+v_2)t \Rightarrow ۲۰۰=۵۰t \Rightarrow t=۴s$$

حالت دوم: هنگامی که از کنار هم می‌گذرند و مجدداً فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر است، باید دو متحرک در مجموع مسافت $۳۰۰+۱۰۰=۴۰۰m$ را بپیمایند.

$$\begin{cases} |\Delta x_1| = v_1 t \\ |\Delta x_2| = v_2 t \end{cases} \Rightarrow (v_1+v_2)t=۴۰۰ \Rightarrow ۵۰t=۴۰۰ \Rightarrow t=۸s$$

بازی با سؤال **دو متحرک از یک نقطه، هم‌زمان در یک جهت با سرعت ۷۲km/h و ۱۰۸km/h به حرکت درمی‌آیند. پس از چند دقیقه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳/۶ کیلومتر می‌شود؟**

۱) ۱۰ ۲) ۳/۶ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ **راه‌حل اول: معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته، از هم کم کرده و برابر ۳/۶km قرار می‌دهیم:**

$$x=vt \begin{cases} x_1=۷۲t \\ x_2=۱۰۸t \end{cases} \xrightarrow{x_2-x_1=۳/۶} ۱۰۸t-۷۲t=۳/۶ \Rightarrow ۳۶t=۳/۶$$

$$\Rightarrow t=۰/۱h \Rightarrow t=۰/۱\times۶۰=۶min$$

دقت کردید برای حل مسئله سرعت‌ها را تبدیل واحد نکردیم و مسئله را با همان یکای km/h حل کردیم.

راه‌حل دوم: هر دو با هم حرکت کرده‌اند، در هر ساعت متحرک (۱) ۷۲km و متحرک (۲) ۱۰۸km طی می‌کند یعنی متحرک (۲) $۱۰۸-۷۲=۳۶km$ از اولی جلو می‌افتد، مانند این است که متحرک اول را ساکن فرض کنیم و متحرک دوم با سرعت $۱۰۸-۷۲=۳۶km/h$ از آن دور شود، در واقع از سرعت نسبی استفاده می‌کنیم: $\Delta x = v_{نسبی} t \Rightarrow ۳/۶=(۱۰۸-۷۲)t \Rightarrow t=۰/۱h=۶min$

گزینهٔ ۳

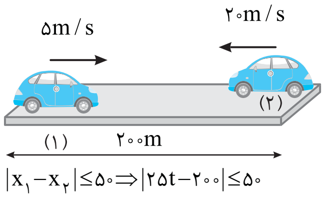
B ۱۶۶ ۳

خط فکری قرار است فاصلهٔ دو متحرک از هم در طول مسیر کمتر از ۵۰m باشد یعنی $|x_1-x_2|=۲۵۰m$ شود. بنابراین کافی است که معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از هم کم کرده و قدرمطلق تفاضل را کوچک‌تر از ۵۰ قرار دهید.

یادداشت ریاضی هر گاه $|a|\le b$ و $b>۰$ باشد آن‌گاه $-b\le a\le b$.

مکان اولیه متحرک با سرعت ۱۰m/s را به عنوان مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_1=۵t \\ x_2=-۲۰t+۲۰۰ \end{cases}$$



فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر از ۵۰m باشد یعنی:

$$|x_1-x_2|\le۵۰ \Rightarrow |۲۵t-۲۰۰|\le۵۰$$

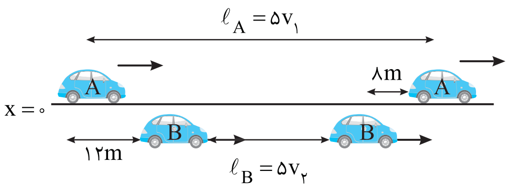
$$\Rightarrow -۵۰\le۲۵t-۲۰۰\le۵۰ \Rightarrow ۱۵۰\le۲۵t\le۲۵۰ \Rightarrow ۶s\le t\le۱۰s$$

بنابراین در بازهٔ $t=۶s$ تا $t=۱۰s$ یعنی در مدت $\Delta t=۱۰-۶=۴s$، فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر از ۵۰ متر است.

B ۱۶۷ ۳

با توجه به شکل و صورت مسئله در مدت ۵s متحرک A با سرعت v_A مسافت $\ell_A=v_At=۵v_A$ و متحرک B مسافت $\ell_B=v_Bt=۵v_B$ را طی می‌کند. اگر به شکل دقت کنید خواهیم داشت:

$$\ell_A=۱۲+\ell_B+۸ \Rightarrow ۵v_A=۲۰+۵v_B \Rightarrow v_A-v_B=۴m/s \quad (I)$$



اکنون می‌خواهیم فاصلهٔ دو متحرک به جای ۸m، ۲۴m شود بنابراین:

$$\ell'_A=۱۲+\ell'_B+۲۴ \Rightarrow \ell'_A-\ell'_B=۳۶ \Rightarrow v_At-v_Bt=۳۶$$

$$\Rightarrow (v_A-v_B)t=۳۶ \xrightarrow{(I)} ۴t=۳۶ \Rightarrow t=۹s$$

B ۱۶۸ | ۴

راه‌حل اول: ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به نقطهٔ A می‌نویسیم.

$$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=v_1t\\ x_2=-4v_1t+AB\end{cases}\Rightarrow v_1t=-4v_1t+AB$$

$$\Rightarrow AB=v_1t+(4v_1t)\Rightarrow AB=5v_1t$$

زمان به هم رسیدن دو متحرک برابر می‌شود با: $t=\frac{AB}{5v_1}$ (I)

زمان حرکت متحرک (۱) از A تا B برابر است با:

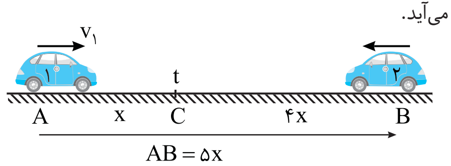
$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_1=\frac{AB}{v_1}\qquad (II)$$

اکنون با تقسیم روابط (I) و (II) بر هم می‌توان t_1 را برحسب t به دست آورد:

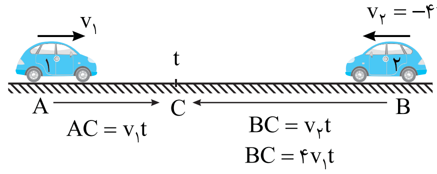
$$\frac{t_1}{t}=\frac{\frac{AB}{v_1}}{\frac{AB}{5v_1}}\Rightarrow\frac{t_1}{t}=5\Rightarrow t_1=5t$$

راه‌حل دوم و سریع:

۱ بنا به فرض مسئله $v_2=-4v_1$ است یعنی در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند اگر متحرک v_1 به اندازهٔ x جلو آمده باشد متحرک ۲ با سرعت $4v_1$ به اندازه 4x جلو می‌آید.



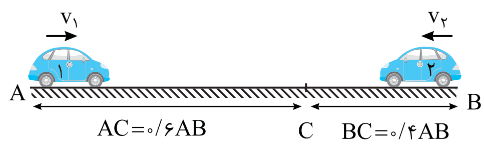
۲ متحرک کندرو (۱) در مدت t مسافت x را طی کرده است بنابراین کل مدت حرکت از A تا B که برابر 5x است را در مدت 5t طی می‌کند.



B ۱۶۹ | ۱

۱ در گام اول شما باید نسبت سرعت‌های v_1 و v_2 را به کمک جابه‌جایی آن‌ها از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند را حساب کنید. دقت کنید که سرعت متحرک (۱) قطعاً از سرعت متحرک (۲) بیشتر است زیرا در مدت t که به هم می‌رسند مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}AC=v_1t\Rightarrow 0/6AB=v_1t\\ BC=v_2t\Rightarrow 0/4AB=v_2t\end{cases}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}\qquad (I)$$



۲ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۱) مسیر BC را در مدت 40s طی کرده است:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CB=v_1\times 40\Rightarrow 0/4AB=v_1\times 40\qquad (II)$$

۳ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۲) مسیر CA را در مدت t_2 طی می‌کند بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CA=v_2\times t_2\Rightarrow 0/6AB=v_2t_2\qquad (III)$$

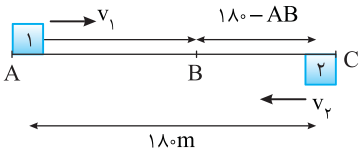
۴ رابطهٔ (II) را بر رابطهٔ (III) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{0/4AB}{0/6AB}=\frac{v_1\times 40}{v_2\times t_2}\xrightarrow{(I)}\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{40}{t_2}\Rightarrow t_2=90s$$

B ۱۷۰ | ۲

۱ متحرک (۱) مطابق شکل از نقطهٔ A و متحرک (۲) از نقطهٔ C به سوی هم می‌روند و در نقطهٔ B به هم می‌رسند. در این مدت متحرک (۱) مسافت AB و متحرک (۲) مسافت $BC=180-AB$ را به ترتیب با تندی‌های v_1 و v_2 طی می‌کنند.

متحرک اول: $AB=v_1t$ (I) ، متحرک دوم: $(180-AB)=v_2t$ (II)



۲ دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{AB}{180-AB}\qquad (III)$$

۳ با توجه به فرض مسئله متحرک (۱) در ادامهٔ مسیر، مسافت BC را در مدت 16s طی می‌کند و متحرک ۲، مسافت BA را در مدت 25s طی می‌کند، از این‌رو خواهیم داشت:

$$\ell=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{متحرک اول}}BC=v_1\times 16\Rightarrow 180-AB=16v_1\\ \Rightarrow v_1=\frac{180-AB}{16}\\ \xrightarrow{\text{متحرک دوم}}BA=v_2\times 25\Rightarrow AB=25v_2\Rightarrow v_2=\frac{AB}{25}\end{cases}$$

۴ دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\frac{180-AB}{16}}{\frac{AB}{25}}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{25}{16}\left(\frac{180-AB}{AB}\right)$$

۵ طرف چپ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (III) یکسان بوده، طرف راست آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{AB}{180-AB}=\frac{25}{16}\left(\frac{180-AB}{AB}\right)\Rightarrow\frac{AB^2}{(180-AB)^2}=\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\frac{5}{4}\Rightarrow 900-5AB=4AB\Rightarrow AB=100m$$

$$\Rightarrow BC=180-100=80m$$

متحرک (۱) 80m را با مدت 16s طی کرده بنابراین اندازهٔ سرعت آن (تندی) برابر خواهد شد با:

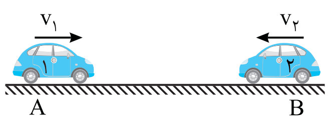
$$v_1=\frac{BC}{t}=\frac{80}{16}=5m/s$$

میانبر هر گاه دو متحرک با تندی‌های ثابت v_1 و v_2 به ترتیب از نقاط A و C به سوی هم بروند و در نقطهٔ B از کنار هم بگذرند چنانچه بازهٔ زمانی که متحرک (۱) در ادامهٔ مسیر از B به C می‌رود را t_1 و بازهٔ زمانی که متحرک (۲) در ادامهٔ مسیر از B به A می‌رود t_2 بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\sqrt{\frac{16}{25}}\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow AB=100m\Rightarrow BC=80m\Rightarrow v_1=\frac{BC}{t_1}=\frac{80}{16}=5m/s$$

بازی با سؤال **مطابق شکل، دو متحرک (۱) و (۲) هم‌زمان از نقاط A و B می‌گذرند و با تندی‌های ثابت به طرف هم حرکت می‌کنند. دو متحرک پس از مدت t در نقطهٔ C از کنار هم عبور می‌نمایند به‌طوری که $AC=\frac{2}{5}AB$ است. چه مدت پس از آنکه متحرک (۲) به نقطهٔ A می‌رسد، متحرک (۱) از نقطهٔ B عبور خواهد کرد؟**



۱) $\frac{4}{5}t$ ۲) $\frac{5}{6}t$ ۳) $\frac{6}{5}t$ ۴) $\frac{5}{4}t$

پاسخ تندی دو متحرک ثابت است. دو متحرک پس از t ثانیه به هم می‌رسند. متحرک (۲) در این مدت از B به C می‌رود یعنی $\frac{۳}{۵}AB$ را طی می‌کند و در ادامهٔ مسیر از C به A با همان تندی ثابت مسافت $AC=\frac{۲}{۵}AB$ را طی می‌کند بنابراین با یک تناسب ساده زمان حرکت (۲) از C تا A به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{c|c} \frac{۳}{۵}AB & t \\ \hline \frac{۲}{۵}AB & t_۲ \end{array} \Rightarrow t_۲=\frac{۲}{۳}t$$

با همین استدلال زمان حرکت متحرک (۱) از A تا C برابر t و از C تا B برابر $t_۲$ است از این‌رو:

$$\begin{array}{c|c} \frac{۲}{۵}AB & t \\ \hline \frac{۳}{۵}AB & t_۱ \end{array} \Rightarrow t_۱=\frac{۳}{۲}t$$

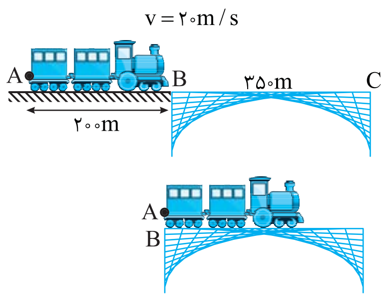
در نتیجه خواهیم داشت: $t_۱-t_۲=\frac{۳}{۲}t-\frac{۲}{۳}t=\frac{۹-۴}{۶}t \Rightarrow t_۱-t_۲=\frac{۵}{۶}t$

گزینهٔ ۲

B ۱۷۱ ۲

۱ هنگامی که انتهای قطار به ابتدای پل برسد قطار به طور کامل روی پل قرار گرفته که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد. یعنی قطار $۲۰۰m$ جابه‌جا شود. تندی حرکت قطار $۲۰m/s$ است بنابراین پس از مدت زیر قطار به‌طور کامل روی پل قرار می‌گیرد:

$\Delta x=vt \Rightarrow ۲۰۰=۲۰t \Rightarrow t=۱۰s$



۲ اما وقتی قطار از ابتدای پل شروع به حرکت کند و به‌طور کامل از پل بگذرد باید نقطهٔ A (انتهای قطار) از انتهای پل (نقطهٔ C) بگذرد یعنی قطار باید به اندازهٔ مجموع طول پل و طول خودش جابه‌جا شود.

$\Delta x=۲۰۰+۳۵۰=۵۵۰m$

در این صورت زمان عبور کامل قطار از پل خواهد شد:

$\ell_۱+\ell_۲=vt \Rightarrow ۵۵۰=۲۰t \Rightarrow t=۲۷/۵s$

B ۱۷۲ ۴

نکته هر گاه یک قطار از ابتدای یک پل بگذرد جابه‌جایی آن هنگامی که به‌طور کامل از پل می‌گذرد برابر $\Delta x=\ell_{قطار}+\ell_{پل}$ خواهد شد.

۱ مسافتی که قطار در دو حالت طی می‌کند خواهد شد:

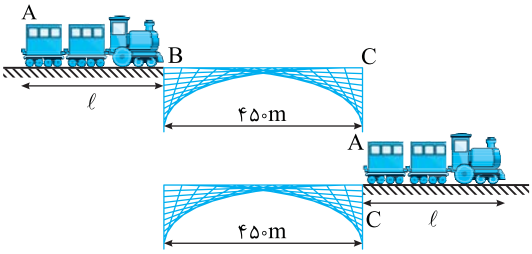
$$\Delta x=vt \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{حالت اول}} ۴۵۰+\ell=۲۰v \\ \xrightarrow{\text{حالت دوم}} ۴۵۰+\ell=۱۵(v+۱۵) \end{cases}$$

۲ مسافت طی شده در دو حالت یکسان است. بنابراین سمت راست روابط بالا را برابر قرار می‌دهیم.

$۲۰v=۱۵v+۲۲۵ \Rightarrow ۵v=۲۲۵ \Rightarrow v=۴۵m/s$

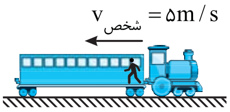
۳ حال با قرار دادن $v=۴۵m/s$ در یکی از معادله‌ها داریم:

$۴۵۰+\ell=۲۰v \Rightarrow ۴۵۰+\ell=۲۰(۴۵) \Rightarrow ۴۵۰+\ell=۹۰۰ \Rightarrow \ell=۴۵۰m$



B ۱۷۳ ۱

مسئلهٔ ساده‌ای است حرکت قطار نقشی در زمان حرکت شخص از ابتدا به انتهای قطار نخواهد داشت. یعنی شخص با سرعت ثابت $۵m/s$ می‌خواهد جابه‌جایی ۲۵۰ متری انجام دهد، بنابراین:



$\Delta x=vt \Rightarrow ۲۵۰=۵t \Rightarrow t=۵۰s$

B ۱۷۴ ۳

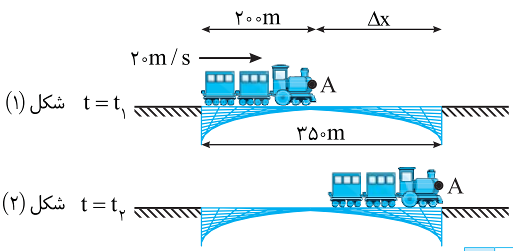
خط فکری وقتی گفته شده «قطار به‌طور کامل روی پل باشد» یعنی تمام طول قطار باید روی پل باشد. بنابراین مطابق شکل ابتدا شما باید قطار را روی پل قرار دهید و انتهای قطار ابتدای پل باشد (شکل (۱) سپس قطار را در ذهن خود حرکت داده تا ابتدای قطار به انتهای پل برسد اما از آن در نشود. بنابراین جابه‌جایی قطار برابر تفاضل طول پل و طول قطار است. $(\Delta x=\ell_{پل}-\ell_{قطار})$

۱ مسافتی که قطار طی می‌کند و در آن مدت تمام طول قطار روی پل است برابر است با:

$\Delta x=۳۵۰-۲۰۰=۱۵۰m$

۲ مدت زمانی که قطار به‌طور کامل روی پل است خواهد شد:

$\Delta x=v\Delta t \Rightarrow ۱۵۰=۲۰\Delta t \Rightarrow \Delta t=۷/۵s$



B ۱۷۵ ۲

خط فکری به جای دو قطار، ذرهٔ A' را در جلوی قطار A و ذرهٔ B' را در انتهای B در نظر می‌گیریم که می‌خواهند از کنار هم بگذرند. بنابراین معادلهٔ حرکت این دو ذره را نوشته باهم برابر قرار دهید.

۱ روی شکل مبدأ مکان اختیاری را نشان داده‌ایم در لحظهٔ $t=۰$ مکان ذرهٔ A'، $x_{\circ A}=۰$ و مکان ذرهٔ B'، $x_{\circ B}=۲۸۰+۲۰۰=۴۸۰m$ است.

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

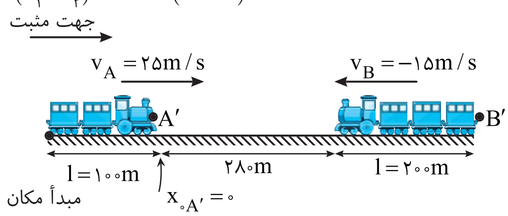
$$x=vt+x_\circ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{A'} x_{A'}=۲۵t \\ \xrightarrow{B'} x_{B'}=-۱۵t+۴۸۰ \end{cases}$$

۳ دو معادله را برابر قرار می‌دهیم:

$x_{A'}=x_{B'} \Rightarrow ۲۵t=-۱۵t+۴۸۰ \Rightarrow ۴۰t=۴۸۰ \Rightarrow t=۱۲s$

میانبر دو متحرک به سوی هم می‌روند و برای به‌دست آوردن زمان رسیدن آن‌ها به هم می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد.

$\Delta x=(v_۱+v_۲)t \Rightarrow ۴۸۰=(۲۵+۱۵)t \Rightarrow t=۱۲s$



B ۱۷۶ ۲

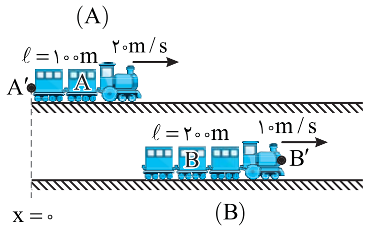
هنگامی قطار A به‌طور کامل از قطار B سبقت می‌گیرد که انتهای قطار A یعنی نقطهٔ A' از ابتدای قطار B یعنی نقطهٔ B' بگذرد. دقت کنید B'، $100+200=300m$ جلوتر از A' است.

۱ معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نسبت به مبدأ مکان اختیاری روی شکل می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=20t \\ x_{B'}=10t+300 \end{cases}$$

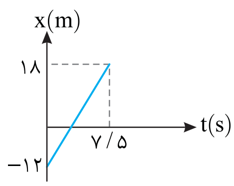
۲ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{A'}=x_{B'} \Rightarrow 20t=10t+300 \Rightarrow 10t=300 \Rightarrow t=30s$$



A ۱۷۷ ۴

یادآوری معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت $x=vt+x_0$ یک تابع درجهٔ اول بوده و نمودار آن خط راست مایل است. x_0 مکان اولیه همان عرض از مبدأ و v سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.



با توجه به نمودار، مکان متحرک در $t=0$، $-12m$ و در $t=7/5$، ۱۸ متر بوده و تغییر مکان متحرک $\Delta x=x_2-x_1=18-(-12)=30m$ می‌شود.

نمودار $x-t$ متحرک به صورت خط راست است پس حرکت با سرعت ثابت است و سرعت در $t=3s$ با سرعت متوسط در بازهٔ دلخواه صفر تا $7/5s$ برابر است.

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{30}{7/5}=4m/s$$

A ۱۷۸ ۳

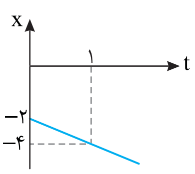
۱ شیب خط نمودار مکان-زمان بیانگر سرعت متحرک است. بنابراین سرعت خواهد شد:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-4}{2-0}=-2m/s$$

۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=4m$ است.

۳ معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=vt+x_0 \Rightarrow x=-2t+4$

A ۱۷۹ ۳



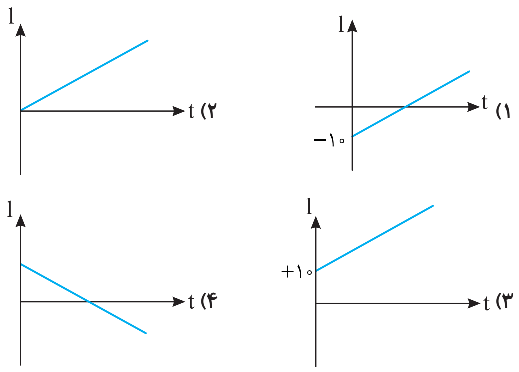
با توجه به شکل مکان اولیه جسم در فاصلهٔ $2m$ از مبدأ محور xها و در قسمت منفی این محور است، بنابراین $x_0=-2m$ است. جهت حرکت و جهت سرعت یکی است و با توجه به شکل جهت حرکت منفی است پس سرعت متحرک نیز منفی و برابر $v=-2m/s$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=vt+x_0 \Rightarrow x=-2t-2$$

A ۱۸۰ ۱

دقت کنید معادلهٔ مکان - زمان $x=5t-10$ بوده و مکان اولیه (عرض از مبدأ) $x_0=-10m$ است و شیب خط مثبت است بنابراین به نظر می‌رسد که شما باید گزینهٔ (۳) را انتخاب کنید اما به کلمهٔ روی محور قائم دقت کنید، روی محور به جای «مکان» «جابه‌جایی» نوشته شده یعنی شما نمودار $\Delta x-t$ را باید مشخص کنید، جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت برابر $\Delta x=vt$ بوده که در اینجا $\Delta x=5t$ است. بنابراین پاسخ گزینهٔ (۱) است.

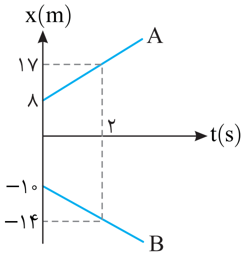
بازی با سؤال معادلهٔ مکان جسمی در SI به صورت $x=-5t-10$ است. نمودار مسافت - زمان این متحرک کدام است؟



پاسخ مسافت کمیت نرده‌ای و همواره مثبت است. معادلهٔ حرکت $x=-5t-10$ یعنی متحرک با سرعت $5m/s$ در خلاف جهت محور در حال حرکت است و در هر ثانیه $+5m$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین نمودار مسافت زمان خطی با شیب مثبت است که از مبدأ می‌گذرد. گزینهٔ ۲

A ۱۸۱ ۳

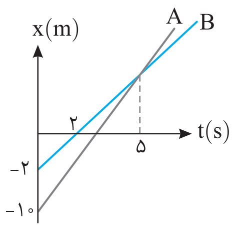
خط فکری شیب نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار خط راست مایل است سرعت در تمام لحظات یکسان است و تندی متحرک همان اندازهٔ سرعت متحرک است بنابراین شما کافی است شیب هر خط را حساب کنید، البته مقدار مثبت شیب را در نظر بگیرید.



تندی متحرک A: $s_A=v_A=\frac{17-8}{2-0}=4/5m/s$

تندی متحرک B: $s_B=v_B=\frac{|-14-(-10)|}{2}=\frac{4}{2}=2m/s$

B ۱۸۲ ۱



۱ نمودار $x-t$ هر دو متحرک خط راست مایل است، بنابراین حرکت هر دو یکنواخت است. ابتدا سرعت متحرک B را با توجه به شکل به دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B=\frac{0-(-2)}{2-0}=1m/s$$

۲ معادلهٔ B برابر خواهد شد با: $x_B=v_Bt+x_{0B} \Rightarrow x_B=t-2$

۳ مکان متحرک A و B در لحظهٔ $t=5s$ که نمودارها یکدیگر را قطع کرده‌اند باهم برابر است، از این‌رو مکان متحرک B در لحظهٔ $t=5s$ را به دست می‌آوریم:

$$x_B=5-2=3m$$

۴ در $t=5s$ مکان متحرک A نیز $x_A=+3m$ است. به کمک معادلهٔ حرکت A، سرعت A را حساب می‌کنیم:

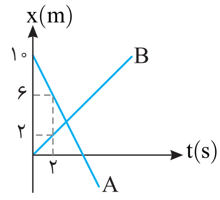
$$x_A=v_At+x_{0A} \Rightarrow 3=v_A\times5+(-10) \Rightarrow v_A=2/6m/s$$

۵ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک B از مبدأ می‌گذرد و در این لحظه متحرک A در مکان $-4/8m$ خواهد بود:

$$x_A=2/6t-10 \xrightarrow{t=2s} x_A=-4/8m$$

A ۱۸۳ ۴

نمودار $x-t$ دو متحرک به صورت خط راست می‌باشد پس حرکت دو متحرک با سرعت ثابت است و شیب هر نمودار برابر سرعت آن‌هاست پس سرعت هر یک را حساب می‌کنیم.



$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \begin{cases} v_A=\frac{۶-۱۰}{۲}=-۲m/s \\ v_B=\frac{۲-۰}{۲}=۱m/s \end{cases}$$

با توجه به نمودار مکان اولیهٔ متحرک A و B به ترتیب $x_{\circ A}=۱۰m$ و $x_{\circ B}=۰$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت آن‌ها خواهد شد:

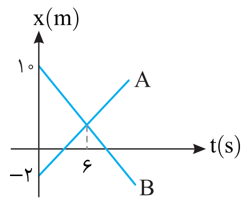
$$x=vt+x_\circ \Rightarrow \begin{cases} x_A=-۲t+۱۰ \\ x_B=t \end{cases}$$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند وقتی است که $x_A=x_B$ می‌شود از این‌رو معادلهٔ حرکت دو متحرک را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$t=-۲t+۱۰\Rightarrow t=\frac{۱۰}{۳}s$$

B ۱۸۴ ۲

۱ در صورت مسئله بیان شده که تندی دو متحرک برابر است یعنی بزرگی سرعت دو متحرک یکسان بوده $|v_A|=|v_B|$ است. با توجه به نمودار شیب خط نمودار $x-t$ متحرک B منفی و شیب خط نمودار $x-t$ متحرک A مثبت است بنابراین $v_A=+v$ و $v_B=-v$ است.



۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=v_At+x_\circ \xrightarrow{x_{\circ A}=-۲m} x_A=vt-۲$$

$$x_B=v_Bt+x_\circ \xrightarrow{x_{\circ B}=۱۰m} x_B=-vt+۱۰$$

۳ با توجه به نمودار دو متحرک از لحظه‌ای که شروع به حرکت می‌کنند تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند در حال نزدیک شدن به هم هستند و از طرفی در صورت سؤال گفته شده ۶s در حال نزدیک شدن به هم هستند، پس دو متحرک در $t=۶s$ به هم می‌رسند. یعنی در $t=۶s$، $x_A=x_B$ است از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

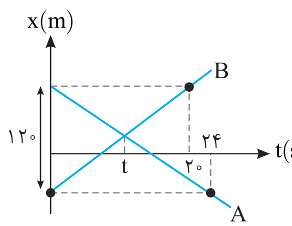
$$\begin{cases} x_A=۶v-۲ \\ x_B=-۶v+۱۰ \end{cases}\Rightarrow ۶v-۲=-۶v+۱۰\Rightarrow ۱۲v=۱۲\Rightarrow v=۱m/s$$

۴ بنابراین معادلهٔ متحرک A به صورت $x_A=t-۲$ می‌باشد و می‌دانیم هنگام گذر متحرک از مبدأ مکان $x=۰$ بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.

$$x=۰\Rightarrow ۰=t-۲\Rightarrow t=۲s$$

B ۱۸۵ ۱

خط فکری: به نمودار باید به خوبی نگاه کنید تا تشخیص دهید متحرک A در مدت ۲۴s مسافت ۱۲۰m و متحرک B نیز در مدت ۲۰s مسافت ۱۲۰m را طی کرده تا بتوانید تندی هر یک را به‌دست بیاورید و در نهایت لحظهٔ t یعنی لحظهٔ رسیدن آن‌ها به یکدیگر را حساب کنید.



۱ تندی متحرک A خواهد شد: $s_A=\frac{۱۲۰}{۲۴}=۵m/s$

۲ تندی متحرک B را حساب می‌کنیم: $s_B=\frac{۱۲۰}{۲۰}=۶m/s$

۳ در مدت t متحرک A مسافت مقابل را طی می‌کند. $\ell_A=s_At=۵t$

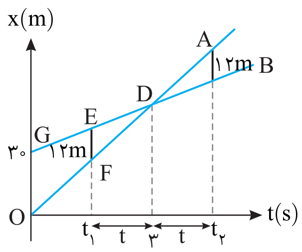
۴ در مدت t متحرک B مسافت مقابل را طی می‌کند. $\ell_B=s_Bt=۶t$

۵ مجموع ℓ_A و ℓ_B باید ۱۲۰m شود تا دو متحرک به هم برسند.

$$\ell_A+\ell_B=۱۲۰\Rightarrow ۵t+۶t=۱۲۰\Rightarrow t=\frac{۱۲۰}{۱۱}s$$

B ۱۸۶ ۲

خط فکری: در حل این مسئله نباید به سراغ معادلهٔ حرکت بروید بلکه باید به کمک ریاضیات مسئله را حل کنید. به روش حل دقت کنید.



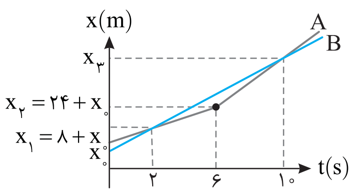
روی نمودار دو لحظهٔ t_1 و t_2 را نشان داده‌ایم که در این دو لحظه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲m است. برای مثلث $\triangle DEF$ و $\triangle DGO$ نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{۳۰}{۱۲}=\frac{۳}{t}\Rightarrow t=۱/۲s$$

بنابراین ۱/۲s قبل از $t=۳s$ یعنی $t_1=۳-۱/۲=۱/۸s$ و ۱/۲s بعد از $t=۳s$ یعنی $t_2=۳+۱/۲=۴/۲s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲ متر است.

B ۱۸۷ ۱

خط فکری: نمودار متحرک B خط راست است یعنی متحرک B با سرعت ثابت روی محور xها در حرکت است بنابراین تندی متحرک B همان سرعت آن بوده و برای یافتن سرعت B باید مکان متحرک B در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۱۰s$ را با کمک نمودار و تندی متحرک A به‌دست بیاورید.



۱ تندی متحرک A در بازهٔ ۰ تا ۶s، ۴m/s است. مکان اولیهٔ A را با $x_\circ$ نمایش می‌دهیم. در لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۶s$ مکان متحرک A خواهد شد:

$$x_A=۴t+x_\circ\Rightarrow\begin{cases} \xrightarrow{t=۲s} x_1=۴\times ۲+x_\circ=۸+x_\circ \\ \xrightarrow{t=۶s} x_2=۴\times ۶+x_\circ=۲۴+x_\circ \end{cases}$$

۲ از مکان $x_2=۲۴+x_\circ$ متحرک A تندی‌اش از ۴m/s به ۸m/s تبدیل می‌شود. در بازهٔ ۶s تا ۱۰s جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$x_3-x_2=۸(۱۰-۶)\Rightarrow x_3-۲۴-x_\circ=۳۲\Rightarrow x_3=۵۶+x_\circ$$

۳ اکنون سرعت متحرک B قابل محاسبه است:

$$v_B=\frac{x_3-x_1}{۱۰-۲}=\frac{۵۶+x_\circ-۸-x_\circ}{۸}=\frac{۴۸}{۸}=۶m/s$$

C ۱۸۸ ۱

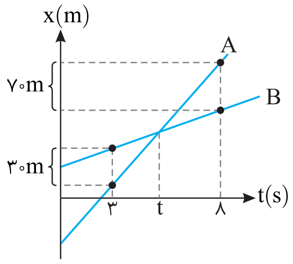
۱ در $t=۳s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳۰m است و A، ۳۰m از B عقب‌تر است.

۲ در لحظهٔ t دو متحرک به هم می‌رسند.

۳ در $t=۸s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۷۰m و متحرک A، ۷۰m از B جلوتر است.

۴ در مدت $۸-۳=۵s$، دو متحرک نسبت به هم $۳۰+۷۰=۱۰۰m$ جابه‌جا شده‌اند. بنابراین مانند این است که اگر B ساکن باشد A با سرعت $\frac{۱۰۰}{۵}=۲۰m/s$ از ۳۰ متری آن به سوی B رفته و از آن ۷۰m فاصله گرفته است.

۵ در بازهٔ $۱۶-۸=۸s$ فاصلهٔ دو متحرک به اندازهٔ $۲۰\times۸=۱۶۰m$ افزایش می‌یابد یعنی فاصلهٔ آن‌ها از هم $۷۰+۱۶۰=۲۳۰m$ می‌شود.



B ۱۸۹ ۳

خط فکری: شیب نمودار مکان − زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار $x-t$ به صورت خط راست باشد شیب نمودار ثابت بوده یعنی سرعت متحرک ثابت است. فاصلهٔ دو متحرک برابر بزرگی تفاضل مکان دو متحرک در آن لحظه است. سرعت متحرک A مثبت بوده چون شیب خط آن مثبت است و شیب خط B منفی است پس سرعت این متحرک منفی است. در صورت سؤال گفته شده تندی یعنی بزرگی سرعت A دو برابر بزرگی سرعت B است: $|v_A|=۲|v_B| \xrightarrow[v_B<۰]{v_A>۰} v_A=-۲v_B$

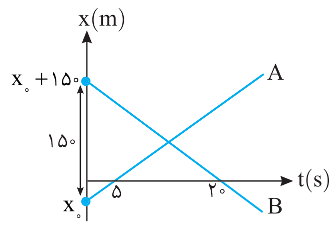
نکته: معادلهٔ حرکت سرعت ثابت به صورت $x=\underbrace{v}_{\text{سرعت}}t+\underbrace{x_۰}_{\text{مکان اولیه}}$ است.

روش اول: معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از روی نمودار، داده‌های مسئله را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$x_A=v_At+x_۰ \xrightarrow[x_A=۰]{t=۵s} ۰=۵v_A+x_۰ \Rightarrow v_A=\frac{-x_۰}{۵} \quad (۱)$$

$$x_B=v_Bt+x_۰+۱۵۰ \xrightarrow[x_B=۰]{t=۲۰s} ۰=۲۰v_B+x_۰+۱۵۰$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰} \quad (۲)$$



با توجه به سؤال $v_A=-۲v_B$ است:

$$v_A=-۲v_B \xrightarrow[v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}]{v_A=\frac{-x_۰}{۵}} \frac{-x_۰}{۵}=-۲\left(\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-x_۰}{۵}=\frac{x_۰+۱۵۰}{۱۰} \Rightarrow -x_۰=\frac{x_۰+۱۵۰}{۲} \Rightarrow -۲x_۰=x_۰+۱۵۰$$

$$\Rightarrow -۳x_۰=۱۵۰ \Rightarrow x_۰=-۵۰m$$

حال $x_۰=-۵۰m$ را در معادله‌های (۱) و (۲) قرار می‌دهیم تا سرعت‌ها به‌دست آید:

$$v_A=\frac{-x_۰}{۵}=\frac{۵۰}{۵}=۱۰m/s\ ,\ v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}=\frac{-۱۰۰}{۲۰}=-۵m/s$$

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۲۰s$ متحرک B از مبدأ مکان می‌گذرد $(x_B=۰)$. معادلهٔ حرکت متحرک A را نوشته و در لحظهٔ $t=۲۰s$ مکان متحرک A را به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=v_At+x_۰ \xrightarrow[x_۰=-۵۰m]{v_A=۱۰m/s} x_A=+۱۰t-۵۰$$

$$\xrightarrow{t=۲۰s} x_A=۲۰۰-۵۰=۱۵۰m$$

فاصله دو متحرک را حساب می‌کنیم: $r=|x_A-x_B| \Rightarrow r=|۱۵۰-۰|=۱۵۰m$

روش دوم: سرعت متحرک A برابر $۱۰m/s$ است یعنی متحرک A در هر ثانیه ۱۰m در جهت مثبت جابه‌جا می‌شود و سرعت متحرک B، $-۵m/s$ بوده یعنی متحرک B در هر ثانیه ۵m خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود یعنی در هر ثانیه جمعاً دو متحرک A و B، $۵+۱۰=۱۵m$ متر به هم نزدیک می‌شوند. در ابتدا فاصلهٔ A از B، ۱۵۰ متر است بنابراین این دو متحرک در مدت $\frac{۱۵۰}{۱۵}=۱۰s$ به هم می‌رسند و بعد از به هم رسیدن در هر ثانیه ۱۵m از هم دور می‌شوند در مدت $(۲۰-۱۰=۱۰s)$ فاصلهٔ آن‌ها از هم $۱۰\times۱۵=۱۵۰m$ می‌شود.

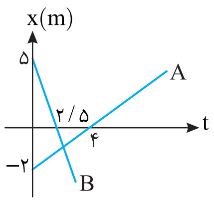
C ۱۹۰ ۲

خط فکری: وقتی بیان می‌شود که فاصلهٔ دو متحرک A و B از ۶m کمتر باشد یعنی باید $|x_B-x_A|<۶$ باشد بنابراین شما باید از روی نمودار سرعت هر متحرک را به‌دست آورده معادلهٔ حرکت هر یک را نوشته و قدر مطلق تفاضل آن‌ها را کوچک‌تر از ۶m قرار داده تا مسئله حل شود.

۱ سرعت حرکت هر متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_A=\frac{۰-(-۲)}{۴-۰} \Rightarrow v_A=۰/۵m/s$$

$$v_B=\frac{۰-۵}{۲/۵-۰} \Rightarrow v_B=-۲m/s$$



۲ معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم: $x_A=۰/۵t-۲ \quad , \quad x_B=-۲t+۵$

۳ با توجه به صورت مسئله:

$$|x_A-x_B|<۶ \Rightarrow |۰/۵t-۲+۲t-۵|<۶ \Rightarrow |۲/۵t-۷|<۶$$

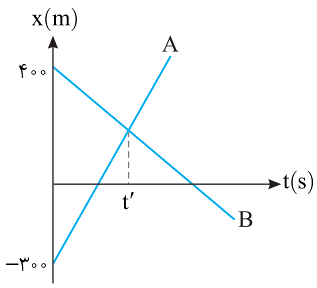
$$\Rightarrow -۶<۲/۵t-۷<۶ \Rightarrow ۱<۲/۵t<۱۳ \Rightarrow ۰/۴<t<۵/۲$$

C ۱۹۱ ۳

با توجه به شکل فاصلهٔ ابتدایی A و B از هم $۴۰۰+۳۰۰=۷۰۰m$ است. در لحظهٔ t' دو متحرک به هم می‌رسند سپس از هم دور می‌شوند و فاصلهٔ آن‌ها از هم در $t=۳۰s$، ۳۵۰m می‌شود. یعنی مجموع مسافت طی شده توسط دو متحرک در بازهٔ ۰ تا ۳۰s باید $۷۰۰+۳۵۰=۱۰۵۰m$ باشد. در این صورت:

$$\ell_A+\ell_B=۱۰۵۰ \xrightarrow{\ell=st} s_At+s_Bt=۱۰۵۰$$

$$(s_A+s_B)۳۰=۱۰۵۰ \Rightarrow s_A+s_B=۳۵m/s$$

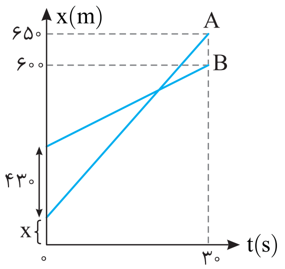


با توجه به فرض مسئله $s_B=s_A-۵$ بنابراین:

$$s_A+s_A-۵=۳۵ \Rightarrow ۲s_A=۴۰ \Rightarrow s_A=۲۰m/s$$

۱۹۲ ۳ B

خط فکری در صورت مسئله از شما خواسته شده $v_A - v_B$ را به‌دست بیاورید بنابراین شما باید شیب نمودار A و شیب نمودار B را به کمک داده‌های روی نمودار به‌دست آورده از هم کم کنید.



۱ سرعت هر متحرک برابر شیب نمودار $x-t$ است، از این‌رو با توجه به نمودار داریم:

$$v_A = \frac{۶۵۰ - x}{۳۰}$$

$$v_B = \frac{۶۰۰-(۴۳۰+x)}{۳۰}$$

۲ تفاضل سرعت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v_A - v_B = \frac{۶۵۰-x}{۳۰} - \frac{۱۷۰-x}{۳۰} = \frac{۴۸۰}{۳۰} \Rightarrow v_A - v_B = ۱۶ m/s$$

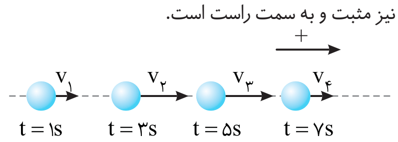
۱۹۳ ۲ A

یادآوری نسبت تغییرات بردار سرعت به زمان تغییر را شتاب متوسط گویند $\vec a_{av} = \frac{\Delta \vec v}{\Delta t} = \frac{\vec v_۲ - \vec v_۱}{t_۲ - t_۱}$. شتاب متوسط کمیت برداری است و همواره در جهت بردار تغییر سرعت است.

با توجه به تعریف شتاب متوسط، وقتی تغییرات سرعت منفی باشد شتاب متوسط الزاماً منفی است.

۱۹۴ ۴ A

۱ در لحظه‌های $t_۱=۱s$ و $t_۲=۳s$ سرعت‌ها به‌ترتیب $v_۱$ و $v_۲$ بوده و $v_۲ > v_۱$ است، بنابراین تغییرات سرعت $(\Delta v = v_۲ - v_۱ > ۰)$ مثبت بوده و بردار شتاب متوسط نیز مثبت و به سمت راست است.



۲ در لحظه‌های $t=۵s$ و $t=۷s$ سرعت متحرک $v_۳$ و $v_۴$ بوده و $v_۴ < v_۳$ است یعنی تغییرات سرعت منفی $(\Delta v = v_۴ - v_۳ < ۰)$ و بردار شتاب متوسط منفی و به سمت چپ است.

۱۹۵ ۳ A

یک جای‌گذاری ساده در رابطهٔ شتاب متوسط و حل مسئله و تمام.

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow a_{av} = \frac{۹-۵}{۳-۱} = ۲m/s^۲$$

۱۹۶ ۴ B

خط فکری در صورت مسئله تندی در لحظهٔ $t_۱=۱s$ و $t_۲=۳s$ داده شده است.

تندی کمیت نرده‌ای است و جهت ندارد در حرکت روی خط راست تندی لحظه‌ای برابر اندازهٔ سرعت است و سرعت کمیت برداری است، بنابراین وقتی گفته می‌شود تندی $۹m/s$ است یعنی سرعت می‌تواند $+۹m/s$ و یا $-۹m/s$ باشد بنابراین این مسئله چهار حالت خواهد داشت. البته در صورت مسئله اندازهٔ شتاب متوسط خواسته شده است.

تندی حرکت در لحظهٔ $t_۱=۲s$ برابر $s_۱=۵m/s$ است. بنابراین سرعت $v_۱=\pm۵m/s$ است و در لحظهٔ $t_۲=۳s$ تندی برابر $s_۲=۹m/s$ است پس $v_۲=\pm۹m/s$ است:

$$|a_{av}| = |\frac{\Delta v}{\Delta t}| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱=+۵m/s, v_۲=+۹m/s} a_{av} = \frac{۹-۵}{۲} = +۲m/s^۲$$

$$|a_{av}| = |\frac{\Delta v}{\Delta t}| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱=+۵m/s, v_۲=-۹m/s} a_{av} = |\frac{-۹-۵}{۲}| = +۷m/s^۲$$

$$|a_{av}| = |\frac{\Delta v}{\Delta t}| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱=-۵m/s, v_۲=۹m/s} a_{av} = \frac{۹-(-۵)}{۲} = +۷m/s^۲$$

$$|a_{av}| = |\frac{\Delta v}{\Delta t}| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱=-۵m/s, v_۲=-۹m/s} a_{av} = |\frac{-۹-(-۵)}{۲}| = ۲m/s^۲$$

۱۹۷ ۱ A

خط فکری برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ تنها باید بردار سرعت در لحظهٔ $t_۱$ (v_i) و لحظهٔ $t_۲$ (v_f) را در رابطهٔ شتاب متوسط قرار داد و در این مدت سرعت چه مقدارهایی داشته مهم نیست.

شتاب متوسط برابر آهنگ تغییرات سرعت $v_f - v_i$ می‌باشد، بنابراین:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{۵-۲}{۲+۳} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶ m/s^۲$$

۱۹۸ ۲ B

خط فکری شتاب متوسط برابر $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. با توجه به این رابطه و مقدار شتاب متوسط داده شده در دو بازهٔ زمانی حل سؤال را شروع می‌کنیم.

۱ با توجه به تعریف شتاب متوسط برای هر مرحله رابطهٔ شتاب متوسط را می‌نویسیم.

$$\vec a_{av} = \frac{\Delta \vec v}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\vec a = -۴\vec i]{t_۱=۵s \text{ تا } t_۲=۱۰s} -۴\vec i = \frac{\vec v_{۱۰} - \vec v_۵}{۱۰-۵} \Rightarrow \vec v_{۱۰} - \vec v_۵ = -۲۰\vec i \quad (۱)$$

$$\xrightarrow[t_۲=۱۰s \text{ و } t_۳=۱۲s]{\vec a = ۲\vec i} ۲\vec i = \frac{\vec v_{۱۲} - \vec v_{۱۰}}{۱۲-۱۰} \Rightarrow \vec v_{۱۲} - \vec v_{۱۰} = ۴\vec i \quad (۲)$$

۲ برای رسیدن به بررسی بازهٔ $t_۱=۵s$ تا $t_۳=۱۲s$ سرعت $\vec v_{۱۰}$ مزاحم است پس رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم تا $v_{۱۰}$ از دو معادله حذف شود:

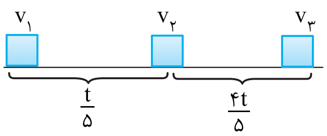
$$\begin{cases} \vec v_{۱۰} - \vec v_۵ = -۲۰\vec i \\ \vec v_{۱۲} - \vec v_{۱۰} = ۴\vec i \end{cases} \xrightarrow{+} \vec v_{۱۲} - \vec v_۵ = -۲۰\vec i + ۴\vec i \Rightarrow \vec v_{۱۲} - \vec v_۵ = -۱۶\vec i$$

۳ شتاب متوسط در بازهٔ $t=۵s$ تا $t=۱۲s$ خواهد شد.

$$\vec a_{av} = \frac{\vec v_{۱۲} - \vec v_۵}{۱۲-۵} \xrightarrow{\vec v_{۱۲} - \vec v_۵ = -۱۶\vec i} a_{av} = \frac{-۱۶\vec i}{۷} = \frac{-۱۶}{۷}\vec i$$

۱۹۹ ۱ B

خط فکری رابطهٔ شتاب متوسط را در بازهٔ $\frac{۱}{۵}t$ و $\frac{۴}{۵}t$ بنویسید و رابطه‌ای بین $v_۱$ و $v_۲$ و $v_۳$ به‌دست بیاورید سپس به سراغ شتاب متوسط در کل مدت t بروید.



۱ **شتاب متوسط در** $\frac{۱}{۵}t$:

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{v_۲ - v_۱}{\frac{۱}{۵}t} \Rightarrow v_۲ - v_۱ = \frac{۲}{۵}t \Rightarrow v_۱ = v_۲ - \frac{۲}{۵}t \quad (I)$$

۲ **شتاب متوسط در مابقی زمان یعنی** $\frac{۴}{۵}t$:

$$-۴ = \frac{v_۳ - v_۲}{\frac{۴}{۵}t} \Rightarrow v_۳ - v_۲ = \frac{۱۶}{۵}t \Rightarrow v_۳ = v_۲ - \frac{۱۶}{۵}t \quad (II)$$

۳ **شتاب متوسط در کل مدت حرکت خواهد شد.**

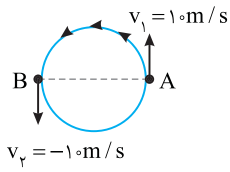
$$a_{av} = \frac{v_۳ - v_۱}{t} \xrightarrow{(I),(II)} a_{av} = \frac{v_۲ - \frac{۱۶}{۵}t - (v_۲ - \frac{۲}{۵}t)}{t} = \frac{-\frac{۱۶}{۵}t + \frac{۲}{۵}t}{t}$$

$$a_{av} = \frac{-۱۴}{۵} m/s^۲ = -۲/۸ m/s^۲$$

B ۲۰۰ ۳

نکته بردار سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر حرکت مماس است.

خط فکری دقت کنید در هر ۱۶s، ذره، یک بار محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین در مدت ۸s، نصف محیط را طی خواهد کرد و به‌طور مثال مطابق شکل در مدت ۸s ذره از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود، بنابراین شما با رسم بردارهای سرعت در نقطهٔ A و B علامت سرعت‌ها را مشخص کرده و شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.



در نقطهٔ A بردار سرعت $v_1=+۱۰\frac{m}{s}$ و در نقطهٔ B که بردار سرعت در خلاف جهت A است $v_۲=-۱۰m/s$ خواهد بود بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط خواهد شد.

$$|a_{av}|=\frac{|v_۲-v_1|}{t_۲-t_1}=\frac{|-۱۰-۱۰|}{۸}=\frac{۲۰}{۸}\Rightarrow|a_{av}|=۲/۵m/s^۲$$

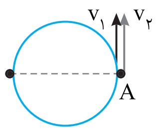
A ۲۰۱ ۱

۱ در هر ۲۰s ذره، چهار بار محیط دایره را طی می‌کند بنابراین زمان طی کردن یک بار محیط دایره خواهد شد:

۴ بار	۲۰s
۱ بار	t

$\Rightarrow t=۵s$

۲ در بازهٔ ۵s ذره از هر نقطه‌ای که شروع به حرکت کرده (مثلاً نقطهٔ A) به همان نقطه برمی‌گردد و بردار سرعت‌های v_1 و $v_۲$ برابر شده و تغییرات سرعت برابر صفر شده $(\Delta v=۰)$ و در نتیجه شتاب متوسط نیز صفر می‌شود $(a_{av}=۰)$.



A ۲۰۲ ۲

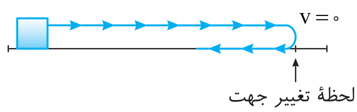
یادآوری معادلهٔ سرعت - زمان یک رابطهٔ ریاضی بین سرعت متحرک و زمان است که با قراردادن زمان می‌توان سرعت متحرک را در هر لحظه به‌دست آورد.

خط فکری در صورت مسئله خواسته شده لحظه‌ای که تندی ۳m/s است را حساب کنیم. تندی کمیت نرده‌ای است و برابر اندازهٔ سرعت است از این‌رو سرعت می‌تواند $+۳m/s$ و $-۳m/s$ باشد. یک‌بار $v=+۳m/s$ و بار دیگر $v=-۳m/s$ را در معادلهٔ سرعت زمان قرار بدهید.

$$v=-۴t+۱\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{v=۳m/s}۳=-۴t+۱\Rightarrow۲=-۴t\Rightarrow t=-۰/۵ \text{ غیرقابل قبول}\\ \xrightarrow{v=-۳m/s}-۳=-۴t+۱\Rightarrow-۴=-۴t\Rightarrow t=۱s\end{cases}$$

B ۲۰۳ ۳

خط فکری برای آنکه متحرکی که روی خط راست در حرکت است تغییر جهت بدهد باید ابتدا سرعتش صفر شده سپس تغییر جهت بدهد. بنابراین باید در معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت را برابر صفر قرار دهید اما دقت کنید که آیا علامت سرعت تغییر می‌کند یا نه؟



نکته هرگاه معادلهٔ سرعت زمان درجه ۲ باشد و با قرارداد $v=۰$ در معادله اگر زمان منفی به‌دست بیاید و یا معادله ریشه مضاعف داشته باشد تغییر جهتی رخ نمی‌دهد و تنها وقتی که زمان مثبت به‌دست بیاید تغییر جهت اتفاق افتاده است. معادله سرعت را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$v=t^۲-۶t+۹=(t-۳)^۲\geq۰$$

دقت کنید سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و همواره $v\geq۰$ است و متحرک تغییر جهت نخواهد داد.

B ۲۰۴ ۴

خط فکری اول باید مشخص کنید که ۲ ثانیهٔ دوم یعنی چه؟ یعنی بازهٔ زمانی بین $t=۲s$ تا $t=۴s$.

$$۰\xrightarrow{\text{۲ ثانیه اول}}۲s\xrightarrow{\text{۲ ثانیه دوم}}۴s\xrightarrow{\text{۲ ثانیه سوم}}۶s\ldots$$

شتاب متوسط یعنی آهنگ تغییر سرعت بنابراین باید سرعت را در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۴s$ حساب کنید سپس شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ از معادلهٔ سرعت زمان سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$v=۲t^۲-۴t-۲$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{t=۲s}v=۲(۲)^۲-۴(۲)-۲\Rightarrow v_1=-۲m/s\\ \xrightarrow{t=۴s}v=۲(۴)^۲-۴(۴)-۲=+۱۴m/s\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۴-(-۲)}{۲}\Rightarrow a_{av}=۸m/s^۲$$

بازی با سؤال **معادلهٔ سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است در SI به‌صورت $v=۲t^۲-۱$ است. شتاب متوسط در ثانیهٔ سوم حرکتش چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۶

پاسخ **ثانیهٔ سوم بازهٔ زمانی بین $t=۲s$ و $t=۳s$ است. در این لحظه‌ها سرعت را حساب کرده و در رابطهٔ شتاب متوسط قرار می‌دهیم:**

$$t_1=۲s\Rightarrow v_1=۲\times۴-۱=۷m/s,\ t_۲=۳s\Rightarrow v_۲=۲\times۹-۱=۱۷m/s,$$

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_1}{t_۲-t_1}=\frac{۱۷-۷}{۳-۲}=۱۰m/s^۲$$

گزینهٔ ۲

B ۲۰۵ ۱

یادآوری ریاضی

$$\sin\frac{\pi}{۲}=۱,\ \sin\frac{۳\pi}{۲}=-۱$$

۱ سرعت در لحظه‌های $t=\frac{۱}{۸}s$ و $t=\frac{۳}{۸}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=۲\sin(۴\pi\times\frac{۱}{۸})+۰/۵=۲\sin(\frac{\pi}{۲})+۰/۵$$

$$\Rightarrow v_1=۲\times۱+۰/۵\Rightarrow v_1=۲/۵m/s$$

$$v_۲=۲\sin(۴\pi\times\frac{۳}{۸})+۰/۵=۲\sin(\frac{۳\pi}{۲})+۰/۵$$

$$\Rightarrow v_۲=۲\times(-۱)+۰/۵\Rightarrow v_۲=-۱/۵m/s$$

۲ بنابراین شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_۲-v_1}{\Delta t}=\frac{-۱/۵-۲/۵}{\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۸}}=\frac{-۴}{\frac{۱}{۴}}=-۱۶m/s^۲$$

B ۲۰۶ ۴

۱ سرعت در لحظهٔ $t_1=۱s$ و $t_۲=۴s$ را حساب می‌کنیم:

$$v=t^۲-bt+۱\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۱s}v_1=۱-b\times۱+۱\Rightarrow v_1=۲-b\\ \xrightarrow{t_۲=۴s}v_۲=۱۶-۴b+۱\Rightarrow v_۲=۱۷-۴b\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط صفر است بنابراین:

$$v_{av}=\frac{v_۲-v_1}{t_۲-t_1}\Rightarrow۰=\frac{۱۷-۴b-(۲-b)}{۴-۱}\Rightarrow۱۵-۳b=۰\Rightarrow b=۵$$

۳ معادلهٔ سرعت را کامل می‌کنیم.

$$v=t^۲-۵t+۱$$

۴ سرعت را مساوی $-۵m/s$ قرار می‌دهیم.

$$v=-۵m/s\Rightarrow t^۲-۵t+۱=-۵\Rightarrow t^۲-۵t+۶=۰$$

$$\Rightarrow(t-۲)(t-۳)=۰\Rightarrow t=۲s,t=۳s$$

B ۲۰۷ ۲

۱ متحـرک از مـکان $x_۱=۲m$ به مکان $x_۲=-۲m$ رفته اسـت. حـال به کمک معادلهٔ سرعت - مکان سرعت متحرک را در این دو مکان به‌دست می‌آوریم:

$$v=۴x+۲ \Rightarrow v_۱=۴(۲)+۲=۱۰m/s \quad , \quad v_۲=۴(-۲)+۲=-۶m/s$$

۲ شتاب متوسط در این مدت برابر است با:

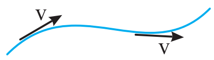
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}=\frac{-۶-۱۰}{۲}=-۸m/s^۲$$

A ۲۰۸ ۴

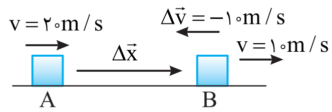
۱ با توجه به تعریف سـرعت متوسـط $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ بردار سرعت متوسط همواره در جهت بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ سرعت در هر نقطه از مسیر حرکت بر مسیر مماس است و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ هرگاه حرکت روی خط راسـت (مثلاً محور x ها) باشـد در این صورت بردار سرعت متحرک در امتداد محور xهاسـت (یا در جهت مثبت و یا در جهت منفی آن. وقتی بردار سـرعت در امتداد محور xهاست بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ نیز در امتداد محور xها بوده در نتیجه بـردار شـتاب $\vec{a}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ نیـز در امتداد محور xهاسـت یعنی بردار سـرعت و بردار شتاب لحظه‌ای همواره در یک امتداد و هم‌راستا هستند و گزینهٔ (۳) نیز درست است.



۴ بردار شـتاب متوسـط با تغییر سـرعت هم‌جهت اسـت $\vec{a}_{av}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ و بردار سـرعت متوسـط با بردار جابه‌جایی ($\vec{v}_{av}=\Delta\vec{x}/\Delta t$) هم‌جهت اسـت. به شـکل زیر دقـت کنید متحـرک از A به B رفته و جابه‌جایی آن نیز مثبـت بوده اما به دلیل کاهش سـرعت، بردار تغییر سـرعت منفی و خلاف جهت جابه‌جایی اسـت یعنی بردار شـتاب متوسط و بردار سرعت متوسط در این مثال هم‌جهت نبوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۲۰۹ ۲

خط فکری حرکت تندشـونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال افزایش است برای این منظور در حرکت روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت و هم‌علامت باشند، یعنی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند. حرکت کندشونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال کاهش است از این‌رو در حرکت روی خط راست باید بردار سـرعت و بردار شـتاب در خلاف جهت هم باشند یعنی اگر بردار سرعت مثبت باشد باید بردار شتاب منفی و یا اگر بردار سرعت منفی باشد باید بردار شتاب مثبت باشد.

به شکل‌ها نگاه کنید و ببینید که در کدام شکل‌ها بردار سرعت و شتاب در خلاف هم هستند.

(الف) هر دو بردار شتاب و سرعت هم‌جهت بوده و حرکت تندشونده است.

(ب) بردار شتاب منفی و بردار سرعت مثبت بوده و حرکت کندشونده است.

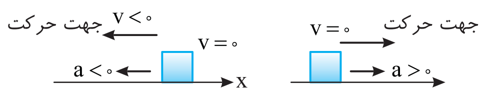
(پ) بردار شتاب مثبت و بردار سرعت منفی بوده و حرکت کندشونده است.

(ت) بردار شتاب و سرعت هر دو منفی بوده و حرکت تندشونده است.

بنابراین در دو مورد حرکت کندشونده است.

A ۲۱۰ ۳

نکته هرگاه جسم از حال سکون روی خط راست به حرکت درآید، شتاب شروع حرکت جسم قطعاً در جهت حرکت جسم است.



در گزینـهٔ (۱) جسـم از حال سـکون در جهت منفی روی محور شـروع بـه حرکت کرده بنابراین شتاب حرکت نیز در جهت منفی محور بوده و گزینهٔ (۱) درست است.

وقتی حرکت روی خط راست تندشونده باشد یعنی سرعت متحرک در یک جهت در حال افزایـش بـوده و متحرک تغییر جهـت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسـافت طی شـده یکسان است $(d=\ell)$ و گزینهٔ (۲) درست است.

در حرکت کندشـونده روی خط راسـت باید بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم باشند و لزومی ندارد شتاب منفی باشد بلکه کافی است اگر بردار سرعت منفی است بردار شتاب مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

در هـر حرکتـی طـول مسـیر حرکت (مسـافت) همـواره برابر یا بزرگ‌تـر از انـدازهٔ بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۴) درست است.

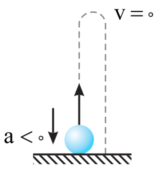
B ۲۱۱ ۳

در حرکت تندشونده بردار سرعت و شتاب هم‌جهت و هم‌علامت هستند یعنی اگر $a<۰$ باشـد بردار سـرعت نیز منفی اسـت و تا زمانی که شـتاب منفی اسـت سـرعت در حال افزایش اسـت و حرکت تندشـونده اسـت و هرگز کندشونده نمی‌شـود مگر آنکه علامت شـتاب تغییر کند که در این مسـئله بیان شـده a منفی است و علامت آن تغییر نمی‌کند بنابراین هرگز گزینهٔ (۳) اتفاق نمی‌افتد. اما گزینه‌های دیگر را بررسی می‌کنیم.

اگر متحرک با سرعت منفی در جهت منفی محور با شتاب $a<۰$ در حرکت باشد، حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.

اگر سـرعت متحرک مثبت اما شـتاب منفی $(a<۰)$ باشـد حرکت کندشـونده است در این‌صورت دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد.

حالت اول: تندی متحرک کاهش یافته، سرعت صفر شود و متحرک ساکن بماند در این حالت گزینهٔ (۲) درست است.

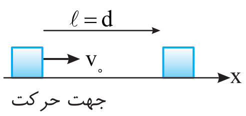


حالت دوم: متحرک پس از آنکه سـرعتش صفر شـد با همان شتاب بازگردد مانند گلوله‌ای که در شرایط خلأ رو به بالا پرتاب می‌کنیم گلوله متوقف شـده و برمی‌گردد و گزینهٔ (۴) درست است.

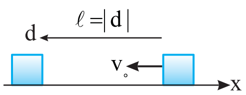
B ۲۱۲ ۱

خط فکری هرگاه مسافت طی شده و بزرگی جابه‌جایی برابر باشد حرکت الزاماً روی خط راست است. اما دو حالت وجود دارد یک حالت آنکه جابه‌جایی مثبت بوده و حالت دیگر آن که جابه‌جایی منفی باشـد. بنابراین شـما باید دو حالت را بررسی کرده تا بتوانید نوع حرکت را بیان کنید.

حالـت اول: متحـرک در جهـت مثبـت در حرکت است و با توجه به اینکه شتاب متوسط در جهت سـرعت اولیه است باید سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده باشد.

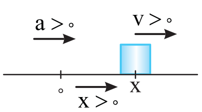


حالـت دوم: متحـرک در جهـت منفـی در حرکـت باشـد در این حالـت نیز بـا توجه به فرض مسـئله بردار شـتاب متوسط هم‌جهت بردار سرعت اولیه بوده و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

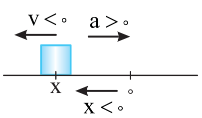


B ۲۱۳ ۴

۱ تست جالبی‌ست، حاصل‌ضرب مکان و سرعت مثبت شـده اسـت یعنـی وقتی مـکان مثبت اسـت، سرعت نیز مثبت است مانند شکل (۱) و وقتی مکان منفی بوده، سـرعت نیز منفی اسـت مانند شکل (۲)، بنابراین در هر دو شـکل متحرک در حال دور شدن از مبدأ است و گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.



شکل (۱)



شکل (۲)

۲ شـتاب حرکـت مثبـت بیـان شـده $(a>۰)$ بنابراین در شکل (۱) بردار شتاب و سرعت هم‌جهت حرکت بوده و حرکت تندشونده است و در شکل (۲)، بردار شتاب و سرعت خلاف جهت بوده و حرکت کندشونده است در نتیجه ممکن است حرکت کندشونده یا تندشونده باشد از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

نکته هرگاه حاصل‌ضرب سرعت در مکان مثبت باشد $(vx>۰)$ متحرک در حال دور شدن از مبدأ و اگر منفی باشد $(vx<۰)$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

B ۲۱۴ ۱

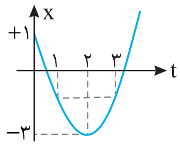
شتاب حرکت از رابطهٔ $a=2t+1$ پیروی می‌کند و با توجه به اینکه زمان همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود، با گذشت زمان شتاب افزایش می‌یابد اما جهت آن تغییر نمی‌کند. جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده بنابراین سرعت و جهت حرکت جسم همان جهت بردار شتاب است و حرکت تندشونده است و چون شتاب تغییر جهت نمی‌دهد، حرکت کندشونده نخواهد شد.

B ۲۱۵ ۱

خط فکری معادلهٔ $x=t^2-4t+1$ یک تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس آن متقارن است رأس سهمی نقطه بیشینه یا کمینه سهمی است و در این نقطه خط مماس بر نمودار موازی محور افقی بوده و شیب آن صفر است. شیب خط مماس بر منحنی مکان – زمان برابر سرعت لحظه‌ای بنابراین در رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر است بنابراین اولین کاری که شما باید انجام بدهید به‌دست آوردن مختصات رأس سهمی است تا بتوانید در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط اظهارنظر کنید.

۱ معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^2-4t+1$ است و مختصات رأس آن خواهد شد:

$$t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{-(-4)}{2\times 1}\Rightarrow t=2s\Rightarrow x=4-8+1=-3m$$



۲ نمودار مکان – زمان را رسم می‌کنیم. در دو لحظهٔ $t=1s$ و $t=3s$ مکان متحرک یکی است و جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط صفر است و گزینهٔ (۱) درست است.

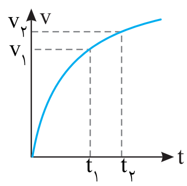
۳ در لحظه‌های $t=1s$ و $t=3s$ شیب خط مماس (سرعت لحظه‌ای متحرک) قرینه است بنابراین تغییر سرعت $(\Delta v\neq 0)$ صفر نبوده و شتاب متوسط حرکت $(a_{av}=\Delta v/\Delta t)$ نیز صفر نمی‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۴ در لحظهٔ $t=2s$ یعنی رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود اما شتاب لحظه‌ای صفر نیست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

A ۲۱۶ ۴

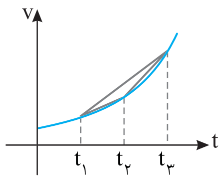
شیب خط قاطع در لحظه‌های t_1 و t_2 روی نمودار سرعت – زمان، برابر شتاب متوسط است.

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$



B ۲۱۷ ۳

خط فکری شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار $v-t$ برابر شتاب متوسط در آن بازه است. از این‌رو برای بررسی شتاب متوسط شما باید خط قاطع بر نمودار را در هر بازه رسم کنید. شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_1، t_1 تا t_2، t_2 تا t_3 و t_1 تا t_3 برابر شیب خط واصل مشخص شده در نمودار است و با توجه به نمودار $v-t$، شیب خط قاطع در بازهٔ t_2 تا t_3 بیشتر است. از این‌رو شتاب متوسط در این بازه بزرگ‌تر است.

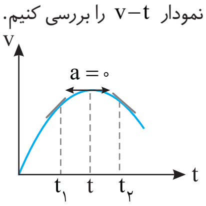


B ۲۱۸ ۴

یادآوری بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر جسم برابر $F=ma$ است.

خط فکری برای بررسی تغییرات نیرو باید تغییرات شتاب را بررسی کنیم و برای بررسی تغییرات شتاب باید تغییرات شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ را بررسی کنیم.

از لحظهٔ t_1 تا t شیب خط مماس یعنی شتاب و در نتیجه نیرو در حال کاهش بوده تا به صفر برسد از t به بعد قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار در حال افزایش است (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بزرگی شتاب در حال افزایش یعنی بزرگی نیرو در حال افزایش است.



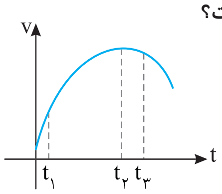
بازی با سؤال نمودار $v-t$ متحرکی به صورت شکل روبه‌رو است. **نیروی وارد بر متحرک در کدام لحظه بزرگ‌تر است؟**

۱) t_1

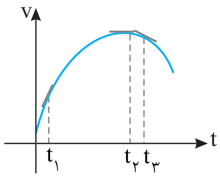
۲) t_2

۳) t_3

۴) نیروی وارد بر متحرک ثابت است.



پاسخ **با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ است، پس هرچه شتاب بزرگ‌تر باشد نیرو هم بزرگ‌تر است و می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب در آن لحظه است.**

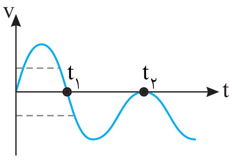


با توجه به شکل اندازهٔ شیب خط مماس در t_1 بزرگ‌تر از اندازهٔ شیب خط مماس در دو لحظهٔ دیگر است پس در t_1 نیروی بزرگ‌تری به جسم وارد می‌شود.

گزینهٔ ۱

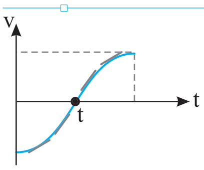
A ۲۱۹ ۳

محل برخورد نمودار سرعت – زمان با محور زمان به مفهوم توقف جسم است. بنابراین در لحظه‌های t_1 و t_2 سرعت صفر است. اما متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت می‌دهد. زیرا سرعت آن قبل از t_1 مثبت و بعد از t_1 منفی است. یعنی سرعت تغییر علامت و متحرک تغییر جهت داده است. اما در لحظهٔ t_2 سرعت متحرک صفر شده اما تغییر علامت نداده و هم قبل و هم بعد از t_2 هم‌چنان سرعت منفی است یعنی متحرک تغییر جهت نداده است، بنابراین سرعت دو بار صفر و متحرک یک بار تغییر جهت داده است.



B ۲۲۰ ۳

به نمودار دقت کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ t صفر شده و تغییر علامت داده بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت داده است و گزارهٔ (الف) درست است.

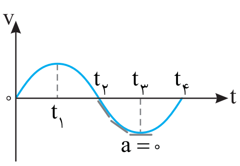
۲ اندازهٔ سرعت از لحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ t در حال کاهش است و از لحظهٔ t به بعد اندازهٔ سرعت در حال افزایش است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ با توجه به شیب مماس‌های روی نمودار ابتدا شیب در حال افزایش (خط مماس در حال نزدیک شدن به حالت قائم) و سپس در حال کاهش (خط مماس در حال افقی شدن) است بنابراین شتاب ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و گزارهٔ (پ) درست است.

۴ اما در تمام مدت شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان مثبت و شتاب مثبت است و گزارهٔ (ت) نادرست است. در نتیجه گزاره‌های (الف) و (پ) درست می‌باشند.

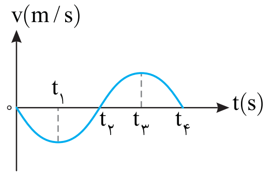
A ۲۲۱ ۳

با توجه به نمودار $v-t$ در لحظهٔ t_2 سرعت صفر است و از این لحظه تا لحظهٔ t_3 اندازهٔ سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است. اگر در بازهٔ t_2 تا t_3 بر نمودار خط مماس رسم کنیم شیب خط مماس منفی و شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.



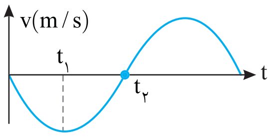
اما با رسم خط‌های مماس بر نمودار در بازهٔ t_2 تا t_3 مشاهده می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش است و در t_3 شیب خط مماس صفر می‌شود. بنابراین شتاب در حال کاهش و در t_3 شتاب صفر می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است. در بازهٔ t_2 تا t_3 نمودار زیر محور زمان قرار دارد و سرعت در این بازه منفی است و گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است. مطابق شکل روبه‌رو است. در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 حرکت متحرک .... شونده و علامت شتاب .... است.



۱) تند، منفی ۲) تند، مثبت ۳) کند، مثبت ۴) کند، منفی

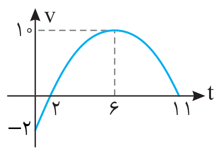
پاسخ در بازهٔ t_1 تا t_2 اندازهٔ سرعت در حال کاهش است و در t_2 سرعت صفر می‌شود، بنابراین حرکت کندشونده است اما شیب خط مماس بر نمودار در این بازه مثبت و شتاب مثبت است. (علامت سرعت در این بازه منفی و علامت شتاب مثبت است $(av<0)$ و حرکت کندشونده است.)



گزینهٔ ۳

A ۲۲۲ ۲

خط فکری هرگاه تندی متحرک (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش باشد حرکت کندشونده و هرگاه تندی در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است از این‌رو شما باید به تغییر اندازهٔ سرعت دقت کنید.



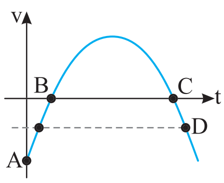
۱ در بازهٔ صفر تا ۲s اندازهٔ سرعت از ۲m/s به صفر می‌رسد؛ حرکت کندشونده است.

۲ در بازهٔ ۶s تا ۱۱s سرعت از ۱۰m/s به صفر می‌رسد و حرکت کندشونده است.

۳ جمعاً به مدت ۲s+۵s=۷s حرکت کندشونده است.

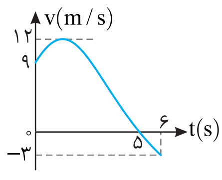
۴ از ۲s تا ۶s سرعت از صفر به ۱۰m/s رسیده است؛ بنابراین ۴s حرکت تندشونده است.

A ۲۲۳ ۴



در لحظات B و C که نمودار سرعت محور زمان را قطع کرده سرعت متحرک صفر شده یعنی متحرک به‌طور لحظه‌ای ساکن است. در لحظهٔ A بزرگی سرعت در حال کوچک‌تر شدن است و سرعت به سمت صفر می‌رود. بنابراین در این لحظه حرکت کندشونده است و در لحظهٔ D بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد پس حرکت در این لحظه تندشونده است.

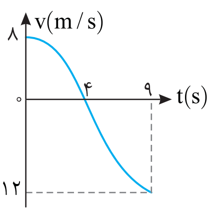
A ۲۲۴ ۲



با توجه به تعریف شتاب متوسط، $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، کافی است در لحظهٔ t=۰ و t=۶s از روی نمودار سرعت متحرک را مشخص کرده و در رابطهٔ شتاب متوسط قرار دهیم.

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{-3-9}{6-0}=-2m/s^2$$

A ۲۲۵ ۴



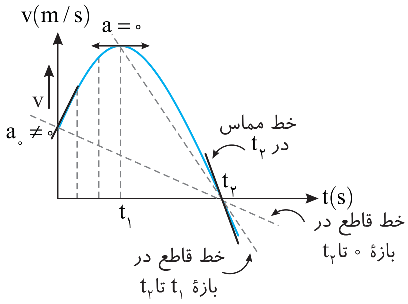
در بازهٔ زمانی که اندازهٔ سرعت در حال کاهش است حرکت کندشونده است بنابراین با توجه به نمودار سرعت - زمان در بازهٔ صفر تا ۴s، حرکت کندشونده است و سرعت از ۸ متر بر ثانیه به صفر متر بر ثانیه کاهش می‌یابد و در بازهٔ ۴s تا ۹s، اندازهٔ سرعت از صفر به ۱۲m/s در خلاف جهت محور می‌رسد یعنی تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است.

از این‌رو در بازهٔ صفر تا ۴s و ۴s تا ۹s شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}a_{av\,\text{تندشونده}}=\frac{-12-0}{9-4}=-2.4m/s^2\\ a_{av\,\text{کندشونده}}=\frac{0-8}{4-0}=-2m/s^2\end{cases}\Rightarrow\frac{a_{av\,\text{تندشونده}}}{a_{av\,\text{کندشونده}}}=\frac{6}{5}$$

B ۲۲۶ ۴

مطابق شکل در بازهٔ صفر تا t_1 سرعت متحرک در حال افزایش است و گزینهٔ (۱) نادرست است.



یادآوری شیب خط مماس بر نمودار v−t برابر شتاب لحظه‌ای است. در لحظهٔ t=۰ شیب خط مماس بر نمودار با قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 برابر نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.

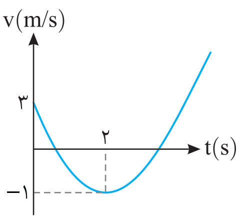
در بازهٔ صفر تا t_1 شیب خط مماس بر نمودار مثبت و شتاب مثبت است و در بازهٔ t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر نمودار منفی و شتاب منفی است از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست است.

یادآوری شیب خط قاطع بین دو لحظه در نمودار v−t برابر شتاب متوسط است.

با رسم خط قاطع در بازهٔ ۰ تا t_2 و t_1 تا t_2 مشخص است که قدرمطلق شیب خط قاطع در بازهٔ t_1 تا t_2 بزرگ‌تر از شیب خط قاطع در بازهٔ صفر تا t_2 است، بنابراین شتاب متوسط آن بیشتر و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۲۷ ۱

خط فکری به نظر می‌رسد راهی به جز به دست آوردن معادلهٔ سرعت - زمان به کمک اعداد روی نمودار نداریم. بعد از نوشتن معادلهٔ حرکت در لحظهٔ t=1s و $t_2=7s$ سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم و شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.



۱ در لحظهٔ t=۰، سرعت +۳m/s است بنابراین

$$v=at^2+bt+c\Rightarrow 3=0+0+c\Rightarrow c=3$$

۲ مختصات رأس سهمی

$$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow 2=-\frac{b}{2a}\Rightarrow b=-4a\quad(1)$$

۳

$$v=at^2+bt+3\xrightarrow{t=2s,\ v=-1m/s}-1=4a+2b+3\Rightarrow 4a+2b=-4\ (2)$$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$4a+2(-4a)=-4\Rightarrow -4a=-4\Rightarrow a=1,\ b=-4\times 1=-4$$

۴ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد $v=t^2-4t+3$

۵ سرعت در لحظه‌های $t_1=1s$ و $t_2=7s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=1s\Rightarrow v=0,\ t=7s\Rightarrow v=49-28+3\Rightarrow v=24m/s$$

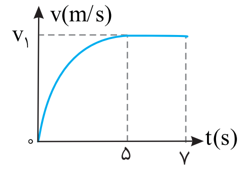
۶ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{24-0}{7-1}\Rightarrow a_{av}=4m/s^2$$

B ۲۲۸ ۱

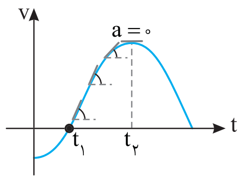
۱ با توجه به نمودار در بازهٔ 5s تا 7s سرعت متحرک تغییر نکرده است و بنا به رابطهٔ سرعت ثابت خواهیم داشت:

$\Delta x=v_1\Delta t\Rightarrow ۱۸=v_1\times ۲\Rightarrow v_1=۹m/s$



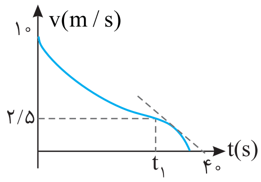
۲ شتاب متوسط برابر است با: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۹-۰}{۵}=۱/۸m/s^2$

A ۲۲۹ ۳



در بازهٔ صفر تا t_1 تندی جسم در حال کاهش بوده و در لحظهٔ t_1 تندی صفر می‌شود یعنی در این بازه حرکت کندشونده است در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است در صورت سؤال پرسیده شده در مدتی که حرکت تندشونده است، شتاب چگونه تغییر می‌کند. با توجه به اینکه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ اندازهٔ شتاب را مشخص می‌کند در بازهٔ t_1 تا t_2 با رسم چند خط مماس مشخص می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش یعنی شتاب در حال کاهش است.

B ۲۳۰ ۱



۱ شتاب در لحظهٔ t_1 یعنی شیب خط مماس در نمودار در لحظهٔ t_1 شتاب لحظه‌ای را از روی نمودار حساب می‌کنیم.

$a_{t_1}=\frac{۰-۲/۵}{۴۰-t_1}$

۲ شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا t_1 خواهد شد:

$a_{av}=\frac{۲/۵-۱۰}{t_1-۰}=\frac{-۷/۵}{t_1}$

۳ با توجه به فرض مسئله این دو شتاب را با هم برابر قرار می‌دهیم:

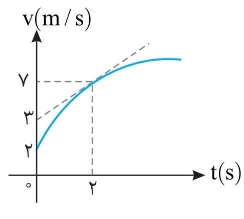
$$\frac{۰-۲/۵}{۴۰-t_1}=\frac{۲/۵-۱۰}{t_1-۰}\Rightarrow\frac{-۲/۵}{۴۰-t_1}=\frac{-۷/۵}{t_1-۰}\Rightarrow\frac{۱}{۴۰-t_1}=\frac{۳}{t_1}$$

$$\Rightarrow ۱۲۰-۳t_1=t_1\Rightarrow t_1=۳۰s$$

B ۲۳۱ ۱

۱ شتاب لحظه‌ای برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است، بنابراین برای شتاب لحظه‌ای در $t=2s$ شیب خط مماس را در این لحظه به‌دست می‌آوریم.

$a=\frac{۷-۳}{۲}=۲m/s^2$



۲ شتاب متوسط نیز در بازهٔ صفر تا 2s برابر است با:

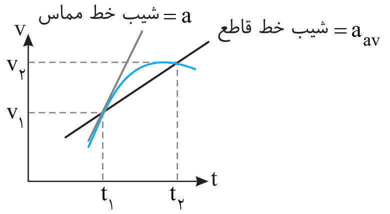
$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۷-۲}{۲}=۲/۵m/s^2$

۳ نسبت شتاب‌ها را حساب می‌کنیم.

$\frac{a}{a_{av}}=\frac{۲}{۲/۵}=۰/۸$

B ۲۳۲ ۲

یادآوری در نمودار سرعت - زمان، شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر شتاب متوسط و شیب خط مماس بر نمودار برابر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای است.



خط فکری در نقاط بیشینه و کمینه نمودار سرعت - زمان، خط مماس موازی محور زمان بوده و شیب آن و در نتیجه شتاب صفر است. از طرفی معادلهٔ $v=t^2-۸t+۱۲$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است، بنابراین شما تنها کافی است مختصات رأس سهمی $(t=-\frac{b}{۲a})$ را حساب کنید.

در رأس سهمی شیب خط مماس صفر است، لحظهٔ رأس سهمی را حساب می‌کنیم.

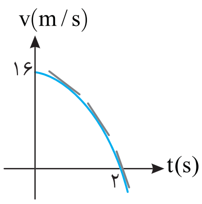
$v=t^2-۸t+۱۲\ ,\ t=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow t=\frac{۸}{۲}=۴s$

B ۲۳۳ ۴

خط فکری برای بررسی نوع حرکت شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید سپس تمام گزینه‌ها را به کمک نمودار رسم شده بررسی کنید.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان $v=۱۶-۴t^2$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:

$v=۱۶-۴t^2\Rightarrow v=۴(۴-t^2)\xrightarrow{v=۰}t=۲s$



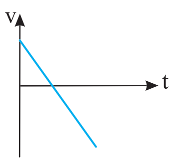
۲ با توجه به شیب خط مماس بر نمودار، در کل مسیر این شیب منفی است. پس شتاب متحرک در طول مسیر در خلاف جهت محور xها است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۳ با توجه به نمودار از صفر تا 2s سرعت متحرک مثبت است یعنی متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت است و پس از $t=2s$ سرعت متحرک منفی می‌شود یعنی متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و به حرکت خود ادامه می‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۴ با توجه به نمودار قبل از $t=2s$ تندی در حال کاهش و نوع حرکت کندشونده و بعد از $t=2s$ تندی جسم در حال افزایش و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۵ نوع حرکت در لحظهٔ $t=2s$ از کندشونده به تندشونده تغییر می‌کند، اما قبل و بعد از $t=4s$ حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۳۴ ۲



نمودار سرعت - زمان خط راست بوده از این‌رو درتمام لحظات شیب آن ثابت بوده یعنی شتاب حرکت در تمام مدت ثابت است از طرفی شیب نمودار منفی است از این‌رو شتاب ثابت و منفی است.

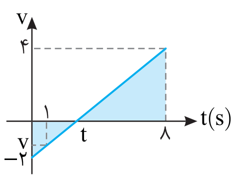
A ۲۳۵ ۱

شیب خط نمودار را نوشته و سرعت در لحظهٔ $t=1s$ را حساب می‌کنیم.

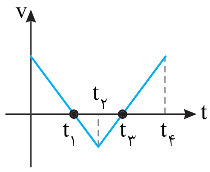
$$\frac{۴-(-۲)}{۸-۰}=\frac{v-(-۲)}{۱-۰}\Rightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{v+۲}{۱}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=v+۲$$

$$\Rightarrow ۴v+۸=۳\Rightarrow v=-\frac{۵}{۴}m/s$$

بنابراین سرعت $-\frac{۵}{۴}m/s$ و به دلیل منفی بودن سرعت متحرک خلاف جهت محور x در حال حرکت است.



A ۲۳۶ ۳



خط فکری هرگاه سرعت مثبت است متحرک در جهت محور xها حرکت کرده و اگر سرعت منفی باشد متحرک خلاف جهت محور x ها حرکت می‌کند. هم‌چنین اگر نمودار به محور افقی نزدیک شود بزرگی سرعت در حال کاهش می‌باشد و حرکت کندشونده و اگر نمودار در حال دور شدن از این محور افقی باشد بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد و حرکت تندشونده است.

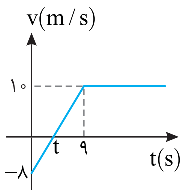
۱ در بازهٔ صفر تا t_1 سرعت مثبت و حرکت در جهت مثبت محور xها بوده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۲ در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت منفی و متحرک در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است از طرفی بزرگی سرعت (تندی متحرک) در حال افزایش یعنی حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳ در بازهٔ t_2 تا t_3 سرعت منفی و جهت حرکت خلاف جهت محور xها است و تندی (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش است به‌طوری که در نقطهٔ t_3 سرعت صفر می‌شود یعنی حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

۴ در بازهٔ t_3 تا t_4 سرعت مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۳۷ ۴



ابتدا لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود (t) را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{10-(-8)}{9-0}=\frac{0-(-8)}{t-0}\Rightarrow 2=\frac{8}{t}\Rightarrow t=4s$$

اکنون با داشتن لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود می‌توان گزینه‌ها را بررسی کرد.

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=3s$ بزرگی سرعت متحرک در حال کاهش است و در $t=4s$ متحرک متوقف می‌شود، بنابراین در $t=3s$ حرکت کندشونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ زمانی ۰ تا ۹s شیب خط نمودار $v-t$ تغییر نمی‌کند بنابراین شتاب در این بازهٔ زمانی ثابت است پس در لحظهٔ $t=4s$ نیز شتاب تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در $t=9s$ به بعد بزرگی سرعت ثابت و برابر $10m/s$ باقی می‌ماند، بنابراین حرکت نه تندشونده و نه کندشونده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

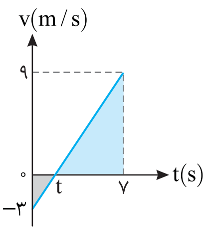
در $t=7s$ بزرگی سرعت متحرک در حال افزایش است و در $t=9s$ سرعت متحرک به بیشینه مقدار خود یعنی $v=10m/s$ می‌رسد بنابراین در این لحظه حرکت تندشونده و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۳۸ ۴

نکته اگر مکان اولیهٔ متحرکی مشخص نباشد نمودار سرعت - زمان دربارهٔ مکان متحرک و هم‌چنین نزدیک یا دور شدن متحرک به مبدأ مکان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد.

با توجه به نکته بیان شده گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۳۹ ۳



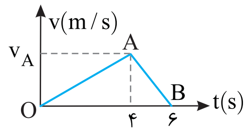
لحظهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای است که سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. نسبت تشابه را برای دو مثلث رنگی می‌نویسیم و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{9}{3}=\frac{7-t}{t}\Rightarrow 3t=7-t\Rightarrow t=\frac{7}{4}s$$

نمودار سرعت - زمان خط راست است و شیب آن ثابت است. از این‌رو شتاب حرکت در تمام بازه‌های زمانی ثابت و یکسان است و خواهد شد:

$$a=a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{9-(-3)}{7}=\frac{12}{7}m/s^2$$

A ۲۴۰ ۳



یادآوری شیب نمودار سرعت زمان برابر شتاب متحرک است.

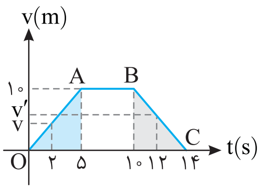
در هر قسمت شتاب را حساب می‌کنیم.

$$a_{av_{OA}}=\frac{v_A-0}{4-0}=\frac{v_A}{4}\ ,\ a_{av_{AB}}=\frac{0-v_A}{6-4}=\frac{-v_A}{2}$$

نسبت اندازهٔ شتاب‌ها خواهد شد:

$$\frac{|a_{av_{OA}}|}{|a_{av_{OB}}|}=\frac{\frac{v_A}{4}}{\frac{v_A}{2}}=\frac{1}{2}$$

B ۲۴۱ ۱



خط فکری باید به کمک شیب خط‌های OA و BC سرعت را در لحظه‌های $t=2s$ و $t=12s$ حساب کرده سپس به کمک تعریف شتاب متوسط $a_{av}=\Delta v/\Delta t$ مسئله را حل کنید.

۱ به کمک شیب خط OA سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{10-0}{5-0}=\frac{v-0}{2-0}\Rightarrow 2=\frac{v}{2}\Rightarrow v=4m/s$$

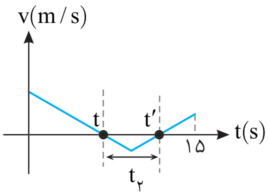
۲ شیب خط BC را نوشته سرعت در لحظهٔ $t=12s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{0-10}{14-10}=\frac{0-v'}{14-12}\Rightarrow\frac{-10}{4}=\frac{-v'}{2}\Rightarrow v'=5m/s$$

۳ شتاب متوسط خواهد شد.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v'-v}{\Delta t}=\frac{5-4}{12-2}=\frac{1}{10}m/s^2$$

C ۲۴۲ ۳



خط فکری هرگاه سرعت مثبت باشد متحرک در جهت محور xها در حرکت است و هرگاه سرعت منفی باشد متحرک در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند. از طرفی متحرک وقتی تغییر جهت می‌دهد که سرعت آن صفر می‌شود. یعنی نمودار محور زمان را قطع می‌کند بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت با توجه به شکل بازهٔ زمانی بین t تا t′ است $(t'-t)$. دقت کنید در این بازه سرعت منفی است و در واقع طراح از شما می‌خواهد که $t_2=t'-t$ را از روی نمودار به‌دست آورید.

در بازهٔ صفر تا t و t′ تا ۱۵s متحرک در جهت مثبت محور xها و در بازهٔ t تا t′ متحرک در خلاف جهت محور xها در حرکت بوده است.

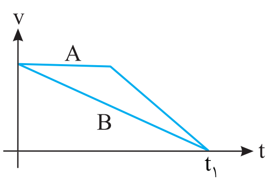
$$t_1=(t-0)+(15-t')=15+(t-t')\Rightarrow t_1=15-t_2\ ,\ t_2=t'-t$$

حال با توجه به نسبت داده شده در سؤال:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{15-t_2}{t_2}=\frac{5}{4}\Rightarrow 60-4t_2=5t_2\Rightarrow 60=9t_2\Rightarrow t_2=\frac{20}{3}s$$

مدت زمان بین دو لحظهٔ توقف همان $t'-t$ است که برابر با t_2 یعنی $\frac{20}{3}s$ است.

B ۲۴۳ ۱



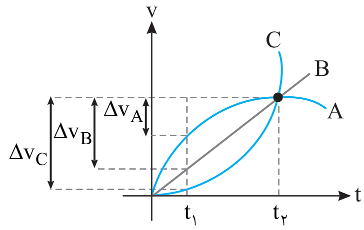
در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 تغییر سرعت دو حرکت A و B یکسان است و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ شتاب متوسط دو متحرک در این بازه با هم برابر است.

B ۲۴۴ | ۱

می‌خواهیم شتاب متوسط سه متحرک A، B و C را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ با هم مقایسه کنیم. با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ ما باید تغییرات سرعت این سه متحرک را با هم مقایسه کنیم.

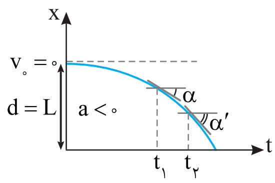
با توجه به شکل در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ تغییر سرعت متحرک A از متحرک B کمتر و تغییر سرعت متحرک B از تغییر سرعت متحرک C کمتر است.

$$\Delta v_A<\Delta v_B<\Delta v_A \Rightarrow a_{av_A}<a_{av_B}<a_{av_C}$$



A ۲۴۵ | ۴

۱ متحرک روی محور xها در خلاف جهت محور از حال سکون شروع به حرکت کرده است $|v_۰=۰|$.



۲ دقت کنید در لحظهٔ $t=۰$ خط مماس بر نمودار موازی محور xها است و شیب خط مماس صفر و در نتیجه سرعت اولیه صفر است. (گزینهٔ (۳) درست است.)

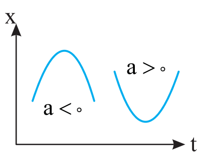
۳ متحرک روی محور xها تغییر جهت نداده بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است. در نتیجه تندی متوسط و سرعت متوسط برابر است. (گزینهٔ (۱) درست است.)

۴ به شکل دقت کنید در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ شیب خط مماس بر نمودار بیشتر می‌شود بنابراین اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t_۲$ از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t_۱$ بیشتر (منفی‌تر) است.

در نتیجه: $\Delta v=v_۲-v_۱ \xrightarrow[v_۲<۰,\ v_۱<۰]{|v_۲|>|v_۱|} \Delta v<۰ \Rightarrow a<۰$

هر دو لحظهٔ دلخواه دیگری را که در نظر بگیرید، به همین نتیجه می‌رسید که شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.

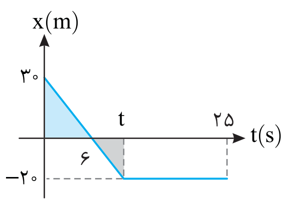
میانبر برای تعیین علامت شتاب از روی نمودار مکان - زمان کافی است به جهت تقعر (دهانهٔ نمودار) دقت کنید اگر دهانه رو به بالا باشد شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.



B ۲۴۶ | ۴

۱ به کمک شیب نمودار لحظهٔ t را حساب می‌کنیم.

$$\frac{-۲۰-۳۰}{t-۰}=\frac{۰-۳۰}{۶-۰}\Rightarrow t=۱۰s$$



۲ سرعت متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۲۰-۳۰}{۲۵}=-۲m/s$$

۳ سرعت در بازهٔ صفر تا ۶s ثابت است. بنابراین:

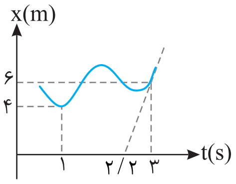
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۰-۳۰}{۶}=-۵m/s\Rightarrow v_۰=-۵m/s$$

شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۲۵s$، صفر است بنابراین: $v_{۲۵}=۰$

در نتیجه شتاب متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد: $a_{av}=\frac{۰-(-۵)}{۲۵}=۰/۲m/s^۲$

B ۲۴۷ | ۱

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۳s$ باید سرعت را در این دو لحظه به‌دست بیاوریم.



۱ در $t=۱s$ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان بوده و سرعت لحظه‌ای صفر است $(v_۱=۰)$

۲ در $t=۳s$ شیب خط مماس برابر است با: $v_۲=\frac{۶-۰}{۳-۲/۲}=\frac{۶}{۰/۸}=\frac{۶۰}{۸}=۷/۵m/s$

۳ در این صورت شتاب متوسط برابر است با:

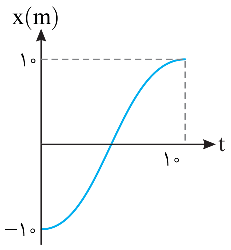
$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۷/۵-۰}{۳-۱}=\frac{۷/۵}{۲}\Rightarrow a_{av}=۳/۷۵m/s^۲$$

A ۲۴۸ | ۲

در لحظهٔ $t=۰$، مکان متحرک $x_۱=-۱۰m$ و در لحظهٔ $t=۱۰s$ مکان متحرک $x_۲=+۱۰m$ بوده بنابراین سرعت متوسط خواهد شد.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱۰-(۱۰)}{۱۰-۰}=۲m/s$$

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط باید سرعت متحرک را در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۱۰s$ از روی نمودار مشخص کنیم. در این دو لحظه خط مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و شیب خط مماس و در نتیجه سرعت در این لحظات صفر است، بنابراین شتاب متوسط برابر است با: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=۰$



A ۲۴۹ | ۱

نکته هرگاه جهت دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان به سمت بالا باشد (گنبدی شکل) شتاب حرکت مثبت و هرگاه جهت دهانهٔ (تقعر) نمودار رو به پایین باشد، شتاب منفی است.

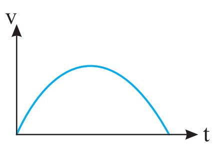
یادآوری هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان مثبت باشد سرعت مثبت و متحرک در جهت مثبت محور در حال حرکت است و هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان منفی باشد، سرعت منفی و متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است.

در صورت مسئله بیان شده که سرعت اولیه مثبت باشد یعنی در لحظهٔ $t=۰$ شیب خط مماس بر نمودار مثبت باشد که در گزینهٔ (۱) و (۳) این چنین است. از طرفی خواسته شده که در خلاف جهت محور x یعنی منفی باشد بنابراین دهانهٔ (تقعر) نمودار باید رو به پایین باشد و گزینهٔ (۱) درست است.

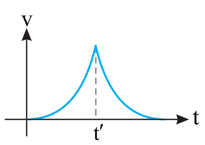
B ۲۵۰ | ۲

ابتدا دقت کنید که نمودارهای داده شده، نمودار سرعت - زمان است. سپس به حل مسئله بپردازید.

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و در نهایت نیز متوقف شده است پس در ابتدا و انتهای حرکت سرعت صفر است و گزینهٔ (۱) نمی‌تواند جواب باشد.



در نمودار گزینهٔ (۲)، در تمام مدت نمودار بالای محور زمان بوده و سرعت متحرک مثبت است از طرفی در $t=۰$، سرعت صفر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



چون متحرک در جهت مثبت محور xها در حرکت است پس سرعت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نیز نادرست است. در لحظهٔ t' در نمودار گزینهٔ (۴) خط مماس قائم است پس شیب خط مماس در این نقطه که برابر شتاب می‌باشد ∞ است و این ناممکن است بنابراین گزینهٔ (۴) نیز نادرست است اگرچه سرعت در ابتدا و انتها صفر است.

A ۲۵۱ | ۴

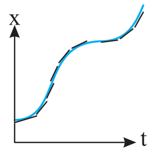
متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی نمودار در لحظهٔ $t=0$ باید بر محور زمان مماس باشد بنابراین گزینهٔ (۱) و (۳) نادرست هستند.

متحرک پس از مدتی متوقف شده و سپس در جهت مثبت محور به حرکت خود ادامه می‌دهد یعنی شیب خط مماس بر نمودار پس از تغییر جهت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۵۲ | ۳

در ابتدا با گذر زمان، در بازه‌های زمانی یکسان جابه‌جایی خودرو در حال افزایش است بنابراین سرعت در حال افزایش است یعنی شیب خط مماس بر نمودار باید در حال افزایش باشد.

در ادامهٔ مسیر در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی‌ها کاهش یافته یعنی سرعت در حال کاهش است و مجدداً جابه‌جایی‌ها افزایش می‌یابد یعنی سرعت افزایش می‌یابد. در گزینهٔ (۳) ابتدا شیب خط مماس افزایش، سپس کاهش و سرانجام افزایش می‌یابد.



B ۲۵۳ | ۲

۱ بردار مکان متحرک زمانی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند. بنابراین مکان را مساوی صفر $(x=0)$ قرار می‌دهیم:

$$x=t^3-3t^2+2t \Rightarrow 0=t^3-3t^2+2t \Rightarrow 0=t(t-1)(t-2)$$

$$\Rightarrow t=0,\ t=1s,\ t=2s$$

۲ دقت کنید در $t=0$ متحرک شروع به حرکت می‌کند پس در $t=0$ از مبدأ مکان متحرک عبور نمی‌کند، بنابراین در لحظه‌های $t=1s$ و $t=2s$ تغییر بردار مکان رخ داده است، اکنون در این دو لحظه سرعت را به کمک معادلهٔ سرعت - زمان داده شده حساب می‌کنیم:

$$v_{t=1s}=3(1)^2-6(1)+2 \Rightarrow v_{t=1}=-1\,m/s$$

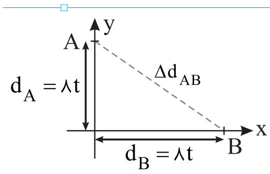
$$v_{t=2s}=3(2)^2-6(2)+2 \Rightarrow v_{t=2}=2\,m/s$$

۳ شتاب متوسط حرکت را به‌دست می‌آوریم: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{2-(-1)}{2-1}=3\,m/s^2$

B ۲۵۴ | ۲

۱ مسئلهٔ ساده‌ای است. در مدت t ثانیه جابه‌جایی هر متحرک را حساب می‌کنیم. سرعت هر متحرک $8m/s$ است. بنابراین:

$$d_A=d_B=vt \Rightarrow d_A=d_B=8t$$



۲ فاصلهٔ A تا B را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست آورده و برابر $32\sqrt{2}m$ قرار می‌دهیم.

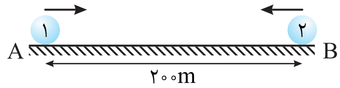
$$AB=\sqrt{d_A^2+d_B^2} \Rightarrow 32\sqrt{2}=\sqrt{(8t)^2+(8t)^2} \Rightarrow 32\sqrt{2}=\sqrt{2}(8t) \Rightarrow t=4s$$

B ۲۵۵ | ۳

خط فکری: آنچه مسلم است دیدار این دو متحرک برای اولین بار هنگامی است که به سوی هم می‌روند و در بین راه یکدیگر ملاقات می‌کنند اما ملاقات دوم آنها وقتی است که دو متحرک به انتهای مسیر می‌رسند و برمی‌گردند و مجدداً بین راه یکدیگر را ملاقات می‌کنند. بنابراین شما باید ابتدا زمان حرکت متحرک کندرو (۱) را از A تا B حساب کنید. در این مدت متحرک تندرو (۲) قطعاً از B به A رسیده و در حال برگشت است و مقدار مسافتی که در برگشت طی می‌کند را به‌دست بیاورید. بنابراین به مراحل زیر با دقت توجه کنید.

۱ مدت زمان حرکت متحرک کندرو از A تا B خواهد شد:

$$d=vt=200=10t_1 \Rightarrow t_1=20s$$

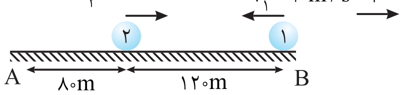


۲ جابه‌جایی متحرک (۲) با تندی $14m/s$ در مدت $20s$ را حساب می‌کنیم.

$$\ell_2=vt_0=14\times 20=280m$$

۳ یعنی متحرک (۲)، ۲۰۰ متر رفته و $80m$ برگشته و در این لحظه متحرک (۱) از نقطهٔ B در حال برگشت است. یعنی فاصلهٔ دو متحرک از هم $200-80=120m$ است.

۴ اگر نقطهٔ B را در این لحظه مبدأ مکان فرض کنیم با نوشتن معادلهٔ حرکت دو متحرک و برابر قرار دادن معادله‌ها لحظه‌ای که به هم می‌رسند را به‌دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} x_1=-10t \\ x_2=14t-120 \end{cases} \xrightarrow{x_1=x_2} -10t=14t-120 \Rightarrow 24t=120 \Rightarrow t_2=5s$$

ملاقات دوم پس از $20+5=25s$ صورت می‌گیرد.

میانبر: در قسمت آخر می‌توانستیم سرعت‌ها را با هم جمع کرده $14+10=24m/s$ سپس زمانی که $120m$ با این سرعت طی می‌شود را حساب کرد.

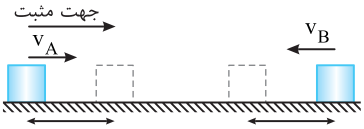
$$\Delta x=(v_1+v_2)t \Rightarrow 120=24t \Rightarrow t=5s$$

$$t_{\text{کل}}=20+5=25s$$

B ۲۵۶ | ۲

فرض اول: دو جسم با سرعت ثابت به سمت هم حرکت می‌کنند و در هر $10s$، ۱۶ متر به‌هم نزدیک می‌شوند، یعنی در هر ثانیه $1/6m$ به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند با توجه به شکل در هر ثانیه متحرک A به اندازهٔ v_A در جهت مثبت و متحرک B، به اندازه v_B در جهت منفی به‌هم نزدیک می‌شوند بنابراین:

در یک ثانیه: $\Delta x_{AB}=v_A-(-v_B)=1/6 \Rightarrow v_A+v_B=1/6\,m/s \quad (1)$

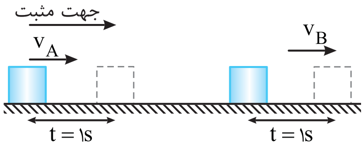


$$\Delta x_A=v_A t \xrightarrow{t=1s} \Delta x_A=v_A \qquad \Delta x_B=-v_B t \xrightarrow{t=1s} \Delta x_B=-v_B$$

فرض دوم: دو جسم با سرعت ثابت در یک جهت حرکت می‌کنند. متحرک A به اندازهٔ v_A و متحرک B به اندازهٔ v_B در هر ثانیه جابه‌جا می‌شوند و چون در هر $5s$ فاصلهٔ دو متحرک ۳ متر اضافه می‌شود باید سرعت $v_B>v_A$ باشد. پس این دو متحرک در هر ثانیه $0/6$ متر از هم دورتر خواهند شد:

$$\Delta x_{AB}=v_B-v_A \Rightarrow v_B-v_A=0/6 \quad (2)$$

$$(1)\ و\ (2) \Rightarrow \begin{cases} v_A+v_B=1/6 \\ v_B-v_A=0/6 \end{cases} \Rightarrow 2v_B=2/2 \Rightarrow \begin{cases} v_B=1/1\,m/s \\ v_A=0/5\,m/s \end{cases}$$



میانبر: اگر دو متحرک در یک جهت در حال حرکت باشند می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرد که دیگری با تندی $|v_A-v_B|$ نسبت به آن در حرکت است

$$\Delta x=|v_A-v_B|t$$

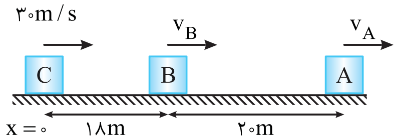
و اگر دو متحرک در خلاف جهت هم در حال حرکت باشند آن‌گاه:

$$\Delta x=(v_A+v_B)t$$

C ۲۵۷ ۲

خط فکری شکل مسئله را رسم کنید و داده‌های مسئله را روی شکل به‌طور کامل نمایش دهید. سپس معادلهٔ حرکت هریک از سه متحرک را بنویسید آن‌گاه مرحله به مرحله مسئله را حل کنید.

۱ اگر مکان C را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت در نظر بگیریم، معادلهٔ حرکت هر متحرک خواهد شد: $x_C=۳۰t$ ، $x_B=v_Bt+۱۸$ ، $x_A=v_At+۳۸$



۲ در لحظهٔ $t=۳s$ متحرک‌های B و C به هم رسیده‌اند بنابراین معادله‌های حرکت B و C را برابر قرار داده و v_B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_C=۳۰(۳)\\ x_B=۳v_B+۱۸\end{cases} \xrightarrow{x_C=x_B} ۹۰=۳v_B+۱۸\Rightarrow ۳v_B=۷۲$$

$$\Rightarrow v_B=۲۴m/s$$

۳ دو ثانیه پس از $t=۳s$ یعنی در لحظهٔ $t=۵s$ متحرک‌های A و C به هم رسیده‌اند از این رو x_A را برابر x_C قرار داده و سرعت A (v_A) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_C=۳۰(۵)\\ x_A=۵v_A+۳۸\end{cases} \xrightarrow{x_C=x_A} ۱۵۰=۵v_A+۳۸\Rightarrow ۵v_A=۱۱۲$$

$$\Rightarrow v_A=۲۲/۴m/s$$

۴ اکنون با برابر قرار دادن معادلهٔ A و B زمان رسیدن B به A را به‌دست می‌آوریم.

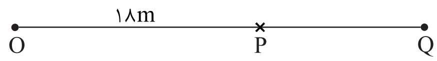
$$\begin{cases} x_B=۲۴t+۱۸\\ x_A=۲۲/۴t+۳۸\end{cases} \xrightarrow{x_A=x_B} ۲۴t+۱۸=۲۲/۴t+۳۸\Rightarrow ۱/۶t=۲۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{۲۰۰}{۱۶}=۱۲/۵s$$

۵ پس در لحظهٔ $t=۱۲/۵s$ متحرک B به A می‌رسد یعنی $\Delta t=۱۲/۵-۵=۷/۵s$ بعد از سبقت C از A این اتفاق می‌افتد.

B ۲۵۸ ۳

۱ متحرک A از نقطهٔ P شروع به حرکت کرده، ۴s بعد متحرک B از نقطهٔ O به راه می‌افتد و بعد از ۴s با متحرک A، از نقطهٔ Q می‌گذرد. بنابراین مدت زمان حرکت A از P تا Q به اندازهٔ $۴+۴=۸s$ طول کشیده است.



۲ سرعت A ثابت و برابر $۵m/s$ است. بنابراین فاصلهٔ P تا Q خواهد شد.

$$\Delta x=vt\Rightarrow PQ=۵\times۸=۴۰m$$

۳ متحرک B مسیر OQ را در مدت ۴s طی کرده است. بنابراین OQ را حساب می‌کنیم. با توجه به شکل:

$$OQ=OP+PQ=۱۸+۴۰\Rightarrow OQ=۵۸m$$

۴ سرعت B خواهد شد:

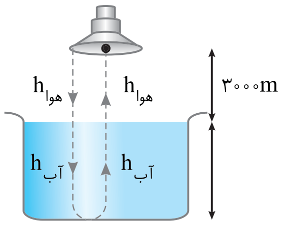
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{۵۸}{۴}\Rightarrow v_B=۱۴/۵m/s$$

B ۲۵۹ ۱

خط فکری صوت از فرستنده به سمت آب می‌رود سپس وارد آب شده به کف اقیانوس برخورد کرده و به سطح آب بازمی‌گردد و وارد هوا شده و به محل گیرنده می‌رسد. یعنی در طول مسیر حرکت صوت از دو بخش $2h_{\text{هوا}}$ و $2h_{\text{آب}}$ تشکیل شده است، بنابراین شما ابتدا باید مدت زمان حرکت صوت در هوا را به‌دست آورده و این زمان را از ۴۰s کل حرکت کم کنید تا بتوانید عمق آب را حساب کنید.

۱ تندی صوت در هوا ثابت و برابر $۳۰۰m/s$ است و مسافتی که صوت در هوا طی می‌کند برابر $2h=۶۰۰۰m$ است بنابراین زمان حرکت صوت در هوا را می‌توان به‌دست آورد.

$$\ell=vt\Rightarrow 2h_{\text{هوا}}=v_{\text{هوا}}\times t_{\text{هوا}}\Rightarrow ۶۰۰۰=۳۰۰\times t_{\text{هوا}}\Rightarrow t_{\text{هوا}}=۲۰s$$



۲ صوت ۲۰s در هوا در حال حرکت است و بنابراین مدت $۴۰-۲۰=۲۰s$ نیز در آب طی کرده است.

۳ اکنون عمق آب را حساب می‌کنیم.

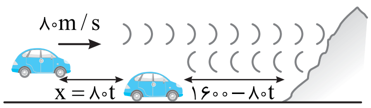
$$\ell=vt\Rightarrow 2h_{\text{آب}}=۱۲۰۰\times۲۰\Rightarrow 2h_{\text{آب}}=۲۴۰۰۰\Rightarrow h_{\text{آب}}=۱۲۰۰۰m=۱۲km$$

C ۲۶۰ ۱

اگر زمانی که طول می‌کشد تا راننده صدای پژواک را بشنود برابر t فرض کنیم در این مدت خودرو با تندی $۸۰m/s$ مسافت $x=۸۰t$ جلو می‌آید و صوت نیز مسافت $x-۱۶۰۰+۱۶۰۰$ یعنی $x-۳۲۰۰$ را طی می‌کند بنابراین می‌توان نوشت:

$$\ell_{\text{صوت}}=v_{\text{صوت}}t\Rightarrow ۳۲۰۰-x=۳۲۰t\xrightarrow{x=۸۰t}۳۲۰۰-۸۰t=۳۲۰t$$

$$\Rightarrow ۳۲۰۰=۴۰۰t\Rightarrow t=۸s$$



B ۲۶۱ ۴

خط فکری اگر شما از یک پله برقی که در حال بالا رفتن است بالا بروید قطعاً زمان رسیدن شما به انتهای پله کمتر از زمانی است که روی پله برقی بایستید. در واقع در حالت اول تندی حرکت شما با تندی حرکت پله جمع می‌شود و اگر زمان حرکت پله $t_۱$، زمانی که شما از پلکان ساکن بالا می‌روید $t_۲$ و زمان حرکت پله و شما با هم t فرض شود. به کمک جمع تندی‌ها مسئله قابل حل است.

$$v=v_۱+v_۲\xrightarrow[\text{طول پلکان}=L]{v=\frac{\ell}{t}}\frac{\ell}{t}=\frac{\ell}{t_۱}+\frac{\ell}{t_۲}\xrightarrow{t_۱=۱min,\,t_۲=۳min}$$

$$\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}min\Rightarrow t=۴۵s$$

B ۲۶۲ ۳

خط فکری مجدداً با مسئله‌ای سروکار داریم که در آن از شما مقایسهٔ مسافت طی شده و جابه‌جایی خواسته شده است. ابتدا شما باید مدت زمان حرکت دو قطار از لحظه‌ای که فاصلهٔ آن‌ها از هم ۸۰km بوده تا لحظه‌ای که به هم برخورد می‌کنند را بیابید سپس مسافت و جابه‌جایی در این مدت را به‌دست بیاورید.

۱ سرعت حرکت هر قطار $۴۰km/h$ است یعنی در هر ساعت هر قطار ۴۰km جابه‌جا می‌شود که جمعاً ۸۰km شده در نتیجه دو قطار پس از 1h به هم برخورد می‌کنند.

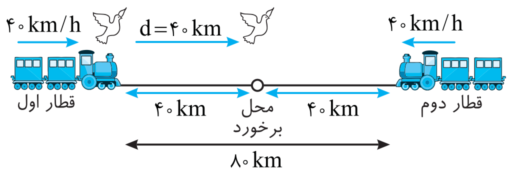
۲ در مدت 1h پرنده با تندی $۶۰km/h$ مسافتی که طی می‌کند برابر است با:

$$\ell=vt\Rightarrow \ell=۶۰\times۱=۶۰km$$

۳ به شکل دقت کنید. جابه‌جایی پرنده از محل شروع پرواز تا محل برخورد برابر $d=۴۰km$ است.

۴ نسبت ℓ به d خواهد شد:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{۶۰}{۴۰}=\frac{۳}{۲}$$



B ۲۶۳ ۲

این نوع پرسش‌ها به مبحث جمع سرعت‌ها مربوط است.

وقتی شناگر در جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر جمع اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S+v_W) و هنگامی که در خلاف جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر تفاضل اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S-v_W)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\begin{cases}۹۰۰=(v_S+v_W)(۹۰)\Rightarrow v_S+v_W=۱۰\\ ۹۰۰=(v_S-v_W)(۱۵۰)\Rightarrow v_S-v_W=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{v_S+v_W}{v_S-v_W}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۳v_S+۳v_W=۵v_S-۵v_W\Rightarrow ۸v_W=۲v_S$$

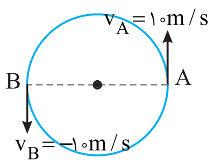
$$\Rightarrow\frac{v_S}{v_W}=۴$$

B ۲۶۴ ۲

۱ مدت زمان بازهٔ زمانی $t_1=\frac{۱}{۴}s$ تا $t_2=\frac{۵}{۴}s$ برابر $\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۴}=۱s$ است.

۲ ذره در هر ۲s یک دور کامل می‌چرخد، بنابراین در مدت ۱s، ذره نیم دور می‌چرخد. به‌طور مثال از نقطهٔ A با تندی ثابت ۱۰m/s به نقطهٔ B می‌رود.

۳ بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است، بردارهای سرعت دو نقطهٔ A و B را رسم می‌کنیم.



۴ اگر اندازهٔ سرعت در نقطهٔ A، ۱۰m/s باشد در نقطهٔ B سرعت −۱۰m/s بوده و تغییرات سرعت خواهد شد:

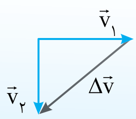
$$|\Delta v|=|-۱۰-۱۰|=۲۰m/s$$

۵ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰}{۱}\Rightarrow a_{av}=۲۰m/s^2$$

C ۲۶۵ ۲

یادداشت ریاضی برای نشان دادن بردار تفاضل دو بردار $(\vec v_2-\vec v_1)$، دو بردار را مطابق شکل از یک نقطه رسم کرده سپس از انتهای بردار اول $(\vec v_1)$ برداری به انتهای بردار دوم $(\vec v_2)$ رسم می‌کنیم.



۱ ابتدا محیط دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=۲\pi r\xrightarrow{r=۲۰m}\ell=۲\pi\times۲۰=۴۰\pi\,m$$

۲ زمان یک دور زدن متحرک که با تندی $۱۰\pi\,m/s$ محیط دایره را طی می‌کند، خواهد شد:

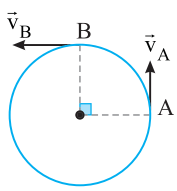
$$s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰\pi=\frac{۴۰\pi}{t}\Rightarrow t=۴s$$

۳ اکنون باید مشخص کنیم که در هر ثانیه متحرک روی دایره چه مقدار می‌چرخد؟ از یک تناسب ساده کمک می‌گیریم.

$$\begin{array}{c|c} ۴s & \text{۱ دور} \\ ۱s & ? \end{array}\Rightarrow ?=\frac{۱}{۴}\text{ دور}$$

۴ $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره یعنی متحرک کمان $\frac{\pi}{۲}$ (۹۰°) طی می‌کند و به‌طور مثال از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود.

۵ بردار سرعت در نقطهٔ A و B را مماس بر دایره رسم می‌کنیم.



۶ تغییر بردار سرعت را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta v=\sqrt{v_A^2+v_B^2}=\sqrt{(۱۰\pi)^2+(۱۰\pi)^2}$$

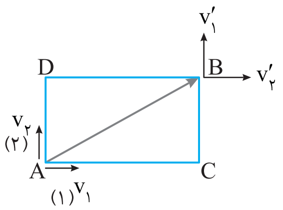
$$\Rightarrow\Delta v=۱۰\sqrt{۲}\pi\,m/s$$

۷ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۰\sqrt{۲}\pi}{۱}=۱۰\sqrt{۲}\pi\,m/s^2$$

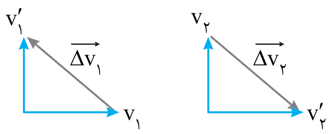
C ۲۶۶ ۱

گزارهٔ (الف): طول مسیر و تندی حرکت دو متحرک یکسان است بنابراین زمان حرکت از A تا B روی دو مسیر برابر است. از طرفی جابه‌جایی هر دو متحرک برابر $\overrightarrow{AB}$ است. بنابراین $\vec v_{av}=\frac{\vec d}{\Delta t}$ یکسان بوده و بردار سرعت متوسط یکی است و گزارهٔ (الف) درست است.



گزارهٔ (ب): همان‌گونه که در بالا بیان کردیم طول مسیر، تندی حرکت دو متحرک و زمان حرکت یکسان بوده و در نتیجه تندی متوسط در کل مسیر $(s_{av}=L/\Delta t)$ برابر است و گزارهٔ (ب) درست است.

گزارهٔ (پ): به شکل دقت کنید. بردار تغییر سرعت متحرک (۱) و متحرک (۲) به‌صورت زیر است:

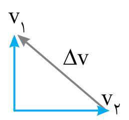


متحرک (۲) متحرک (۱)

بردار شتاب متوسط $(\vec a_{av}=\frac{\Delta\vec v}{\Delta t})$ هم‌جهت بردار تغییرات سرعت است، بردار تغییرات سرعت قرینهٔ هم بوده بنابراین بردار شتاب متوسط دو متحرک نیز قرینهٔ هم بوده و گزارهٔ (پ) نادرست است.

B ۲۶۷ ۲

یادآوری ریاضی بردارتغییرسرعت $(\Delta\vec v=\vec v_2-\vec v_1)$ برداری است که از انتهای v_1 به انتهای v_2 مطابق شکل رسم می‌شود.

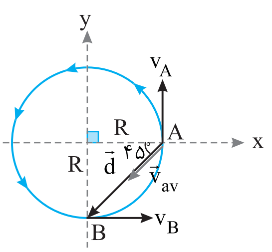


یادآوری بردار سرعت متوسط در جهت بردار جابه‌جایی است و بردار شتاب متوسط در جهت بردار تغییر سرعت است.

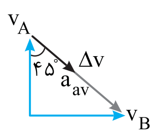
نکته سرعت در هر نقطه بر مسیر مماس است.

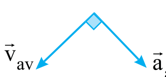
خط فکری باید بردار جابه‌جایی و بردار سرعت در نقاط A و B را رسم کرده سپس بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط را رسم کنید و زاویهٔ بین آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی از A تا B را رسم می‌کنیم. $\vec d=\overrightarrow{AB}$. این بردار با امتداد افقی مطابق شکل زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.



۲ بردارهای $\vec v_A$ و $\vec v_B$ را از یک نقطه مطابق شکل رسم می‌کنیم. سپس بردار تغییر سرعت را از انتهای $\vec v_A$ به انتهای $\vec v_B$ می‌کشیم. این بردار با امتداد قائم زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.

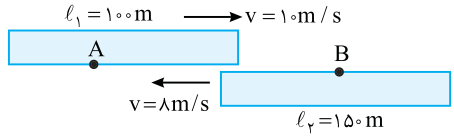




۳ از این‌رو زاویهٔ بین بردار $\vec d$ و $\Delta\vec v$ یعنی همان زاویهٔ بین بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط ۹۰° می‌شود.

A | ۲۶۸ | ۱

به شکل زیر به دقت نگاه کنید. حال خود را به جای ناظر A قرار دهید که از پنجره به بیرون نگاه می‌کند. این ناظر قطار ۱۵۰ متری را می‌بیند که از جلوی چشمانش می‌گذرد. خود را ساکن فرض کنید قطار ۱۵۰ متری با سرعت $\vec{v}_۱+\vec{v}_۲=۱۰+۸=۱۸m/s$ از مقابل دیدگان شما می‌گذرد و زمان عبور آن از مقابل شما خواهد شد: $v=\frac{\ell}{t}\Rightarrow t_۱=\frac{\ell}{v}=\frac{۱۵۰}{۱۸}$

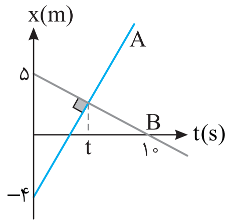


اکنون خود را جای ناظر B قرار دهید چه طولی از قطار از مقابل شما می‌گذرد؟ حق با شماست ۱۰۰ متر از جلوی شما با سرعت $۱۸m/s$ نسبت به شما می‌گذرد، بنابراین زمان عبور قطار از مقابل ناظر B برابر خواهد شد با: $t_۲=\frac{\ell}{v}\Rightarrow t_۲=\frac{۱۰۰}{۱۸}$

نسبت $\frac{t_۱}{t_۲}$ برابر است با: $\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\frac{۱۵۰}{۱۸}}{\frac{۱۰۰}{۱۸}}\Rightarrow\frac{t_۱}{t_۲}=۱/۵$

B | ۲۶۹ | ۴

یادآوری ریاضی هرگاه دو خط A و B با شیب‌های m_A و m_B بر هم عمود باشند، آن‌گاه $m_Am_B=-۱$ است.



۱ شیب نمودار مکان-زمان برابر سرعت متحرک است. با توجه به نمودار، شیب خط B را به‌دست می‌آوریم:
$m_B=\frac{۰-۵}{۱۰}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow v_B=-\frac{۱}{۲}m/s$

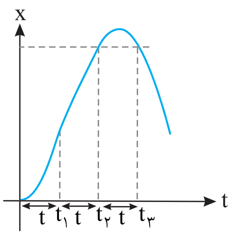
۲ شیب نمودار A یعنی سرعت A خواهد شد:
$m_A=-\frac{۱}{m_B}\Rightarrow m_A=۲\Rightarrow v_A=۲m/s$

۳ معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را مساوی قرار می‌دهیم تا زمان رسیدن دو متحرک را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases}x_A=۲t-۴\\x_B=-\frac{۱}{۲}t+۵\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}۲t-۴=-\frac{۱}{۲}t+۵\Rightarrow\frac{۵}{۲}t=۹\Rightarrow t=۳/۶s$$

۴ مکان به هم رسیدن دو متحرک برابر خواهد شد با:
$x=۲t-۴\Rightarrow x=۷/۲-۴=۳/۲m$

B | ۲۷۰ | ۱



۱ نمودار از ۰ تا $t_۱$ سهمی است و در لحظهٔ $t=۰$ نمودار بر محور زمان مماس بوده و سرعت اولیه صفر است و سرعت در لحظهٔ $t_۱$ شیب خط مماس بر نمودار بوده و آن را v فرض می‌کنیم شتاب متوسط خواهد شد: $a_{av}=\frac{v-۰}{t_۱-۰}\Rightarrow a_{av_۱}=\frac{v}{t}$

۲ نمودار از $t_۱$ تا $t_۲$ خط راست است و سرعت در این بازه برابر شیب خط است و شتاب متوسط در این بازه صفر است. $a_{av_۲}=۰$

۳ نکتهٔ مهم این است که سرعت در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ با سرعت در لحظهٔ $t_۱$ و سرعت در لحظهٔ $t_۲$ برابر است. $v_{t_۱}=v=v_{t_۲}$

۴ نمودار در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ سهمی است و در لحظهٔ $t_۲$ و $t_۳$ مکان متحرک یکسان بوده و با توجه به اینکه سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۲$ و $t_۳$ هم‌اندازه و قرینهٔ هم است.

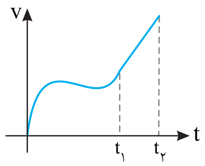
یعنی در لحظهٔ $t_۲$ سرعت v و در لحظهٔ $t_۳$ سرعت $-v$ است و شتاب در این بازه خواهد شد: $|a_{av_۳}|=\frac{|v_{t_۳}-v_{t_۲}|}{t_۳-t_۲}=\frac{|-v-v|}{t}=\frac{۲v}{t}$

۵ اندازهٔ شتاب در بازهٔ صفر تا $t_۲$ نیز خواهد شد: $|a_{av_۴}|=\frac{|v-۰|}{t_۲-۰}=\frac{v}{۲t}$

بنابراین در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ شتاب متوسط از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است.

B | ۲۷۱ | ۲

خط فکری دقت کنید با نمودار سرعت – زمان سروکار داریم، از طرفی اگر در یک بازهٔ زمانی در هر لحظه سرعت لحظه‌ای از سرعت لحظه‌ای تمام لحظات بازهٔ زمانی دیگر بیشتر باشد قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ زمانی اول از سرعت متوسط در بازهٔ زمانی دوم بیشتر است.



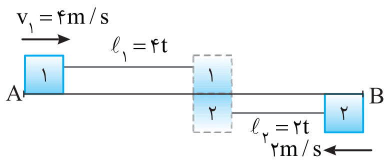
به نمودار نگاه کنید. در تمام لحظه‌های صفر تا $t_۱$ سرعت لحظه‌ای از سرعت در تمام لحظه‌های $t_۱$ تا $t_۲$ کمتر است، بنابراین قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۱$ از سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ کمتر است و گزینهٔ (۲) درست است.

B | ۲۷۲ | ۱

۱ مسافتی که هر متحرک درمدت t می‌پیماید تا دو متحرک به هم برسند خواهد شد:

متحرک (۱): $\ell=vt\Rightarrow\ell_۱=۴t$

متحرک (۲): $\ell_۲=v_۲t\Rightarrow\ell_۲=۲t$



۲ طول مسیر حرکت برابر است با: $AB=\ell_۱+\ell_۲=۴t+۲t\Rightarrow AB=۶t$

۳ مدت زمانی که متحرک (۱) مسیر AB را طی می‌کند را حساب می‌کنیم:
$AB=v_۱t_۱\Rightarrow۶t=۴t_۱\Rightarrow t_۱=۱/۵t$

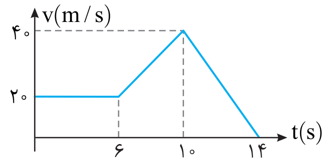
۴ مدت زمانی که متحرک (۲) از B به A می‌رود خواهد شد:
$AB=v_۲t_۲\Rightarrow۶t=۲t_۲\Rightarrow t_۲=۳t$

۵ بنابر فرض مسئله اختلاف زمانی $t_۱$ و $t_۲$، برابر t' است. از این‌رو:
$t'=t_۲-t_۱=۳t-۱/۵t=۱/۵t\Rightarrow\frac{t'}{t}=۱/۵$

پنجره ۲ روبه‌روی ۳

B | ۲۷۳ | ۱

یادآوری ۱ شیب نمودار سرعت – زمان برابر شتاب متحرک است.



۱ در بازهٔ ۰ تا ۶s سرعت ثابت و برابر ۲۰m/s است و شتاب در کل این بازهٔ زمانی صفر است، بنابراین در $t=۲s$ شتاب صفر است.

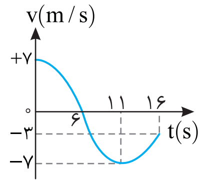
۲ در بازهٔ ۶s تا ۱۰s شتاب در تمام لحظات از جمله $t=۸s$ ثابت و برابر است با:
$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۴۰-۲۰}{۱۰-۶}\Rightarrow a=۵m/s^۲$

۳ در بازهٔ ۱۰s تا ۱۴s نیز شتاب در تمام لحظات از جمله $t=۱۲s$ ثابت و برابر است با:
$a=\frac{-۴۰}{۱۴-۱۰}\Rightarrow a=-۱۰m/s^۲$

B ۲۷۲ ۴

۲ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{-3-7}{16}=-\frac{5}{8}\,m/s^2$$



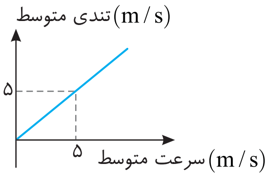
یادآوری شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب لحظه‌ای است و در نقاط max و min شیب نمودار سرعت - زمان (شتاب) صفر است.

در لحظهٔ $t=11s$ شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان صفر شده $(a=0)$ و شتاب قبل از این لحظه منفی و بعد از آن لحظه مثبت است یعنی شتاب در $t=11s$ تغییر جهت می‌دهد.

نمای ۱۸

B ۲۷۲ ۱

۳ به نمودار دقت کنید. در تمام لحظات اندازهٔ تندی متوسط و سرعت متوسط برابر است. یعنی در هر بازهٔ زمانی دلخواه، مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک یکی است و این یعنی متحرک روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.



نمای ۲ و ۶

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست در راستای محور xها در حرکت است. اگر در بازه‌ای جابه‌جایی آن d و مسافت طی شدهٔ آن L و $d=L$ باشد، کدام گزینه درست است؟**

۱) بردار مکان متحرک تغییر جهت نداده است.

۲) جهت حرکت متحرک تغییر نکرده است.

۳) بردار مکان یک بار تغییر جهت داده است.

۴) جهت حرکت یک بار تغییر کرده است.

پاسخ **جابه‌جایی و مسافت طی شده با هم برابر است. زمانی این اتفاق می‌افتد که جسم بدون تغییر جهت روی خط راست در حرکت باشد.** گزینهٔ ۲

B ۲۷۲ ۲

۴ **یادآوری** تندی کمیت نرده‌ای اما سرعت و شتاب کمیت برداری است.

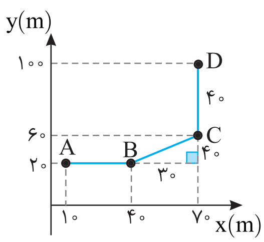
خط فکری برای یافتن اندازهٔ شتاب باید زمان را به کمک تندی به‌دست بیاورید اما برای به‌دست آوردن تغییر سرعت، قطعاً باید جهت بردار سرعت در نقطهٔ A و D را در نظر بگیرید.

۱ مسافت طی شده از A تا D را باید حساب کنیم، البته ابتدا باید طول BC را به‌دست بیاوریم.

$$BC=\sqrt{30^2+40^2}\Rightarrow BC=50m$$

$$\ell=AB+BC+CD\Rightarrow \ell=30+50+40$$

$$\Rightarrow \ell=120m$$

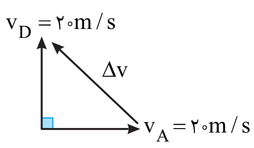


۲ زمان را به کمک تندی متحرک حساب می‌کنیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{s_{av}=20m/s}20=\frac{120}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=6s$$

۳ بردار سرعت در نقطهٔ A و نقطهٔ D برهم عمود هستند، بردار تغییر سرعت خواهد شد:

$$\Delta v=\sqrt{20^2+20^2}\Rightarrow \Delta v=20\sqrt{2}\,m/s$$



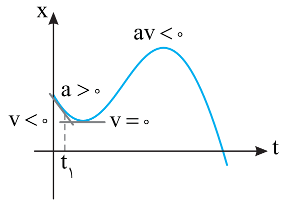
۴ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{20\sqrt{2}}{6}\Rightarrow a_{av}=\frac{10\sqrt{2}}{3}\,m/s^2$$

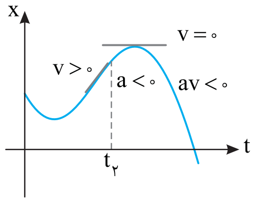
نمای ۱۵

B ۲۷۲ ۳

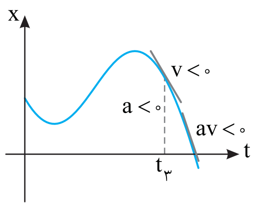
۵ در حرکت تندشونده تندی در حال افزایش است. مطابق شکل بعد از لحظهٔ t_1 سرعت صفر می‌شود. پس در لحظهٔ t_1 حرکت کندشونده است. البته در لحظهٔ t_1 شیب خط مماس منفی بوده، یعنی سرعت منفی اما دهانهٔ نمودار مکان - زمان رو به بالا یعنی $a>0$ بوده، بنابراین $av<0$ است و در لحظهٔ t_1 حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۱) نادرست است.



مطابق شکل بعد از t_2 در لحظه نشان داده شده سرعت صفر می‌شود. پس در لحظهٔ t_2 نیز حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست است.



مطابق شکل بعد از t_3 شیب خط مماس بر نمودار در حال افزایش است و مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود، یعنی اندازه سرعت (تندی) افزایش می‌یابد، پس حرکت در این لحظه تندشونده است.



نمای ۸

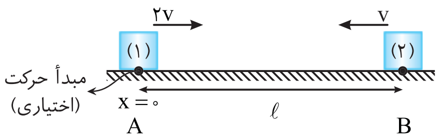
B ۲۷۲ ۱

۶ معادلهٔ $x-t$ درجهٔ اول است و متحرک دارای سرعت ثابت و شتاب حرکت صفر است.

نمای ۱۶

B ۲۷۲ ۱

۷ نقطهٔ A را مبدأ و جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم. فاصلهٔ AB را با ℓ نمایش می‌دهیم.



۱ ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=2vt\\x_2=-vt+L\end{cases}$$

۲ دو متحرک بعد از 2h به هم می‌رسند، یعنی اگر در معادلهٔ حرکت x_1 و x_2 به جای t، 2h قرار بدهیم x_1 با x_2 برابر می‌شود.

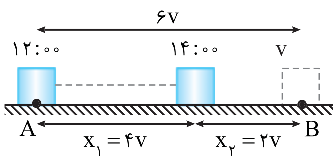
$$t=2h\Rightarrow\begin{cases}x_1=4v\\x_2=-2v+\ell\end{cases}\xrightarrow{x_1=x_2}4v=-2v+\ell\Rightarrow \ell=6v$$

۳ مکان رسیدن دو متحرک به هم خواهد شد:

$$x_1=2vt\xrightarrow[\text{مکان رسیدن دو متحرک به هم}]{\Delta t=2h}x=4v$$

۴ با توجه به شکل از محل رسیدن دو متحرک به‌هم تا زمانی که متحرک (۱) به مکان B می‌رسد متحرک باید $\Delta x=2v$ جابه‌جا شود: $\Delta x=2vt\Rightarrow 2v=2vt\Rightarrow t=1h$

بنابراین یک ساعت بعد از ساعت ۱۴:۰۰ متحرک به نقطهٔ B می‌رسد یعنی در ساعت ۱۵:۰۰.



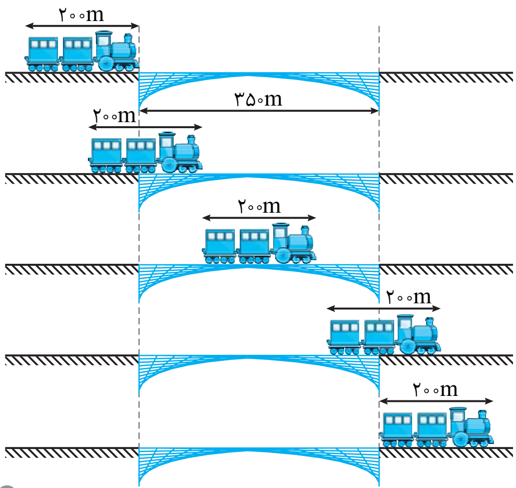
نمای ۱۱

B ۲۷۲ ۴

۸ در تمام شکل‌های زیر به غیر از شکل ابتدایی و نهایی قطار یا قسمتی از قطار روی پل قرار دارد بنابراین باید مدت زمانی که طول می‌کشد تا قطار به طور کامل از پل بگذرد را به‌دست آوریم:

$\Delta x=200+350=550m$

$\Delta x=vt\Rightarrow 550=20t\Rightarrow t=27/5s$



نمای ۱۲

B ۲۷۲ ۳

۹ متحرک در مدت $3s$ خلاف جهت محور x با تندی ثابت مسافت $6m$ را طی کرده یعنی جابه‌جایی متحرک $\Delta x=-6m$ است بنابراین سرعت متحرک خواهد شد:

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=-2m/s$$

معادلهٔ حرکت متحرک به‌صورت $x=-2t+x_0$ بوده و چون متحرک تغییر جهت داده، پس متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند.

بنابراین نمودار $x-t$ شیب منفی (v، منفی است) دارد و محور افقی $(x=0)$ را قطع می‌کند که با این شرایط تنها گزینهٔ (۳) درست است.

نمای ۱۳

B ۲۷۲ ۲

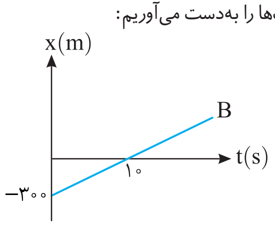
۱۰ **خط فکری** ابتدا با توجه به نمودار باید معادلهٔ حرکت دو متحرک را بنویسیم.

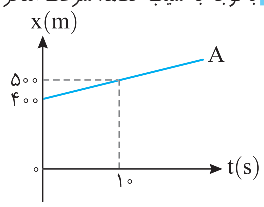
فاصلهٔ بین دو متحرک برابر تفاضل مکان دو متحرک یعنی $|x_A-x_B|$ است.

نکته اگر نمودار $x-t$ متحرکی به صورت خط راست باشد، حرکت متحرک با سرعت ثابت بوده و معادلهٔ حرکت آن به صورت $x=vt+x_0$ است.

یادآوری شیب نمودار $x-t$ برابر سرعت متحرک است.

۱ با توجه به شیب خط‌ها، سرعت متحرک‌ها را به‌دست می‌آوریم:





$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{300}{10}=30m/s \qquad v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_A=\frac{100}{10}=10m/s$$

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم.

$$x_A=v_At+x_{0A}\xrightarrow[x_{0A}=400m]{v_A=10m/s}x_A=10t+400$$

$$x_B=v_Bt+x_{0B}\xrightarrow[x_{0B}=-300m]{v_B=30m/s}x_B=30t-300$$

۳ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۶۰۰ متر است، بنابراین:

$$|x_A-x_B|=600\xrightarrow[x_B=30t-300]{x_A=10t+400}|10t+400-30t+300|=600$$

$$\Rightarrow|-20t+700|=600$$

نکته در حل معادله‌های قدرمطلقی حواستان باشد که: $|x|=a\Rightarrow x=\pm a$

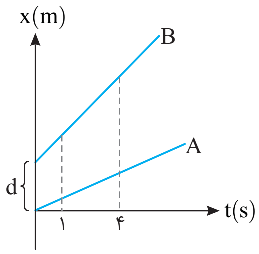
۴ حال معادله را حساب می‌کنیم:

$$|-20t+700|=600\Rightarrow -20t+700=\pm 600$$

$$\begin{cases}-20t+700=600\Rightarrow -20t=-100\Rightarrow t_1=5s\\ -20t+700=-600\Rightarrow -20t=-1300\Rightarrow t_2=65s\end{cases}\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=\frac{65}{5}=13$$

نمای ۱۴

بازی با سؤال شکل مقابل نمودار مکان - زمان دو متحرک را نشان می‌دهد، اگر فاصلهٔ دو متحرک از هم در لحظهٔ $t=4s$، دو برابر فاصلهٔ دو متحرک در $t=1s$ باشد، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=5s$ چند d است؟



۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ ۱ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0\begin{cases}\xrightarrow{A}x_A=v_At\\ \xrightarrow{B}x_B=v_Bt+d\end{cases}$$

۲ مکان دو متحرک را در لحظهٔ $t=1s$ و $t=4s$ به‌دست می‌آوریم.

$$t=1s\Rightarrow\begin{cases}x_A=v_A\\ x_B=v_B+d\end{cases}\qquad t=4s\Rightarrow\begin{cases}x'_A=4v_A\\ x'_B=4v_B+d\end{cases}$$

۳ فاصله دو متحرک در دو لحظهٔ $t=1s$ و $t=4s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=1s\Rightarrow x_B-x_A=v_B+d-v_A\Rightarrow\Delta x=(v_B-v_A)+d$$

$$t=4s\Rightarrow x'_B-x'_A=4v_B+d-4v_A\Rightarrow\Delta x'=4(v_B-v_A)+d$$

۴ با توجه به فرض مسئله $\Delta x'/\Delta x$ برابر ۲ است بنابراین:

$$4(v_B-v_A)+d=2[(v_B-v_A)+d]$$

$$\Rightarrow 4(v_B-v_A)+d=2(v_B-v_A)+2d$$

$$\Rightarrow 2(v_B-v_A)=d\Rightarrow(v_B-v_A)=\frac{d}{2}\qquad(I)$$

۵ مکان دو متحرک در $t=5s$ را حساب می‌کنیم.

$$x''_A=5v_A\quad,\quad x''_B=5v_B+d$$

۶ فاصلهٔ دو متحرک در $t=5s$ خواهد شد:

$$x''_B-x''_A=5v_B+d-5v_A\Rightarrow\Delta x''_{(5)}=5(v_B-v_A)+d$$

از رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x''_{(5)}=5(\frac{d}{2})+d\Rightarrow\Delta x''=\frac{7}{2}d$$

گزینهٔ ۱

پنجره ۴

A ۲۷۳ ۲

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، معادلهٔ مکان-زمان یک تابع درجه ۲ به‌صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ است.

مکان اولیهٔ متحرک $x_0=0$ و سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=3m/s$ بوده و در لحظهٔ $t=2s$، مکان متحرک $+12m$ است. با قرار دادن این داده‌ها در معادله، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$12=\frac{1}{2}a(2)^2+3\times 2+0\Rightarrow a=3m/s^2$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم.

$$x=\frac{3}{2}t^2+3t$$

A ۲۷۴ ۳

با توجه به معادلهٔ جابه‌جایی - زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 20=\frac{1}{2}\times 4\times(2)^2+v_0\times 2\Rightarrow v_0=6m/s$$

A ۲۷۵ ۱

با توجه به فرض مسئله مکان اولیهٔ متحرک $x_0=0$ است. اندازهٔ سرعت اولیهٔ متحرک $8m/s$ و اندازهٔ شتاب آن $-3m/s^2$ است. بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان می‌توانیم مکان متحرک را در لحظهٔ $t=4s$ حساب کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-3)(4)^2+8\times 4+0\Rightarrow x=-24+32\Rightarrow x=8m$$

بردار مکان خواهد شد: $\vec{x}=8\vec{i}$

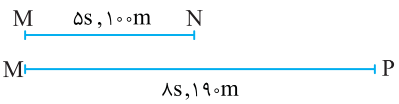
A ۲۷۶ ۴

در معادلهٔ مکان - زمان در بازهٔ زمانی $47-2=45s$ متحرک با شتاب ثابت $a=2m/s^2$ جابه‌جایی ۲۱۱۵ متر را طی کرده است بنابراین:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+vt\Rightarrow 2115=\frac{1}{2}\times 2\times(45)^2+v\times 45\Rightarrow 90=v\times 45\Rightarrow v=2m/s$$

B ۲۷۷ ۳

خط فکری متحرک در مدت $5s$ جابه‌جایی $MN=100m$ و در مدت $3s$ جابه‌جایی $NP=90m$ طی کرده است و در بازهٔ زمانی $5+3=8s$ جابه‌جایی کل $MP=100+90=190m$ را طی می‌کند. بنابراین شما کافی است به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان حرکت با شتاب ثابت یک دستگاه دو معادله دو مجهول بنویسید و آن را حل کنید.



$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\begin{cases}100=\frac{1}{2}a(25)+5v_0\\ 190=\frac{1}{2}a(64)+8v_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a+2v_0=40\\ 4a+v_0=23/75\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3a=-7/5\Rightarrow a=2/5m/s^2$$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست، در ۳ ثانیه آغازین حرکت، جابه‌جایی ۱۵ متر و ۲ ثانیه بعد جابه‌جایی ۲۵ متر را می‌پیماید. سرعت اولیه متحرک چند m/s است؟

۱) +۰/۵ ۲) -۰/۵ ۳) +۱ ۴) -۱

پاسخ ۱ متحرک در مدت $3s$، $15m$ طی کرده بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[x=15m]{t=3s}15=\frac{1}{2}\times a\times 9+3v_0\Rightarrow 30=9a+6v_0$$

$$\Rightarrow 10=3a+2v_0\qquad (I)$$

۲ متحرک در کل مدت $3s+2s=5s$ جمعاً $15+25=40m$ جابه‌جا شده است.

از این رو: $40=\frac{1}{2}\times a\times 25+5v_0\Rightarrow 40=12/5a+5v_0\Rightarrow 8=2/5a+v_0\ (II)$

۳ با حل دو معادلهٔ (I) و (II) داریم: $a=3m/s^2, v_0=0/5m/s$

گزینهٔ ۱

A ۲۷۸ ۱

با توجه به تعریف شتاب خواهیم داشت:

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[t_2=5s,t_1=3s]{\vec{a}=-4\vec{i},\vec{v}_1=8\vec{i}}-4\vec{i}=\frac{\vec{v}_2-8\vec{i}}{5-3}\Rightarrow -8\vec{i}=\vec{v}_2-8\vec{i}\Rightarrow \vec{v}_2=0$$

A ۲۷۹ ۴

۱ با توجه به معادله سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v=at+v_0\quad\begin{matrix}\xrightarrow{t_1=2s}5=2a+v_0\\ \xrightarrow{t_2=6s}12=6a+v_0\end{matrix}\quad\Rightarrow 7=4a\Rightarrow a=1/75m/s^2$$

$$5=2\times 1/75+v_0\Rightarrow v_0=1/5m/s$$

۲ در این صورت سرعت در لحظهٔ $t=3s$ خواهد شد:

$$v=1/75t+1/5\Rightarrow v=1/75\times 3+1/5\Rightarrow v=6/75m/s$$

B ۲۸۰ ۴

معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم و مقادیر t و 2t را در آن قرار می‌دهیم. البته حواسمان هست که متحرک دارای سرعت اولیه (v_0) بوده و حرکت آن تندشونده است، یعنی شتاب a و سرعت هم‌علامت بوده و با گذشت زمان سرعت در حال افزایش است بنابراین:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_1=at+v_0\\ v_2=a(2t)+v_0=2at+v_0\end{cases}\Rightarrow v_1<v_2<2v_1$$

البته شاید یک مثال عددی کار را برای شما راحت‌تر کند فرض کنید: $at=3$ و $v_0=2$ است از این‌رو:

$$\begin{cases}v_1=3+2=5\\ v_2=6+2=8\end{cases}\Rightarrow 5<8<10\Rightarrow 5<8<2\times 5$$

B ۲۸۱ ۱

یادآوری دو ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

۱ معادلهٔ سرعت زمان در حرکت با شتاب ثابت به‌صورت $v=at+v_0$ است. معادلهٔ داده شده در مسئله را با این معادله مقایسه کرده، شتاب و سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}v=at+v_0\\ v=-2t+4\end{cases}\Rightarrow a=-2m/s^2, v_0=4m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=4s$ و $t=6s$ مکان‌ها را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(-2)(4)^2+4\times 4+x_0\Rightarrow x_1=x_0\\ x_2=\frac{1}{2}(-2)(6)^2+4\times 6+x_0\Rightarrow x_2=-12+x_0\end{cases}$$

۳ بزرگی جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم خواهد شد: $|\Delta x|=|-12|=12m$

بازی با سؤال معادلهٔ سرعت - زمان متحرکی (در SI) به صورت $v=4t+3$ است. شتاب و جابه‌جایی متحرک در $0/5s$ آغازین حرکت به ترتیب از راست به چپ چند m/s^2 و چند متر است؟

۱) ۴، ۲ ۲) ۴، ۶ ۳) ۲، -۶ ۴) ۲، ۴

پاسخ ابتدا با مقایسهٔ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت - زمان مسئله، شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}v=at+v_0\\ v=4t+3\end{cases}\Rightarrow a=4m/s^2, v_0=3m/s$$

جابه‌جایی متحرک را در مدت $0/5s$ به دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}\Rightarrow \Delta x=2m$$

گزینهٔ ۱

A ۲۸۲ ۲

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان، سرعت اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times 2\times(4)^2+4v_0\Rightarrow 24=16+4v_0\Rightarrow v_0=2m/s$$

۲ سرعت در پایان این مدت خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times 4+2=10m/s$$

میانبر سرعت در پایان مدت t را می‌توان از رابطهٔ زیر نیز به‌دست آورد.

$$\Delta x=-\frac{1}{2}at^2+vt$$

A ۲۸۳ ۲

خط فکری اگر مشتق‌گیری بلد بودید و می‌دانستید که مشتق معادلهٔ مکان – زمان برابر سرعت لحظه‌ای است، مسئله را راحت حل می‌کردید، اما اکنون باید معادلهٔ مکان – زمان داده شده را با معادلهٔ حرکت کلاسیک حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست آورد.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ مکان – زمان خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \\ x=۵t^۲-۳t+۱ \end{cases} \xrightarrow[v=at+v_۰]{x_۰=۱m\ ,v_۰=-۳m/s\ ,\frac{۱}{۲}a=۵\Rightarrow a=۱۰m/s^۲} v=۱۰t-۳$$

۲ لحظه‌ای را که در آن سرعت $۶m/s$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$۶=۱۰t-۳\Rightarrow t=۰/۹s$$

۳ زمان به‌دست آمده را در معادلهٔ مکان – زمان قرار می‌دهیم.

$$x=۵t^۲-۳t+۱\xrightarrow{t=۰/۹s}x=۵(۰/۹)^۲-۳(۰/۹)+۱\Rightarrow x=۲/۳۵m$$

A ۲۸۴ ۲

۱ در مبدأ زمان متحرک در مکان $+۲m$ است، یعنی مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=+۲m$ است.

۲ با مقایسهٔ معادله سرعت – زمان حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت – زمان مسئله، شتاب و سرعت اولیه مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} v=at+v_۰ \\ v=۳t-۶ \end{cases}\Rightarrow a=۳m/s^۲\ ,\ v_۰=-۶m/s$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مکان – زمان، مکان را در $t=۳s$ حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times۳\times۹+۳\times(-۶)+۲\Rightarrow x=۱۳/۵-۱۸+۲$$

$$\Rightarrow x=-۲/۵m$$

A ۲۸۵ ۲

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=۰)$ به محل متحرک رسم می‌شود و هرگاه متحرک از مبدأ می‌گذرد، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم:

$$x=۰\Rightarrow t^۲+۳t-۴=۰\Rightarrow(t+۴)(t-۱)=۰\Rightarrow t=۱s\ ,\ t=-۴s \text{ غ‌ق‌ق}$$

یکی از ریشه‌ها مثبت $(t=۱s)$ و یکی از آن‌ها منفی $(t=-۴)$ است. از این‌رو بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد.

A ۲۸۶ ۴

۱ ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ داده شده با معادلهٔ مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت، مقدار شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \\ x=t^۲-۶t+۱۰ \end{cases}\Rightarrow x_۰=+۱۰m\ ,\ \frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۶m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت – زمان خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲t-۶$$

۳ در حرکت با شتاب ثابت لحظهٔ تغییر جهت حرکت لحظهٔ صفر شدن سرعت است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v=۰\Rightarrow ۲t-۶=۰\Rightarrow t=۳s$$

۴ اکنون مکان تغییر جهت حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^۲-۶t+۱۰\xrightarrow{t=۳s}x=(۳)^۲-۶(۳)+۱۰=۱m$$

پس متحرک در یک متری مبدأ تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۸۷ ۴

یادآوری بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ می‌گذرد.

۱ ابتدا با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان، شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow-۱۰=\frac{۱}{۲}a(۴)^۲+۴\times۴+(-۲)\Rightarrow a=-۳m/s^۲$$

۲ معادلهٔ مکان – زمان را نوشته و در آن مکان را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{۱}{۲}\times(-۳)\times t^۲+۴t+(-۲)\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}t^۲+۴t-۲$$

$$x=۰\Rightarrow-\frac{۳}{۲}t^۲+۴t-۲=۰\Rightarrow۳t^۲-۸t+۴=۰\Rightarrow t=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۱۲}}{۳}=\frac{۴\pm۲}{۳}$$

$$\Rightarrow t=۲s\ ,\ t=\frac{۲}{۳}s$$

۳ هر دو مقدار زمان به‌دست آمده مثبت است، بنابراین در دو لحظهٔ $t=۲s$ و $t=\frac{۲}{۳}s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۸۸ ۴

۱ متحرک از مکان اولیهٔ $x_۰=+۲۰m$ با سرعت اولیهٔ $-۴m/s$ گذشته و در لحظهٔ $t=۲s$ به مکان $x=+۲m$ رسیده است. این داده‌ها را در معادلهٔ مکان – زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow۲=\frac{۱}{۲}\times a\times۴+۲\times(-۴)+۲۰\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

۲ متحرک لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شود و تغییر علامت بدهد. در حرکت با شتاب ثابت کافی است در معادلهٔ سرعت – زمان، مقدار v را برابر صفر قرار داده تا لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست بیاوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۵t-۴\xrightarrow{v=۰}-۵t-۴=۰\Rightarrow t=-۰/۸s$$

زمان منفی به‌دست آمده است، از این رو متحرک هرگز تغییر جهت نمی‌دهد.

میانبر سرعت اولیه و شتاب حرکت هر دو منفی هستند یعنی هم‌علامت هستند و حرکت تندشونده است. از این رو سرعت متحرک صفر نخواهد شد و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

B ۲۸۹ ۴

خط فکری از ما خواسته شده بازهٔ زمانی‌ای که متحرک خلاف جهت محور x در حرکت است را مشخص کنیم. وقتی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند یعنی سرعت آن منفی است. بنابراین شما باید معادلهٔ سرعت – زمان را از روی معادلهٔ مکان – زمان بنویسید، سپس آن را تعیین علامت کنید.

یادداشت ریاضی در معادلهٔ درجهٔ اول $y=ax+b$ سمت چپ ریشه مخالف علامت a و سمت راست ریشه موافق علامت a است.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت مسئله و معادلهٔ مکان – زمان، حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x=t^۲-۶t+۵ \\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \end{cases}\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۶m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت – زمان را نوشته و تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲t-۶\xrightarrow{v=۰}۲t-۶=۰\Rightarrow t=۳s$$

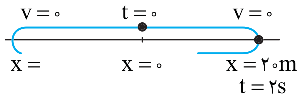
۳ با رسم جدول، علامت سرعت را تعیین می‌کنیم.

t	−∞	۰	۳	+∞
v	−	−	۰	+
	زمان منفی نداریم.			

۴ بنابراین در بازهٔ زمانی ۱s تا ۵s، در مدت ۱s تا ۳s سرعت منفی است یعنی به مدت ۲s متحرک در خلاف جهت محور در حال حرکت است.

A ۲۹۰ ۲

خط فکری متحرک از مبدأ مکان ($x_0=0$) در جهت مثبت محور با سرعت اولیه $+20m/s$ و شتاب $a=-10m/s^2$ می‌گذرد. بنابراین در ابتدا که بردار سرعت و شتاب خلاف جهت هم هستند حرکت کندشونده است و متحرک پس از مدتی می‌ایستد و برمی‌گردد. در لحظهٔ تغییر جهت فاصلهٔ متحرک از مبدأ را باید به‌دست بیاورید. همچنین در انتهای بازه صفر تا ۳s یعنی $t=3s$ مکان را حساب کرده تا مشخص شود بیشترین فاصله از مبدأ چند متر است؟



۱ در معادلهٔ $v=-10t+20$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ تغییر جهت مشخص شود.

$$-10t+20=0 \Rightarrow t=2s$$

۲ به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت و لحظهٔ انتهای بازه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t=2s \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times(-10)\times(2)^2+20\times2+0 \Rightarrow x=-20+40=20m \\ t=3s \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times(-10)\times(3)^2+20\times3+0 \Rightarrow x=-45+60=15m \end{cases}$$

۳ بنابراین بیشترین فاصله از مبدأ در بازهٔ صفر تا ۳s، ۲۰m است.

بازی با سؤال **اگر در این تست بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=6s$ بیان شده بود، بیشترین فاصله از مبدأ چند متر می‌شد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

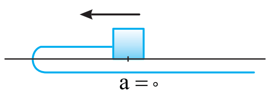
پاسخ **تمام حل شبیه مسئلهٔ قبلی است، فقط در انتها باید مکان در لحظهٔ $t=6s$ را به‌دست آوریم**

$$x=\frac{1}{2}\times(-10)(6)^2+20\times6 \Rightarrow x=-180+120=-60m$$

گزینهٔ ۳

B ۲۹۱ ۳

با توجه به معادلهٔ $v=4t-6$، سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=-6m/s$ است. یعنی متحرک در جهت منفی محور شروع به حرکت کرده است و چون شتاب آن $+4m/s^2$ است و بردار شتاب و سرعت هم‌علامت نیستند. ابتدا حرکت کندشونده است و متحرک متوقف شده برمی‌گردد و برای آنکه تنها یک بار از مبدأ مکان بگذرد کافی است که از ابتدا مکان اولیهٔ آن صفر یا منفی باشد. ($x_0=a\le0$) و مسئله نیازی به هیچ گونه محاسبهٔ عددی ندارد.



B ۲۹۲ ۴

یادآوری الف) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال کاهش باشد را حرکت کندشونده گویند. در این حرکت $av<0$ است.

ب) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال افزایش باشد را حرکت تندشونده گویند. در این حرکت $av>0$ است.

۱ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان متحرک و معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$v=4t-12,\ v=at+v_0 \Rightarrow v_0=-12m/s,\ a=4m/s^2$$

۲ در ابتدا شتاب و سرعت مختلف‌العلامت بوده و $av<0$ است پس حرکت در ابتدا کندشونده است.

۳ در لحظهٔ $t=3s$ با توجه به معادلهٔ $v=4t-12$ سرعت متحرک صفر می‌شود و پس از این لحظه سرعت متحرک مثبت و شتاب نیز ثابت و مثبت است پس بعد از $t=3s$، $av>0$ بوده و حرکت تندشونده است.

B ۲۹۳ ۳

۱ معادلهٔ $x-t$ متحرک درجه دوم است پس حرکت با شتاب ثابت است. با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان مسئله با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت v_0 و a را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=t^2-6t+5 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases} \Rightarrow a=2m/s^2,\ v_0=-6m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=2t-6$$

۳ حال در لحظات $t=2s$ و $t=5s$ سرعت را حساب می‌کنیم.

$$t=2s \Rightarrow v=2\times2-6=-2m/s \quad , \quad t=5s \Rightarrow v=2\times5-6=4m/s$$

۴ در لحظهٔ $t=2s$ شتاب مثبت و سرعت منفی است پس در این لحظه $av<0$ و حرکت کندشونده است.

۵ در لحظهٔ $t=5s$ شتاب مثبت و سرعت مثبت است پس در این لحظه $av>0$ و حرکت تندشونده است.

A ۲۹۴ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow{t=4s,\ x=16m,\ a=3m/s^2}$$

$$16=\frac{1}{2}\times3\times(4)^2+v_0\times(4) \Rightarrow v_0=-2m/s$$

۲ بنابراین در ابتدا سرعت منفی و شتاب مثبت بوده یعنی شتاب و سرعت در خلاف جهت هم هستند و حرکت کندشونده است.

۳ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=3t-2 \xrightarrow{v=0} 3t-2=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3}s$$

۴ بازهٔ زمانی خواسته شده صفر تا ۴s است. بنابراین از صفر تا $\frac{2}{3}s$ حرکت کندشونده و از $\frac{2}{3}s$ تا ۴s حرکت تندشونده است.

B ۲۹۵ ۲

۱ معادلهٔ مکان-زمان $x=t^2-4t+8$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه می‌کنیم و شتاب و سرعت اولیه را به دست آورده و معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x=t^2-4t+8 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases} \Rightarrow a=2m/s^2,\ v_0=-4m/s\ ,\ x_0=+8m$$

۲ معادلهٔ سرعت-زمان خواهد شد: $v=2t-4$

۳ لحظهٔ تغییر جهت را یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$2t-4=0 \Rightarrow t=2s$$

۴ بنابراین در ابتدا که سرعت اولیه منفی است متحرک تا لحظهٔ $t=2s$ در خلاف جهت محور در حرکت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۵ در بازهٔ ۰ تا ۲s حرکت کندشونده است و در لحظهٔ $t=2s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد و در جهت مثبت محور دارای حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۲) درست و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند.

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=-5t^2+6t+12$ است. در مورد جهت حرکت و نوع آن کدام مطلب درست است؟**

۱) همواره در جهت محور و کندشونده ۲) ابتدا در جهت محور و کندشونده

۳) ابتدا درخلاف جهت محور و کندشونده ۴) همواره در خلاف جهت محور و کندشونده

پاسخ معادلهٔ $x=-5t^2+6t+12$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت یعنی $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه می‌کنیم و سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}a=-5\Rightarrow a=-10m/s^2\ ,\ v_0=6m/s\ ,\ x_0=12m$$

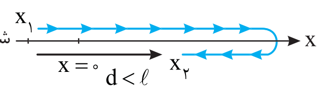
سرعت اولیه $+6m/s$ است، پس متحرک ابتدا در جهت مثبت محور در حرکت است.

سرعت اولیه مثبت و شتاب منفی است، بنابراین در ابتدا حرکت کندشونده است.

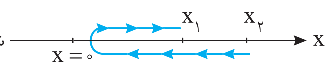
نتیجه: در حرکت با شتاب ثابت هرگاه در معادلهٔ مکان - زمان ضریب t^2 و ضریب t هم‌علامت باشند، حرکت همواره تندشونده است و اگر دارای علامت مخالف باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. گزینهٔ ۲

B ۲۹۶ ۳

در مسیر زیر جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نیستند اما جابه‌جایی مثبت و در نتیجه سرعت متوسط مثبت است و لزومی ندارد که سرعت متوسط منفی باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.



در مسیر زیر متحرک با شتاب ثابت از نقطهٔ x_1 گذشته، متوقف شده و برمی‌گردد و از مبدأ نمی‌گذرد بنابراین لزومی ندارد که بردار مکان تغییر جهت دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.



در یک بازهٔ زمانی معین سرعت متوسط $(v_{av}=d/t)$ و تندی متوسط $(s_{av}=\ell/t)$ با هم برابر نیستند. بنابراین جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نخواهند بود. در این صورت باید متحرک روی خط راست حداقل یک بار تغییر جهت بدهد یعنی حرکت ابتدا کندشونده بوده و پس از توقف و تغییر جهت متحرک با همان شتاب ثابت برمی‌گردد و با حرکت تندشونده به حرکت خود ادامه می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است.

دوباره به شکل (۲) نگاه کنید دقیقاً متوجه می‌شوید که لزومی ندارد که متحرک ابتدا در جهت مثبت حرکت کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۹۷ ۲

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی $(\frac{v+v_0}{2})$ است، بنابراین:

$$v_{av}=\frac{0+20}{2}=10m/s$$

A ۲۹۸ ۱

سرعت در لحظهٔ $t=3s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=2t+v_0\xrightarrow{t=3s}v=6+v_0$$

سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا ۳s برابر $8m/s$ شده است. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av}=\frac{v+v_0}{2}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$8=\frac{6+v_0+v_0}{2}\Rightarrow 16=6+2v_0\Rightarrow v_0=5m/s$$

A ۲۹۹ ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط متحرک از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$$

۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعت اولیهٔ آن $v_0=0$ است.

۲ در بازهٔ صفر تا ۲/۵s سرعت متوسط برابر $8m/s$ است. به کمک رابطهٔ بالا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow 8=\frac{1}{2}a\times 2.5+0\Rightarrow a=6.4m/s^2$$

۳ سرعت در لحظهٔ $t=3s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=6.4\times 3+0\Rightarrow v=19.2m/s$$

بازی با سؤال متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت $2m/s^2$ و با سرعت اولیهٔ $5m/s$ تندشونده در حرکت است. اگر در بازهٔ صفر تا t ثانیه سرعت متوسط ۱/۵ برابر سرعت اولیه باشد، t چند ثانیه است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ با توجه به فرض مسئله:

$$v_{av}=1.5v_0\Rightarrow\frac{1}{2}at+v_0=1.5v_0\Rightarrow\frac{1}{2}\times 2t+5=1.5\times 5\Rightarrow t+5=7.5$$

$$\Rightarrow t=2.5s$$

گزینهٔ ۳

A ۳۰۰ ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت ابتدای بازه (v_1) و سرعت انتهای بازه (v_2) است.

$$(v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2})$$

۱ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\xrightarrow{v_{av}=5.5\,m/s}5.5=\frac{v_1+v_2}{2}\Rightarrow v_1+v_2=11\ (I)$$

۲ تغییرات سرعت برابر $9\,m/s$ است. از این‌رو:

$$v_2-v_1=9\ (II)$$

۳ دستگاه دو معادله دو مجهول (I) و (II) را حل می‌کنیم.

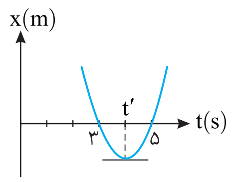
$$\begin{cases}v_1+v_2=11\\ v_2-v_1=9\end{cases}\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{دو معادله را}}2v_1=2\Rightarrow v_1=1m/s$$

B ۳۰۱ ۳

در لحظهٔ $t_1=2s$ و $t_2=6s$ مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x(2)=2^2-8(2)+15=3m$$

$$x(6)=6^2-8(6)+15=3m$$



بنابراین جابه‌جایی در این بازه صفر شده و سرعت متوسط در این بازه صفر است. در این صورت سرعت لحظه‌ای خواسته شده نیز باید صفر شود، یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر باشد. می‌دانیم در تابع درجه دوم در رأس سهمی $(t'=-\frac{b}{2a})$ شیب خط مماس صفر می‌شود.

$$t'=\frac{8}{2}=4s$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط با سرعت در وسط بازهٔ زمانی برابر است.

B ۳۰۲ ۱

معادلهٔ مکان - زمان متحرک $(x=t^2-4t+5)$ تابع درجه دوم می‌باشد، یعنی متحرک دارای شتاب ثابت بوده، بنابراین شتاب در هر لحظه با شتاب متوسط در هر بازه برابر است.

A ۳۰۳ ۱

ابتدا به کمک معادله جابه‌جایی - زمان، زمان را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\Delta x=24m,\ a=4m/s^2,\ v_0=2m/s}24=\frac{1}{2}\times 4\times t^2+2t$$

$$\Rightarrow 2t^2+2t=24\Rightarrow t^2+t-12=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}\Rightarrow t=3s$$

سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{24}{3}=8m/s$$

A ۳۰۴ ۳

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ شتاب حرکت را به کمک معادلهٔ سرعت متوسط به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow 6=\frac{1}{2}a\times 5+2\Rightarrow a=1/6\,m/s^2$$

۲ مکان را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=4s$ به دست آورده و از هم کم می‌کنیم و جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\begin{cases}\xrightarrow{t=2s} x=\frac{1}{2}\times 1/6\times 4+2\times 2+x_0=7/2+x_0\\ \xrightarrow{t=4s} x=\frac{1}{2}\times 1/6\times 16+2\times 4+x_0=20/8+x_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x=13/6\,m$$

B ۳۰۵ ۲

۱ سرعت متوسط در مدت 5s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta x=75m} v_{av}=\frac{75}{5}=15\,m/s$$

۲ در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}\xrightarrow{v_2=20m/s} 15=\frac{20+v_1}{2}\Rightarrow v_1=10\,m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{20-10}{5}=2\,m/s^2$$

۴ سرعت در 5s بعدی خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v_3=2\times 5+20\Rightarrow v_3=30\,m/s$$

۵ سرعت متوسط در این 5s را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{v_3+v_2}{2}=\frac{20+30}{2}=25\,m/s$$

A ۳۰۶ ۳

خط فکری سرعت متوسط در کل مسیر برحسب سرعت نهایی (v) در انتهای بازه داده شده است. اگر شما سرعت اولیه را برحسب v به‌دست بیاورید، می‌توانید تشخیص دهید که حرکت کندشونده است یا تندشونده.

۱ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v+v_0}{2}\Rightarrow \frac{2}{3}v=\frac{v+v_0}{2}\Rightarrow v_0=\frac{1}{3}v$$

۲ سرعت اولیه برابر با $\frac{v}{3}$ می‌باشد، بنابراین حرکت تندشونده است، زیرا سرعت از $\frac{1}{3}v$ به v رسیده است.

B ۳۰۷ ۲

خط فکری حرکت تندشونده است، یعنی بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت هستند. اگر جهت حرکت را مثبت بگیریم، سرعت و شتاب نیز مثبت خواهد بود.

۱ در معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، داده‌های مسئله را قرار می‌دهیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\Delta x=16m,\,t=4s}16=\frac{1}{2}a(4)^2+4v_0\Rightarrow 4=2a+v_0$$

$$\Rightarrow v_0=4-2a$$

۲ دقت کنید سرعت و شتاب هر دو مثبت (یا هر دو منفی) انـد، البته با توجه به اینکه ما جهت حرکت را مثبت گرفته‌ایم v_0 و a هر دو مثبت هستند. بنابراین

$$v_0>0\Rightarrow 4-2a>0\Rightarrow 4>2a\Rightarrow a<2\,m/s^2$$

۳ گزینه‌ای که در آن شتاب کمتر از $2m/s^2$ است پاسخ تست است یعنی گزینهٔ (۲) درست است.

A ۳۰۸ ۲

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در t ثانیهٔ آغازین حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ ابتدا در معادلهٔ داده شده در مسئله $v_{av}=\alpha t+5$، زمان را $t=5s$ و سرعت متوسط را $11m/s$ قرار می‌دهیم.

$$11=5\alpha+5\Rightarrow \alpha=1/2\,m/s^2$$

۲ α را در معادلهٔ سرعت متوسط زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}a\Rightarrow 1/2=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=2/4\,m/s^2$$

A ۳۰۹ ۲

مسئلهٔ ساده‌ای است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان که ما به آن فرمول طلایی می‌گوییم قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow 0/1=\frac{30+50}{2}t\Rightarrow t=\frac{1}{400}s$$

بازی با سؤال **سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در حرکت است، در مدت ۱۵ دقیقه از $60km/h$ به $40km/h$ می‌رسد. در این مدت متحرک چند متر جابه‌جا شده است؟** از کتاب درسی

۱) ۱۲۵۰۰ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۵۰۰۰

پاسخ **نیازی به تبدیل یکای km/h به m/s نیست، بلکه دقیقه را به ساعت تبدیل می‌کنیم، سپس مسئله را حل می‌کنیم:**

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t=\frac{60+40}{2}\times\frac{15}{60}=\frac{100}{8}=12/5\,km=12500\,m$$

گزینهٔ ۱

A ۳۱۰ ۲

۱ ابتدا سرعت را بر حسب m/s به دست می‌آوریم:

$$v=54\frac{km}{h}=\frac{54}{3/6}=15\,m/s$$

۲ سپس به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب خواهیم داشت:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 240=\frac{0+15}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta t=\frac{480}{15}=\frac{160}{5}\Rightarrow \Delta t=32s$$

A ۳۱۱ ۴

با یک جای‌گذاری ساده در فرمول طلایی $x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0$ مسئله حل می‌شود.

$$(x=-122/5m,\,t=5s,\,v_0=0,\,x_0=0)\Rightarrow -122/5=\frac{v+0}{2}\times 5+0$$

$$\Rightarrow v=-49\,m/s$$

بنابراین بزرگی سرعت $|v|=49m/s$ است.

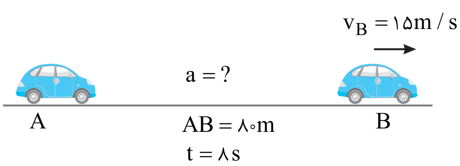
A ۳۱۲ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت در هنگام گذر از نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v_B+v_A}{2}\Delta t\Rightarrow 80=\frac{15+v_A}{2}\times 8\Rightarrow v_A=5\,m/s$$

۲ اکنون می‌توان شتاب را به دست آورد:

$$a=\frac{v_B-v_A}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{15-5}{8}=\frac{5}{4}\,m/s^2$$



A ۳۱۳ | ۳

داده‌های مسئله را در معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) قرار می‌دهیم و مقدار v را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 24=\frac{\frac{v}{2}+v}{2}\times 4\Rightarrow 24=\frac{\frac{3v}{2}}{2}\times 4\Rightarrow 24=3v\Rightarrow v=8m/s$$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیه v_0 روی خط راست به راه می‌افتد و در مدت $4s$، جابه‌جایی متحرک ۲۰ متر بوده و در پایان این مدت سرعت آن $3v_0$ می‌شود، v_0 چند m/s است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

پاسخ با جای‌گذاری در معادلهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow 20=\frac{3v_0+v_0}{2}\times 4\Rightarrow v_0=2/5m/s$$

گزینهٔ ۴

A ۳۱۴ | ۳

۱ با توجه به تعریف شتاب ثابت:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 2=\frac{\frac{v}{3}-v}{8}\Rightarrow 16=-\frac{2}{3}v\Rightarrow v=-24m/s$$

۲ اکنون جابه‌جایی را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (رابطهٔ طلایی) به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{-8+(-24)}{2}\times 8\Rightarrow \Delta x=-128m$$

بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی ۱۲۸ متر است. در حل این تست شتاب را $+2m/s$ در نظر گرفتیم و چون اندازهٔ سرعت در حال کاهش بوده، v منفی به دست آمد. شما می‌توانید شتاب را $-2m/s^2$ قرار دهید که در جواب نهایی یعنی اندازهٔ جابه‌جایی تغییری حاصل نخواهد شد.

A ۳۱۵ | ۱

۱ معادلهٔ سرعت - زمان، تابع درجهٔ اول از زمان است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است:

$$\left.\begin{array}{l}v=at+v_0\\ v=2t-4\end{array}\right\}\Rightarrow a=2m/s^2\ ,\ v_0=-4m/s$$

۲ برای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}$ است. سرعت در لحظهٔ $t=1s$ و $t=2s$ را حساب می‌کنیم

$$\left\{\begin{array}{l}t_1=1s\Rightarrow v_1=-2m/s\\ t_2=2s\Rightarrow v_2=0\end{array}\right.\Rightarrow v_{av}=\frac{-2+0}{2}\Rightarrow v_{av}=-1m/s$$

۳ جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی با توجه به سرعت متوسط خواهد شد.

$$\Delta x=v_{av}\Delta t\Rightarrow \Delta x=-1\times(2-1)=-1m/s$$

A ۳۱۶ | ۱

سرعت متحرک در $x_1=10m$ برابر $v_1=4m/s$ و در مکان $x_2=19m$، برابر $v_2=\frac{18}{3/6}=5m/s$ است. داده‌های مسئله ما را به معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) هدایت می‌کند.

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 25-16=2a\times(19-10)\Rightarrow a=0/5m/s^2$$

A ۳۱۷ | ۴

شتاب حرکت یعنی آهنگ تغییر سرعت در صورت مسئله بیان شده تندی با شتاب $1m/s$ افزایش می‌یابد، بنابراین $a=+1m/s^2$ است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسئله قابل حل است. البته ابتدا یکای سرعت را به m/s تبدیل می‌کنیم.

$$v=18km/h\times\frac{10^3m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}\Rightarrow v=\frac{18}{3/6}=5m/s$$

$$v^2-v_1^2=2a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=300m}v^2-25=2\times1\times300\Rightarrow v^2=625$$

$$\Rightarrow v=25m/s$$

$$v_2=25m/s\times\frac{3600s}{1h}\times\frac{1km}{1000m}=25\times3/6km/h=90km/h$$

A ۳۱۸ | ۱

۱ میزان کاهش سرعت در هر ثانیه یعنی آهنگ تغییر سرعت برابر $1/6m/s$ در هر ثانیه است، بنابراین شتاب حرکت $(-1/6m/s^2)$ است (جهت حرکت را مثبت فرض کرده‌ایم).

۲ به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) خواهیم داشت:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-400=2(-1/6)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{2000}{16}=125m$$

A ۳۱۹ | ۳

بـه کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت-مکان) به راحتی این پرسش قابل حل است.

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\xrightarrow{a=2m/s^2,v_1=5m/s,x_1=3m,v_2=7m/s}$$

$$49-25=2\times2\times(x_2-3)\Rightarrow x_2=9m$$

A ۳۲۰ | ۲

۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی سرعت اولیه صفر است. به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=9m}81-0=2a\times9\Rightarrow a=4/5m/s^2$$

۲ سرعت متوسط در $4s$ آغازین حرکت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow v_{av}=\frac{1}{2}\times4/5\times4+0\Rightarrow v_{av}=9m/s$$

A ۳۲۱ | ۱

۱ با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) برای حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v_0^2=2(-a)\Delta x\Rightarrow \Delta x_{\text{توقف}}=\frac{v_0^2}{2a}$$

۲ شتاب در دو حالت یکسان است در دو حالت رابطهٔ بالا را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم سپس داده‌های مسئله $v_{0_1}=40km/h$ و $v_{0_2}=80km/h$ را در رابطه قرار می‌دهیم.

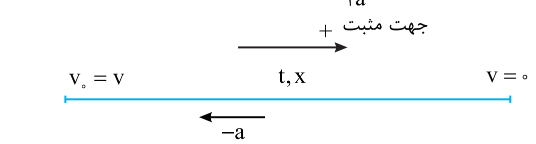
$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=\frac{v_{0_2}^2}{v_{0_1}^2}=\frac{80^2}{40^2}\Rightarrow\frac{\Delta x_2}{50}=4\Rightarrow \Delta x_2=200m$$

A ۳۲۲ | ۳

نکته وقتی متحرک، ترمز می‌کند و می‌ایستد، زمان توقف و جابه‌جایی تا توقف برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-at+v\Rightarrow t=\frac{v}{a}$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v^2=2(-a)x\Rightarrow x=\frac{v^2}{2a}$$



سرعت اولیه از v به 2v و شتاب از a به 2a تغییر کرده است. از طرفی متحرک روی خط راست با شتاب ثابت ترمز کرده و می‌ایستد، بنابراین مسافت طی شده همان جابه‌جایی خودرو است. در روابط بالا داده‌ها را قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم.

۱ زمان توقف: $t'=\frac{2v}{(2a)}\Rightarrow t'=\frac{v}{a}\Rightarrow t'=t$

۲ جابه‌جایی توقف: $\Delta x'=\frac{(2v)^2}{2(2a)}\Rightarrow \Delta x'=\frac{4v^2}{4a}\Rightarrow \Delta x'=\frac{v^2}{a}\Rightarrow \Delta x'=2x$

A ۳۲۳ ۲

برای درک بهتر مسئله یک شکل ساده رسم می‌کنیم.

$v \quad x \quad ۵v \quad x \quad v'=?$

با توجه به شکل و معادلهٔ مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت عدد جابه‌جایی حالت اول و جابه‌جایی حالت دوم می‌توان نوشت: $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$

$$\left.\begin{array}{l}(۵v)^۲-v^۲=۲ax\\(v')^۲-(۵v)^۲=۲ax\end{array}\right\}\Rightarrow ۲۴v^۲=v'^۲-۲۵v^۲\Rightarrow v'^۲=۴۹v^۲\Rightarrow v'=۷v$$

A ۳۲۴ ۳

۱ به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴۰۰=۲a\times ۴۰\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

۲ اکنون سرعت را در جابه‌جایی $\Delta x=۳۰m$ به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲-۴۰۰=۲\times(-۵)\times ۳۰\Rightarrow v^۲=۱۰۰\Rightarrow v=۱۰m/s$$

A ۳۲۵ ۱

جهت حرکت را مثبت می‌گیریم، در این‌صورت شتاب $-۴m/s^۲$ است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسئله را حل می‌کنیم: $v_۱=۳۶km/h\times\frac{۱۰}{۳۶}=۱۰m/s$

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰^۲-۱۰^۲=۲\times(-۴)\times\Delta x\Rightarrow \Delta x=۱۲/۵m$$

گوزن در فاصلهٔ ۱۵ متری اتومبیل بوده و اتومبیل پس از $۱۲/۵m$ می‌ایستد، بنابراین فاصلهٔ گوزن تا اتومبیل در هنگام توقف $۱۵-۱۲/۵=۲/۵m$ می‌باشد.

B ۳۲۶ ۱

نکته زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی از لحظه‌ای که راننده مانع را می‌بینند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند.

خط فکری در مدت زمان واکنش، حرکت متحرک تقریباً حرکت با سرعت ثابت روی خط راست است. بنابراین شما باید در مدت $۰/۴s$، جابه‌جایی خودرو را به کمک رابطهٔ سرعت ثابت به‌دست آورده سپس جابه‌جایی آن را پس از ترمز تا توقف کامل به کمک روابط شتاب ثابت حساب کنید.

۱ سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v=۹۰km/h=\frac{۹۰}{۳/۶}=۲۵m/s$$

۲ جابه‌جایی در مدت زمان واکنش برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x_۱=۲۵\times ۰/۴\Rightarrow \Delta x_۱=۱۰m$$

۳ از لحظهٔ ترمز تا توقف کامل، جابه‌جایی اتومبیل برابر خواهد شد با:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۲۵^۲=۲(-۵)\Delta x_۲\Rightarrow \Delta x_۲=۶۲/۵m$$

۴ بنابراین اتومبیل از لحظهٔ مشاهدهٔ مانع تا توقف، جابه‌جایی $\Delta x_۱+\Delta x_۲$ را می‌پیماید: $۶۲/۵+۱۰=۷۲/۵m$

در نتیجه اتومبیل در فاصلهٔ $۸۰-۷۲/۵=۷/۵m$ از مانع می‌ایستد.

B ۳۲۷ ۲

ابتدا سرعت خودرو را بر حسب متر بر ثانیه به‌دست می‌آوریم:

$$v=۱۰۸\frac{km}{h}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\times\frac{۱۰۰۰m}{۱km}=\frac{۱۰۸}{۳/۶}=۳۰m/s$$

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت t خودرو با سرعت ثابت $۳۰m/s$ برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x_۱=۳۰t$$

۲ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی که حرکت کندشونده است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) حساب می‌کنیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x_۲\Rightarrow ۰-۳۰^۲=۲\times(-۳)\times\Delta x_۲\Rightarrow \Delta x_۲=۱۵۰m$$

۳ برای آنکه خودرو به مانع برخورد نکند، باید در مدت زمان واکنش جابه‌جایی آن کمتر $۲۰۰-۱۵۰=۵۰m$ باشد، بنابراین

$$\Delta x_۱\le ۵۰\Rightarrow ۳۰t\le ۵۰\Rightarrow t\le\frac{۵}{۳}$$

B ۳۲۸ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت-مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\xrightarrow[v_۰=۸m/s,\,v=۶m/s]{x=۱۸/۵m,\,x_۰=۱۵m}۳۶-۶۴=۲a(۱۸/۵-۱۵)$$

$$\Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۲ بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن خواهد شد:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۴)t^۲+۸t+۱۵\Rightarrow x=-۲t^۲+۸t+۱۵$$

A ۳۲۹ ۲

۱ ابتدا شتاب را به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۱۷^۲-۹^۲=۲a(۳۱-۵)\Rightarrow(۱۷+۹)(۱۷-۹)=۲\times a\times ۲۶$$

$$\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۲ سرعت اولیه را به کمک معادلهٔ سرعت- زمان حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۹=۴\times ۱+v_۰\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

۳ اکنون مکان اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۵=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱+۵\times ۱+x_۰\Rightarrow x_۰=-۲m$$

۴ معادله حرکت برابر است با:

$$x=\frac{۱}{۲}\times ۴t^۲+۵t-۲\Rightarrow x=۲t^۲+۵t-۲$$

B ۳۳۰ ۲

خط فکری در این پرسش خاص معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را با معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم و ضریب x را برابر $۲a$ قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

معادله $v=۵\sqrt{x}$ را به توان ۲ رسانده تا شبیه معادلهٔ مستقل از زمان شود.

$$v^۲=۲۵x$$

با توجه به معادلهٔ $v^۲-v_۰^۲=۲ax$، ضریب x در دو معادله را برابر قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$۲a=۲۵\Rightarrow a=۱۲/۵m/s^۲$$

A ۳۳۱ ۱

خط فکری معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را به توان ۲ برسانید و آن را به‌صورت معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$ مرتب کنید و با مقایسه، مقدار $v_۰$ و a را به‌دست بیاورید، حرکت کندشونده است و باید علامت a و $v_۰$ یکسان نباشد. پس به سراغ حل مسئله برویم.

۱

$$v=\pm\sqrt{۷x+۴۹}\Rightarrow v^۲-۴۹=+۷x\xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$$

$$v_۰^۲=۴۹\Rightarrow v_۰=\pm ۷m/s\ ,\ ۲a=۷\Rightarrow a=\mp ۳/۵m/s^۲$$

۲ حرکت کندشونده است از این‌رو اگر شتاب را مثبت $a=+۳/۵m/s^۲$ فرض کنیم، سرعت اولیهٔ آن منفی $(v_۰=-۷m/s)$ است. اکنون به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}(۳/۵)۱۶+(-۷)\times ۴\Rightarrow \Delta x=۲۸-۲۸=۰$$

C ۳۳۲ ۱

خط فکری مهم‌ترین قسمت حل مسئله این است که در لحظهٔ $t=۰$ مکان اولیه $x_۰=\frac{-۲۷}{۸}m$ است. بنابراین با قرار دادن مکان اولیه در معادله داده شده، سرعت اولیه متحرک را به‌دست می‌آوریم سپس با مرتب کردن معادله و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ مستقل از زمان شتاب را حساب کرده سپس به کمک معادلهٔ مکان - زمان لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از $x=۰$ را حساب می‌کنیم.

۱ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v^۲}{۳۶}-\frac{۲x}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲}{۳۶}-\frac{۲(\frac{-۲۷}{۸})}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲}{۳۶}+\frac{۳}{۴}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲+۲۷}{۳۶}=۱$$
$$\Rightarrow v_۰^۲+۲۷=۳۶\Rightarrow v_۰^۲=۹\Rightarrow v_۰=۳m/s$$

۲ متحرک در حال حرکت با شتاب ثابت است بنابراین معادلهٔ سرعت - مکان $v^۲-v_۰^۲=۲ax$ می‌باشد. حال معادلهٔ داده شده را مرتب می‌کنیم

$$\frac{v^۲}{۳۶}-\frac{۲x}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v^۲}{۳۶}-\frac{۸x}{۳۶}=۱\xrightarrow{\times۳۶}v^۲-۸x=۳۶\Rightarrow v^۲=۸x+۳۶$$

۳ شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}v^۲=۲a(x-x_۰)+v_۰^۲\\ v^۲=۸x+۳۶\end{cases}\Rightarrow ۲a=۸\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۴ معادلهٔ مکان - زمان متحرک به صورت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ می‌باشد، بنابراین:

$$x=\frac{۱}{۲}\times۴\times t^۲+۳t-\frac{۲۷}{۸}\Rightarrow x=۲t^۲+۳t-\frac{۲۷}{۸}$$

۵ هنگامی که متحرک از $x=۰$ عبور می‌کند بردار مکان متحرک تغییر جهت خواهد داد:

$$۲t^۲+۳t-\frac{۲۷}{۸}=۰\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}s,\ t=-\frac{۹}{۴}s$$ غ‌ق‌ق

بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{۳}{۴}s=۰/۷۵s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

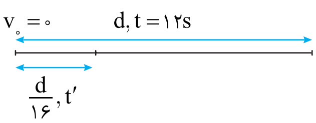
B ۳۳۳ ۴

۱ برای آن‌که معادله $v=\frac{-\sqrt{-۲x}}{۴}$ پاسخ داشته باشد زیر رادیکال مثبت باشد. از این رو مقدارهای x باید منفی بوده یعنی متحرک در مکان‌های منفی است.

۲ در $x=۰$ ، $v_۰=۰$ است یعنی متحرک از مبدأ مکان از حال سکون در جهت منفی محور حرکت کرده است و با افزایش مقدار x، تندی نیز در حال افزایش و حرکت تندشونده است.

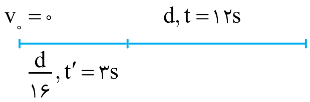
A ۳۳۴ ۳

خط فکری در حل این نوع مسائل یک شکل ساده از مسئله بکشید و طول تمام مسیر مستقیم را d بنامید و معادلهٔ مکان - زمان را برای آن بنویسید همچنین معادله مکان - زمان را برای قسمت اول مسیر (دقت کنید حتماً قسمت اول که در آن سرعت اولیه صفر است) بنویسید و دو معادله را بر هم تقسیم کنید.



با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت و سرعت اولیه صفر، برای کل مسیر (d) و $\frac{d}{۱۶}$ اول مسیر معادله‌ها را می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow\begin{cases}d=\frac{۱}{۲}at^۲\\ \frac{d}{۱۶}=\frac{۱}{۲}at'^۲\end{cases}\Rightarrow۱۶=\frac{t^۲}{t'^۲}\Rightarrow t'=\frac{t}{۴}=\frac{۱۲}{۴}\Rightarrow t'=۳s$$



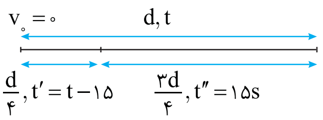
میانبر وقتی متحرک از حال سکون با شتاب ثابت روی خط راست شروع به حرکت کرده و در مدت t جابه‌جایی d را انجام می‌دهد، $\frac{d}{n}$ اول مسیر را در مدت $t'=\frac{t}{\sqrt{n}}$ می‌پیماید.

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست از حال سکون با شتاب ثابت جابه‌جایی d را در مدت t طی می‌کند. این متحرک $\frac{۳d}{۴}$ آخر مسیر را در مدت ۱۵s طی می‌کند. t چند ثانیه است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ **همان‌گونه که بیان شد، باید $d-\frac{۳d}{۴}=\frac{d}{۴}$ اول مسیر را با کل مسیر مقایسه کنیم. اگر زمان کل حرکت t باشد، زمان حرکت $\frac{d}{۴}$ اول مسیر $t'=t-۱۵$ ثانیه است. معادله‌ها را نوشته و مسئله را حل می‌کنیم:**

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{۴}=\frac{۱}{۲}a(t-۱۵)^۲\\ d=\frac{۱}{۲}at^۲\end{cases}\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را بر هم}}\frac{۱}{۴}=\frac{(t-۱۵)^۲}{t^۲}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{t-۱۵}{t}\Rightarrow t=۳۰s$$



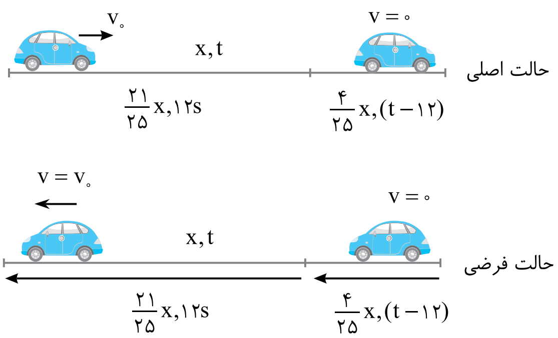
گزینه ۳

B ۳۳۵ ۱

نکته در حرکت کندشونده با شتاب ثابت روی خط راست که متحرک متوقف می‌شود، می‌توان حرکت را از مکان توقف یک حرکت تندشونده با همان شتاب فرض کرد.

خط فکری با توجه به نکتهٔ بیان شده، شما زمان کل توقف را t و مسافت طی شده را x فرض کنید. در این صورت، متحرک مسافت طی شدهٔ اول حالت فرضی $(\frac{۴}{۲۵}x)$ را در $t-۱۲s$ طی می‌کند. بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را برای x و $\frac{۴}{۲۵}x$ نوشته و بر هم تقسیم کنید.

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}at^۲\\ \frac{۴x}{۲۵}=\frac{۱}{۲}a(t-۱۲)^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{۲۵}{۴}=\frac{t^۲}{(t-۱۲)^۲}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{t}{t-۱۲}\Rightarrow۵t-۶۰=۲t\Rightarrow t=۲۰s$$



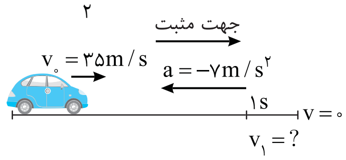
A ۳۳۶ ۴

روش اول: سرعت خودرو با شتاب $7m/s^2$ از $35m/s$ به صفر رسیده است از این‌رو سرعت آن یک ثانیه قبل از توقف کامل خواهد شد:

$$v=at+v_1 \Rightarrow 0=-7\times1+v_1 \Rightarrow v_1=7m/s$$

جابه‌جایی در یک ثانیهٔ آخر را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_1}{2}t \Rightarrow \Delta x=\frac{0+7}{2}\times1=3/5m$$



روش راحت‌تر: کافی است فرض کنیم متحرک از حال سکون با شتاب $7m/s^2$ به راه می‌افتد و جابه‌جایی آن را در $t=1s$ از شروع حرکتش به‌دست آوریم.

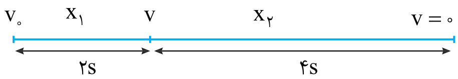
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times7\times1=3/5m$$

B ۳۳۷ ۲

خط فکری ابتدا شتاب حرکت را برحسب سرعت اولیه v_0 به‌دست بیاورید، زمان طی مسیر 6s است که به دو بازهٔ 2s اول و 4s بعدی تقسیم شده سرعت را در $t=2s$ حساب کنید و به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) جابه‌جایی در هر قسمت را به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

۱ شتاب حرکت برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-v_0}{6}\Rightarrow a=\frac{-v_0}{6}$$



۲ سرعت را در لحظهٔ $t=2s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=\frac{-v_0}{6}\times2+v_0\Rightarrow v=\frac{2}{3}v_0$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی‌های x_1 و x_2 را به‌دست می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{\frac{2}{3}v_0+v_0}{2}\times2\Rightarrow x_1=\dfrac{5}{3}v_0\\[2ex] x_2=\dfrac{0+\frac{2}{3}v_0}{2}\times4\Rightarrow x_2=\dfrac{4}{3}v_0\end{cases}\Rightarrow\frac{x_2}{x_1}=\frac{4}{5}$$

A ۳۳۸ ۲

مسئلهٔ ساده‌ای است. در صورت مسئله حرفی از زمان (t) زده نشده بنابراین فرمول مستقل از زمان اولین انتخاب برای حل مسئله است.

رابطهٔ مستقل از زمان را برای کل مسیر (x) و برای ۱۵۰ متر اول که تندی نصف می‌شود را می‌نویسیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\begin{cases}\xrightarrow{v=0}0-v_0^2=2a(x)\\[2ex] \xrightarrow{v=\frac{v_0}{2}}(\frac{v_0}{2})^2-v_0^2=2a(150)\Rightarrow-\dfrac{3v_0^2}{4}=2a(150)\end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

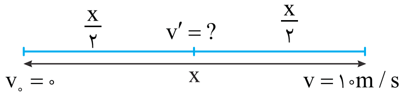
$$\frac{v_0^2}{\frac{3}{4}v_0^2}=\frac{x}{150}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{x}{150}\Rightarrow x=200m$$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت از حال سکون به راه می‌افتد و در جابه‌جایی x سرعتش به $10m/s$ می‌رسد، سرعت این متحرک در گذر از وسط مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $5\sqrt{3}$

پاسخ معادلهٔ مستقل از زمان را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}v'^2-v_0^2=2a(\frac{x}{2})\\ v^2-v_0^2=2ax\end{cases}\xrightarrow[v=10]{v_0=0}\frac{v'^2}{100}=\frac{1}{2}\Rightarrow v'=\frac{\sqrt{2}}{2}\times10\Rightarrow v'=5\sqrt{2}m/s$$



میانبر اگر متحرک از حال سکون با شتاب ثابت a شروع به حرکت کرده و پس از جابه‌جایی x سرعتش v شود سرعت آن پس از جابه‌جایی $\frac{x}{n}$ خواهد شد $v'=\frac{v}{\sqrt{n}}$.

گزینهٔ ۲

A ۳۳۹ ۳

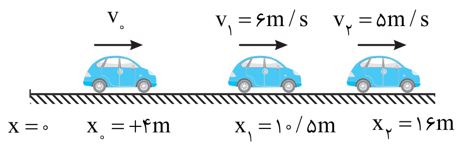
به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را در مدتی که متحرک از مکان $x_1=10/5m$ به مکان $x_2=+16m$ می‌رود به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow25-36=2a(16-10/5)\Rightarrow a=-1m/s^2$$

اکنون بزرگی سرعت اولیه را در مدتی که متحرک از مکان اولیه $x_0=+4m$ به مکان $x_2=+16m$ می‌رود را حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\Rightarrow25-v_0^2=2(-1)(16-4)\Rightarrow v_0^2=25+24$$
$$\Rightarrow v_0=+7m/s$$

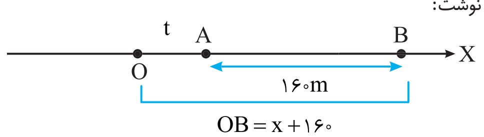
مسیر حرکت در واقع به شکل زیر است:



B ۳۴۰ ۲

خط فکری سرعت متحرک در نقطهٔ O صفر است، بنابراین می‌توانید فرض کنید که متحرک از نقطهٔ O با شتاب $2m/s^2$ از حال سکون روی محور xها شروع به حرکت کرده و ابتدا فاصلهٔ OA را در مدت t ثانیه و فاصلهٔ OB را در مدت $(t+8)$ ثانیه طی کرده است. فاصلهٔ OA را با حرف x نشان دهید. در این صورت فاصلهٔ OB برابر $(x+160)$ متر است.

۱ با توجه به شکل زیر، به کمک معادلهٔ مکان - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:



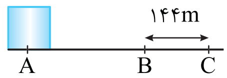
$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2=t^2\\ x+160=\frac{1}{2}a(t+8)^2=(t+8)^2\end{cases}\xrightarrow[\text{هم کم کنیم}]{\text{دو معادله را از}}$$

$$160=(t+8)^2-t^2\Rightarrow160=16t+64\Rightarrow t=6s$$

۲ با داشتن $t=6s$ مقدار OA را حساب می‌کنیم:

$$x=t^2\xrightarrow{t=6s}OA=36m$$

بازی با سؤال متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت از نقطهٔ A حرکت می‌کند و فاصلهٔ B تا C را در مدت ۴ ثانیه طی می‌کند. اگر سرعت متحرک هنگام عبور از B برابر $16m/s$، فاصلهٔ A و B چند متر است؟



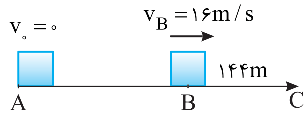
۱) ۱۲/۸ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵/۶

پاسخ به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان در بازهٔ زمانی حرکت متحرک از B تا C شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 144=\frac{1}{2}a\times(4)^2+16\times 4\Rightarrow 80=8a\Rightarrow a=10m/s^2$$

اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان فاصلهٔ AB را حساب می‌کنیم:

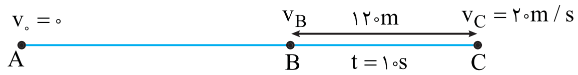
$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16^2-0=2\times 10(AB)\Rightarrow AB=12/8m$$



گزینه ۱

B ۳۴۱ ۲

حرکت دارای شتاب ثابت است.



۱ سرعت در نقطهٔ B را به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v_C+v_B}{2}\Delta t\Rightarrow 120=\frac{20+v_B}{2}\times 10\Rightarrow v_B=4m/s$$

۲ شتاب را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v_C-v_B}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{20-4}{10}\Rightarrow a=1/6m/s^2$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، فاصلهٔ A تا B را به دست می‌آوریم:

$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16-0=2\times 1/6\times\Delta x\Rightarrow \Delta x=5m$$

C ۳۴۲ ۳

نکته در یک حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

خط فکری در بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s سرعت متوسط را به‌دست بیاورید. با این کار سرعت در لحظهٔ $t=3s$ حساب کرده‌اید همین کار را برای بازهٔ ۴s تا ۶s انجام دهید تا سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست بیاورید از آن‌جا شتاب حرکت و ... را به‌دست آورید.

t(s)	۲	۴	۶
x(m)	۲۰	۳۶	۴۴

۱ سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{36-20}{4-2}\Rightarrow v_{av}=8m/s\Rightarrow v_{t=3s}=8m/s$$

۲ سرعت متوسط در بازهٔ ۴s تا ۶s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{44-36}{6-4}=4m/s\Rightarrow v_{t=5s}=4m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{4-8}{5-3}\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\xrightarrow[a=-2m/s^2]{t=3s,\ v=8m/s}8=-2\times 3+v_0\Rightarrow v_0=14m/s$$

۵ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=-2t+14$

۶ در حرکت با شتاب ثابت نوع حرکت در لحظه‌ای تغییر می‌کند که سرعت صفر شود بنابراین $v=0\Rightarrow -2t+14=0\Rightarrow t=7s$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند. اگر در زمان‌های $t=2s$، $t=6s$ و $t=8s$ به‌ترتیب از $x=10m$، $x=50m$ و $x=90m$ عبور کند، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۴ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s با سرعت در لحظهٔ $t=4s$ برابر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{50-10}{6-2}\Rightarrow v_{av}=10m/s\Rightarrow v_{t=4s}=10m/s$$

سرعت در لحظهٔ $t=7s$ با سرعت متوسط در بازهٔ ۶s تا ۸s برابر است از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{90-50}{8-6}\Rightarrow v_{av}=20m/s\Rightarrow v_{t=7s}=20m/s$$

شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a=\frac{20-10}{7-4}=\frac{10}{3}m/s^2$$

گزینه ۳

B ۳۴۳ ۲

خط فکری با مسئله راحتی سروکار داریم. در صورت مسئله صحبتی از زمان نیست بنابراین باید به سراغ معادلهٔ مستقل از زمان برویم و به کمک آن شتاب را در بازهٔ مکانی $-25m$ تا $-10m$ حساب کنیم سپس با همان معادله v_1 را به‌دست می‌آوریم.

x(m)	$x_1=-22$	$x_2=-25$	$x_3=-10$
v(m/s)	v_1	$v_2=2$	$v_3=8$

۱ شتاب حرکت خواهد شد:

$$v_3^2-v_2^2=2a(x_3-x_2)\Rightarrow 8^2-2^2=2a[-10-(-25)]$$
$$\Rightarrow 60=2a(15)\Rightarrow a=2m/s^2$$

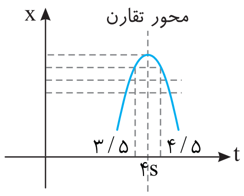
۲ سرعت v_1 را حساب می‌کنیم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow 2^2-v_1^2=2\times 2[-25-(-22)]$$
$$4-v_1^2=-12\Rightarrow v_1^2=+16\Rightarrow v_1=\pm 4m/s$$

دقت کنید مکان متحرک ابتدا $x_1=-22m$، سپس $x_2=-25m$ است یعنی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت بوده است از این‌رو $v_1=-4m/s$ خواهد بود.

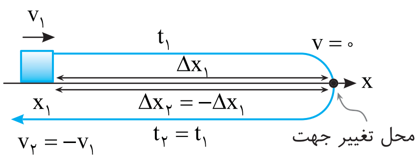
B ۳۴۴ ۳

متحرک دارای شتاب ثابت است و نمودار مکان-زمان آن سهمی است. از طرفی در لحظهٔ $t=4s$ متحرک در بیشترین فاصلهٔ مثبت از مبدأ مکان است. یعنی متحرک در این لحظه تغییر جهت داده است. به عبارت بهتر متحرک ابتدا در جهت محور x ها در حرکت بوده و در لحظهٔ $t=4s$ سرعتش در مکان مثبت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است. لحظهٔ $t=4s$ رأس سهمی مکان-زمان است و نمودار مکان - زمان آن می‌تواند به شکل زیر باشد. در یک سهمی نقاط واقع بر سهمی نسبت به محور قائم گذرنده از رأس تقارن دارد و در نقاطی که فاصلهٔ زمانی یکسانی از محور دارند مکان متحرک یکسان است و در بازهٔ زمانی بین این لحظه‌ها جابه‌جایی صفر است و تنها در گزینهٔ (۳) فاصلهٔ زمانی ۳/۵s و ۴/۵s از ۴s برابر است و جابه‌جایی صفر است.

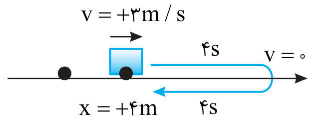


۱ | ۳۴۵ B

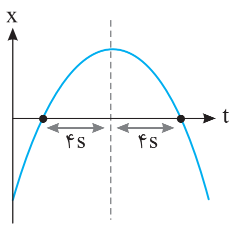
خط فکری: در حل این نوع مسائل مطلب بسیار مهم تقارن حرکت متحرک در دو طرف مکان و لحظه‌ای است که متحرک با شتاب ثابت متوقف شده و برمی‌گردد یعنی در هر بازهٔ زمانی و مکانی از یک نقطه به سوی محل تغییر جهت برود در همان بازهٔ زمانی از محل تغییر جهت به محل اولیه بازمی‌گردد و در آن محل سرعتش نیز قرینه می‌شود.



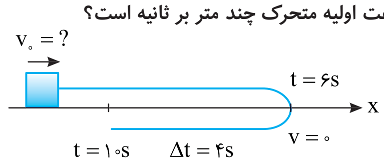
روش اول: نیازی به نوشتن هیچ رابطه و فرمولی نداریم، در مدت ۴s متحرک به بیشینه مکان می‌رسد. مدت زمان ۸s را در ذهن خود به دو بازهٔ زمانی ۴s تقسیم کنید در ۴s اول متحرک از مکان $+4m$ با سرعت $+3m/s$ به بیشینه مکان مثبت رفته، متوقف شده و ۴s بعد این مسیر را برگشته و به مکان $x=+4m$ برمی‌گردد.



روش دوم: معادلهٔ مکان-زمان حرکت با شتاب ثابت یک تابع درجه ۲ $(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0)$ بوده و نمودار آن سهمی است و خطی که از رأس سهمی می‌گذرد محور تقارن سهمی است و مفهوم آن این است که در فاصلهٔ زمانی یکسان از این محور مکان مقدار یکسانی است.



بازی با سؤال: متحرکی روی محور xها با شتاب ثابت در حرکت است و در لحظهٔ $t_1=6s$ در جهت مثبت در بیشترین فاصلهٔ خود از مبدأ مکان است. اگر در لحظهٔ $t_2=10s$ از مبدأ مکان با سرعت $8m/s$ خلاف جهت محور x عبور کند، سرعت اولیهٔ متحرک چند متر بر ثانیه است؟



پاسخ: ۱ متحرک در لحظهٔ $t=6s$ در محل تغییر جهت حرکت خود است و در لحظهٔ $t=10s$ از مبدأ مکان $x=0$ با سرعت $8m/s$ در خلاف جهت محور $(v=-8m/s)$ می‌گذرد. شتاب حرکت را با توجه به این مطالب حساب می‌کنیم. در بازهٔ ۴s سرعت متحرک از صفر به $-8m/s$ رسیده از این‌رو،

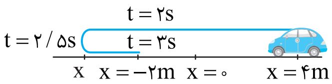
$v=at+v_0 \Rightarrow -8=a(+4)+0 \Rightarrow a=-2m/s^2$

۲ سرعت متحرک در مدت ۰ تا ۶s از سرعت اولیه (v_0) با شتاب $(-2m/s^2)$ به صفر رسیده است بنابراین خواهیم داشت:

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-2\times6+v_0 \Rightarrow v_0=12m/s$

۴ | ۳۴۶ B

۱ متحرک دارای حرکت با شتاب ثابت است و در لحظه‌های $t=2s$ و $t=3s$ از مکان $-2m$ می‌گذرد، بنابراین در این بازه متحرک تغییر جهت داده است. اما در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد. در واقع متحرک از $t=2s$، نیم ثانیه رفته در لحظهٔ ۲/۵s متوقف شده و نیم ثانیه برمی‌گردد و در لحظهٔ $t=3s$ از مکان $-2m$ مجدداً می‌گذرد. (البته لحظهٔ تغییر جهت، لحظهٔ رأس سهمی است و در دو طرف محور قائم گذرنده از رأس سهمی تقارن دارد با این استدلال نیز مشخص است که $t_{\text{رأس}}=\frac{2+3}{2}=2/5s$.



۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان می‌توان نوشت:

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a(2/5)+v_0 \Rightarrow v_0=-2/5a \quad (I)$

۳ مکان اولیهٔ متحرک $x=+4m$ است. با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{t=2s,\ x=-2m} -2=\frac{1}{2}a(4)+2v_0+4$

$\Rightarrow -2=2a+2v_0+4 \Rightarrow 2a+2v_0=-6 \Rightarrow a+v_0=-3 \quad (II)$

۴ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری کرده شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$a-2/5a=-3 \Rightarrow -1/5a=-3 \Rightarrow a=2m/s^2$

۳ | ۳۴۷ B

خط فکری: در مسئلهٔ گفته شده در بازهٔ ۰ تا ۱۰s، ۶s حرکت تندشونده است یعنی باید از ۰ تا ۴s حرکت کندشونده باشد و در لحظهٔ $t=4s$ متحرک متوقف شده و تغییر جهت داده و ۶s حرکت آن تندشونده است.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته در $t=4s$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=4a+v_0 \Rightarrow v_0=-4a \quad (I)$

۲ در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیهٔ $x_0=-10m$ بوده و در لحظهٔ $t=10s$ مکان آن $x=-30m$ است. معادلهٔ مکان زمان را نوشته یک رابطهٔ دیگر بین v_0 و a به‌دست می‌آوریم:

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow -30=\frac{1}{2}a(10)^2+v_0(10)+(-10)$

$-30=50a+10v_0-10 \Rightarrow -20=50a+10v_0$

۳ از رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم:

$-20=50a+10(-4a) \Rightarrow -20=10a \Rightarrow a=-2m/s^2$

$v_0=-4(-2) \Rightarrow v_0=8m/s$

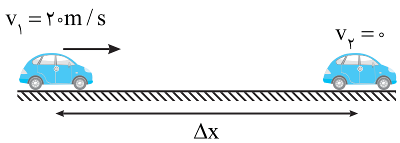
۴ معادلهٔ سرعت را نوشته، $t=16s$ را در آن قرار می‌دهیم.

$v=-2t+8 \Rightarrow v=-2\times16+8 \Rightarrow v=-24m/s \Rightarrow |v|=24m/s$

۳ | ۳۴۸ A

سرعت اولیه برابر $v_1=72km/h=\frac{72}{3/6}=20m/s$ است. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب مسئله به‌راحتی قابل حل است.

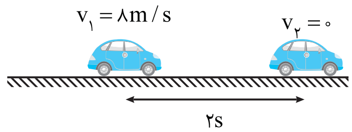
$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x=\frac{20+0}{2}\times5 \Rightarrow \Delta x=50m$



۲ | ۳۴۹ A

متحرک ترمز کرده و در انتهای مسیر متوقف خواهد شد بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۲s سرعت متحرک از $8m/s$ با شتاب ثابت به صفر می‌رسد از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب مسئله قابل حل است.

$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x=\frac{8+0}{2}\times2 \Rightarrow \Delta x=8m$



B ۳۵۰ | ۳

راه‌حل اول: ۱ مطابق شکل در مدت $2s$ آخر حرکت سرعت از v_1 به صفر می‌رسد. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب سرعت v_1 را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_1}{2}\Delta t\Rightarrow 6=\frac{0+v_1}{2}\times 2\Rightarrow v_1=6m/s$$

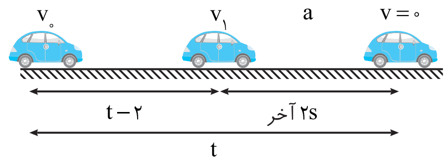
۲ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_1}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{2}=-3m/s^2$

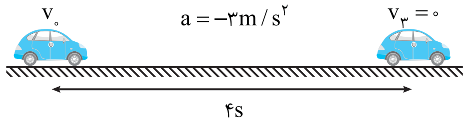
۳ سرعت لحظهٔ ترمز را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-3\times 4+v_0\Rightarrow v_0=12m/s$$

۴ مسافت طی‌شده از لحظهٔ ترمز تا توقف برابر است با:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow \Delta x=\frac{0+12}{2}\times 4\Rightarrow \Delta x=24m$$





راه‌حل دوم: می‌توان فرض کرد که متحرک از حال سکون با همان شتاب به راه افتاده است و شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow 6=\frac{1}{2}a(2)^2\Rightarrow a=3m/s^2$$

جابه‌جایی در مدت $4s$ با شتاب $3m/s^2$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at_{\text{کل}}^2=\frac{1}{2}\times 3\times 4^2\Rightarrow \Delta x=24m$$

B ۳۵۱ | ۲

خط فکری $100m$ آخر مسیر را که متحرک در $2s$ طی می‌کند یک مسیر مستقل فرض کنید که در ابتدای آن سرعت اولیهٔ متحرک v_1 است. سپس سرعت را در انتهای ۱۰۰ متر یعنی سرعت نهایی (v_f) را به‌دست بیاورید و سرعت متوسط از $v_0=0$ تا v_f را حساب کنید.

۱ $100m$ آخر با سرعت اولیه v_1 و در مدت $2s$ با شتاب $2m/s^2$ طی می‌شود. بنابراین:

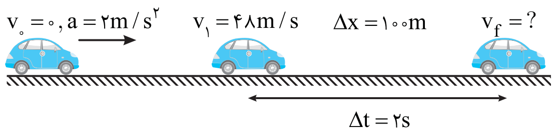
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_1t\Rightarrow 100=\frac{1}{2}\times 2\times 2^2+2v_1\Rightarrow 100=(2)^2+2v_1\Rightarrow v_1=48m/s$$

۲ سرعت نهایی را از رابطهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_f}{2}\Delta t\Rightarrow 100=\frac{48+v_f}{2}\times 2\Rightarrow v_f=52m/s$$

۳ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده پس $v_i=0$ و سرعت نهایی $v_f=52m/s$ می‌باشد:

$$v_{av}=\frac{v_i+v_f}{2}=\frac{0+52}{2}=26m/s$$



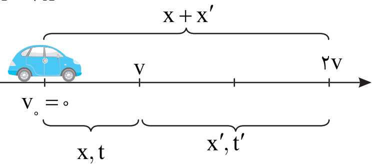
A ۳۵۲ | ۲

۱ حرکت دارای شتاب ثابت است بنابراین در بازهٔ زمانی یکسان، تغییر سرعت یکسان است یعنی در مدت t سرعت از صفر به v رسیده است. بنابراین مدتی که سرعت از v به 2v می‌رسد نیز برابر $t'=t$ است.

۲ رابطهٔ مستقل از زمان را برای ۰ تا v و برای ۰ تا 2v را نوشته بر هم تقسیم کرده نسبت $\frac{x'}{x}$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} v^2-0=2ax & (1)\\ (2v)^2-0=2a(x+x') & (2)\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{x}{x+x'}\Rightarrow x'=3x$$



B ۳۵۳ | ۱

روش اول: با توجه به معادلهٔ مکان - زمان $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ و داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

$$x_1=\frac{1}{2}at_1^2+v_0t_1+x_0\xrightarrow{t_1=1s,\ x_1=3m}3=\frac{1}{2}a+v_0+x_0\quad (I)$$

$$x_2=\frac{1}{2}at_2^2+v_0t_2+x_0\xrightarrow{t_2=3s,\ x_2=11m}11=\frac{9}{2}a+3v_0+x_0\quad (II)$$

$$x_3=\frac{1}{2}at_3^2+v_0t_3+x_0\xrightarrow{t_3=5s,\ x_3=35m}\Rightarrow 35=\frac{25}{2}a+5v_0+x_0\quad (III)$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادله }(I),(II)}8=4a+2v_0$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادله }(II),(III)}24=8a+2v_0$$

حال با توجه به دو معادله $\begin{cases}8=4a+2v_0\\ 24=8a+2v_0\end{cases}$ مقدار a و v_0 را به‌دست می‌آوریم:

$$-16=-4a\Rightarrow a=4m/s^2\ ,\ v_0=-4m/s$$

معادله سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=4t-4$

لحظهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای است که سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. معادلهٔ سرعت - زمان $v=4t-4$ تابع درجهٔ یک است و در دو طرف ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد. $v=0\Rightarrow 4t-4=0\Rightarrow t=1s$

روش دوم: **نکته** در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

۱ سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی 1s تا 3s که متحرک از مکان $x_1=3m$ تا $x_2=11m$ را طی می‌کند، به‌دست می‌آوریم که برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=2s$ است.

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{11-3}{3-1}\Rightarrow v_{av}=4m/s\Rightarrow v_{t=2s}=4m/s$$

۲ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی 3s تا 5s که متحرک از مکان $x_2=11m$ و $x_3=35m$ را طی می‌کند برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=4s$ است.

$$v_{av}=\frac{35-11}{5-3}\Rightarrow v_{av}=\frac{24}{2}=12m/s\Rightarrow v_{t=4s}=12m/s$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{12-4}{4-2}\Rightarrow a=4m/s^2$

۴ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\xrightarrow{t=2s,\ v=4m/s}4=2\times 4+v_0\Rightarrow v_0=-4m/s$$

۵ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=4t-4\Rightarrow t=1s$$

B ۳۵۴ ۳

۱ سـرعت اتومبیل پس از ترمز در طی x متر، از v به $\frac{v}{۲}$ رسیده، بنابراین طبق معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow(\frac{v}{۲})^۲-v^۲=۲ax\Rightarrow\frac{-۳}{۴}v^۲=۲ax \quad (۱)$$

۲ در کل مسیر ترمز گرفتن سـرعت متحـرک از v به صفر خواهد رسـید بنابراین خواهیم داشت:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰^۲-v^۲=۲ax'\Rightarrow -v^۲=۲ax' \quad (۲)$$

۳ با تقسیم رابطه (۱) و (۲) دو برهم داریم:

$$\frac{(۱)}{(۲)}\Rightarrow\frac{\frac{-۳}{۴}v^۲}{-v^۲}=\frac{x}{x'}\Rightarrow x'=\frac{۴}{۳}x$$

B ۳۵۵ ۳

خط فکری در صورت مسـئله، حرفی از زمان نیسـت بنابراین معادلهٔ مسـتقل از زمان اولین انتخاب است. برای AB و AC و DB معادلهٔ مستقل از زمان را برحسب a و L بنویسید و مسئله را حل کنید.

۱ سـرعت متحرک پس از طی مسـافت ℓ با شتاب ثابت از ۵m/s به ۱۵m/s می‌رسد، بنابراین:

$$v_B^۲-v_A^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۲۲۵-۲۵=۲aL\Rightarrow ۱۰۰=aL \quad (I)$$

۲ حال از A تا C متحرک با همان شتاب و با سرعت $v_A=۵m/s$ پس از مسافت $\frac{\ell}{۴}$ به نقطهٔ C رسیده بنابراین:

$$v_C^۲-v_A^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v_C^۲-۲۵=۲a\frac{\ell}{۴}\Rightarrow v_C^۲-۲۵=\frac{a\ell}{۲} \quad (II)$$

۳ رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم کنیم تا v_C را به‌دست بیاوریم.

$$\frac{۱۰۰}{v_C^۲-۲۵}=\frac{aL}{\frac{aL}{۲}}\Rightarrow v_C^۲=۷۵\Rightarrow v_C=۵\sqrt{۳}m/s$$

۴ متحرک از D تا B مسافت $\frac{\ell}{۴}$ را با همان شتاب طی کرده و در نقطهٔ B سرعتش به ۱۵m/s می‌رسد:

$$v_B^۲-v_D^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۲۲۵-v_D^۲=۲a\frac{\ell}{۴}\xrightarrow{a\ell=۱۰۰}۲۲۵-v_D^۲=۵۰$$

$$\Rightarrow v_D^۲=۱۷۵\Rightarrow v_D=۵\sqrt{۷}m/s$$

B ۳۵۶ ۲

۱ بعد از این همه تسـت یاد گرفته‌ایم که در معادلهٔ حرکت با شـتاب ثابت ضریب $t^۲$ نصف شتاب $(\frac{۱}{۲}a)$ و ضریب t، سرعت اولیه است از این‌رو:

$$x=۲t^۲-۱۶t+۵\Rightarrow a=۴m/s^۲ \;,\; v_۰=-۱۶m/s$$

۲ بنابراین معادلهٔ سرعت - زمان و لحظهٔ تغییر جهت خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۴t-۱۶\xrightarrow{v=۰}۰=۴t-۱۶\Rightarrow t=۴s$$

۳ حال مکان متحرک را در لحظهٔ تغییر جهت به‌دست می‌آوریم:

$$x'=۲(۴)^۲-۱۶(۴)+۵=-۲۷m$$

۴ بنابراین فاصلهٔ متحرک از $x=-۲m$ برابر است با:

$$|x'-x|=|-۲۷-(-۲)|=۲۵m$$

B ۳۵۷ ۲

خط فکری دو ثانیهٔ اول یعنی بازهٔ زمانی بین صفر تا ۲s و ثانیهٔ سـوم یعنی بازهٔ زمانی در t=۲s تا t=۳s، سـرعت در لحظه‌های صفر، ۲s و ۳s را به‌دسـت بیاورید سپس به کمک رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت $(v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲})$، سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول و ثانیهٔ سوم را حساب کنید و تفاضل آن‌ها را برابر ۶m/s قرار دهید و مسئله را حل کنید.

۱ سرعت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۰}v_۱=v_۰\\ \xrightarrow{t=۲s}v_۲=۲a+v_۰\\ \xrightarrow{t=۳s}v_۳=۳a+v_۰\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{v_۰+۲a+v_۰}{۲}\Rightarrow v_{av}=v_۰+a$$

۳ سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم را به‌دست می‌آوریم.

$$v'_{av}=\frac{v_۲+v_۳}{۲}=\frac{۲a+v_۰+۳a+v_۰}{۲}\Rightarrow v'_{av}=\frac{۵}{۲}a+v_۰$$

۴ تفاضل دو سرعت متوسط را با توجه به فرض مسئله برابر ۶m/s قرار می‌دهیم.

$$v_{av}-v'_{av}=۶\Rightarrow v_۰+a-(\frac{۵}{۲}a+v_۰)=۶\Rightarrow-\frac{۳}{۲}a=۶\Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

B ۳۵۸ ۳

۱ حرکت دارای شـتاب ثابت است و معادلهٔ داده شده در واقع رابطه‌ای بین سرعت و مکان، یعنی رابطهٔ مسـتقل از زمان اسـت. دو طرف آن را به توان ۲ رسـانده و با رابطهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کنیم:

$$|v_x|=\sqrt{۴\Delta x+۳۶}\Rightarrow v_x^۲-۳۶=۴\Delta x\xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$$

$$v_۰^۲=۳۶\Rightarrow v_۰=۶m/s \;,\; ۲a=۴\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۲ اکنون با داشتن سرعت اولیه و شتاب، جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۲)^۲+۶\times۲\Rightarrow\Delta x=۱۶m$$

A ۳۵۹ ۳

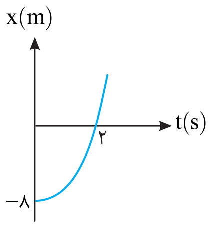
یادآوری معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شـتاب ثابت $(x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰)$ یک تابع درجه ۲ اسـت و نمودار آن سـهمی اسـت. اگر ضریب $t^۲$ مثبت باشد یعنی شتاب مثبت باشد، دهانهٔ نمودار رو به بالا و اگر منفی باشد دهانهٔ نمودار رو به پایین است.

با توجه به معادلهٔ $x=t^۲+۳t+۴$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=+۲m/s^۲ \;,\; v_۰=۳m/s \;,\; x_۰=۴m$$

شـتاب مثبت اسـت $a=۲m/s^۲$، بنابراین دهانهٔ نمودار باید رو به بالا باشـد، سرعت اولیه $+۳m/s$ اسـت یعنی شـیب خط مماس بر نمودار در t=۰ باید مثبت باشـد و مکان اولیه $x=+۴m$ است. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

A ۳۶۰ ۴

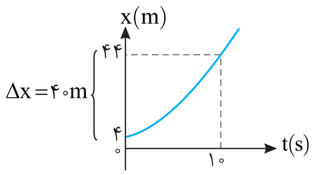


خط فکری به نمـودار نگاه کنید با توجه به فرض مسئله $v_۰=۰$ بوده و در مدت ۲s متحرک جابه‌جایـی +۸m را طـی کـرده اسـت بنابراین به کمک معادلهٔ مسـتقل از شتاب، سرعت در لحظهٔ t=۲s به راحتی به‌دست می‌آید.

داده‌هـای روی نمـودار را در معادلـهٔ مسـتقل از شتاب جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۸=\frac{v+۰}{۲}\times۲\Rightarrow v=۸m/s$$

B ۳۶۱ ۱



۱ نمـودار سـهمی اسـت، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است از طرفی شـیب خط مماس در t=۰ برابر اسـت یعنـی سـرعت اولیـه جسـم برابر $v_۰=۲m/s$ است به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت در لحظه t=۱۰s را به‌دست می‌آوریم.

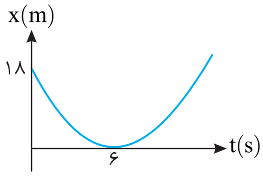
$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۴۰=\frac{v+۲}{۲}\times۱۰\Rightarrow v=۶m/s$$

۲ حرکت دارای شـتاب ثابت اسـت و شتاب متوسـط در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

$$a_{av}=a=\frac{v-v_۰}{t}=\frac{۶-۲}{۱۰}=۰/۴m/s^۲$$

A ۳۶۲ ۲

۱ در لحظهٔ $t=6s$ نمودار بر محور زمان مماس شده است یعنی در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار صفر بوده و سرعت در این لحظه صفر است.



۲ به کمک معادله مستقل از شتاب (فرمول طلایی) سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

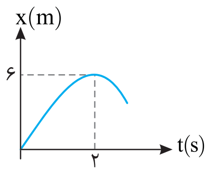
$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow -18=\frac{0+v_0}{2}\times 6\Rightarrow v_0=-6m/s$$

۳ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-(-6)}{6}\Rightarrow a=1m/s^2$$

A ۳۶۳ ۳

یادآوری در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان سرعت لحظه‌ای صفر است.



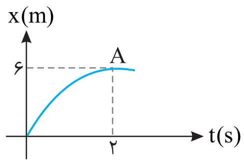
۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ برابر صفر است. به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 6=\frac{0+v_0}{2}\times 2\Rightarrow v_0=6m/s$$

۲ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{2}=-3m/s^2$$

بازی با سؤال **شکل زیر که قسمتی از یک سهمی است، نمودار مکان-زمان یک متحرک را نشان می‌دهد. اگر نقطهٔ A ماکزیمم نمودار باشد، معادلهٔ سرعت- زمان متحرک کدام است؟**



۱) $v=3-6t$
۲) $v=6+3t$
۳) $v=3+6t$
۴) $v=6-3t$

پاسخ **نمودار مکان- زمان بخشی از یک سهمی است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است و به کمک رابطه‌های حرکت با شتاب ثابت پرسش را حل می‌کنیم. در نقطهٔ بیشینهٔ نمودار مکان- زمان، سرعت صفر است.**

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 6=\frac{0+v_0}{2}\times 2\Rightarrow v_0=6m/s$$

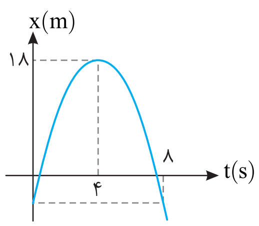
$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{2}=-3m/s^2$$

معادلهٔ سرعت- زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=-3t+6$

گزینهٔ ۴

B ۳۶۴ ۳

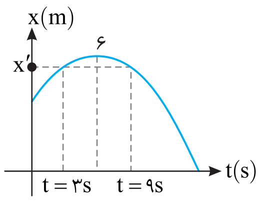
خط فکری شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت است و می‌دانیم نمودار سهمی نسبت به رأس آن متقارن می‌باشد و در فاصله‌های زمانی یکسان نسبت به رأس اندازهٔ شیب‌ها یکسان است بنابراین شما باید به دنبال نقطه‌ای که با $t=0$ متقارن است بگردید.



به نمودار نگاه کنید رأس سهمی در $t=4s$ اتفاق افتاده و بنابراین لحظهٔ متقارن با لحظهٔ $(t=0)$ لحظهٔ $t=8s$ است و در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار قرینهٔ شیب خط مماس در لحظهٔ $t=0$ بوده یعنی بزرگی سرعت در $t=8s$ با بزرگی سرعت در $t=0$ برابر است.

B ۳۶۵ ۱

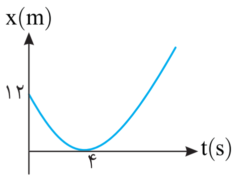
نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس متقارن است. به نمودار نگاه کنید لحظهٔ رأس سهمی $t=6s$ است و لحظه‌های $t=3s$ و $t=9s$ در دو طرف آن متقارن هستند از این‌رو مکان متحرک در $t=3s$ و $t=9s$ که فاصلهٔ یکسانی از رأس سهمی $t=6s$ دارند با هم برابر است بنابراین جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی صفر است.



$$\Delta x=x_{(9)}-x_{(3)}=x'-x'=0$$

A ۳۶۶ ۳

۱ در لحظهٔ $t=4s$ که نمودار مماس بر محور زمان است، سرعت لحظه‌ای متحرک صفر است از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی)، سرعت اولیه به راحتی به‌دست می‌آید.



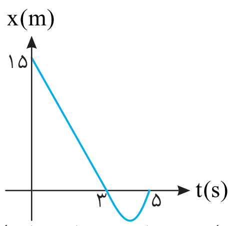
$$x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0\Rightarrow 0=\frac{0+v_0}{2}\times 4+12\Rightarrow -2v_0=12\Rightarrow v_0=-6m/s$$

نکته هرگاه نمودار مکان - زمان سهمی باشد در لحظه‌هایی که در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی هستند، سرعت‌ها قرینه هم است.

۲ لحظهٔ $t=8s$ و لحظهٔ $t=0$ در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی قرار دارند و تندی لحظه‌ای در آن‌ها یکسان است بنابراین بدون استفاده از فرمول دیگری، می‌توان گفت سرعت در لحظهٔ $t=8s$ برابر $+6m/s$ است.

A ۳۶۷ ۳

خط فکری محل تقاطع نمودار مکان - زمان با محور قائم برابر مکان اولیه است. از طرفی مختصات هر نقطه روی نمودار باید در معادلهٔ مکان - زمان صدق کند بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را بنویسید و مختصات نقاط روی نمودار را در آن قرار داده و مسئله را حل کنید.



با توجه به نمودار مکان اولیه $x_0=15m$ و در لحظه‌های $t=3s$ و $t=5s$ متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ گذشته است و مختصات این نقاط باید در معادلهٔ صدق کند از این‌رو:

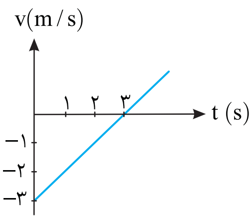
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}t=3s\Rightarrow 0=\frac{9}{2}a+3v_0+15\\ t=5s\Rightarrow 0=\frac{25}{2}a+5v_0+15\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=2m/s^2,\ v_0=-8m/s$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم: $x=\frac{1}{2}\times 2t^2-8t+15\Rightarrow x=t^2-8t+15$

B ۳۶۸ ۳

شیب نمودار سرعت-زمان برابر شتاب است.



$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-(-3)}{3-0}=1m/s^2$$

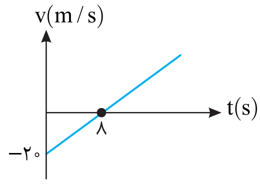
سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=-3m/s$ می‌باشد.

بنابراین معادلهٔ حرکت آن در SI به‌صورت زیر است:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}t^2-3t+x_0$$

که در همهٔ گزینه‌ها مکان اولیه $x_0=0$ است و معادله به‌صورت $x=\frac{1}{2}t^2-3t$ خواهد بود.

B ۳۶۹ ۳



۱ داده‌های روی نمودار را در رابطهٔ شتاب قرار می‌دهیم و شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_\circ}{t}\Rightarrow a=\frac{\circ-(-۲\circ)}{۸}\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$$

۲ با توجه به فرض مسئله در لحظهٔ $t=\circ$ مکان متحرک $x_\circ=\circ$ و با توجه به نمودار $v_\circ=-۲\circ m/s$ است بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ $t=۲\circ s$ را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_\circ t+x_\circ\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times ۲/۵\times ۴\circ\circ+(-۲\circ)\times ۲\circ+\circ\Rightarrow x=۱\circ\circ m$$

B ۳۷۰ ۲

۱ شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_\circ}{t}\Rightarrow a=\frac{-۹-۱۲}{۲۱}\Rightarrow a=-۱m/s^۲$$

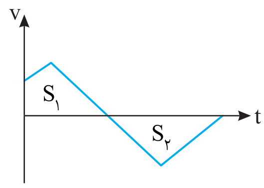
۲ سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ و $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_\circ\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_۱=۶s}v=-۱\times۶+۱۲\Rightarrow v_۱=+۶m/s\\ \xrightarrow{t_۲=۱۲s}v=-۱\times۱۲+۱۲\Rightarrow v_۲=\circ\end{cases}$$

۳ جابه‌جایی را به کمک معادله مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v_۱+v_۲}{۲}t\Rightarrow\Delta x=\frac{۶+\circ}{۲}\times(۱۲-۶)\Rightarrow\Delta x=۱۸m$$

روش دیگر:

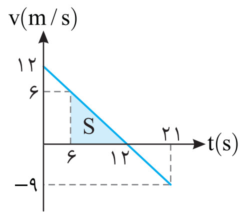


یادآوری سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان به ما جابه‌جایی و مسافت متحرک را می‌دهد.

جابه‌جایی $d=S_۱+S_۲+\cdots$

مسافت $\ell=|S_۱|+|S_۲|+\cdots$

سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ و $t=۱۲s$ را به کمک شیب نمودار حساب می‌کنیم.



$$\frac{-۹-۱۲}{۲۱-\circ}=\frac{v_۱-۱۲}{۶-\circ}$$

$$\Rightarrow -۱=\frac{v_۱-۱۲}{۶}\Rightarrow v_۱=۶m/s$$

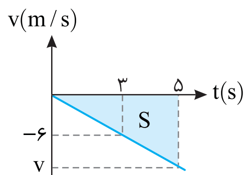
$$\frac{-۹-۱۲}{۲۱-\circ}=\frac{v-۱۲}{۱۲-\circ}$$

$$\Rightarrow -۱=\frac{v-۱۲}{۱۲}\Rightarrow v_۲=\circ$$

سطح زیر نمودار از $t=۶s$ تا $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم. $\Delta x=S=\frac{۶\times۶}{۲}=۱۸m$

B ۳۷۱ ۳

۱ به کمک شیب خط، سرعت در لحظهٔ $t=۵s$ را به‌دست می‌آوریم.

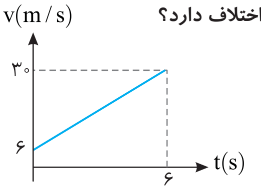


$$\frac{v-\circ}{۵-\circ}=\frac{-۶-\circ}{۳-\circ}\Rightarrow v=-۱\circ m/s$$

۲ مسافت طی شده را به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=|S|=\left|\frac{-۱\circ\times۵}{۲}\right|=۲۵m$$

بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است، مطابق شکل زیر است جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت چند متر با جابه‌جایی در ۴s آغازین حرکت اختلاف دارد؟



۱) ۲ متر، بیشتر

۲) ۲ متر، کمتر

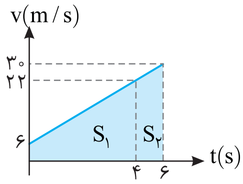
۳) ۴ متر، بیشتر

۴) ۴ متر، کمتر

پاسخ **۱** ابتدا شتاب را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_\circ}{t}\Rightarrow a=\frac{۳\circ-۶}{۶}=۴m/s^۲$$

۱ ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=۴s$ تا $t=۶s$، بنابراین سرعت در $t=۴s$ را به‌دست می‌آوریم.



سرعت در $t=۴s$ خواهد شد:

$$v=at+v_\circ\Rightarrow v=۴\times۴+۶=۲۲m/s$$

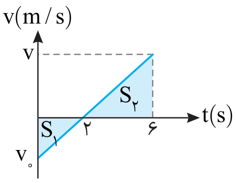
اکنون سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا ۴s و بازهٔ ۴s تا ۶s را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_۱=S_۱=\frac{۶+۲۲}{۲}\times۴=۵۶m,\ \Delta x_۲=S_۲=\frac{۳\circ+۲۲}{۲}\times۲=۵۲m$$

جابه‌جایی در ۲s ثانیهٔ سوم آغازین حرکت ۴ متر کمتر است. $۵۶-۵۲=۴m$

گزینهٔ ۴

B ۳۷۲ ۱



خط فکری هرگاه تندی در حال افزایش باید حرکت تندشونده و هرگاه تندی در حال کاهش باشد حرکت کندشونده است. از طرفی به کمک سطح زیر نمودار $v-t$ می‌توان مسافت را حساب کرد. البته شما باید بین $v_\circ$ و v سرعت در هر لحظهٔ صفر و ۶s رابطه‌ای به‌دست بیاورید.

۱ در بازهٔ ۰ تا ۲s حرکت کندشونده و در بازهٔ ۲s تا ۶s حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به شیب نمودار یک رابطهٔ ریاضی بین سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_\circ-\circ}{\circ-۲}=\frac{v-\circ}{۶-۲}\Rightarrow v=-۲v_\circ$$

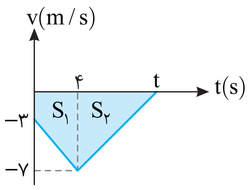
۳ سطح $S_۱$ و $S_۲$ را بر حسب $v_\circ$ و v به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

تندشونده $\ell_۲=|S_۲|=\left|\frac{v\times(۶-۲)}{۲}\right|=۲v$

کندشونده $\ell_۱=|S_۱|=\left|\frac{v_\circ\times۲}{۲}\right|=v_\circ$

$$\frac{\ell_۲}{\ell_۱}=\left|\frac{۲v}{v_\circ}\right|=\frac{۲\times۲v_\circ}{v_\circ}=۴$$

A ۳۷۳ ۲



سطح بین نمودار سرعت زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است، سطح $S_۱$ و $S_۲$ را به‌دست آورده با هم جمع کرده و برابر ۲۷m قرار می‌دهیم.

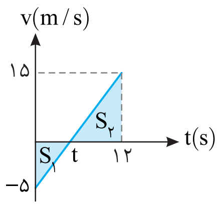
$$|d|=|S|=|S_۱|+|S_۲|=\left|\frac{-۳+(-۷)}{۲}\times۴\right|+\left|\frac{-۷\times(t-۴)}{۲}\right|$$

$$+۲\circ+۳/۵t-۱۴=۲۷\Rightarrow t=۶s$$

دقت کنید که جابه‌جایی منفی $(-۲۷m)$ است.

A ۳۷۴ ۲

خط فکری شتاب برابر شیب نمودار سرعت - زمان است و در بازهٔ صفر تا ۱۲s شیب خط نمودار مثبت است بنابراین شتاب مثبت است و باید مسافت طی شده در بازهٔ ۰ تا ۱۲s را به کمک سطح زیر نمودار حساب کنید.



۱ لحظهٔ t را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{0-(-5)}{t-0}=\frac{15-0}{12-t}\Rightarrow 3t=12-t\Rightarrow t=3s$$

۲ اکنون سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow \ell=\frac{5\times 3}{2}+\frac{15\times 9}{2}$$

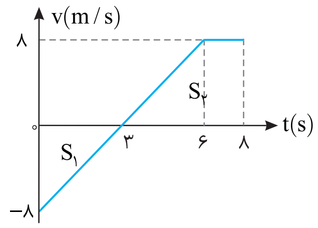
$$\Rightarrow \ell=7/5+67/5=75m$$

B ۳۷۵ ۱

خط فکری بنا به تعریف، سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی است $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$. از طرفی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان است. شما باید به کمک سطح زیر نمودار جابه‌جایی را پیدا کنید و سرعت متوسط را بیابید.

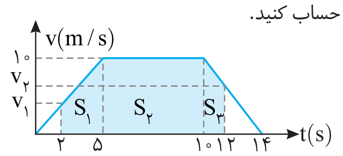
۱ جابه‌جایی خواهد شد: $\Delta x=S=\frac{-8\times 3}{2}+\frac{5+2}{2}\times 8=-12+28=16m$

۲ سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{16}{8}=2m/s$



B ۳۷۶ ۳

خط فکری باید به کمک شیب خط، سرعت در لحظه‌های t=2s و t=12s را به‌دست بیاورید سپس به کمک سطح زیر نمودار، جابه‌جایی را حساب کرده و در آخر سرعت متوسط را حساب کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ t=2s :

$$\frac{10-0}{v_1-0}=\frac{5-0}{2-0}\Rightarrow v_1=4m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ t=12s :

$$\frac{0-10}{14-10}=\frac{0-v_2}{14-12}\Rightarrow v_2=5m/s$$

۳ جابه‌جایی در بازه t=2s تا t=12s :

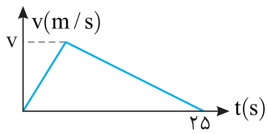
$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow \Delta x=\frac{10+4}{2}\times 3+10\times 5+\frac{10+5}{2}\times 2$$

$$\Delta x=21+50+15\Rightarrow \Delta x=86m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد :

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{86}{12-2}\Rightarrow v_{av}=8/6m/s$$

A ۳۷۷ ۱

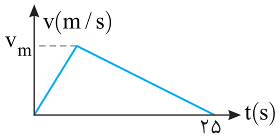


۱ سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است از این‌رو: $\Delta x=S=\frac{v\times 25}{2}$

۲ سرعت متوسط ۱۰m/s است به کمک تعریف سرعت متوسط، v را حساب می‌کنیم.

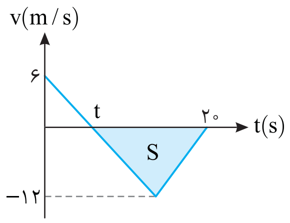
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 10=\frac{v\times 25}{2\times 25}\Rightarrow v=20\frac{m}{s}$$

میانبر در نمودارهای سرعت - زمان که به شکل مثلث از مبدأ زمان شروع می‌شوند، همواره بیشینه سرعت دو برابر سرعت متوسط است. $v_m=2v_{av}$



B ۳۷۸ ۲

خط فکری مدتی که متحرک در خلاف جهت محور x در حرکت است یعنی مدت زمانی که سرعت متحرک منفی است با توجه به شکل در بازه t تا ۲۰s سرعت منفی است. شما باید سطح S را به‌دست بیاورید تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید. نیازی به محاسبه t وجود ندارد و مسئله بسیار ساده است دقت کنید.

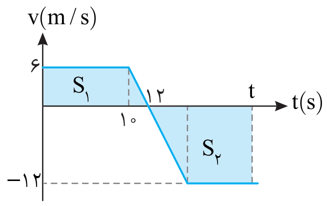


سطح S را حساب می‌کنیم. $\ell=|S|=\frac{12\times(20-t)}{2}\Rightarrow \ell=6(20-t)$

تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{6\times(20-t)}{20-t}\Rightarrow s_{av}=6m/s$

B ۳۷۹ ۲

خط فکری هنگامی که متحرک مجدداً از مبدأ حرکتش می‌گذرد، جابه‌جایی آن صفر است. از این‌رو باید لحظه‌ای را به‌دست آورد که سطح زیر نمودار برابر صفر شود در واقع باید در لحظهٔ فرضی t، سطح زیر نمودار S_1 و S_2 برابر و قرینه هم باشند.



قرار است سطح S_1 و S_2 هم‌اندازه باشد از این‌رو مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow |S_1|=|S_2|\Rightarrow \ell=2|S_1|$$

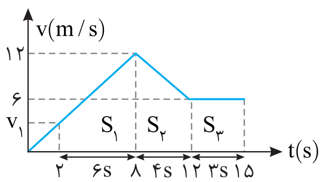
بنابراین کافی است سطح S_1 را به‌دست بیاورید و مقدار آن را دو برابر کنید. یعنی نیازی به یافتن لحظهٔ t نداریم.

$$\ell=2S_1=2\times\frac{10+12}{2}\times 6=132m$$

B ۳۸۰ ۳

۱ به کمک شیب خط سرعت در لحظهٔ t=2s را حساب می‌کنیم.

$$\frac{12-0}{8-0}=\frac{v_1-0}{2-0}\Rightarrow v_1=3m/s$$



۲ جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ t=2s تا t=15s به کمک سطح زیر نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow \Delta x=\frac{3+12}{2}\times 6+(\frac{12+6}{2})\times 4+6\times 3$$

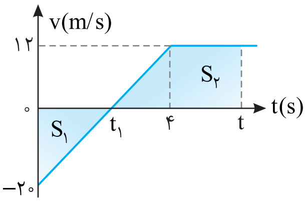
$$\Rightarrow \Delta x=45+36+18\Rightarrow \Delta x=99m$$

۳ اکنون می‌توان مکان متحرک در لحظهٔ t=15s را حساب کرد:

$$\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1\Rightarrow 99\vec{i}=\vec{x}_2-6\vec{i}\Rightarrow \vec{x}_2=105\vec{i}$$

B ۳۸۱ | ۱

۱ به کمک شیب خط لحظهٔ t_1 که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.



$$\frac{0-(-20)}{t_1-0}=\frac{12-0}{4-t_1}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{t_1}=\frac{3}{4-t_1}\Rightarrow 3t_1=20-5t_1$$

$$8t_1=20\Rightarrow t_1=2/5s$$

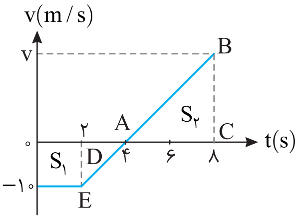
۲ قرار است متحرک به مکان شروع حرکتش برگردد یعنی جابه‌جایی متحرک صفر شود ($\Delta x=0$)، در واقع سطح زیر نمودار باید تا لحظهٔ موردنظر صفر شود، بنابراین مساحت S_1 و S_2 باید هم‌اندازه باشد.

$$|S_1|=|S_2|\Rightarrow \left|\frac{-20\times 2/5}{2}\right|=\left|\frac{(t-2/5)+(t-4)}{2}\times 12\right|$$

$$25=12t-39\Rightarrow 12t=64\Rightarrow t=\frac{16}{3}$$

C ۳۸۲ | ۲

۱ به کمک شیب خط EB سرعت در لحظهٔ $t=8s$ را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{0-(-10)}{4-2}=\frac{v-0}{8-4}$$

$$\Rightarrow v=20m/s$$

۲ متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان $x=0$ با سرعت منفی شروع به حرکت کرده و به مدت $4s$ در حال دور شدن از مبدأ است. جابه‌جایی متحرک در این $4s$ را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

$$S_1=\Delta x_1=\left(\frac{4+2}{2}\right)(-10)=-30m$$

۳ در لحظهٔ $t=4s$، سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و به سوی مبدأ بازمی‌گردد و در بازهٔ $4s$ تا $8s$ به اندازهٔ مقدار زیر در جهت مثبت محور حرکت می‌کند.

$$\Delta x_2=S_2=\frac{4\times 20}{2}=40m$$

۴ پس متحرک در بازگشت از مبدأ گذشته و در $t=8s$ در مکان $x=-30+40=10m$ مبدأ است، پس در $t=4s$ فاصلهٔ متحرک از مبدأ از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.

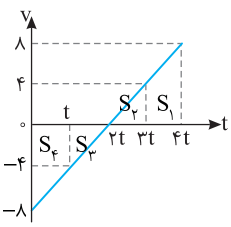
A ۳۸۳ | ۴

در هر سه گزینه $v^2=(\pm 8)^2=64$ و $v_0^2=(\pm 4)^2=16$ بوده و با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) $v^2-v_0^2=2a\Delta x$، جابه‌جایی در هر سه حالت برابر است با:

$$\Delta x=\frac{64-16}{2a}=\frac{24}{a}$$

روش استفاده از نمودار:

ابتدا دقت کنید که حرکت با شتاب ثابت است و در بازهٔ زمانی یکسان تغییرات سرعت یکسان است یعنی بازه زمانی تغییر سرعت از $-8m/s$ تا $-4m/s$ و از $-4m/s$ تا صفر و ... یکسان و برابر t است.



بزرگی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان است.

سطح S_1 و سطح S_4 با هم برابر است زیرا دو ذوزنقه با قاعده‌های برابر و ارتفاع t هستند و جابه‌جایی در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر است.

$$|S_1|=|S_4|=\frac{8+4}{2}t=6t$$

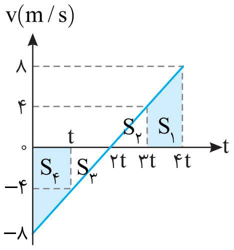
در تغییر سرعت از $-4m/s$ تا $8m/s$ سطح زیر نمودار خواهد شد.

$$(S_1+S_2)+S_3=\frac{8+4}{2}t+\frac{4\times t}{2}+\frac{-4\times t}{2}=6t$$

بنابراین در سه حالت جابه‌جایی یکسان است. البته روش اول بسیار منطقی و کوتاه‌تر است.

A ۳۸۴ | ۲

متحرک دارای شتاب ثابت است و در گزینهٔ (۱) و (۳) تغییر جهت نداده است اما در گزینهٔ (۲) سرعت ابتدا از $-4m/s$ به صفر رسیده و سپس از صفر به $8m/s$ می‌رسد، بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر و در گزینهٔ (۲) بیشتر از گزینه‌های (۱) و (۳) است. البته با رسم نمودار سرعت - زمان مسئله را واضح‌تر توضیح می‌دهیم.



۱ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $4m/s$ تا $8m/s$ برابر سطح $|S_1|$ است.

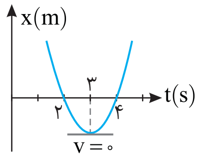
۲ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-4m/s$ تا $8m/s$ برابر مجموع سطح‌های $|S_1|+|S_2|+|S_3|$ است.

۳ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-4m/s$ تا $-8m/s$ برابر سطح $|S_4|$ است.

بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۲) از بقیهٔ حالت‌ها بیشتر است.

C ۳۸۵ | ۳

معادلهٔ $x=t^2-6t+8$ تابع درجه ۲ است. ریشه‌ها و مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم و نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.



$$x=t^2-6t+8$$

$$\Rightarrow x=(t-2)(t-4)\xrightarrow{x=0} t=2s,\ t=4s$$

رأس سهمی که جهت حرکت تغییر می‌کند برابر است با $t=-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2}=3s$.

قبل از لحظهٔ $t=3s$ متحرک در جهت منفی محور در حرکت است و در $t>3s$ متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است یعنی در تمام بازه‌های زمانی قبل از $3s$ و تمام بازه‌های زمانی بعد از $3s$ که تغییر جهت وجود ندارد تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط یکی است.

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان- زمان متحرکی در SI که روی خط راست حرکت می‌کند به‌صورت $x=t^2-3t$ است. مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم چند برابر جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم است؟**

خارج ریاضی - ۹۸

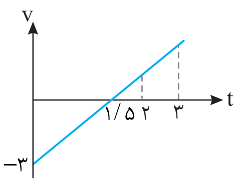
۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۱/۵ ۴) −۱/۰۵

پاسخ **ابتدا لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود و علامت سرعت تغییر می‌کند را به‌دست می‌آوریم:**

$$\begin{cases} x=t^2-3t \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases}\Rightarrow a=2m/s^2,\ v_0=-3m/s$$

$$\xrightarrow{v=at+v_0} v=2t-3\xrightarrow{v=0} 0=2t-3\Rightarrow t=1/5s$$

لحظهٔ تغییر جهت $t=1/5s$ است. اما ثانیهٔ سوم یعنی $t=2s$ تا $t=3s$ و در این بازه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسافت در ثانیهٔ سوم با هم برابر است.



گزینهٔ ۱

B ۳۸۶ | ۲

راه‌حل اول: با توجه به معادلهٔ مکان- زمان جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ $t=2s$ تا $t=3s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_{t=3s}-x_{t=2s}=(3)^2-3(3)-(2^2-3(2))=9-9-4+6=2m$$

با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت و معادله داده شده در مسئله، سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\\ x=t^2-3t\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}a=1\Rightarrow a=2m/s^2\ ,\ v_0=-3m/s$$

ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$. مکان در این دو لحظه را به‌دست می‌آوریم:

$$t=1s\Rightarrow x=1-3=-2m\quad,\quad t=2s\Rightarrow x=4-6=-2m$$

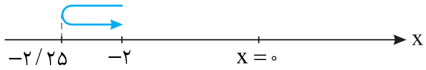
بررسی می‌کنیم که آیا متحرک در این بازه تغییر جهت داده است؟ از این رو معادلهٔ سرعت- زمان را می‌نویسیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v=2t-3\xrightarrow{v=0}2t-3=0\Rightarrow t=1.5s$$

$$x=t^2-3t\Rightarrow x=(1.5)^2-3(1.5)=2.25-4.5=-2.25m$$

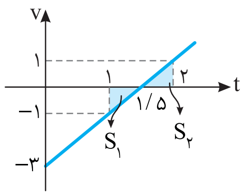
اکنون مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

$$\ell=0.25+0.25=0.5m$$



بنابراین: $\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{0.5}{2}=\frac{1}{4}$

راه‌حل دوم: بهترین روش برای حل مسائل مربوط به مسافت طی شده رسم نمودار سرعت - زمان است. مسافت طی شده برابر مجموع مساحت‌های زیر نمودار است، بنابراین ابتدا نمودار معادلهٔ $v=2t-3$ را رسم می‌کنیم.



در ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$، سرعت این دو لحظه را روی نمودار مشخص کرده و مساحت مثلث‌های S_1 و S_2 را به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم.

$$v=2t-3\begin{cases}\xrightarrow{t=1s}v_1=-1m/s\\ \xrightarrow{t=2s}v_2=1m/s\end{cases}$$

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow L=\frac{1\times0.5}{2}+\frac{1\times0.5}{2}=0.5m$$

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^2-8t+15$ است، مسافت طی شده در مدت صفر تا 5s چند متر است؟**

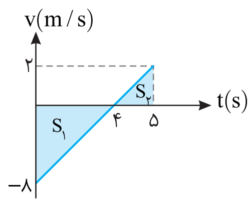
۱) صفر ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پاسخ **ابتدا معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست می‌آوریم.**

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\ ,\ x=t^2-8t+15$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}a=1\Rightarrow a=2m/s^2,v_0=-8m/s^2\Rightarrow v=2t-8$$

نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم.



$$v=2t-8\xrightarrow{v=0}t=4s$$

سرعت در $t=5s$ برابر است با:

$$v=2\times5-8=2m/s$$

اکنون قدر مطلق سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\ell=S_1+S_2=\frac{8\times4}{2}+\frac{2\times1}{2}=16+1=17m$$

گزینهٔ ۳

B ۳۸۷ | ۳

۱ ابتدا لحظهٔ تغییر جهت را حساب می‌کنیم.

$$v=0\Rightarrow-2t+8=0\Rightarrow t=4s$$

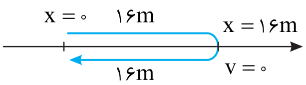
۲ مکان اولیه را به دلخواه مبدأ می‌گیریم و مکان تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)\times(4)^2+8\times4=16m$$

۳ در لحظهٔ $t=8s$ نیز مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)(8)^2+8\times8=0$$

۴ با توجه به نمودار روبه‌رو مسافت طی شده برابر است با:

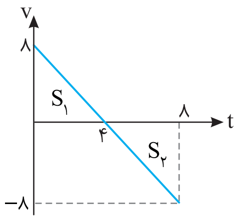


$$\ell=16+16=32m$$

۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{32}{8}=4m/s$$

روش بهتر رسم نمودار سرعت - زمان: سرعت در لحظهٔ صفر و 8s و لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب کرده و نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار تندی را به‌دست می‌آوریم.



$$v=-2t+8\begin{cases}\xrightarrow{t=0}v=+8m/s\\ \xrightarrow{v=0}0=-2t+8\Rightarrow t=4s\\ \xrightarrow{t=8s}v=-2\times8+8=-8m/s\end{cases}$$

مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{8\times4}{2}+\frac{8\times4}{2}=32m$$

تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{32}{8}=4m/s$$

B ۳۸۸ | ۳

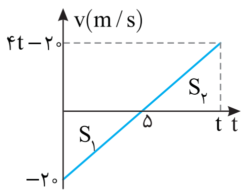
خط فکری مسافت طی شده متحرک با شتاب ثابت $a=4m/s^2$ در یک بازهٔ زمانی 388m است. سرعت اولیه که در خلاف جهت محور است برابر $-20m/s$ بوده و متحرک در این لحظه از مبدأ مکان $(x_0=0)$ می‌گذرد. بنابراین به نظر می‌رسد با نوشتن معادله سرعت - زمان و رسم نمودار سرعت - زمان به کمک سطح زیر نمودار می‌توان لحظه‌ای که مسافت طی شده به 388m می‌رسد را به‌دست آورد.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t-20$$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.

$$v=0\Rightarrow4t-20=0\Rightarrow t=5s$$



۳ با توجه به فرض مسئله، مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow388=\left|\frac{-20\times5}{2}\right|+\left|\frac{(4t-20)(t-5)}{2}\right|$$

$$338=(2t-10)(t-5)\Rightarrow338=2(t-5)(t-5)$$

$$169=(t-5)^2\Rightarrow t-5=13\Rightarrow t=18s$$

۴ تندی در لحظهٔ $t=18s$ خواهد شد:

$$v=4t-20\Rightarrow v=4\times18-20=52m/s$$

B ۳۸۹ ۴

۱ ابتدا به کمک معادله مکان - زمان سرعت اولیه را به دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}\times۴\times(۲)^۲+۲v_۰ \Rightarrow v_۰=-۳m/s$$

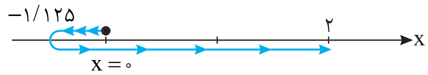
۲ اکنون لحظه و مکان تغییر جهت متحرک را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۴t-۳ \xrightarrow{v=۰} t=\frac{۳}{۴}s$$

$$x=\frac{۱}{۲}\times۴\times(\frac{۳}{۴})^۲-۳(\frac{۳}{۴}) \Rightarrow x=\frac{۹}{۸}-\frac{۹}{۴}=-\frac{۹}{۸}m=-۱/۱۲۵m$$

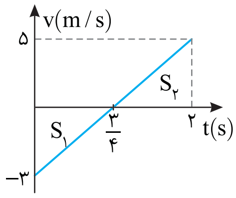
۳ با توجه به شکل مسافت طی‌شده خواهد شد.

$$\ell=۱/۱۲۵+۱/۱۲۵+۲=۴/۲۵m$$



روش رسم نمودار:

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. $v=۴t-۳ \xrightarrow{t=۲s} v=۵m/s$



مسافت طی شده برابر است با:

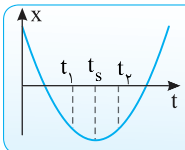
$$\ell=|S_۱|+|S_۲| \Rightarrow \ell=\left|\frac{-۳\times\frac{۳}{۴}}{۲}\right|+\left|\frac{۵\times(۲-\frac{۳}{۴})}{۲}\right| \Rightarrow \ell=\frac{۹}{۸}+\frac{۲۵}{۸} \Rightarrow \ell=\frac{۳۴}{۸}$$

$$\Rightarrow \ell=۴/۲۵m$$

A ۳۹۰ ۳

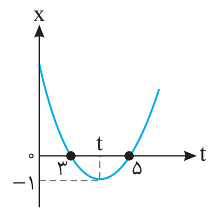
۱ در لحظه‌های $t=۳s$ و $t=۵s$ متحرک از مبدأ گذشته و در لحظه تغییر جهت (رأس سهمی $x-t$) مکان متحرک منفی بوده پس نمودار $x-t$ حرکت تقریباً به صورت زیر است.

یادداشت ریاضی در نمودارهای سهمی مانند نمودار $x-t$ در حرکت با شتاب ثابت، رأس نمودار محور تقارن است بنابراین: $t_s=\frac{t_۱+t_۲}{۲}$



۲ با توجه به یادداشت ریاضی بالا لحظه t در نمودار $x-t$ برابر است با:

$$t=\frac{۳+۵}{۲}=۴s$$



۳ با توجه به نمودار در $t=۴s$ سرعت متحرک صفر شده و در بازهٔ $t=۴s$ تا $t=۵s$ متحرک به اندازهٔ $\Delta x=۰-(-۱)=۱m$ جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک را با توجه به این اطلاعات حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۱t \xrightarrow[\Delta t=۱s]{v_۱=۰} ۱=\frac{۱}{۲}a \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۴ شتاب متحرک $۲m/s^۲$ و در $t=۴s$ سرعت متحرک صفر شده است. با توجه به این اطلاعات سرعت در $t=۵s$ را حساب می‌کنیم:

$$t_۲=۴s\ ,t_۱=۰: \quad v_۲=at+v_۱ \xrightarrow[v_۲=۰]{\Delta t=۴s}$$

$$۰=۲\times۴+v_۱ \Rightarrow v_۱=-۸m/s$$

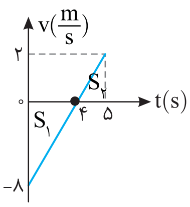
$$t_۳=۵s\ ,t_۲=۴s: \quad v_۳=at+v_۲ \xrightarrow[v_۲=۰]{\Delta t=۱s}$$

$$v_۳=۲\times۱+۰ \Rightarrow v_۳=۲m/s$$

۵ برای به‌دست آوردن تندی متوسط نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم تا با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت به‌دست آید:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{۴\times۸}{۲}+\frac{۱\times۲}{۲}=۱۶+۱=۱۷m$$

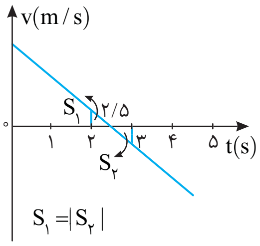


۶ تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۷}{۵}m/s$$

A ۳۹۱ ۳

خط فکری با رسم نمودار $v-t$ متحرک، وضعیت حرکت را بررسی می‌کنیم. برای این منظور با توجه به منفی‌بودن شتاب، شیب نمودار منفی خواهد بود. از طرفی چون جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم (۲s تا ۳s) حرکت صفر است، یعنی در نیمی از آن جابه‌جایی مثبت و در نیمی از آن جابه‌جایی منفی است بنابراین مطابق شکل مقابل باید در لحظهٔ $t=\frac{۲+۳}{۲}=۲/۵s$ متحرک تغییر جهت داده باشد تا سطح زیر نمودار در بازه‌های ۲s تا ۲/۵s و ۲/۵s تا ۳s برابر باشد، زیرا مجموع جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم صفر است.



نکته در حرکت شتاب ثابت که مسافت و یا تندی خواسته می‌شود باید نمودار $v-t$ را رسم کرده و از روی سطح زیر نمودار مسافت را حساب کنید.

تندی متحرک در $t=۲/۵s$ صفر شده و شتاب حرکت $a=-۴m/s^۲$ است. برای رسم نمودار $v-t$ و محاسبهٔ مسافت در بازهٔ $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۴s$ باید تندی در $t=۲s$ و $t=۴s$ حساب شود:

$$\begin{cases} t_۱=۲/۵s, v_۱=۰ \\ a=-۴m/s^۲ \\ t_۲=۴s \end{cases} \Rightarrow v_۲=a\Delta t+v_۱ \xrightarrow[\Delta t=۱/۵s]{\Delta t=t_۲-t_۱}$$

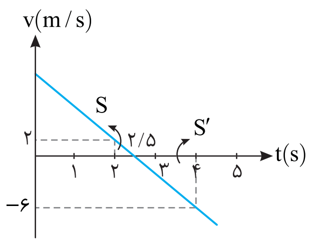
$$v_۲=-۴\times۱/۵+۰ \Rightarrow v_۲=-۶m/s$$

$$\begin{cases} t_۱=۲s, v_۱=? \\ a=-۴m/s^۲ \\ t_۲=۲/۵s, v_۲=۰ \end{cases} \Rightarrow v_۲=a\Delta t+v_۱ \xrightarrow[\Delta t=۰/۵s]{\Delta t=t_۲-t_۱}$$

$$۰=-۴\times۰/۵+v_۱ \Rightarrow v_۱=۲m/s$$

نمودار $v-t$ را رسم کرده و سطح زیر نمودار بین ثانیه‌های ۲s تا ۲/۵s و ۲/۵s تا ۴s را حساب کرده

$$S=\frac{۰/۵\times۲}{۲}=۰/۵m \quad , \quad |S'|=\frac{۱/۵\times۶}{۲}=۴/۵m$$



مجموع قدر مطلق سطح زیر نمودار $v-t$ برابر مسافت طی‌شده است:

$$\ell=S+|S'| \Rightarrow \ell=۰/۵+۴/۵=۵m$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت اگر جابه‌جایی یا سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ صفر شود، آن‌گاه در لحظهٔ $t=\frac{t_۱+t_۲}{۲}$ متحرک تغییر جهت داده و تندی آن صفر می‌شود.

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت در مبدأ زمان با سرعت $۱۸m/s$ روی خط راست، در حرکت بوده و سرعت متوسط متحرک در ثانیهٔ پنجم حرکت برابر با صفر است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t=۰$ تا $t=۱۰s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۰/۱ ۲) ۱۰۱ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰/۱

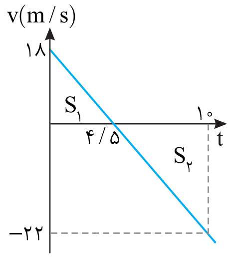
پاسخ **نکته** هرگاه در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی جابه‌جایی و یا سرعت متوسط صفر شود، در لحظهٔ وسط بازهٔ زمانی سرعت متحرک صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

۱ در ثانیهٔ پنجم بین بازهٔ زمانی $t=۴s$ تا $t=۵s$ سرعت متوسط صفر شده است. بنابراین در لحظهٔ $t=۴/۵s$ سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. سرعت اولیه $v_۰=۱۸m/s$ و شتاب ثابت است. شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=a\times۴/۵+۱۸ \Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته، سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را حساب کرده نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

$$v=-۴t+۱۸ \xrightarrow{t=۱۰s} v=-۴۰+۱۸ \Rightarrow v=-۲۲m/s$$



۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|=\left|\frac{۱۸\times۴/۵}{۲}\right|+\left|\frac{-۲۲\times۵/۵}{۲}\right|$$

$$\ell=۹\times۴/۵+۱۱\times۵/۵$$

$$\Rightarrow \ell=۴۰/۵+۶۰/۵ \Rightarrow L=۱۰۱m$$

۴ تندی متوسط خواهد شد:

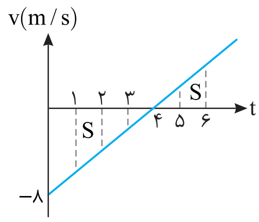
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۰۱}{۱۰}=۱۰/۱m/s$$

گزینهٔ ۱

C ۳۹۲ ۲

نکته هرگاه در یک حرکت با شتاب ثابت مسافت طی شده در دو بازهٔ زمانی با هم برابر شود، آن‌گاه دقیقاً در وسط بازهٔ زمانی از ابتدای بازه اول تا انتهای بازهٔ دوم سرعت متحرک صفرشده و تغییر جهت می‌دهد.

خط فکری ثانیهٔ سوم یعنی از $t=۲s$ تا $t=۳s$ و ثانیهٔ ششم یعنی از $t=۵s$ تا $t=۶s$ مسافت‌ها یکسان است. بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{۶+۲}{۲}=۴s$ سرعت متحرک صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد. با توجه به صورت مسئله سرعت اولیه $-۸m/s$ است، بنابراین شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید و تا لحظهٔ $t=۴s$ سطح زیر نمودار را حساب کنید.



۱ سطح زیر نمودار خواهد شد:

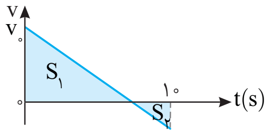
$$\Delta x=S=\frac{-۸\times۴}{۲}=-۱۶m$$

۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=۲۰m$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=x-x_۰ \Rightarrow -۱۶=x-۲۰ \Rightarrow x=۴m$$

A ۳۹۳ ۴

خط فکری هرگاه تندی متوسط بزرگ‌تر از سرعت متوسط باشد، مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و به این معنی است که متحرک در حین حرکت تغییر جهت داده است. برای محاسبهٔ مسافت و تندی بهتر است نمودار $v-t$ کشیده شود که چون سرعت اولیه با توجه به سؤال در جهت محور xها بوده (در جهت مثبت) و تغییر جهت داشته‌ایم، نمودار $v-t$ به صورت روبه‌رو می‌شود:



واضح است که چون سرعت اولیه مثبت است و متحرک تغییر جهت داده، شیب نمودار منفی می‌شود. حال با توجه به تعریف سرعت متوسط و تندی متوسط خواهیم داشت:

۱ در بازهٔ صفر تا ۱۰s سرعت متوسط ۷/۵ متر بر ثانیه است:

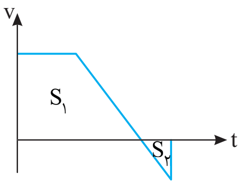
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x=۷۵m$$

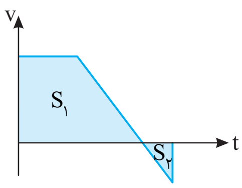
۲ در بازهٔ صفر تا ۱۰s تندی متوسط ۸/۵ متر بر ثانیه است:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell=۸۵m$$

نکته در نمودار $v-t$ مسافت و جابه‌جایی متحرک با استفاده از سطح محصور بین نمودار و محور افقی به‌دست می‌آید:

$$\Delta x=S_۱+S_۲ \quad , \quad \ell=|S_۱|+|S_۲|$$





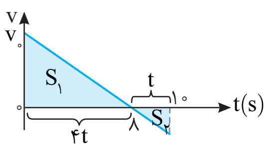
۳ مسافت و جابه‌جایی را می‌توان به کمک سطح زیر نمودار به‌دست آورد:

$$\begin{cases}\ell=S_۱+S_۲ \Rightarrow ۸۵=S_۱+S_۲\\ \Delta x=S_۱-S_۲ \Rightarrow ۷۵=S_۱-S_۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_۱=۸۰m , S_۲=۵m$$

یادداشت ریاضی یکی از ابزارهای ریاضی مفید در محاسبات سطح زیر نمودار استفاده از تشابه مثلث‌ها است که در آن، مجذور نسبت ضلع‌ها برابر با نسبت مساحت‌هاست.

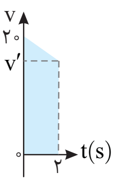
۴ نسبت مساحت سطح زیر نمودار در این دو بخش به صورت $\frac{S_۱}{S_۲}=۱۶$ است، پس نسبت ضلع‌های این دو مثلث متشابه ۱ به ۴ است.



$$\frac{t}{(۱۰-t)}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴t=۱۰-t \Rightarrow t=۲$$

$$S_۱=۸۰m \Rightarrow \frac{v_۰\times۸}{۲}=۸۰ \Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$

برای به‌دست آوردن سطح زیر نمودار در ۲ ثانیه اول نیاز به داشتن سرعت در ثانیهٔ دوم داریم. به این منظور ابتدا شتاب حرکت را با توجه به شیب نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۲۰}{۸}=-۲/۵m/s^۲$$

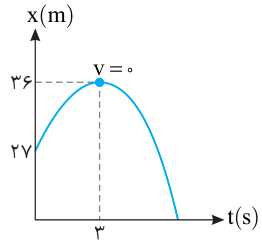
حال مسافت ۲s اول را حساب می‌کنیم:

$$v'=at+v_۰ \Rightarrow v'=-۵+۲۰ \Rightarrow v'=۱۵m/s$$

$$\ell=\frac{(۲۰+۱۵)۲}{۲}=۳۵m$$

A ۳۹۴ ۳

خط فکری حرکت متحرک شتاب ثابت است و با توجه به اطلاعات داده شده در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۳s$ شتاب متحرک و سرعت اولیه آن را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید در لحظهٔ $t=۳s$ شیب خط مماس بر نمودار افقی شده و سرعت متحرک صفر است (رأس سهمی)، همچنین مسافت طی شده خواسته شده و برای حل از سطح زیر نمودار $v-t$ کمک می‌گیریم.



۱ با توجه به رابطهٔ $\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t$، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=۳۶-۲۷=۹m\ ,\ \Delta t=۳s\ ,\ v_۰=?\ ,\ v=۰$$

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\times\Delta t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۳\Rightarrow v_۰=۶m/s$$

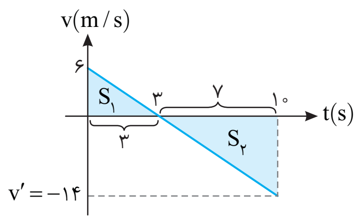
۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۳a+۶\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۳ سرعت اولیه $v_۰=۶m/s$ و شتاب $a=-۲m/s^۲$ است، سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$t=۱۰s\Rightarrow v'=at+v_۰\Rightarrow v'=-۲\times۱۰+۶=-۱۴m/s$$

۴ با توجه به اطلاعات به‌دست آمده نمودار $v-t$ متحرک را رسم و از سطح زیر نمودار مسافت را حساب می‌کنیم:

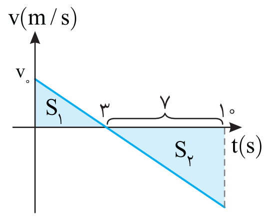


$$S_۱=\frac{۶\times۳}{۲}=۹m$$

$$|S_۲|=\frac{۷\times۱۴}{۲}=۴۹m$$

$$\Rightarrow \ell=S_۱+|S_۲|=۵۸m$$

میانبر از ابتدا با دانستن اینکه سرعت اولیه متحرک مثبت است نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه سطح زیر نمودار نشان‌دهندهٔ جابه‌جایی متحرک است، $S_۱$ برابر خواهد بود با:

$$\Delta x_۱=S_۱=۳۶-۲۷=۹m$$

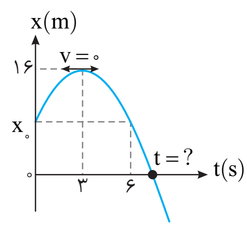
حال با استفاده از تشابه دو مثلث شکل گرفته در نمودار، اندازهٔ جابه‌جایی ۳ ثانیه تا ۱۰ ثانیه را حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=(\frac{۳}{۷})^۲\Rightarrow\frac{۹}{S_۲}=\frac{۹}{۴۹}\Rightarrow S_۲=۴۹m$$

در نتیجه مسافت طی شده از شروع حرکت تا ثانیه ۱۰ ام برابر مجموع جابه‌جایی‌ها یعنی $۴۹+۹=۵۸m$ است.

A ۳۹۵ ۳

۱ حرکت با شتاب ثابت بوده و نمودار آن سهمی است. در نمودار سهمی، خط قائم گذرنده از رأس سهمی، محور تقارن آن است. بنابراین مطابق شکل در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۶s$، مکان متحرک یکسان است.



۲ در بازهٔ صفر تا ۶s، تندی متوسط متحرک $۳m/s$ است، در این صورت مسافت طی شده در این مدت خواهد شد:

$$\ell=vt\Rightarrow\ell=۳\times۶=۱۸m$$

۳ متحرک در مدت صفر تا ۶s، ۱۸m مسافت طی کرده و مطابق نمودار ابتدا در مدت ۳s اول ۹m رفته و سپس از ۳s تا ۶s، ۹m برگشته است.

۴ از صفر تا ۳s، ۹m رفته بنابراین مکان اولیهٔ آن خواهد شد:

$$۱۶-x_۰=۹\Rightarrow x_۰=۷m$$

۵ با توجه به معادلهٔ مستقل از شتاب در بازهٔ صفر تا ۳s سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times۳\Rightarrow v_۰=\frac{۱۸}{۳}=۶m/s$$

۶ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۳}=-۲m/s^۲$$

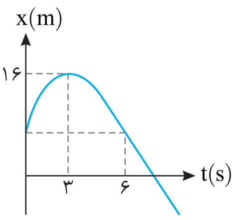
۷ در مدت زمانی که نمودار $x-t$ بالای محور زمان است و x مثبت است، بردار مکان مثبت خواهد بود.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۶t+۷$$

$$\Rightarrow t^۲-۶t-۷=۰\Rightarrow t=-۱\ \text{غ.ق.ق}\ , t=۷s$$

بازی با سؤال **نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در بازهٔ زمانی ۰ تا ۶s تندی متوسط ۳m/s باشد، در چه لحظه‌ای بردار مکان تغییر جهت می‌دهد؟** $(\sqrt{۲۵}=۱/۴)$

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۵



پاسخ ۱ **متحرک با تندی متوسط $۳m/s$ در مدت ۶s مسافت زیر را طی می‌کند.**

$$\ell=s_{av}t\Rightarrow\ell=۶\times۳=۱۸m$$

۲ **نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس تقارن دارد بنابراین در $t=۰$ و $t=۶s$ مکان متحرک برابر بوده و در این مدت مسافت طی شده ۱۸m است. از این‌رو در ۰ تا ۳s متحرک $\frac{۱۸}{۲}=۹m$ طی کرده و به مکان ۱۶m می‌رسد. بنابراین مکان اولیهٔ آن $x_۰=۱۶-۹=۷m$ است.**

۳ **به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.**

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times۳\Rightarrow v_۰=۶m/s$$

۴ **شتاب حرکت خواهد شد:**

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۳}\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۵ **معادلهٔ حرکت را بنویسید زمان تغییر جهت بردار مکان $(x=۰)$ را به‌دست می‌آوریم.**

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۶t+۷=۰$$

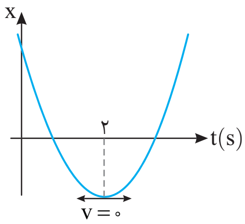
$$-t^۲+۶t+۷=۰\Rightarrow +t^۲-۶t-۷=۰$$

$$t=\frac{+۶\pm۸}{۲}\Rightarrow t=+۳\pm۴\Rightarrow t=۳-۴<۰\ \text{غ ق ق}$$

$$t=۳+۴\Rightarrow t=۷s$$

گزینهٔ ۱

B ۳۹۶ | ۳



باید از نمودار به این اطلاعات دست پیدا کنید.

۱ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک تغییر جهت داده و سرعت آن صفر شده است.

۲ در نمودار مکان - زمان اگر جهت تقعر رو به بالا شد شتاب مثبت است که در این نمودار جهت تقعر منحنی رو به بالاست و شتاب مثبت است.

۳ در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده است، با توجه به معادلهٔ سرعت زمان درحرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t=1s$ و $t=6s$ را برحسب شتاب حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \xrightarrow{t=2s} 0=2a+v_0 \Rightarrow v_0=-2a$$
$$t_1=1s \Rightarrow v_1=a\times1+(-2a)\Rightarrow v_1=-a$$
$$t_2=6s\Rightarrow v_2=a\times6-2a\Rightarrow v_2=4a$$

۴ سرعت متوسط در بازهٔ $t=1s$ تا $t=6s$ برابر $3m/s$ است بنابراین جابه‌جایی در این مدت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 3=\frac{\Delta x}{6-1}\Rightarrow \Delta x=15m$$

۵ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر میانگین سرعت‌هاست از این‌رو می‌توان نوشت:

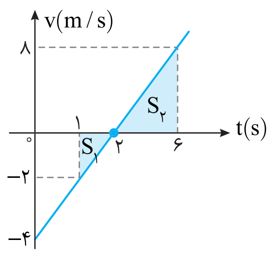
$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\xrightarrow{v_1=-a,\,v_2=4a}3=\frac{-a+4a}{2}\Rightarrow a=2m/s^2$$

۶ در این صورت v_1 و v_2 را می‌توان به دست آورد.

$$v_1=-a\Rightarrow v_1=-2m/s,\ v_2=4a\Rightarrow v_2=4\times2=8m/s$$

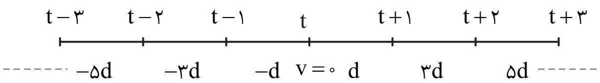
۷ نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.

۸ برای یافتن مسافت کافی است S_1+S_2 را حساب کنیم.

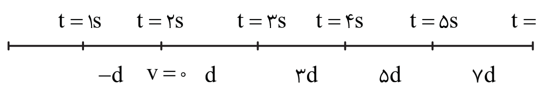


$$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{2\times1}{2}+(\frac{8\times4}{2})$$
$$\Rightarrow \ell=17m$$

میانبر: در حرکت با شتاب ثابت اگر در لحظهٔ t سرعت جسم صفر شود برای جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های قبل و بعد از t رابطهٔ زیر برقرار است.



با توجه به نمودار مسئله در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده است بنابراین در بازهٔ $1s$ تا $6s$ که سرعت متوسط $3m/s$ و جابه‌جایی $15m$ است می‌توان نوشت:

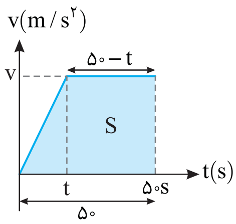


$$\Delta x=-d+d+3d+5d+7d=15\Rightarrow 15d=15\Rightarrow d=1m$$

مسافت طی شده خواهد شد: $\ell=|-d|+d+3d+5d+7d=17d\Rightarrow \ell=17m$

B ۳۹۷ | ۴

راه‌حل اول: نمودار سرعت - زمان را با توجه به داده‌های مسئله رسم می‌کنیم.



مساحت زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی می‌باشد بنابراین:

$$\Delta x_{کل}=600+200=800m$$
$$\Rightarrow \Delta x_{کل}=S=\frac{v(50+(50-t))}{2}=800m$$
$$\Delta x_{کل}=S=\frac{100v-vt}{2}=800 \quad (1)$$

بنا به فرض مسئله سطح زیر نمودار از صفر تا t باید برابر $200m$ باشد از این‌رو:

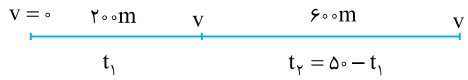
$$S_1=\frac{vt}{2}=200\Rightarrow vt=400m \quad (2)$$

اکنون در رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{100v-400}{2}=800\Rightarrow 100v-400=1600\Rightarrow v=20m/s$$

راه‌حل دوم:

با توجه به صورت سؤال، می‌توان برای سادگی در فهم آن، شکل زیر را رسم کرد. برای قسمت اول از فرمول مستقل از زمان می‌نویسیم:



$$\Delta x_1=\frac{v+v_0}{2}\Delta t_1\Rightarrow 200=\frac{v+0}{2}t_1\Rightarrow vt_1=400 \quad (1)$$

اگر مدت حرکت در ابتدا را t_1 فرض کنیم در مدت $t_2=50-t_1$ متحرک دارای حرکت یکنواخت بوده از این‌رو:

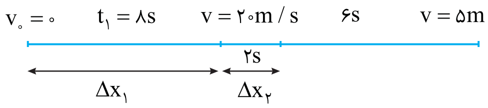
$$\Delta x_2=v\Delta t_2\Rightarrow 600=v(50-t_1)\Rightarrow 600=50v-vt_1 \quad (2)$$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$600=50v-(400)\Rightarrow v=20m/s$$

B ۳۹۸ | ۴

جابه‌جایی در قسمت اول مسیر برابر است با:



$$\Delta x_1=\frac{v+v_0}{2}\Delta t_1\Rightarrow \Delta x_1=\frac{20+0}{2}\times8\Rightarrow \Delta x_1=80m$$

در قسمت دوم مسیر که حرکت کندشونده است، ابتدا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{5-20}{6}\Rightarrow a=-\frac{5}{2}m/s^2$$

جابه‌جایی در مدت $2s$ از لحظهٔ $t=8s$ تا $t=10s$ را حساب می‌کنیم:

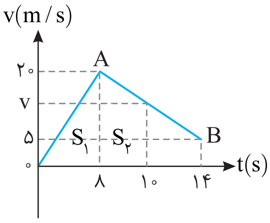
$$\Delta x_2=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x_2=\frac{1}{2}\times(-\frac{5}{2})\times4+(20\times2)\Rightarrow \Delta x_2=35m$$

سرعت متوسط برابر جابه‌جایی در یکای زمان است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{80+35}{10}=11.5m/s$$

روش رسم نمودار سرعت - زمان:

متحرک از حال سکون $v_0=0$ شروع به حرکت کرده و در مدت $8s$ سرعتش به $20m/s$ رسید. سپس در مدت $6s$ یعنی بازهٔ زمانی بین ($8s$ تا $14s$) سرعت به $5m/s$ رسیده است بنابراین نمودار $v-t$ به‌صورت روبه‌روست.



سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را به کمک شیب خط AB حساب می‌کنیم.

$$\frac{5-20}{14-8}=\frac{v-20}{10-8}\Rightarrow\frac{-15}{6}=\frac{v-20}{2}\Rightarrow v=15m/s$$

به کمک سطح زیر نمودار از جابه‌جایی در $10s$ را حساب می‌کنیم:

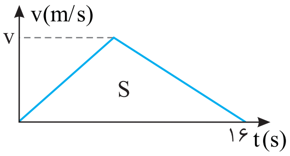
$$\Delta x=S_1+S_2\Rightarrow \Delta x=\frac{20\times8}{2}+\frac{20+15}{2}\times2\Rightarrow \Delta x=80+35\Rightarrow\Delta x=115m$$

سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{115}{10}\Rightarrow v_{av}=11.5m/s$$

B ۳۹۹ ۳

متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v رسیده سپس مجدداً سرعت آن به صفر رسیده است. از این‌رو نمودار سرعت-زمان خودرو مطابق شکل روبرو است.

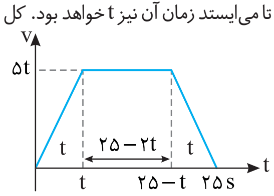


سطح زیر نمودار سرعت-زمان برابر با جابه‌جایی جسم است.

$$\Delta x=S\Rightarrow \Delta x=160m\Rightarrow 160=\frac{v\times 16}{2}\Rightarrow v=20\,m/s$$

C ۴۰۰ ۳

خط فکری بهتر بود طراح می‌گفت متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است. اما حل مسئله اگر مدت زمان حرکت تندشونده با شتاب $5m/s^2$ را t بنامیم، سرعت متحرک در لحظهٔ t برابر $v=at+v_0=5t$ خواهد شد. از طرفی وقتی متحرک با شتاب $-5m/s^2$ حرکت را کند کرده تا می‌ایستد زمان آن نیز t خواهد بود. کل مدت حرکت ۲۵s است، بنابراین زمان حرکت یکنواخت $25-2t$ می‌شود. اکنون با این داشته‌ها می‌توانید نمودار سرعت-زمان را به شکل روبه‌رو رسم و به کمک سطح زیر نمودار مسئله را حل کنید.



۱) با توجه به فرض مسئله سرعت متوسط در مدت ۲۵، $20m/s$ است بنابراین جابه‌جایی متحرک خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta x=20\times 25\Rightarrow \Delta x=500m$$

۲) سطح زیر نمودار سرعت-زمان یک ذوزنقه است که مقدار مساحت آن باید ۵۰۰ باشد.

یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع

$$S=\frac{(25-2t)+25}{2}\times 5t=500\Rightarrow \frac{50-2t}{2}\times t=100\Rightarrow (25-t)t=100$$

$$t^2-25t+100=0\Rightarrow (t-5)(t-20)=0\Rightarrow t=5s\,,\,t=20s$$

کل مدت حرکت ۲۵s است، بنابراین $t=20s$ نمی‌تواند جواب مسئله باشد. زیرا مدت زمان حرکت یکنواخت خواهد شد: $25-2t=25-2\times 20=-15s$ که غیرقابل قبول است بنابراین $t=5s$ جواب بوده و مدت زمان حرکت یکنواخت برابر است با: $25-2\times 5=15s$

بازی با سؤال **متحرکی در یک مسیر مستقیم از حال سکون حرکت می‌کند و پس از ۱۵ ثانیه می‌ایستد. اگر متحرک t_1 ثانیهٔ اول مسیر را با شتاب $2m/s^2$ و مابقی زمان را با شتاب $-1m/s^2$ طی کند تا متوقف شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ **متحرک از حال سکون $v_1=0$ حرکت کرده و پس از t_1 ثانیه به سرعت $v_2=v$ می‌رسد:** $v_2=at+v_1\Rightarrow v=2t_1$ (۱)

سپس متحرک پس از t_2 ثانیه با شتاب $a=-1m/s^2$ از سرعت $v_2=v$ به سرعت $v_3=0$ می‌رسد: $v_3=at+v_2\Rightarrow -v=-t_2\Rightarrow v=t_2$ (۲)

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}v=2t_1\\ v=t_2\end{cases}\Rightarrow t_2=2t_1$$

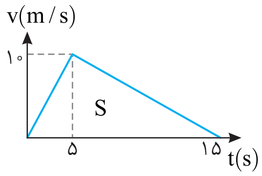
زمان کل حرکت $t_1+t_2=3t_1=15s$ است، بنابراین $t_1=5s$، $t_2=10s$ و $v=2t_1=10m/s$ است. جابه‌جایی در هر بازه را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\Delta x_1=\frac{v_1+v_2}{2}t_1\Rightarrow \Delta x_1=\frac{0+10}{2}\times 5=25m\\ \Delta x_2=\frac{v_2+v_3}{2}t_2\Rightarrow \Delta x_2=\frac{10+0}{2}\times 10=50m\end{cases}\Rightarrow \Delta x_{کل}=\Delta x_1+\Delta x_2=75m$$

سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}=\frac{75}{15}=5m/s$

روش حل به کمک نمودار سرعت-زمان

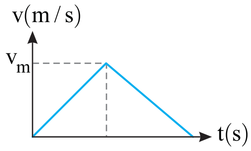
با توجه به اینکه $t_1=5s$ و $t_2=10s$ و سرعت در لحظهٔ t_1 برابر $2\times 5=10m/s$ است نمودار سرعت-زمان را رسم کرده و مسئله را حل می‌کنیم.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{S}{\Delta t}=\frac{\frac{10\times 15}{2}}{15}=5m/s$$

میانبر **هرگاه نمودار به‌صورت مثلث شکل روبه‌رو باشد، سرعت متوسط، نصف سرعت بیشینه است:**

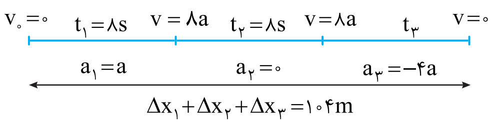
$$v_{av}=\frac{1}{2}v_m$$



گزینهٔ ۲

B ۴۰۱ ۱

با توجه به نمودار رسم شده در قسمت اول حرکت: $v=at_1\Rightarrow v=8a$



در قسمت سوم (آخر) حرکت: $v=a_3t_3+v_0\Rightarrow 0=-4at_3+8a\Rightarrow t_3=2s$

اکنون مسئله به راحتی قابل حل است.

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}a\times 64=32a$$

$$\Delta x_2=vt_2\Rightarrow \Delta x_2=(8a)\times 8=64a$$

$$\Delta x_3=\frac{1}{2}(-4a)(2)^2+(8a)\times 2=8a$$

جمع جابه‌جایی‌ها برابر ۱۰۴ متر است.

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=104\Rightarrow 32a+64a+8a=104\Rightarrow a=1m/s^2$$

روش رسم نمودار:

نکته هرگاه متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت a_1 شروع به حرکت کند و در مدت t_1 سرعتش به v برسد، سپس با شتاب ثابت a_2 سرعتش از v به صفر برسد آن‌گاه:

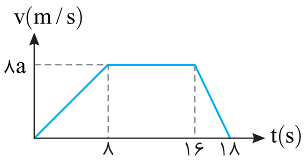
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{t_1}{t_2}=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

در صورت مسئله بیان شده که در مدت ۸s با شتاب a به سرعت $v=8a$ رسیده و سپس با شتاب $-4a$ متوقف شده است. بنابراین زمان توقف آن خواهد شد:

$$t_3=\frac{8}{4}=2s$$

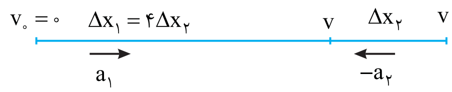
نمودار سرعت-زمان را رسم می‌کنیم. سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$S=\Delta x\Rightarrow \frac{18+8}{2}\times 8a=104\Rightarrow a=1m/s^2$$



B ۴۰۲ ۲

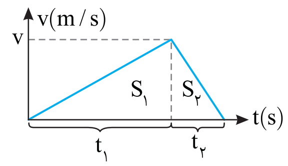
با توجه به فرض‌های پرسش، شکل زیر را رسم کرده و سپس به کمک معادلهٔ مستقل از زمان پرسش را حل می‌کنیم.



$$v^2 - v_0^2 = ۲a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} v^2 - ۰ = ۲a_1\Delta x_1 & \text{برای قسمت اول حرکت} \\ ۰ - v^2 = ۲(-a_2)\Delta x_2 & \text{برای قسمت دوم حرکت} \end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم: $۱ = \frac{۲a_1(۴\Delta x_2)}{۲a_2(\Delta x_2)} \Rightarrow a_2 = ۴a_1$

روش رسم نمودار



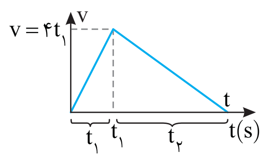
با توجه به فرض مسئله: $\frac{S_1}{S_2} = ۴ \Rightarrow \frac{\frac{vt_1}{۲}}{\frac{vt_2}{۲}} = ۴ \Rightarrow t_1 = ۴t_2$

به کمک معادلهٔ سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v = a_1t_1 + ۰ \\ ۰ = a_2t_2 + v \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{a_2}{a_1}\right| = \left|\frac{t_1}{t_2}\right| = ۴$$

B ۴۰۳ ۳

خط فکری شتاب مرحلهٔ اول $۴m/s^2$ و شتاب مرحلهٔ دوم $-۱m/s^2$ بوده و متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سپس متوقف شده است. شتاب حرکت در قسمت اول چهار برابر شتاب مرحلهٔ دوم است. بنابراین شیب نمودار در قسمت اول چهار برابر شیب در قسمت دوم است.



$$|a_1| = ۴|a_2| \Rightarrow \left|\frac{v}{t_1}\right| = ۴\left|\frac{v}{t_2}\right| \Rightarrow t_2 = ۴t_1$$

سرعت v بر حسب t_1 خواهد شد: $v = at + v_0 \Rightarrow v = ۴t_1$

و کل مدت حرکت برابر است با: $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = t_1 + ۴t_1 = ۵t_1$

سطح زیر نمودار بردار جابه‌جایی $(۱km = ۱۰۰۰m)$ است، بنابراین:

$$S = \Delta x \Rightarrow \frac{۴t_1 \times t}{۲} = ۱۰۰۰ \Rightarrow \frac{۴t_1 \times ۵t_1}{۲} = ۱۰۰۰$$

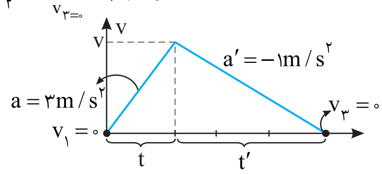
$$t_1^2 = ۱۰۰ \Rightarrow t_1 = ۱۰s \Rightarrow t = ۵۰s = \frac{۵}{۶}min$$

A ۴۰۴ ۴

خط فکری در سؤالات مشابه این تست که حرکت متحرک چندمرحله‌ای است یعنی ابتدا با شتاب تندشونده $۳m/s^2$ در حال حرکت بوده و سپس با شتاب $۱m/s^2$ حرکت کندشونده دارد بهتر است، سؤال را با استفاده نمودار $v-t$ حل کنیم.

۱ با توجه به نمودار سرعت در لحظهٔ t در هردو قسمت شیب‌دار مشترک است، بنابراین از آن‌جا که شتاب در قسمت کندشونده $\frac{۱}{۳}$ شتاب در قسمت تندشونده است بنابراین زمان و مسافت توقف درقسمت کندشونده ۳ برابر زمان و مسافت طی شده در قسمت تندشونده است.

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = at + v_1 \xrightarrow[v_1=۰]{v_2=v} v = ۳t \\ v_3 = a't' + v_2 \xrightarrow[v_3=۰]{v_2=v} v = t' \end{array}\right\} \Rightarrow t' = ۳t$$

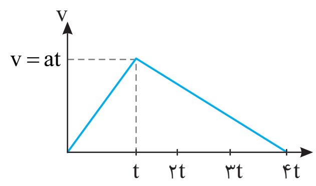


۲ مسافت طی‌شده خواهد شد:

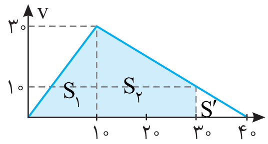
$$S = \frac{v \times ۴t}{۲} = \frac{at \times ۴t}{۲}$$

$$\xrightarrow{a=۳m/s^2} \frac{۳t \times ۴t}{۲} = ۶۰۰ \Rightarrow t = ۱۰s$$

$$v = at = ۳ \times ۱۰ = ۳۰m/s$$



۳ اکنون سطح زیر نمودار را از صفر تا ۳۰s حساب می‌کنیم. ابتدا سرعت را در لحظهٔ $t = ۳۰s$ حساب می‌کنیم:



$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -۱ \times ۲۰ + ۳۰ \Rightarrow v = ۱۰m/s$$

$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{۳۰ \times ۱۰}{۲} + \frac{۳۰ + ۱۰}{۲} \times ۲۰ \Rightarrow \ell = ۱۵۰ + ۴۰۰ = ۵۵۰m$$

میانبُر سرعت در لحظهٔ $t = ۳۰s$ را می‌توان با توجه به شیب نمودار از قسمت انتهایی محاسبه کرد: $v = at_0 + v_0 \Rightarrow v = ۱ \times ۱۰ + ۰ = ۱۰m/s$

سپس مساحت زیر نمودار بین ثانیه‌های $t = ۳۰s$ تا $t = ۴۰s$ را حساب می‌کنیم:

$$S' = \frac{۱۰ \times ۱۰}{۲} = ۵۰m$$

با کاستن این مسافت از کل مسافت طی‌شده می‌توان مسافت طی‌شده تا ثانیهٔ ۳۰ را به‌دست آورد: $\ell = ۶۰۰ - ۵۰ = ۵۵۰m$

B ۴۰۵ ۴

ابتدا جابه‌جایی خودرو را در مدتی که با شتاب $۳m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $۱۰۸km/h$ با حرکت کندشونده می‌ایستد، به دست می‌آوریم.

$$v_0 = ۱۰۸km/h = ۱۰۸ \times \frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s} = ۳۰m/s$$

$$v^2 - v_0^2 = ۲a\Delta x_2 \Rightarrow ۰ - ۹۰۰ = ۲(-۳)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = ۱۵۰m$$

در بازه‌ای که راننده مانع را می‌بینند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند، جابه‌جایی خودرو برابر است با: $\Delta x_1 = ۱۶۵ - ۱۵۰ = ۱۵m$

اکنون زمان‌های t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_1 = v_1\Delta t \Rightarrow ۱۵ = ۳۰t_1 \Rightarrow t_1 = ۰/۵s$$

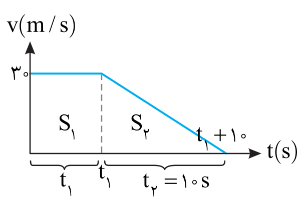
$$\Delta x_2 = \frac{۱}{۲}at^2 + v_0t \Rightarrow ۱۵۰ = \frac{۱}{۲}(-۳)(t_2^2) + ۳۰t_2$$

$$\Rightarrow ۵۰ = -\frac{۱}{۲}t_2^2 + ۱۰t_2 \Rightarrow t_2^2 - ۲۰t_2 + ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow (t_2 - ۱۰)^2 = ۰ \Rightarrow t_2 = ۱۰s$$

البته برای محاسبهٔ t_2 می‌توانستیم حرکت اتومبیل را از حال سکون و تندشونده با شتاب $+۳m/s^2$ در نظر بگیریم: $\Delta x_2 = \frac{۱}{۲}at_2^2 \Rightarrow ۱۵۰ = \frac{۱}{۲} \times ۳t_2^2 \Rightarrow t_2 = ۱۰s$

در این صورت $\frac{t_2}{t_1} = \frac{۱۰}{۰/۵} = ۲۰$.

روش رسم نمودار:



سرعت متحرک در مدت t_2 از $۳۰m/s$ با شتاب $۳m/s^2$ به صفر می‌رسد بنابراین: $v = at + v_0 \Rightarrow ۰ = -۳ \times t_2 + ۳۰ \Rightarrow t_2 = ۱۰s$

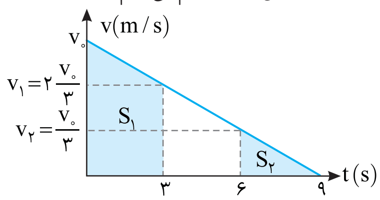
با توجه به فرض مسئله اتومبیل دقیقاً جلو مانع می‌ایستد یعنی ۱۶۵m جابه‌جا شده است. بنابراین سطح زیر نمودار $v-t$ باید ۱۶۵ متر باشد.

$$S_1 + S_2 = ۱۶۵ \Rightarrow ۳۰t_1 + \frac{۳۰ \times ۱۰}{۲} = ۱۶۵ \Rightarrow ۳۰t_1 = ۱۵ \Rightarrow t_1 = ۰/۵s$$

بنابراین نسبت t_2/t_1 خواهد شد: $\frac{t_2}{t_1} = \frac{۱۰}{۰/۵} = ۲۰$

B ۴۰۶ ۳

نمودار سرعت - زمان را به شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم.



به کمک شیب نمودار سرعت - زمان، سرعت در لحظهٔ $t=3s$ و $t=6s$ را حساب می‌کنیم. سرعت در $t=3s$:

$$\frac{0-v_0}{9-0}=\frac{v_1-v_0}{3-0}\Rightarrow\frac{-v_0}{3}=v_1-v_0\Rightarrow v_1=\frac{2v_0}{3}$$

سرعت در $t=6s$:

$$\frac{0-v_0}{9-0}=\frac{v_2-v_0}{6-0}\Rightarrow\frac{-v_0}{3}=\frac{v_2-v_0}{2}\Rightarrow\frac{-2v_0}{3}=v_2-v_0\Rightarrow v_2=\frac{v_0}{3}$$

سطح زیر نمودار S_1 و S_2 را به دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

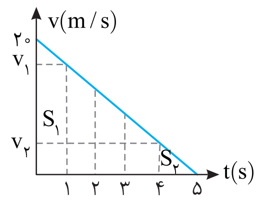
$$\begin{cases}0\to 3s:\Delta x_1=S_1=\dfrac{v_0+\frac{2v_0}{3}}{2}\times 3=\dfrac{5v_0}{2}\\ 6s\to 9s:\Delta x_2=S_2=\dfrac{\frac{v_0}{3}\times 3}{2}=\dfrac{v_0}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=\frac{\frac{5v_0}{2}}{\frac{v_0}{2}}=5$$

A ۴۰۷ ۴

زمان کل حرکت را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\xrightarrow{\Delta x=50m,\ v=0,\ v_0=20m/s}50=\frac{+20}{2}t\Rightarrow t=5s$$

سرعت در ثانیهٔ اول و ثانیهٔ $t=4s$ را به کمک شیب نمودار حساب کرده سپس سطح S_1 و S_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{0-20}{5-0}=\frac{20-v_1}{0-1}\Rightarrow v_1=16m/s$$

$$\frac{0-20}{5-0}=\frac{20-v_2}{0-4}\Rightarrow v_2=4m/s$$

سطح S_1: $S_1=\frac{20+16}{2}\times 1=18m$

سطح S_2: $S_2=\frac{4\times 1}{2}=2m$

بنابراین خواهیم داشت: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{18}{2}=9$

B ۴۰۸ ۱

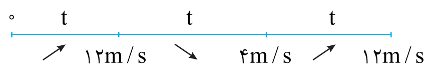
می‌توان با رابطهٔ $v=\frac{v+v_0}{2}$ تست را حل کرد. ابتدا سرعت را در ابتدا و انتهای هر بازه مشخص می‌کنیم.

سرعت در انتهای بازهٔ اول: $v_{av}=\frac{v_1+v_0}{2}\Rightarrow 6=\frac{v_1+0}{2}\Rightarrow v_1=12m/s$

سرعت در انتهای بازهٔ دوم: $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}\Rightarrow 8=\frac{v_2+12}{2}\Rightarrow v_2=4m/s$

سرعت در انتهای بازهٔ سوم: $v_{av}=\frac{v_3+v_2}{2}\Rightarrow 8=\frac{v_3+4}{2}\Rightarrow v_3=12m/s$

دقت کنید، سرعت انتهای هر قسمت، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است. ابتدا سرعت از صفر به $12m/s$ رسیده است. پس حرکت تندشونده است. سپس از $12m/s$ به $4m/s$ می‌رسد. یعنی حرکت کندشونده است و سرانجام از $4m/s$ به $12m/s$ می‌رسد. یعنی سرانجام حرکت تندشونده است.



B ۴۰۹ ۱

خط فکری مبدأ و مقصد دو متحرک (۱) و (۲) یکسان است و هر دو هم‌زمان از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند. شتاب متحرک (۱) برابر $a_1=2m/s^2$ و شتاب متحرک (۲) را $a_2=8m/s^2$ بوده بنابراین متحرک (۲) زودتر به مقصد می‌رسد. اگر زمان رسیدن متحرک (۱) به مقصد را t_1 فرض کنیم، زمان رسیدن متحرک (۲) به مقصد برابر $t_2=t_1-3$ خواهد بود. از این رو شما باید معادلهٔ جابه‌جایی - زمان هر دو متحرک را نوشته و با هم مساوی قرار دهید تا زمان رسیدن هر متحرک به مقصد را به‌دست بیاورید و سرانجام طول مسیر AB را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است.

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2t_2^2\xrightarrow{t_1=t_2+3}\frac{1}{2}\times 2(t_2+3)^2=\frac{1}{2}\times 8t_2^2$$

$$\Rightarrow|t_2+3|=|2t_2|\Rightarrow t_2=3s$$

۲ اکنون مقدار جابه‌جایی را به دست می‌آوریم: $\Delta x=\frac{1}{2}\times 8\times(3)^2\Rightarrow x=36m$

B ۴۱۰ ۲

خط فکری یک تست ساده روبه‌روی شماست. دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند و به سوی یک مقصد می‌روند، پس شما باید جابه‌جایی آن‌ها را برابر قرار دهید. البته متحرکی که شتابش بیشتر است، سریع‌تر (زودتر) به مقصد می‌رسد. یعنی اگر شما زمان حرکت متحرک تندرو را t_1 بگیرید زمان حرکت متحرک کندرو $t_2=t_1+2$ می‌شود و شما می‌توانید مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی‌ها یکسان است. $\Delta x_1=\Delta x_2$

۲ معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}a\right)(t_1+2)^2\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}(t_1+2)$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}t_1+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}t_1=\frac{3}{2}\Rightarrow t_1=6s$$

بازی با سؤال **دو متحرک هم‌زمان از یک نقطه روی خط راست با شتاب $a_2=8m/s^2$ و $a_1=2m/s^2$ به سوی یک مقصد از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و با فاصلهٔ زمانی 4s به مقصد می‌رسند. سرعت متحرکی که دیرتر به مقصد می‌رسد هنگام رسیدن به مقصد چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۸　　۲) ۱۶　　۳) ۱۲　　۴) ۲۴

پاسخ **جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است. از این‌رو:**

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\ ,\ \ \Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}(2)t_1^2=\frac{1}{2}(8)(t_1-4)^2$$

$$\Rightarrow t_1=2(t_1-4)\Rightarrow t_1=8s$$

زمان حرکت متحرک با شتاب کمتر برابر 8s است بنابراین سرعت آن هنگام رسیدن به مقصد برابر است با: $v=at+v_0\Rightarrow v=2\times 8=16m/s$

گزینهٔ ۲

A ۴۱۱ ۲

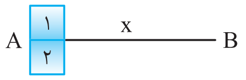
خط فکری سرعت دو متحرک در لحظهٔ t داده شده است. اگر شما معادلهٔ سرعت زمان را برای هریک از دو متحرک بنویسید و مقدار سرعت در لحظهٔ t را در معادله قرار دهید، در این صورت دو معادله دو مجهول به‌دست می‌آورید که با حل آن می‌توانید t را حساب کنید. البته بهتر بود که طراح در صورت مسئله بیان می‌کرد که متحرک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. یعنی سرعت اولیه صفر است. $(v_0=0)$

با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}10=at+v_0\\22=(a+1/5)t+v_0\end{cases}\xrightarrow{v_0=0}\begin{cases}10=at\\22=at+1/5t\end{cases}$$

$$\Rightarrow 22=10+1/5t\Rightarrow t=\frac{12}{1/5}=8s$$

B | ۴۱۲ | ۲



۱ سرعت متحرک در هر لحظه را با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان به دست می‌آوریم:

$$v_1=a_1t_1+v_0 \xrightarrow{\text{از حال سکون}} v_1=a_1t_1$$

$$v_2=a_2t_2+v_0 \xrightarrow{\text{از حال سکون}} v_2=a_2t_2$$

۲ در یک لحظه سرعت متحرک اول دو برابر سرعت متحرک دوم است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{a_1t_1}{a_2t_2}=2 \xrightarrow[t_1=t_2]{\text{در یک لحظه}} \frac{v_1}{v_2}=\frac{a_1}{a_2}=2\Rightarrow a_1=2a_2$$

۳ هر دو متحرک تا انتهای مسیر جابه‌جایی یکسانی را انجام می‌دهند. معادلهٔ مستقل از زمان را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\begin{cases} v_{f_1}^2-v_0^2=2a_1x \\ v_{f_2}^2-v_0^2=2a_2x \end{cases} \xrightarrow[x=AB]{v_0=0} \begin{cases} v_{f_1}^2=2a_1x\Rightarrow v_{f_1}^2=4a_2x & (1) \\ v_{f_2}^2=2a_2x & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(1)}{(2)}\Rightarrow \left(\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}}\right)^2=2\Rightarrow \frac{v_{f_1}}{v_{f_2}}=\sqrt{2}\Rightarrow v_{f_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_{f_1}\Rightarrow v_{f_2}=10\sqrt{2}\,m/s$$

B | ۴۱۳ | ۲

خط فکری دو متحرک A و B بدون سرعت اولیه $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده‌اند. شتاب متحرک A، چهار برابر شتاب متحرک B است $(a_A=4a_B)$. معادلهٔ مکان - زمان را برای دو متحرک A و B بنویسید و جابه‌جایی‌های آن‌ها را با برابر قرار دهید تا بتوانید رابطه‌ای بین زمان حرکت دو متحرک به‌دست بیاورید و از آن‌جا سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک را برابر قرار می‌دهیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B} \frac{1}{2}a_At_A^2=\frac{1}{2}a_Bt_B^2$$

$$\xrightarrow[\text{فرض مسئله}]{a_A=4a_B} 4t_A^2=t_B^2\Rightarrow t_B=2t_A$$

۲ اکنون نسبت سرعت متوسط A به سرعت متوسط B را به دست می‌آوریم.

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}}=\frac{\frac{\Delta x_A}{t_A}}{\frac{\Delta x_B}{t_B}}=\frac{t_B}{t_A}=2$$

A | ۴۱۴ | ۲

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را در اختیار دارید، بنابراین کافی است که با مقایسهٔ معادله‌های حرکت با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیهٔ هر متحرک را به‌دست آورده و معادلهٔ سرعت - زمان هر متحرک را بنویسید و تفاضل سرعت‌ها را مطابق فرض مسئله برابر $8m/s$ قرار دهید.

با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت با معادلهٔ حرکت دو متحرک داده شده، معادله سرعت زمان را می‌نویسیم:

متحرک (۱):

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x_1=2t^2-3t+17 \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{2}a_1=2\Rightarrow a_1=4m/s^2\,,\,v_0=-3m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۱): $v_1=4t-3$

متحرک (۲):

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x_2=t^2-\alpha t \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{2}a_2=1\Rightarrow a_2=2m/s^2\,,\,v_0=-\alpha$$

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۲): $v_2=2t-\alpha$

با توجه به فرض مسئله:

$$v_1-v_2=8\Rightarrow 4t-3-(2t-\alpha)=8\Rightarrow 2t-3+\alpha=8$$

$$\xrightarrow{t=3s} 3+\alpha=8\Rightarrow \alpha=5$$

A | ۴۱۵ | ۲

خط فکری هرگاه از شما مدت زمان رسیدن دو متحرک به هم خواسته شود، کافی است معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را با برابر قرار دهید.

خودرو دارای شتاب ثابت بوده و معادلهٔ مکان - زمان آن خواهد شد:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x_{\text{خودرو}}=t^2$$

کامیون دارای سرعت ثابت بوده و معادلهٔ حرکت آن خواهد شد:

ابتدا سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم:

$$36\frac{km}{h}\times\frac{10}{36}=10\frac{m}{s}\Rightarrow x=vt\Rightarrow x_{\text{کامیون}}=10t$$

هنگامی که دو متحرک به هم می‌رسند $x_{\text{کامیون}}=x_{\text{خودرو}}$ می‌شود پس:

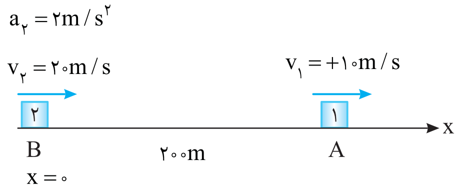
$$t^2=10t\Rightarrow t^2-10t=0\Rightarrow t(t-10)=0\Rightarrow t=10s$$

جابه‌جایی کامیون و خودرو در $t=10s$ برابر است با:

$$\Delta x_{\text{خودرو}}=\Delta x_{\text{کامیون}}=100m$$

B | ۴۱۶ | ۲

خط فکری در صورت مسئله بیان نشده که متحرک (۱) با سرعت ثابت $10m/s$ به دنبال متحرک (۲) در حرکت است یا برعکس؟ اگر متحرک (۱) از نقطهٔ A به دنبال متحرک (۲) حرکت کند هرگز به متحرک (۲) نمی‌رسد زیرا سرعت متحرک (۱) $10m/s$ و سرعت اولیهٔ متحرک (۲) $20m/s$ و حرکت آن شتابدار است. بنابراین شما باید معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را در حالتی که متحرک (۲) به دنبال متحرک (۱) است بنویسید و مکان‌ها را برابر قرار دهید.



$$\begin{cases} x_1=vt+x_0\Rightarrow x_1=+10t+200 \\ x_2=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\times 2t^2+20t \end{cases}\Rightarrow +10t+200=t^2+20t$$

$$\Rightarrow t^2+10t-200=0\Rightarrow (t-10)(t+20)=0\Rightarrow t=10s$$

B | ۴۱۷ | ۳

۱ جهت حرکت را مثبت و محل شروع حرکت را مبدأ مکان $(x_0=0)$ می‌گیریم، سرعت توپ با آهنگ $1m/s$ کم می‌شود، یعنی شتاب حرکت $-1m/s^2$ است و سرعت اولیهٔ توپ $15m/s$ است. معادلهٔ حرکت توپ را می‌نویسیم:

$$a=-1\,m/s^2\quad,\quad x_{\text{توپ}}=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x_{\text{توپ}}=-\frac{1}{2}t^2+15t$$

۲ موتور نیز از همان مکان با شتاب $a=2m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند $(v_0=0)$، بنابراین معادلهٔ حرکت موتور خواهد شد:

$$x_{\text{موتور}}=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x_{\text{موتور}}=t^2$$

۳ هنگامی که توپ و موتور به هم می‌رسند مکان آن‌ها یکسان است، از این‌رو معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{\text{موتور}}=x_{\text{توپ}}\Rightarrow t^2=-\frac{1}{2}t^2+15t\Rightarrow \frac{3}{2}t^2-15t=0\Rightarrow t^2-10t=0$$

$$\Rightarrow t(t-10)=0\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=10s \end{cases}$$

بنابراین پس از $10s$ موتورسوار و توپ به هم می‌رسند. در این مدت موتورسوار $x_{\text{موتور}}=t^2=10^2=100m$ جابه‌جا شده است.

A ۴۱۸ ۱

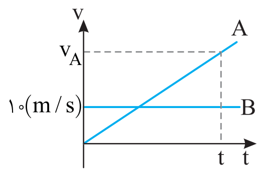
خط فکری مسئلهٔ جالبی است، ابتدا به این فکر می‌افتیم که معادلهٔ مکان – زمان دو متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم و مسئله حل می‌شود، اما شتاب حرکت متحرک A را نداریم، بنابراین برای متحرک A از معادلهٔ مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم و سرعت متحرک A هنگام رسیدن به متحرک B را حساب می‌کنیم.

با توجه به صورت پرسش می‌توان نوشت:

$$x_A=\frac{v+v_0}{۲}t\Rightarrow x_A=\frac{v_A}{۲}t \quad , \quad x_B=v_Bt\Rightarrow x_B=۱۰t$$

$$\xrightarrow{x_A=x_B}\frac{v_A}{۲}t=۱۰t\Rightarrow v_A=۲۰m/s$$

روش دوم: استفاده از نمودار سرعت – زمان
نمودار سرعت – زمان دو متحرک A و B را رسم می‌کنیم. اگر در لحظهٔ t دو متحرک از کنار هم بگذرند، باید سطح زیر نمودار A و B تا لحظهٔ t با هم برابر باشند. از این رو:



$$S_A=S_B\Rightarrow\frac{v_At}{۲}=۱۰t\Rightarrow v_A=۲۰m/s$$

B ۴۱۹ ۴

خط فکری متحرک A از نقطهٔ O شروع به حرکت کرده و 5s بعد متحرک B در همان جهت از نقطهٔ O می‌گذرد. وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، متحرک A، 5s بیشتر در حرکت بوده است $(t_A>t_B)$ بنابراین زمان حرکت B، 5s از زمان حرکت A کمتر است $(t_B=t_A-۵)$. معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم.

معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. (نقطهٔ O را مبدأ در نظر می‌گیریم.)

معادلهٔ حرکت A: $x_A=\frac{۱}{۲}a_At^2+v_{0A}t\Rightarrow x_A=t_A^2$

معادلهٔ حرکت B: $x_B=vt_B\Rightarrow x_B=۳۰(t_A-۵)$

$$x_A=x_B\Rightarrow t_A^2=۳۰t_A-۱۵۰\Rightarrow t_A^2-۳۰t_A+۱۵۰=۰$$

$$\Rightarrow t_A=+۱۵\pm\sqrt{۲۲۵-۱۵۰}\Rightarrow t_A=۱۵\pm\sqrt{۷۵}=۱۵\pm۵\sqrt{۳}$$

با توجه به فرض پرسش $\sqrt{۳}=۱/۷$: $t_A=۱۵\pm۸/۵\Rightarrow t_A=۶/۵s, ۲۳/۵s$

C ۴۲۰ ۱

خط فکری هرگاه معادلهٔ مکان – زمان دو متحرک را نوشته و برابر قرار دهیم می‌توان لحظهٔ گذر دو متحرک از کنار یکدیگر را به‌دست آورد. وقتی یکی از متحرک‌ها دارای حرکت با شتاب ثابت باشد، معادلهٔ به‌دست آمده یک تابع درجه ۲ است. اگر معادله دارای دو جواب $(\Delta>0)$ باشد و هر دو جواب مثبت باشند $(t>0)$، متحرک‌ها دو بار از کنار هم می‌گذرند و اگر معادله دارای یک جواب مثبت $(\Delta=0)$ باشد، دو متحرک یک بار در کنار هم قرار می‌گیرند و اگر $(\Delta<0)$ باشد دو متحرک از کنار هم نمی‌گذرند.

۱ معادلهٔ حرکت کامیون را می‌نویسیم:

$$x_{\text{ک}}=\frac{۱}{۲}at^2+v_0t\xrightarrow{a=۲m/s^2,v_0=۰}x_{\text{ک}}=\frac{۱}{۲}\times۲t^2+۰\Rightarrow x_{\text{ک}}=t^2$$

۲ اگر مدت حرکت کامیون t باشد مدت حرکت اتومبیل t−۱ است. بنابراین معادلهٔ حرکت اتومبیل خواهد شد: $x_{\text{اتو}}=vt_{\text{اتو}}\Rightarrow x_{\text{اتو}}=v(t-۱)$

۳ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم. $t^2=vt-v\Rightarrow t^2-vt+v=۰$

۴ باید $\Delta=۰$ شود تا اتومبیل یک بار در کنار کامیون باشد.

$$v^2-۴v=۰\Rightarrow v=۴m/s$$

A ۴۲۱ ۲

زمان حرکت کامیون را وقتی ۹/۹m جابه‌جا شده است به دست می‌آوریم:

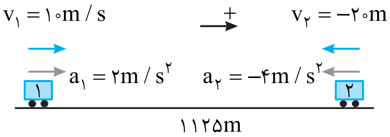
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^2+v_0t\xrightarrow{a=۲/۲m/s^2}۹/۹=\frac{۱}{۲}(۲/۲)t^2\Rightarrow t=۳s$$

در این لحظه $(t=۳s)$ اتومبیل به کامیون می‌رسد و سرعت آن برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=۳/۵\times۳\Rightarrow v=۱۰/۵m/s$$

B ۴۲۲ ۱

با توجه به شکل رسم شده، معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم. به دلخواه خود، مکان متحرک (۱) را مبدأ مختصات گرفته و جهت متحرک اول را جهت مثبت اختیار کرده‌ایم. در هر دو حرکت باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت باشند زیرا هر دو حرکت تندشونده هستند.



$$x=\frac{۱}{۲}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{۱}{۲}\times۲t^2+۱۰t\\ x_2=\frac{۱}{۲}(-۴)t^2-۲۰t+۱۱۲۵\end{cases}\xrightarrow{x_1=x_2}$$

$$t^2+۱۰t=-۲t^2-۲۰t+۱۱۲۵\Rightarrow۳t^2+۳۰t-۱۱۲۵=۰\Rightarrow t^2+۱۰t-۳۷۵=۰$$

$$t=-۵\pm\sqrt{۲۵+۳۷۵}=-۵\pm۲۰\Rightarrow t=۱۵s \quad , \quad t=-۲۵s$$ غ ق ق

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجه دو $y=ax^2+bx+c$، هرگاه b عدد زوج باشد $(b=۲b')$، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد که محاسبات عددی ساده‌تر شود زیرا اعداد کوچک‌تر هستند.

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

میانبر استفاده از سرعت نسبی و شتاب نسبی.

چون سرعت‌های اولیه خلاف جهت هم هستند:

$$v_{\text{نسبی}}=v_1+v_2=۱۰+۲۰=۳۰ m/s$$

چون شتاب‌های دو متحرک خلاف جهت هم هستند:

$$a_{\text{نسبی}}=a_1+a_2=۲+۴=۶m/s^2$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a_{\text{نسبی}}t^2+v_{0\text{نسبی}}t\Rightarrow۱۱۲۵=\frac{۱}{۲}(۶)t^2+۳۰t\Rightarrow۳t^2+۳۰t-۱۱۲۵=۰$$

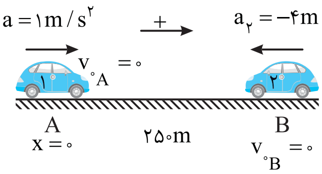
$$\Rightarrow t^2+۱۰t-۳۷۵=۰\Rightarrow t=۱۵s$$

B ۴۲۳ ۴

نقطهٔ A را مبدأ مختصات و جهت راست را جهت مثبت فرض می‌کنیم. سپس داده‌های مسئله را با توجه به علامت آن‌ها روی شکل می‌نویسیم تا حل مسئله راحت‌تر شود.

۱ ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_A=\frac{t^2}{۲} \quad , \quad x_B=-۲t^2+۲۵۰$$



۲ هنگام رسیدن دو متحرک به هم $x_A=x_B$ است، بنابراین:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{t^2}{۲}=-۲t^2+۲۵۰\Rightarrow\frac{۵t^2}{۲}=۲۵۰\Rightarrow t^2=۱۰۰s\Rightarrow t=۱۰s$$

۳ دو متحرک پس از 10s به هم می‌رسند. حال مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک (۱) از A به B برسد را به دست می‌آوریم:

$$۲۵۰=\frac{t'^2}{۲}\Rightarrow t'^2=۵۰۰\Rightarrow t'=۱۰\sqrt{۵}=۱۰\times۲/۲=۲۲s$$

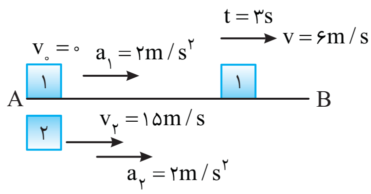
۴ متحرک (۱) $t'-t=۲۲-۱۰=۱۲s$ پس از به هم رسیدن متحرک (۱) و (۲) به مکان B می‌رسد.

B ۴۲۴ ۱

دقت کنید سرعت متحرک اول پس از $3s$ با شتاب $2m/s^2$ خواهد شد:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_1=2\times 3+0 \Rightarrow v_1=6m/s$$

در لحظه‌ای که سرعت متحرک اول $6m/s$ است، سرعت متحرک دوم $15m/s$ و شتاب هر دو متحرک یکسان است. چون سرعت متحرک (۲) بیشتر است. به متحرک (۱) نزدیک شده از آن سبقت می‌گیرد و سپس از متحرک اول دور می‌شود.



B ۴۲۵ ۲

خط فکری پس از جدا شدن واگن، قطار با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و واگن با حرکت کندشونده متوقف می‌شود. شتاب حرکت واگن را نداریم بنابراین شما باید برای واگن از معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) استفاده کنید.

۱ برای واگن می‌نویسیم:

$$\Delta x_{\text{واگن}}=\frac{v+v_0}{2}\Delta t=\frac{v_0}{2}\Delta t$$

۲ قطار با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه داده است از این رو:

$$\Delta x_{\text{قطار}}=v_0\Delta t$$

۳ اکنون خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta x_{\text{واگن}}}{\Delta x_{\text{قطار}}}=\frac{\frac{v_0}{2}\Delta t}{v_0\Delta t}=\frac{1}{2}$$

B ۴۲۶ ۲

خط فکری از شما خواسته شده فاصلهٔ دو متحرک را پس از توقف متحرک دوم برحسب v و a به‌دست بیاورید. بنابراین شما ابتدا باید زمان توقف و جابه‌جایی متحرک (۲) را حساب کرده سپس مقدار جابه‌جایی متحرک (۱) را در این مدت به‌دست آورده و جابه‌جایی‌ها را از هم کم کنید.

۱ ابتدا زمان توقف و جابه‌جایی متحرک (۲) از محل گذر دو متحرک تا محل توقف را به دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-at_2+v \Rightarrow t_2=\frac{v}{a}$$

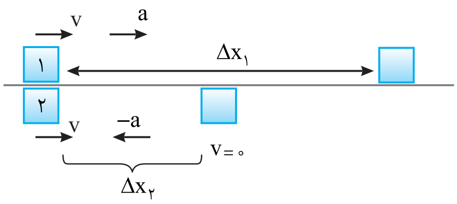
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-v^2=-2a\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2=\frac{v^2}{2a}$$

۲ اکنون جابه‌جایی متحرک (۱) را با شتاب a در مدت t_2 حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2+v\left(\frac{v}{a}\right)=\frac{3}{2}\frac{v^2}{a}$$

۳ فاصلهٔ دو متحرک از هم خواهد شد:

$$\Delta x_1-\Delta x_2=\frac{3v^2}{2a}-\frac{v^2}{2a}=\frac{v^2}{a}$$



B ۴۲۷ ۲

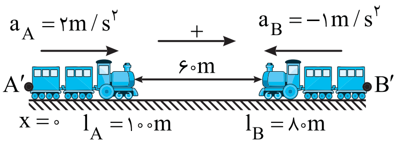
خط فکری ابتدا باید دقت کنید که این دو قطار وقتی به‌طور کامل از کنار هم می‌گذرند که انتهای قطار A به انتهای قطار B برسد. یعنی نقاط A' و B' از کنار هم بگذرند. بنابراین شما باید یک نقطه مثلاً محل ابتدایی A' را مبدأ و جهت راست را جهت مثبت فرض کنید. در این صورت مکان اولیهٔ B' خواهد شد $(x_{0B'}=100+60+80=240m)$

معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نوشته و مسئله را حل کنید.

معادلهٔ مکان زمان نقطهٔ A' و B' را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم.

$$x_{A'}=\frac{1}{2}a_At^2 \Rightarrow x_{A'}=t^2 \quad , \quad x_{B'}=\frac{1}{2}a_Bt^2+d \Rightarrow x_{B'}=-\frac{t^2}{2}+240$$

$$x_{A'}=x_{B'} \Rightarrow t^2=-\frac{t^2}{2}+240 \Rightarrow \frac{3t^2}{2}=240 \Rightarrow t^2=160 \Rightarrow t=4\sqrt{10}s$$



B ۴۲۸ ۲

هنگامی قطار B به‌طور کامل از قطار A سبقت می‌گیرد که انتهای قطار B به ابتدای قطار A برسد، یعنی نقطهٔ B' (انتهای قطار B) به نقطهٔ A' (ابتدای قطار A) برسد. مکان ابتدایی B' را مبدأ مکان و جهت راست را مطابق شکل جهت مثبت در نظر می‌گیریم و برای نقاط B' و A' معادلهٔ حرکت می‌نویسیم:

$$x_{A'}=vt+x_0 \xrightarrow{x_0=250m} x_{A'}=37.5t+250$$

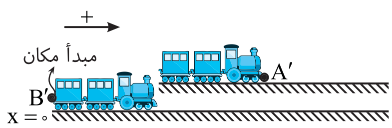
معادلهٔ حرکت A: $x_{A'}=37.5t+250$

معادلهٔ حرکت B: $x_{B'}=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow x_{B'}=2.5t^2$

مکان A' و B' را برابر قرار می‌دهیم:

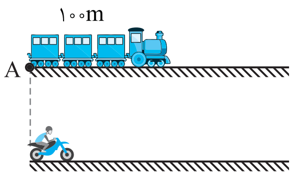
$$x_{A'}=x_{B'} \Rightarrow 37.5t+250=2.5t^2 \Rightarrow 2.5t^2-37.5t-250=0$$

$$\Rightarrow t^2-15t-100=0 \Rightarrow (t-20)(t+5)=0 \Rightarrow t=20s$$



B ۴۲۹ ۲

۱ نقطهٔ A را مبدأ مکان می‌گیریم و جهت حرکت قطار و موتور را جهت مثبت فرض می‌کنیم.



۲ معادلهٔ حرکت موتور که با شتاب $4m/s^2$ از حال سکون $(v_0=0)$ به راه می‌افتد را می‌نویسیم.

$$x_{\text{م}}=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x_{\text{م}}=\frac{1}{2}\times 4t^2+0 \Rightarrow x_{\text{م}}=2t^2$$

۳ موتور قرار است که از جلوی قطار بگذرد بنابراین معادلهٔ نقطهٔ جلوی قطار را که در فاصلهٔ ۱۰۰ متری نقطهٔ A قرار دارد می‌نویسیم. $x=vt+x_0 \Rightarrow x_{\text{جلوی ق}}=10t+100$

۴ معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم.

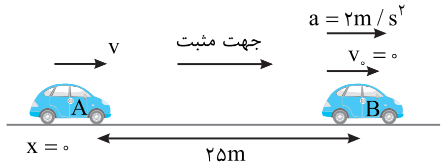
$$x_{\text{م}}=x_{\text{جلوی ق}} \Rightarrow 2t^2=10t+100 \Rightarrow t^2-5t-50=0 \Rightarrow (t+5)(t-10)=0$$

$$\Rightarrow t=10s$$

۴۳۰ ۱ B

خط فکری هرگاه قرار باشد که دو متحرک به هم برسند، معادلهٔ مکان – زمان دو متحرک را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم. اگر یکی از متحرک‌ها (و یا هردو) دارای حرکت شتاب‌دار باشد با برابر قرار دادن معادله‌های حرکت، یک معادلهٔ درجهٔ ۲ به‌دست می‌آید و برای آنکه دو متحرک از کنار هم بگذرند باید $\Delta \geq 0$ شود یعنی معادله دارای جواب باشد. از این رو شما معادلهٔ حرکت‌های دو متحرک را نوشته برابر قرار دهید و Δ را بزرگ‌تر و مساوی صفر بگذارید.

محل ابتدایی خودروی A در لحظه‌ای که خودروی B شروع به حرکت می‌کند را مبدأ مکان و مطابق شکل جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم.



معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به محل ابتدایی خودروی A می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = vt + x_0 \Rightarrow x_A = vt \\ x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_B = t^2 + 25 \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B} vt = t^2 + 25$$

$$\Rightarrow t^2 - vt + 25 = 0$$

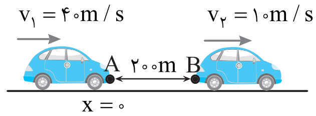
اگر معادله به دست آمده دارای جواب باشد، دو متحرک به هم می‌رسند. معادلهٔ درجه ۲ وقتی جواب دارد که $\Delta \geq 0$ باشد از این‌رو:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow v^2 - 4 \times 25 \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq 100 \Rightarrow v \geq 10\,m/s$$

بنابراین حداقل سرعت v باید $10\,m/s$ باشد.

۴۳۱ ۲ C

خط فکری وقتی خودروی عقبی به خودروی جلویی برخورد می‌کند که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد (مطابق شکل). در این صورت اگر معادلهٔ حرکت دو خودرو را بنویسیم در آخر به یک معادلهٔ درجهٔ ۲ می‌رسیم. با حل این معادله زمان رسیدن A به B به‌دست می‌آید. اما مسئله می‌خواهد که خودروی عقبی به خودروی جلویی نرسد. یعنی از نظر ریاضی باید معادلهٔ به‌دست آمده بدون جواب باشد $(\Delta < 0)$ معادله‌های حرکت را بنویسید، با هم برابر قرار داده و Δ ی آن را کوچک‌تر از صفر قرار دهید.



معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at^2 + 40t \\ x_2 = v_2 t = 10t + 200 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 40t = 10t + 200 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 30t - 200 = 0$$

اگر این معادله جواب نداشته باشد برخوردی صورت نمی‌گیرد. برای این منظور باید $\Delta < 0$ باشد.

$$\Delta < 0 \Rightarrow 900 + 400a < 0 \Rightarrow a < -\frac{9}{4} \Rightarrow |a| > \frac{9}{4}$$

بنابراین کمینه (حداقل) مقدار a باید برابر $\frac{9}{4}m/s^2$ باشد تا متحرک عقبی به متحرک جلویی برخورد نکند.

۴۳۲ ۳ B

خط فکری شکل مسئله را کامل کنید. یعنی تمام داده‌های مسئله را روی آن بنویسید.

نقطهٔ ۲ را مبدأ مکان و جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم. در این صورت شتاب متحرک A که حرکتش تندشونده است $a_A = +4m/s^2$ و شتاب متحرک B که حرکتش کندشونده بوده $a_B = -4m/s^2$ می‌شود. معادله‌های حرکت را بنویسید و با هم برابر قرار دهید. یک معادلهٔ درجه ۲ به‌دست می‌آورید که ریشه‌های آن، لحظه‌هایی است که دو متحرک به هم می‌رسند اما برای آنکه معادله دارای جواب باشد باید $\Delta \geq 0$ باشد. حل مسئله را شروع کنید.

۱ معادلهٔ متحرک‌های A و B را می‌نویسیم، حرکت متحرک A تندشونده است پس شتاب در جهت حرکت می‌باشد امّا حرکت متحرک B کندشونده است پس شتاب خلاف جهت حرکت می‌باشد.

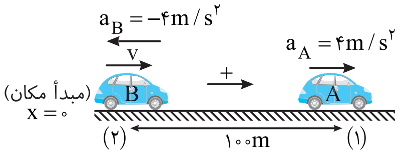
$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A} t + x_0 \Rightarrow x_A = 2t^2 + 100 \\ x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B} t \Rightarrow x_B = -2t^2 + vt \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B}$$

$$2t^2 + 100 = -2t^2 + vt \Rightarrow 4t^2 - vt + 100 = 0$$

۲ معادلهٔ بالا به ازای $\Delta \geq 0$ جواب خواهد داشت:

$$(-v)^2 - 4(400) \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq 1600 \Rightarrow v \geq 40\,m/s$$

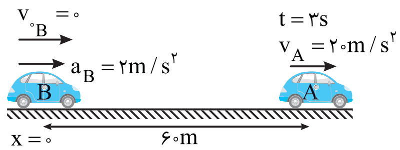
بنابراین کمینهٔ سرعت متحرک B در لحظهٔ نشان داده شده $v = 40\,m/s$ می‌باشد.



۴۳۳ ۳ C

خط فکری سؤال جالبی است. اتومبیل A با سرعت ثابت از کنار اتومبیل ساکن B می‌گذرد، سه ثانیه بعد اتومبیل B با شتاب $2m/s^2$ به دنبال A به راه می‌افتد. در این لحظه اتومبیل A به اندازهٔ $(\Delta x = 20 \times 3 = 60m)$ جلوتر از اتومبیل B است. اما مهم‌ترین نکته این است که تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A $(20m/s)$ از سرعت اتومبیل B بیشتر باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل زیاد می‌شود و لحظه‌ای که $v_B \geq v_A$ شود فاصلهٔ دو اتومبیل شروع به کم شدن می‌کند. بنابراین در لحظه‌ای که $v_B = 20m/s$ می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم بیشترین مقدار است. با توجه به این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

۱ مدت زمانی که طول می‌کشد سرعت متحرک B به سرعت $20m/s$ برسد برابر است با: $v = a_B t + v_0 \Rightarrow 20 = 2t \Rightarrow t = 10s$



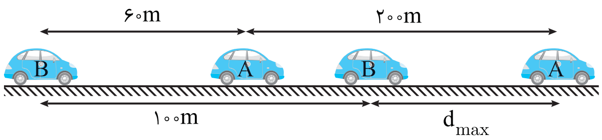
۲ در این مدت جابه‌جایی A و B را به دست می‌آوریم:

$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_0 t \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100m$$

$$x_A = vt \Rightarrow x_A = 20 \times 10 = 200m$$

۳ بنابراین جابه‌جایی متحرک A از لحظهٔ عبور از متحرک B برابر است با

$$200 + 60 = 260m$$



۴ بیشینه فاصلهٔ A و B خواهد شد:

$$d = x_A - x_B \Rightarrow d_{max} = 260 - 100 = 160m$$

۴۳۴ ۳ A

تا لحظهٔ $t = 3T$ سرعت متحرک ثابت است. با توجه به رابطهٔ $\Delta x = v\Delta t$ و با توجه به شکل‌ها، در $t = 0$ تا $t = T$ متحرک A بیشتر از متحرک B جابه‌جا می‌شود:

$$\begin{matrix} \Delta x_A = v_{0A} T \\ \Delta x_B = v_{0B} T \end{matrix} \xrightarrow{\Delta x_A > \Delta x_B} v_{0A} > v_{0B}$$

از لحظهٔ $t = 3T$ به بعد حرکت‌ها با شتاب ثابت است و با ادامهٔ حرکت از این لحظه به بعد جابه‌جایی‌های متحرک B بیشتر از جابه‌جایی‌های متحرک A شده است بنابراین شتاب متحرک B بیشتر از شتاب متحرک A است. در ثانیهٔ Tام آخر حرکت چون جابه‌جایی B بیشتر از جابه‌جایی A بوده پس سرعت انتهایی متحرک B بزرگ‌تر از سرعت انتهایی متحرک A است.

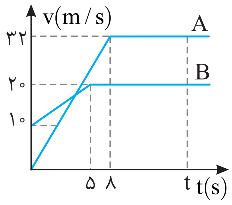
B ۴۳۵ ۴

خط فکری در مسائلی که نوع حرکت متحرک تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را بـه کمک رسـم نمودار سـرعت - زمان حـل کنیم. در لحظه‌ای کـه دو متحرک به هم می‌رسـند باید سطح زیر نمودار سـرعت - زمان دو متحرک با هم برابر باشد. از این رو با توجه به داده‌های مسئله، نمودارها را رسم کنید.

۱ زمان رسیدن دو متحرک به سرعت ثابت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 4=\frac{32-0}{t}\Rightarrow t_A=8s \quad , \quad 2=\frac{20-10}{t}\Rightarrow t_B=5s$$

۲ نمودار سـرعت - زمان هر دو متحرک را رسـم می‌کنیم. لحظه‌ای کـه دو متحرک به هم می‌رسند (t) سـطح زیر نمودار سرعت - زمان آن‌ها یکی است.



یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع است.

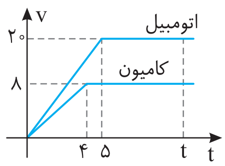
$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow S_A=S_B\Rightarrow\frac{t+t-8}{2}\times32=\frac{20+10}{2}\times5+20\times(t-5)\Rightarrow$$

$$(2t-8)\times16=75+20t-100\Rightarrow32t-128=20t-25\Rightarrow12t=103\Rightarrow t=\frac{103}{12}s$$

بازی با سوال **یک اتومبیل و یک کامیون به طور همزمان از حال سکون و در یک جهت شروع به حرکت می‌کنند. در لحظهٔ شروع حرکت اتومبیل ۲۰۶m عقب‌تر از کامیون اسـت. ابتدا اتومبیل ۵s با شـتاب ثابت ۴m/s² و کامیون ۴s با شتاب ثابت ۲m/s² حرکت می‌کنند. سپس هر یک از آن‌ها با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهند. چند ثانیه پس از شروع حرکت، اتومبیل به کامیون می‌رسد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ **نمـودار سـرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم:**



اتومبیل: $v=at+v_0\Rightarrow v=4\times5=20m/s$

کامیون: $v=at+v_0\Rightarrow v=2\times4=8m/s$

دقت کنید برای آنکه دو متحرک به هم برسـند باید سـطح زیر نمودار اتومبیل از سـطح زیر نمودار کامیون ۲۰۶ متر بیشـتر باشد. زیرا اتومبیل ۲۰۶m عقب بودن خود را باید جبران کند.

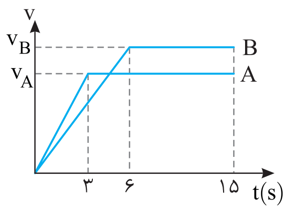
$$S_{\text{اتومبیل}}=S_{\text{کامیون}}+206\Rightarrow\frac{t+(t-5)}{2}\times20=\frac{t+(t-4)}{2}\times8+206\Rightarrow$$

$$20t-50=8t-16+206\Rightarrow12t=240\Rightarrow t=20s$$

گزینهٔ ۱

B ۴۳۶ ۴

۱ باید نمودار سـرعت - زمان دو متحـرک A و B را مطابـق شـکل روبه‌رو رسـم کنید. دقت کنید که در ۳s اول نمودار متحرک A خط راست مایـل و پس از آن نمودار خط راسـت افقی است و برای متحرک B نمودار تا لحظهٔ t=6s، حرکت با شتاب ثابت و سـرعت در حـال افزایش تـا مقدار v_B است و از آن به بعد سرعت متحرک B ثابت است.



۲ دو متحرک پس از ۱۵s با هم از مبدأ به مقصد می‌رسـند بنابراین سطح زیر نمودار دو متحرک در بازهٔ صفر تا ۱۵s باید برابر باشد.

$$S_A=S_B\Rightarrow(15+12)\times\frac{v_A}{2}=(15+9)\times\frac{v_B}{2}\Rightarrow27v_A=24v_B$$

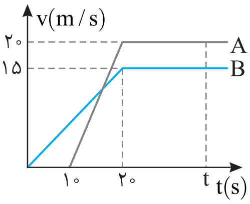
$$\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{24}{27}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{8}{9}$$

۳ اکنون نسبت شتاب دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{\frac{v_A-0}{3}}{\frac{v_B-0}{6}}\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{v_A}{v_B}\times2\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{8}{9}\times2=\frac{16}{9}$$

C ۴۳۷ ۲

خط فکری بـا توجه به نمـودار متحرک A، ۱۰s پس از حرکت متحرک B به راه می‌افتد. بنابراین باید مشخص کنیم در این مدت متحرک B چنـد متر از متحرک A جلو می‌افتد. سـپس سـطح زیر نمودار را برای هر دو متحرک A و B در لحظهٔ t که به هم می‌رسند حساب کنیم. البته سطح زیر نمودار A باید به مقداری که از متحرک B عقب است از سطح زیر نمودار B بیشتر باشد.



۱ شتاب متحرک B را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{15-0}{20}\Rightarrow a=\frac{3}{4}m/s^2$

۲ جابه‌جایی متحرک B را در مدت ۱۰s به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\Delta x_B=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times(10)^2+0\Rightarrow\Delta x_B=37.5m$$

۳ سطح زیر نمودار دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$S_A=(t-10+t-20)\times\frac{20}{2}\Rightarrow S_A=20t-300$$

$$S_B=(t+t-20)\times\frac{15}{2}\Rightarrow S_B=15t-150$$

۴ با توجه به آنچه در خط فکری بیان کردیم، می‌نویسیم:

$$S_A=S_B+37.5\Rightarrow20t-300=15t-150+37.5\Rightarrow5t=187.5\Rightarrow t=37.5s$$

A ۴۳۸ ۱

خط فکری ثانیهٔ t ام یعنی بازهٔ زمانی بین t−1 تا t بنابراین جابه‌جایی در ثانیهٔ چهارم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ t=3s تا t=4s . دقت کنید متحرک از حال سکون با شتاب ثابت حرکت کرده است از این رو مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک یکی است. شما باید مکان جسم در لحظه‌های t=3s و t=4s را به‌دست آورده و آن‌ها را از هم کم کنید.

راه‌حل اول: به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان جسم در لحظهٔ t=3s و t=4s را به‌دست آورده و از هم کم می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\begin{cases}\xrightarrow{t=3s}x=\frac{1}{2}\times10\times9=45m\\\xrightarrow{t=4s}x=\frac{1}{2}\times10\times16=80m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta x_{(4)}=80-45=35m$$

میانبر در حرکـت با شـتاب ثابـت روی خط راسـت، جابه‌جایـی در ثانیهٔ t ام حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید: $\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام:

$$\Delta x_{(4)}=\frac{1}{2}\times10(2\times4-1)=35m$$

A ۴۳۹ ۲

یادآوری سـرعت متوسـط متحرکی که با شـتاب ثابت در حرکت است در بازهٔ زمانی صفر تا t از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید: $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ شتاب حرکت متحرک را به کمک سرعت متوسط آن به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\xrightarrow{t=3s,v_{av}=12m/s,v_0=0}12=\frac{1}{2}\times a\times3+0\Rightarrow a=8m/s^2$$

۲ جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم خواهد شد:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\frac{1}{2}\times8\times(2\times3-1)+0=20m$$

A ۴۴۰ ۳

روش اول: متحرک از حال سکون ($v_0=0$) شروع به حرکت کرده است محل شروع حرکت را مبدأ اختیار می‌کنیم. جابه‌جایی متحرک در مدت ۱s برابر ۲/۵m شده است یعنی مکان در لحظهٔ $t=1s$ برابر $x=2/5m$ است. به کمک معادله حرکت، شتاب را حساب می‌کنیم. $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 2/5=\frac{1}{2}(a)(1)\Rightarrow a=5m/s^2$

مکان متحرک در مدت ۲s را به‌دست می‌آوریم. $\Delta x'=\frac{1}{2}\times5\times2^2+0\Rightarrow\Delta x'=10m$

جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ بنابراین مکان در این دو لحظه را از هم کم می‌کنیم. $\Delta x_{(2)}=x'-x=10-2/5=7/5m$

روش دوم: جابه‌جایی یک متحرک که دارای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست است، در ثانیهٔ t ام حرکتش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\Delta x_{(1)}=\frac{1}{2}a(2\times1-1)+0\Rightarrow2/5=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=5m/s^2$$

بنابراین جابه‌جایی آن در ثانیهٔ دوم حرکتش برابر است با:

$$\Delta x_{(2)}=\frac{1}{2}\times5\times(2\times2-1)+0\Rightarrow\Delta x_{(2)}=7/5m$$

تذکر! **رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در کتاب بیان نشده است اما در حل این‌گونه مسائل، کاربرد مفیدی دارد.**

B ۴۴۱ ۳

راه‌حل اول:

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است. $|\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}|=a$

۱ جابه‌جایی متحرک در حرکت کندشونده‌اش در ثانیهٔ چهارم، یک متر از جابه‌جایی آن در ثانیهٔ ششم بیشتر بوده است و با توجه به نکتهٔ بیان شده جابه‌جایی در ثانیهٔ‌چهارم به اندازهٔ $2a$ از جابه‌جایی در ثانیهٔ ششم بیشتر است، بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$|2a|=1\Rightarrow|a|=\frac{1}{2}m/s^2$$

۲ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_0\Rightarrow0=-0/5\times6+v_0\Rightarrow v_0=3m/s$$

راه حل دوم: به کمک رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_{(4)}=\frac{1}{2}a(2\times4-1)+v_0=\frac{7}{2}a+v_0\\\Delta x_{(6)}=\frac{1}{2}a(2\times6-1)+v_0=\frac{11}{2}a+v_0\end{cases}$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\Delta x_{(4)}-\Delta x_{(6)}=\frac{7}{2}a-\frac{11}{2}a\Rightarrow1=\frac{-4}{2}a\Rightarrow a=-0/5m/s^2$$

$$v=at+v_0\Rightarrow0=-0/5\times6+v_0\Rightarrow v_0=3m/s$$

B ۴۴۲ ۲

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم برابر ۲۸ متر است، سرعت اولیه را به کمک جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow28=\frac{1}{2}\times6(2\times3-1)+v_0\Rightarrow v_0=13m/s$$

اکنون به کمک معادلهٔ مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک در ثانیهٔ $t=5s$ را حساب می‌کنیم البته در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=4m$ بوده است.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times6\times25+13\times5+4=75+65+4\Rightarrow x=144m$$

B ۴۴۳ ۱

نکته ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازه‌های زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

یادآوری برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در مدت n ثانیهٔ حرکت از معادلهٔ زیر استفاده می‌کنیم: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

که در آن t کل مدت زمان و n تعداد ثانیه‌های آخر مدت t است اما این به چه معنی است؟ یعنی اگر گفته شود جابه‌جایی در سه ثانیهٔ پنجم شما باید به جای t مقدار $5\times3=15s$ و به جای n، ۳s را قرار دهید.

۱ جابه‌جایی در ۲s اول برابر ۱۳m شده است از این‌رو:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow13=\frac{1}{2}a(2)^2+2v_0\Rightarrow13=2a+2v_0\qquad(I)$$

۲ در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ بیان شده در یادآوری به جای t مقدار $2\times3=6s$ و به جای n مقدار ۲s را قرار دهید.

$$25=\frac{2}{2}a(2\times6-2)+2v_0\Rightarrow25=10a+2v_0\qquad(II)$$

۳ به کمک معادله‌های (I) و (II)، a را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}13=2a+2v_0\\25=10a+2v_0\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}12=8a\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

B ۴۴۴ ۴

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در بازهٔ زمانی n ثانیه از کل مدت حرکت t ثانیه برابر است با: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

۱ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=2s$ را قرار دهیم:

$$54=\frac{2}{2}a(2\times2-2)+2v_0\Rightarrow54=2a+2v_0\qquad(1)$$

۲ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=6s$ را قرار دهیم:

$$38=\frac{2}{2}a(2\times6-2)+2v_0\Rightarrow38=10a+2v_0\qquad(2)$$

۳ رابطه‌های (۱) و (۲) را از هم کم کرده و شتاب را حساب می‌کنیم:

$$54-38=2a+2v_0-10a-2v_0\Rightarrow16=-8a\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ اکنون v_0 را از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$54=2a+2v_0\Rightarrow54=2\times(-2)+2v_0\Rightarrow v_0=29m/s$$

۵ مسافت طی شده تا توقف به کمک رابطهٔ مستقل از زمان خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-(29)^2=2\times(-2)\Delta x\Rightarrow\Delta x=210/25m$$

B ۴۴۵ ۲

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان ثابت کرد که جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی متوالی یکسان t تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت at^2 می‌دهند.

در صورت مسئله بیان شده که در هر ۲s، متحرک ۸m کمتر جابه‌جا می‌شود یعنی در بازهٔ زمانی یکسان $t=2s$، قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر ۸ است از این‌رو می‌توان نوشت: $at^2=8\Rightarrow a(2)^2=8\Rightarrow a=2m/s^2$

متحرک بعد از ۴۰۰m متوقف شده است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان سرعت اولیهٔ را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-v_0^2=2\times(-2)\times400\Rightarrow v_0^2=1600\Rightarrow v_0=40m/s$$

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت در حرکت است و در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۵

۳) ۱/۲۵ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ **در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است.**

$$\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}=a$$

در این پرسش، جابه‌جایی در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل است یعنی قدرنسبت این دنباله که همان شتاب است برابر $2/5m/s^2$ است. گزینهٔ ۱

B | ۴۴۶ | ۲

راه‌حل اول: (۱) معادلهٔ سرعت - زمان $v=-2t+4$ را با معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $v=at+v_0$ مقایسه می‌کنیم، مشخص می‌شود که حرکت دارای شتاب ثابت $a=-2m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $v_0=4m/s$ است و معادلهٔ مکان - زمان آن به صورت روبه‌رو است:

$$x=\frac{1}{2}(-2)t^2+4t+x_0\Rightarrow x=-t^2+4t+x_0$$

(۲) ۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ و $t=6s$ بنابراین مکان در این دو لحظه را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم تا جابه‌جایی به‌دست آید:

$$\begin{cases} t_1=4s\Rightarrow x_1=-16+16+x_0\Rightarrow x_1=x_0\\ t_2=6s\Rightarrow x_2=-36+24+x_0\Rightarrow x_2=-12+x_0\end{cases}\Rightarrow|\Delta x|=12m$$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ روبه‌رو: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

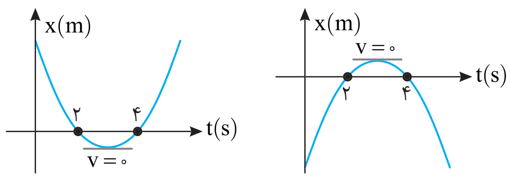
در این رابطه ۲ ثانیهٔ سوم یعنی $n=2$ و $t=6s$ است.

$$\Delta x_{(n)}=\frac{2}{2}\times(-2)(2\times6-2)+2\times4=-20+8=-12m$$

پس بزرگی جابه‌جایی برابر $12m$ است.

B | ۴۴۷ | ۴

خط فکری: معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0)$ یک تابع درجه ۲ است که نمودار آن سهمی است. از طرفی لحظه‌ای بردار مکان متحرک تغییر جهت (علامت) می‌دهد که از مبدأ $(x=0)$ بگذرد، در این صورت لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ ریشه‌های معادلهٔ مکان زمان هستند و در این لحظه‌ها نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع خواهد کرد. بنابراین اگر شما بخواهید نمودار مکان - زمان که یک سهمی است را رسم کنید باید یکی از دو نمودار زیر را رسم کنید.



(۱) به نمودارهای رسم شده دقت کنید. لحظهٔ تغییر جهت متحرک یعنی لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود و این لحظه در لحظه‌های کمینه و بیشینه نمودار (رأس سهمی) اتفاق می‌افتد.

(۲) همچنین سهمی نسبت به خط قائم عبوری از رأس سهمی متقارن است بنابراین لحظهٔ تغییر جهت $t_{\text{تغییر جهت}}=\frac{2+4}{2}=3s$ خواهد شد.

B | ۴۴۸ | ۲

الف) جابه‌جایی بین دو لحظهٔ $t=0$ تا $t=4s$ را به دست می‌آوریم. برای این کار مکان در لحظهٔ $t=0$ و $t=4s$ را به کمک معادلهٔ حرکت $x=t^2+4t+5$ به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$t=0\Rightarrow x=0+4(0)+5\Rightarrow x_1=5m\,,\,t=4s\Rightarrow x=4^2+4(4)+5\Rightarrow x_2=37$$

جابه‌جایی $37-5=32m$ است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{32}{4}=8m/s$$

این گزاره نادرست است.

ب) معادلهٔ مکان - زمان مسئله را با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$x=t^2+4t+5\,,\,x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow a=2m/s^2\,,\,v_0=4m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t+4$

بعد از $t=0$ همواره یک مقدار مثبت به ۴ اضافه می‌شود پس کمترین سرعت در $t=0$ و $4m/s$ است و این گزاره درست است.

پ) با توجه به معادلهٔ سرعت که در بالا به دست آمده همواره سرعت مثبت است و شتاب نیز ثابت و مثبت می‌باشد پس حرکت تند شونده است و این گزاره درست است.

ت) زمانی بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $x=0$ عبور می‌کند.

Δ را تشکیل می‌دهیم $x=t^2+4t+5\Rightarrow\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=16-4\times5=-4<0$

بنابراین معادله جواب ندارد. یعنی متحرک هیچ‌گاه از مبدأ مکان نمی‌گذرد و گزارهٔ (ت) نادرست است.

B | ۴۴۹ | ۴

خط فکری: طراح بیان کرده که در لحظهٔ $t=2s$ متحرک در یک متری مبدأ است بنابراین مکان آن می‌تواند $x=+1m$ و یا $x=-1m$ باشد. شما باید در دو حالت مسئله را حل کنید.

حالت اول: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=+1m$ باشد، آن‌گاه: $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

$$\begin{cases}t=2s\Rightarrow 1=\frac{1}{2}a\times(2)^2+0+x_0\\ t=4s\Rightarrow 13=\frac{1}{2}a\times(4)^2+0+x_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+x_0=1\\8a+x_0=13\end{cases}\Rightarrow 6a=12$$

$$\Rightarrow a=2m/s^2\Rightarrow x_0=-3m$$

حالت دوم: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=-1m$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}t=2s\Rightarrow -1=\frac{1}{2}a(2)^2+0+x_0\\ t=4s\Rightarrow 13=\frac{1}{2}a(4)^2+0+x_0\end{cases}\Rightarrow 6a=14\Rightarrow a=\frac{7}{3}m/s^2\,,\,x_0=-\frac{17}{3}m$$

C | ۴۵۰ | ۴

خط فکری: در صورت مسئله اندازهٔ شتاب و اندازهٔ جابه‌جایی در مدت ۲s داده شده است. بنابراین ممکن است شتاب مثبت و جابه‌جایی نیز مثبت باشد یا شتاب و جابه‌جایی هر دو منفی باشند و یا شتاب مثبت و جابه‌جایی منفی و بالعکس باشد. در نتیجه چهار حالت را باید یک به یک بررسی کنیم و با به‌دست آوردن سرعت اولیه و مقایسهٔ آن با شتاب، نوع حرکت را تعیین کنیم.

اگر بردار شتاب و بردار جابه‌جایی هم جهت باشند یعنی اگر شتاب و بردار جابه‌جایی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند آن‌گاه:

(۱) هر دو مثبت باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow +6=\frac{1}{2}\times(+2)\times(2)^2+v_0\times(2)\Rightarrow v_0=+1m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t+1$

در معادلهٔ $v=2t+1$، شتاب $+2m/s^2$ و سرعت اولیه $v_0=1m/s$ است و حرکت همواره تندشونده است.

(۲) هر دو منفی باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\text{هر دو منفی}}-6=\frac{1}{2}(-2)\times(2)^2+v_0\times(2)\Rightarrow v_0=-1m/s$$

معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد $v=-2t-1$ و چون سرعت اولیه و شتاب هر دو منفی هستند حرکت همواره تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است.

اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که بردار شتاب و بردار جابه‌جایی در این دو ثانیه هم جهت نباشد.

(۳) شتاب $2m/s^2$ و جابه‌جایی $-6m$ باشد.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[\Delta x<0]{a>0}-6=\frac{1}{2}\times2\times(2)^2+v_0\times2\Rightarrow v_0=-5m/s$$

در این صورت معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t-5$

بنابراین ابتدا سرعت و شتاب هم‌علامت نبوده حرکت کندشونده است اما پس از توقف جسم در $t=2/5s$، حرکت تندشونده می‌شود.

(۴) شتاب منفی $-2m/s^2$ و جابه‌جایی مثبت $+6m$ باشد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[\Delta x>0]{a<0}6=\frac{1}{2}\times(-2)\times(2)^2+v_0\times2\Rightarrow v_0=+5m/s$$

در این حالت نیز $v=-2t+5$ بوده و حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده خواهد بود و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۴۵۱ ۲

خط فکری متحرک از حال سکون با شتاب ثابت $+۲a$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v می‌رسد. سپس با همان شتاب $(-۲a)$ ترمز می‌کند و می‌ایستد، بنابراین اگر در قسمت اول زمان $t_۱$ و جابه‌جایی $\Delta x_۱$ و در قسمت دوم زمان $t_۲$ و جابه‌جایی $\Delta x_۲$ باشد، باید رابطه‌ای بین زمان‌ها و جابه‌جایی‌ها به‌دست بیاوریم.

۱ به کمک معادلهٔ سرعت – زمان خواهیم داشت

قسمت اول: $v=at+v_۰ \Rightarrow v=(۲a)t_۱ \Rightarrow t_۱=\frac{v}{۲a}$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow v^۲=۲(۲a)\Delta x_۱ \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{v^۲}{۴a}$$

قسمت دوم: $v=at+v_۰ \xrightarrow{v=۰} ۰=(-۲a)t_۲+v \Rightarrow t_۲=\frac{v}{۲a}$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-v^۲=۲(-۲a)\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{v^۲}{۴a}$$

۲ نتیجه اینکه در این حرکت $t_۱=t_۲$ و $\Delta x_۱=\Delta x_۲$ بوده و اگر زمان کل حرکت t و کل جابه‌جایی x باشد آنگاه:

$$t_۱-t_۲=t \Rightarrow t_۱+t_۱=t \Rightarrow t_۱=\frac{t}{۲} \qquad (I)$$

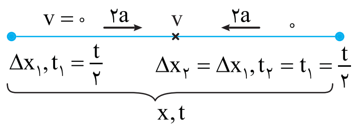
$$\Delta x_۱+\Delta x_۲=x \Rightarrow \Delta x_۱+\Delta x_۱=x \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{x}{۲} \qquad (II)$$

۳ با توجه به معادلهٔ مکان – زمان می‌توان نوشت:

$$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}(۲a)t_۱^۲ \xrightarrow{t_۱=\frac{t}{۲}} \Delta x_۱=a(\frac{t}{۲})^۲=\frac{at^۲}{۴}$$

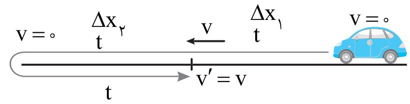
با توجه به رابطهٔ II خواهیم داشت: $\Delta x_۱=\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{at^۲}{۴}=\frac{x}{۲} \Rightarrow x=\frac{at^۲}{۲} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲x}{a}}$

هرگاه متحرک با شتاب $a_۱$ از حال سکون شروع به حرکت کرده و در مدت $t_۱$ جابه‌جایی $x_۱$ را طی کند، سپس با شتاب $a_۲$ ترمز کرده و در مدت $t_۲$ جابه‌جایی $x_۲$ را طی کند تا متوقف شود آن‌گاه: $\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{a_۲}{a_۱}$



B ۴۵۲ ۳

در قسمت اول حرکت در مدت t سرعت از صفر به v رسیده سپس مطابق شکل در مدت ۲t سرعت به $-v$ می‌رسد یعنی ابتدا سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده تا سرعتش از صفر به $-v$ می‌رسد، از این‌رو:



$$\Delta x_۱=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{v}{۲}t \quad , \quad \Delta x_۲=\frac{v_۲+v'}{۲}\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{v}{۲}t$$

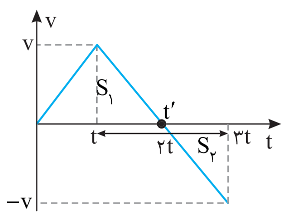
$$\Delta x_۳=\frac{v_۳+v'}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta x_۳=\frac{-v}{۲}t$$

مسافت برابر است با مجموع بزرگی جابه‌جایی‌ها:

$$\ell=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|+|\Delta x_۳| \Rightarrow \ell=\frac{v}{۲}t+\frac{v}{۲}t+\frac{v}{۲}t \Rightarrow \ell=\frac{۳v}{۲}t$$

حل به کمک رسم نمودار سرعت – زمان

نمودار سرعت – زمان حرکت متحرک به شکل روبه‌رو است و کافی است مساحت $S_۱$ و $S_۲$ را حساب کرده و با هم جمع کنیم.



ابتدا t' محل تقاطع نمودار با محور زمان را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{-v-v}{۳t-t}=\frac{۰-v}{t'-t} \Rightarrow \frac{۲}{۳t-t}=\frac{۱}{t'-t} \Rightarrow ۲t'-۲t=۲t \Rightarrow t'=۲t$$

$$L=|S_۱|+|S_۲| \Rightarrow L=\frac{v\times ۲t}{۲}+|\frac{-v\times t}{۲}| \Rightarrow L=vt+\frac{vt}{۲}=\frac{۳}{۲}vt$$

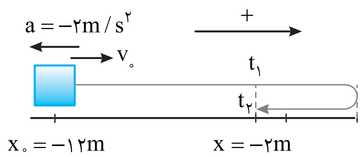
B ۴۵۳ ۳

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجهٔ ۲ $(y=ax^۲+bx+c)$ برای حاصل‌ضرب دو ریشه حاصل‌جمع دو ریشه و تفاضل دو ریشه داریم:

$$x_۱x_۲=\frac{c}{a} \;,\; x_۱+x_۲=-\frac{b}{a} \;,\; |x_۲-x_۱|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

خط فکری دقت کنید در مدت ۳s متحرک از یک مکان $(x=-۲m)$ می‌گذرد و چنانچه لحظه‌های گذر از این مکان را حساب کنیم اختلاف آن‌ها $t_۲-t_۱=۳s$ است. معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم و به جای x مقدار $-۲m$ را قرار می‌دهیم. اما به جای به‌دست آوردن ریشه‌ها تفاضل آن‌ها $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ را حساب می‌کنیم.

با توجه به شکل، اختلاف زمانی دو بار گذر از مکان $x=-۲m$ برابر ۳s است. $(t_۲-t_۱=۳s)$



معادلهٔ مکان – زمان را نوشته، داده‌های مسئله را در آن قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow -۲=\frac{۱}{۲}\times -۲\times t^۲+v_۰t-۱۲ \Rightarrow t^۲-v_۰t+۱۰=۰$$

تفاضل دو ریشهٔ این معادله برابر ۳ است.

$$\Delta t=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \Delta t=\frac{\sqrt{v_۰^۲-۴۰}}{۱} \Rightarrow ۳=\sqrt{v_۰^۲-۴۰} \Rightarrow v_۰^۲=۴۹ \Rightarrow v_۰=۷m/s$$

B ۴۵۴ ۴

۱ معادله را به صورت معادلهٔ مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت $(x-t)$ در می‌آوریم:

$$t=۱+\frac{\sqrt{۶۵-۱۰x}}{۵} \Rightarrow \frac{\sqrt{۶۵-۱۰x}}{۵}=t-۱ \Rightarrow \sqrt{۶۵-۱۰x}=۵(t-۱)$$

$$\Rightarrow ۶۵-۱۰x=۲۵(t-۱)^۲ \Rightarrow ۶۵-۱۰x=۲۵+۲۵t^۲-۵۰t$$

$$\Rightarrow ۱۰x=-۲۵t^۲+۵۰t+۴۰ \Rightarrow x=-۲/۵t^۲+۵t+۴$$

۲ معادله را با معادلهٔ مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و a و $v_۰$ را مشخص می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow x=-۲/۵t^۲+۵t+۴ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a=-۲/۵ \Rightarrow a=-۵m/s^۲ \\ v_۰=۵m/s \\ x_۰=+۴m \end{cases}$$

۳ معادلهٔ سرعت – زمان خواهد شد. $v=-۵t+۵ , v=۰ \Rightarrow =۱s$

t		۰	۱	
v		+	۰	−
$a=-۵m/s^۲$		−		−
av		− کندشونده		+ تندشونده

بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

میانبر هرگاه ضریب $t^۲$ (شتاب) و ضریب t (سرعت اولیه) در معادلهٔ مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت مختلف‌العلامت باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

C | ۴۵۵ | ۴

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی t تشکیل دنبالهٔ حسابی به قدر نسبت at^2 می‌دهند.

با توجه به فرض مسئله در بازه‌های متوالی و یکسان t متحرک به‌ترتیب مسافت ۴۵ متر، ۲۷ متر و ۹ متر طی می‌کند بنابراین تفاضل هر دو مسافت متوالی باید برابر at^2 باشد. اگر جهت حرکت را مثبت فرض کنیم چون حرکت کندشونده است شتاب حرکت در خلاف جهت حرکت بوده و منفی است.

بنابراین شتاب حرکت $-2m/s^2$ بنابراین:

$$27-45=at^2 \Rightarrow -18=-2t^2 \Rightarrow t=3s$$

اکنون به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \xrightarrow{t=3\Delta t=9s} 0=(-2)(9)+v_0 \Rightarrow v_0=18m/s$$

B | ۴۵۶ | ۳

وقتی متحرکی با شتاب ثابت می‌ایستد یعنی شتاب $-a$ و حرکت کندشونده است. می‌توان فرض کرد در همان مدت با شتاب $+a$ از حال سکون شروع به حرکت کرده است. یعنی می‌توان حرکت در ثانیهٔ آخر را از سکون بررسی کرد. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 3=\frac{1}{2}a\times 1 \Rightarrow a=6m/s^2$$

حال برای 3s اول مسیر کندشونده می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 33=\frac{1}{2}(-6)\times(3)^2+3v_0 \Rightarrow v_0=20m/s$$

روش حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم کنید. دقت کنید سطح زیر نمودار در 1s آخر برابر 3m است و در ثانیهٔ آخر سرعت از v به صفر می‌رسد. حساب می‌کنیم و در هر ثانیه سرعت به اندازهٔ شتاب a کم می‌شود بنابراین ابتدای ثانیهٔ آخر سرعت برابر a است. از این رو:

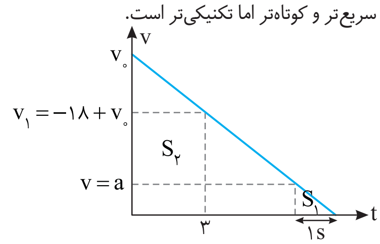
$$S_1=\frac{a\times 1}{2} \Rightarrow 3=\frac{a\times 1}{2} \Rightarrow a=6m/s^2$$

سرعت در لحظهٔ $t=3s$ برابر است با: $v=at+v_0 \Rightarrow v_1=-6\times 3+v_0=-18+v_0$

اکنون سطح ذوزنقهٔ S_2 را برابر ۳۳ متر قرار می‌دهیم.

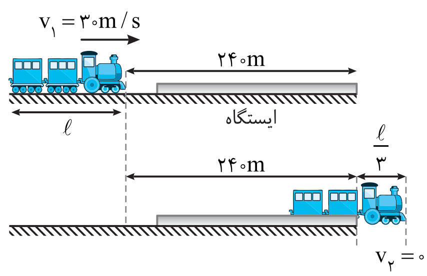
$$(-18+v_0+v_0)\times\frac{3}{2}=33 \Rightarrow -18+2v_0=22 \Rightarrow v_0=20m/s$$

روش اول بسیار سریع‌تر و کوتاه‌تر اما تکنیکی‌تر است.



B | ۴۵۷ | ۱

خط فکری فاصلهٔ ابتدای قطار تا انتهای ایستگاه 240m است و هنگام توقف قطار، $\frac{1}{3}$ آن از ایستگاه عبور کرده یعنی کل مسافت طی‌شده توسط قطار $240+\frac{L}{3}$ است، بنابراین شما ابتدا باید مشخص کنید که این قطار با شتاب $-1/5m/s^2$ و سرعت اولیه 30m/s پس از طی مسافت چند متر می‌ایستد و این مقدار به‌دست آمده را با $240+\frac{\ell}{3}$ برابر قرار بدهید و طول قطار را به‌دست بیاورید.



۱ به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، مسافت طی شده توسط قطار در مدت توقف را به‌دست می‌آوریم: $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-900=2\times(-1/5)\Delta x \Rightarrow \Delta x=300m$

۲ بنابراین قطار بعد از 300m متوقف می‌شود، در این صورت طول قطار را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=240+\frac{\ell}{3} \Rightarrow 300=240+\frac{\ell}{3} \Rightarrow \ell=180m$$

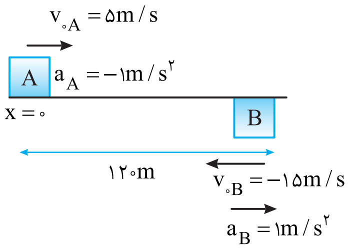
۳ برای آنکه طولی از قطار از انتهای ایستگاه عبور نکند باید سرعت قطار در مسافت ۲۴۰ متر از 30m/s به صفر برسد. از این رو:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x \xrightarrow{v_1=30m/s,\, v_2=0,\, \Delta x=240m} -900=+2a\times 240$$

$$\Rightarrow a=-\frac{15}{8}m/s^2$$

C | ۴۵۸ | ۱

۱ محل ابتدایی اتومبیل A را مبدأ مکان و جهت مثبت را مطابق شکل به سوی راست می‌گیریم. با توجه به جهت مثبت برای اتومبیل A، $v_{0A}=+5m/s$ و شتاب $a_A=-1m/s^2$ می‌شود و سرعت اولیه B، $v_{0B}=-15m/s$ و شتاب حرکت B که خلاف جهت v_{0B} و در جهت مثبت محور است برابر $a_B=+1m/s^2$ می‌شود.



۲ معادلهٔ حرکت دو اتومبیل را می‌نویسیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}(-1)t^2+5t \\ x_B=\frac{1}{2}(1)t^2-15t+120/5 \end{cases}$$

۳ معادله‌های حرکت را مساوی قرار می‌دهیم.

$$x_A=x_B=\frac{-1}{2}t^2+5t=\frac{1}{2}t^2-15t+120/5 \Rightarrow t^2-20t+120/5=0$$

$$\Rightarrow \Delta'=100-120/5<0$$

چرا مسئله جواب ندارد؟ مگر دو متحرک به سوی هم نمی‌روند. در واقع در این حل هر متحرک متوقف شده و برمی‌گردد. در حالی که اتومبیل‌ها وقتی که متوقف می‌شوند برنمی‌گردند، از این رو باید مشخص کنیم که اتومبیل A پس از چند ثانیه می‌ایستد و در این مدت چند متر جلو می‌آید.

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=(-1)t+5 \Rightarrow t=5s$$

$$\Delta x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t \Rightarrow \Delta x_A=\frac{1}{2}\times(-1)(5)^2+5\times 5 \Rightarrow \Delta x_A=12/5m$$

بنابراین اتومبیل A پس از 5s با طی مسافت 12/5m می‌ایستد و برای آنکه اتومبیل B به A برسد باید $120/5-12/5=108m$ مسافت طی کند. اکنون بررسی کنیم B در چه مدتی 108/5m را طی می‌کند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow -108=\frac{1}{2}(1)t^2+(-15)t \Rightarrow t^2-30t+216=0$$

حال با توجه به معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$t_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-864}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{36}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1=12s \\ t_2=18s \end{cases}$$

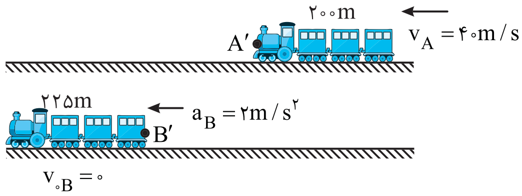
اکنون باید مشخص کنیم اتومبیل B پس از چه مدتی می‌ایستد؟

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-1\times t+15 \Rightarrow t_B=15s$$

در نتیجه $t_1=12s$ قابل قبول است و $t_2=18s$ جواب مسئله نیست. زیرا از 15s بیشتر است.

B | ۴۵۹ | ۴

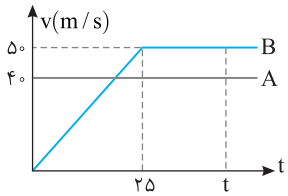
۱ شکل سادهٔ زیر را برای خود رسم کنید. تا متوجه شوید برای سبقت گرفتن از A باید قطار B، $۲۰۰+۲۲۵=۴۲۵$ متر بیشتر از قطار A حرکت کند. چرا؟ برای آنکه سبقت B از A یعنی انتهای قطار B (نقطهٔ B') باید از ابتدای قطار A (نقطهٔ A') بگذرد.



۲ لحظه‌ای را که سرعت قطار B با شتاب $۲m/s^۲$ به $۵۰m/s$ می‌رسد حساب کنید.

$$v=at+v_0 \Rightarrow ۵۰=۲t+۰ \Rightarrow t=۲۵s$$

۳ نمودار سرعت - زمان دو متحرک را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید.



۴ سطح زیر نمودار B باید $۴۲۵m$ از سطح زیر نمودار A بیشتر باشد.

$$S_B=S_A+۴۲۵ \Rightarrow (t+t-۲۵)\times\frac{۵۰}{۲}=۴۰t+۴۲۵$$

$$\Rightarrow ۵۰t-۶۲۵=۴۰t+۴۲۵ \Rightarrow ۱۰t=۱۰۵۰ \Rightarrow t=۱۰۵s$$

C | ۴۶۰ | ۲

خط فکری زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی که راننده مانع را می‌بینند تا لحظه‌ای که پدال ترمز را می‌فشرد. در این بازه زمانی می‌توان حرکت را یکنواخت فرض کرد. مسافتی که خودروی A طی می‌کند ۱۱۰ متر است. شما باید جابه‌جایی در مدت ترمز را حساب کرده از ۱۱۰ متر کم کنید و جابه‌جایی در زمان واکنش را به‌دست بیاورید تا بتوانید زمان واکنش A را حساب کرده به سراغ خودروی B بروید.

۱ جابه‌جایی خودروی A با شتاب $-۲m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ $+۲۰m/s$ تا لحظهٔ توقف خواهد شد: $v^۲-v_0^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-۲۰^۲=۲\times(-۲)\times\Delta x \Rightarrow \Delta x=۱۰۰m$

۲ بنابراین راننده پس از طی مسافت $۱۱۰-۱۰۰=۱۰m$ ترمز می‌گیرد و این ۱۰ متر را با تندی $۲۰m/s$ می‌رود. زمان واکنش A را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt \Rightarrow ۱۰=۲۰t \Rightarrow t_A=۰/۵s$$

۳ زمان واکنش A نصف زمان واکنش B است. از این‌رو زمان واکنش B خواهد شد:

$$t_A=۰/۵t_B \Rightarrow ۰/۵=t_B \Rightarrow t_B=۱s$$

۴ در این مدت خودروی B با تندی $۱۸m/s$ مسافت زیر را طی می‌کند.

$$\Delta x_B=v_Bt \Rightarrow \Delta x_{B_1}=۱۸\times۱ \Rightarrow \Delta x_{B_1}=۱۸m$$

۵ جابه‌جایی B حین ترمز گرفتن خواهد شد:

$$v^۲-v_0^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-(۱۸)^۲=۲(-۲)\Delta x \Rightarrow \Delta x_{B_2}=۸۱m \Rightarrow \Delta x=۸۱m$$

۶ بنابراین خودروی B پس از طی مسافت $۸۱+۱۸=۹۹m$ در فاصلهٔ $۱۱۰-۹۹=۱۱$ متری مانع می‌ایستد.

C | ۴۶۱ | ۲

حل با رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم اما چگونه؟

۱ در مدت $۲۰s$ سرعت متحرک با شتاب ثابت a از صفر به مقدار v می‌رسد سپس شتاب آن $-a$ می‌شود، بنابراین در همان مدت $۲۰s$ سرعت متحرک صفر می‌شود، یعنی در لحظهٔ $t=۴۰s$ متوقف شده سرعتش منفی می‌شود.

۲ متحرک می‌خواهد به مبدأ حرکت برگردد یعنی جابه‌جایی آن صفر شود. $\Delta x=۰$

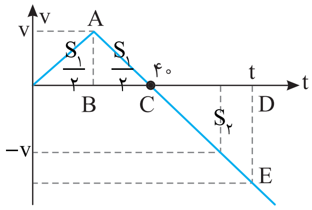
۳ جابه‌جایی برابر سطح زیر نمودار $v-t$ است، بنابراین سطح زیر نمودار در بازهٔ ۰ تا $۴۰s$ (S_1) باید با سطح زیر نمودار در بازهٔ $۴۰s$ تا t (S_2) برابر شود.

۴ سطح S_1 به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. یعنی S_1 دو برابر سطح مثلث ABC است و برابر با سطح مثلث CDE است $(S_2=S_1)$. $S_{CDE}=۲S_{ABC}$

۵ دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند و در مثلث‌های متشابه نسبت مساحت‌ها برابر توان ۲ نسبت تشابه است.

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=(\frac{CD}{BC})^۲ \Rightarrow ۲=(\frac{t-۴۰}{۲۰})^۲ \Rightarrow t-۴۰=۲۰\sqrt{۲} \Rightarrow t=۴۰+۲۰\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴} t=۶۸s$$



روش تحلیلی با معادلات حرکت با شتاب ثابت

۱ ابتدا متحرک با شتاب ثابت a از حال سکون شروع به حرکت کرده و بعد از $۲۰s$ سرعت آن خواهد شد: $v=at+v_0 \Rightarrow v=a\times۲۰+۰ \Rightarrow v=۲۰a$

برای آنکه مجدد به مکانی برسیم که در ابتدا سرعت $۲۰a$ بوده باید متحرک مسیر رفت را بازگردد و به همان مکان برسد. چون شتاب حرکت ثابت است بنابراین در لحظهٔ بازگشت به مکان x_1 تندی برابر $۲۰a$ اما جهت آن قرینه خواهد بود بنابراین حرکت بازگشت قرینهٔ حرکت رفت است.

۲ در لحظهٔ $t=۲۰s$، شتاب قرینه می‌شود $(a_2=-a)$ زمان توقف را حساب می‌کنیم.

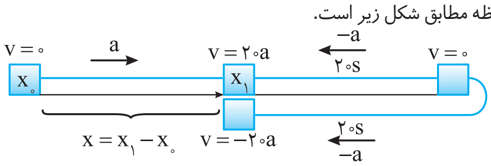
$$v=at+v_0 \Rightarrow ۰=-a\times t+۲۰a \Rightarrow t=۲۰s$$

۳ بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=۴۰s$ سرعتش صفر شده و برمی‌گردد.

۴ لحظه‌ای که سرعتش برابر $-۲۰a$ می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow -۲۰a=(-a)t+۰ \Rightarrow t=۲۰s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=۴۰+۲۰=۶۰s$ سرعت متحرک $-۲۰a$ می‌شود و مسیر حرکت تا این لحظه مطابق شکل زیر است.



۵ از این لحظه $(t=۶۰s)$ متحرک باید جابه‌جایی x را طی کند تا به مبدأ حرکتش برگردد. ابتدا x را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_0t \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}a(۲۰)^۲+۰ \Rightarrow x=۲۰۰a$$

۶ اکنون زمان طی x را در مسیر برگشت حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_0t \xrightarrow[a_2=-a\,,\,v_0=-۲۰a]{x=-۲۰۰a} -۲۰۰a=\frac{۱}{۲}(-a)t^۲+(-۲۰a)t$$

$$۲۰۰=\frac{۱}{۲}t^۲+۲۰t \Rightarrow t^۲+۴۰t-۴۰۰=۰ \Rightarrow t=-۲۰\pm\sqrt{۴۰۰+۴۰۰}$$

$$\Rightarrow t=-۲۰\pm۲۰\sqrt{۲} \xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴} \begin{cases} t=-۲۰-۲۸=-۴۸s \text{ غ ق ق} \\ t=-۲۰+۲۸=۸s \end{cases}$$

۷ بنابراین متحرک در مدت $۶۰+۸=۶۸s$ به مبدأ حرکتش برمی‌گردد.

B | ۴۶۲ | ۱

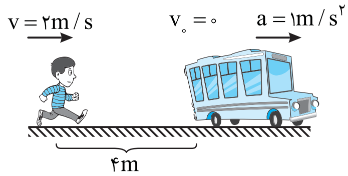
خط فکری از زندگی روزمره می‌توانید درک کنید که اگر اتومبیل B به دنبال اتومبیل A در حرکت باشد تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل B از سرعت اتومبیل A بیشتر باشد، اتومبیل B به اتومبیل A نزدیک می‌شود، اگر $v_B=v_A$ باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل تغییر نمی‌کند و اگر سرعت اتومبیل B از اتومبیل A کمتر شود، فاصلهٔ دو اتومبیل افزایش می‌یابد.

در صورت مسئله بیان شده که متحرک A از حال سکون شروع به حرکت کرده و با شتاب ثابت بر سرعت خود می‌افزاید. اتومبیل B، سرعتش ثابت و برابر $۱۵m/s$ است. تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A از $۱۵m/s$ کمتر است، B به آن نزدیک می‌شود و وقتی سرعت A از $۱۵m/s$ بیشتر شد، فاصلهٔ دو اتومبیل از هم زیاد می‌شود. بنابراین در مدت $۵s$ با شتاب a نباید سرعت A به $۱۵m/s$ رسیده باشد. از این رو می‌توان نوشت: $v=at<۱۵ \Rightarrow ۵a<۱۵ \Rightarrow a<۳m/s^۲$

توجه کنید اگر شتاب حرکت بزرگ‌تر از $۳m/s^۲$ باشد پس از $۵s$ تندی متحرک A بزرگ‌تر از $۱۵m/s$ بوده فاصلهٔ آن از متحرک B دائماً افزایش می‌یابد.

B ۴۶۳ ۳

خط فکری دقت کنید در لحظه‌ای که اتوبوس با شتاب $۱m/s^{۲}$ شروع به حرکت می‌کند، سرعت شخص $۲m/s$ است و شخص به اتوبوس نزدیک می‌شود اما پس از ۲s، سرعت اتوبوس $v=at=۱\times۲=۲m/s$ شده و از آن به بعد فاصلهٔ اتوبوس از شخص شروع به افزایش می‌کند. در نتیجه کمینه فاصلهٔ بین شخص و اتوبوس در $t=۲s$ اتفاق می‌افتد، بنابراین شما جابه‌جایی شخص و اتوبوس را در مدت ۲s پیدا کرده و مسئله را حل کنید.



راه‌حل اول:

۱ جابه‌جایی شخص در مدت ۲s خواهد شد

$$\Delta x_{ش}=vt\Rightarrow\Delta x_{ش}=۲\times۲=۴m$$

۲ جابه‌جایی اتوبوس در مدت ۲s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{اتو}=\frac{۱}{۲}at^{۲}\Rightarrow\Delta x_{اتو}=\frac{۱}{۲}\times۱\times(۲)^{۲}\Rightarrow\Delta x_{اتو}=۲m$$

۳ فاصلهٔ ابتدایی اتوبوس و شخص ۴ متر بوده است. شخص ۴m جلو آمده و در این مدت اتوبوس نیز دو متر جلو می‌رود و فاصلهٔ شخص تا اتوبوس $۴-۲=۲m$ می‌شود.

راه‌حل دوم: چون شخص با سرعت ثابت $۲m/s$ در حال دویدن است، در نتیجه از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم. اگر مبدأ مختصات را مکان شخص، وقتی که در فاصلهٔ ۴ متری از انتهای اتوبوس قرار دارد در نظر بگیریم، داریم:

$$x_{ش}=vt+x_{۰}\xrightarrow[x_{۰}=۰]{v=۲m/s}x_{ش}=۲t$$

اتوبوس هم با شتاب ثابت حرکت خود را آغاز می‌کند، بنابراین:

$$x_{اتو}=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t+x_{۰}\xrightarrow[x_{۰}=۴m]{a=۱m/s^{۲},\,v_{۰}=۰}x_{اتو}=\frac{۱}{۲}\times۱\times t^{۲}+۰\times t+۴$$

$$\Rightarrow x_{اتو}=\frac{t^{۲}}{۲}+۴$$

برای به دست آوردن حداقل فاصلهٔ شخص از اتوبوس، باید از معادلهٔ تفاضل مکان اتوبوس و شخص بهره ببریم:

$$\Delta x=\frac{t^{۲}}{۲}-۲t+۴$$

با توجه به این‌که معادلهٔ به دست آمده تابع درجهٔ ۲ است مقدار کمینه تابع (یعنی رأس سهمی) خواهد شد:

$$t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow t=-(\frac{-۲}{۲\times\frac{۱}{۲}})\Rightarrow t=۲s\ ,\ \Delta x_{min}=۲-۴+۴=۲m$$

B ۴۶۴ ۲

بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ بگذرد، یعنی $x=۰$ شود. البته باید در این لحظه بردار مکان تغییر علامت دهد. معادلهٔ حرکت را مساوی صفر $(x=۰)$ قرار می‌دهیم.

$$x=۰\Rightarrow t^{۲}-۶t+۹=۰\Rightarrow(t-۳)^{۲}=۰\Rightarrow t=۳s$$

مقدار $(t-۳)^{۲}$ همواره مثبت است یعنی مکان همواره مثبت است و با آنکه در $t=۳s$ مکان صفر می‌شود اما بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. متحرک در تمام مسیرش در قسمت مثبت محور در حرکت است و در لحظهٔ $t=۳s$ به مبدأ رسیده از آن عبور نکرده و برمی‌گردد. متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن همواره مثبت است. پس، بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

C ۴۶۵ ۲

خط فکری موتورسوار با تندی ثابت $۱۶m/s$ در حرکت است و حرکت آن یکنواخت است. خودرو دارای سرعت $۲۵m/s$ است و با شتاب $۴m/s^{۲}$ از سرعت خود می‌کاهد و تا لحظه‌ای که سرعت آن به $۱۶m/s$ برسد، در حال نزدیک شدن به موتورسوار است. یعنی کمترین فاصلهٔ بین موتورسوار و خودرو لحظه‌ای است که سرعت خودرو $۱۶m/s$ شود.

۱ در مدت $۰/۵s$ جابه‌جایی خودرو و موتورسوار را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}\Delta x_{خودرو}=v_{خودرو}t\Rightarrow\Delta x_{خودرو}=۲۴\times۰/۵=۱۲m\\ \Delta x_{موتورسوار}=v_{موتورسوار}t\Rightarrow\Delta x=۱۶\times۰/۵=۸m\end{cases}\Rightarrow ۱۲-۸=۴m$$

۲ بنابراین در لحظه‌ای که خودرو ترمز می‌کند، فاصلهٔ آن از موتورسوار برابر است با:

$$۵۰-۴=۴۶m$$

۳ مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت خودرو $۱۶m/s$ شود را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_{۰}\Rightarrow ۱۶=-۴\times t+۲۴\Rightarrow t=۲s$$

۴ جابه‌جایی موتورسوار و خودرو را در مدت ۲s حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{موتورسوار}=v_{موتورسوار}t=۱۶\times۲\Rightarrow\Delta x_{موتورسوار}=۳۲m$$

$$\Delta x_{خودرو}=\frac{v+v_{۰}}{۲}t\Rightarrow\frac{۱۶+۲۴}{۲}\times۲\Rightarrow\Delta x_{خودرو}=۴۰m$$

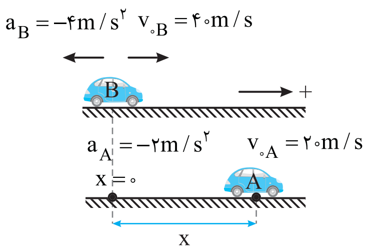
۵ یعنی در این دو ثانیه خودرو $۴۰-۳۲=۸m$ به موتورسوار نزدیک می‌شود.

بنابراین کمینه فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

$$\Delta x_{min}=۴۶-۸=۳۸m$$

B ۴۶۶ ۳

۱ با توجه به صورت مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم، مکان اولیهٔ متحرک B را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم.



۲ معادلهٔ حرکت متحرک A را می‌نویسیم.

$$x_{A}=\frac{۱}{۲}a_{A}t^{۲}+v_{۰A}t+x_{۰}\Rightarrow x_{A}=\frac{۱}{۲}\times(-۲)t^{۲}+۲۰t+x$$

$$\Rightarrow x_{A}=-t^{۲}+۲۰t+x$$

۳ مکان متحرک A را در مدت ۴s به‌دست می‌آوریم.

$$t=۴s\Rightarrow x_{A}=-۱۶+۲۰\times۴+x\Rightarrow x_{A}=۶۴+x$$

۴ متحرک B به مدت ۱s با همان سرعت $۴۰m/s$ به حرکت خود ادامه می‌دهد سپس با شتاب $-۴m/s^{۲}$ ترمز می‌گیرد. بنابراین در مدت ۴s متحرک B، ۱s دارای حرکت یکنواخت و ۳s دارای حرکت با شتاب ثابت است. مکان آن در $t=۴s$ را حساب می‌کنیم.

$$x_{B}=vt_{تاخیر}+(\frac{۱}{۲}at'^{۲}+v_{۰}t')\Rightarrow x_{B}=۴۰\times۱+\frac{-۱}{۲}\times۴\times۳^{۲}+۴۰\times۳$$

$$\Rightarrow x_{B}=۴۰-۱۸+۱۲۰\Rightarrow x_{B}=۱۴۲m$$

۵ در $t=۴s$ مکان دو متحرک یکی است بنابراین:

$$x_{A}=x_{B}\Rightarrow ۶۴+x=۱۴۲\Rightarrow x=۷۸m$$

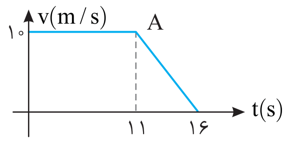
B ۴۶۷ ۳

خط فکری به دلیل اینکه دو متحرک از یک نقطه در مبدأ زمان عبور کرده‌اند، پس زمانی به هم می‌رسند که جابه‌جایی یکسانی داشته باشد، پس نمودار $v-t$ دو متحرک را رسم می‌کنیم و با توجه به سطح زیر نمودار می‌توان جابه‌جایی را به‌دست آورد:

۱ متحرک A در ابتدا تا لحظهٔ $t=11s$ با تندی ثابت $10m/s$ حرکت می‌کند و بعد از آن با شتاب $a=-2m/s^2$ از تندی خود کاسته تا متوقف شود:

$$v_1=10m/s\ ,\ v_2=0\ ,\ \Delta t=(t'-11)\ ,\ a=-2m/s^2$$

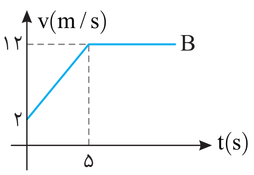
$$v_2=a(t'-11)+v_1 \Rightarrow 0=-2(t'-11)+10 \Rightarrow t'-11=5 \Rightarrow t'=16s$$



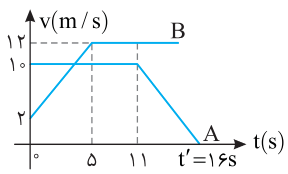
۲ متحرک B از تندی $2m/s$ شروع به حرکت کرده و مدت $5s$ به طور شتابدار حرکت می‌کند و سپس با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و با توجه به سؤال و جهت حرکت هر دو یکی است پس علامت تندی هر دو متحرک یکسان است.

$$v'_2=?\ ,\ v'_1=2\ ,\ t=5s\ ,\ a'=2m/s^2$$

$$v'_2=a't+v'_1 \Rightarrow v'_2=2\times5+2 \Rightarrow v'_2=12m/s$$



۳ نمودار $v-t$ دو متحرک به صورت زیر است:



۴ هر دو متحرک از یک نقطه (مبدأ مختصات) شروع به حرکت کرده‌اند، پس برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی هر دو متحرک یکسان باشد. ابتدا جابه‌جایی دو متحرک تا لحظهٔ $t=5s$ را از سطح زیر نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_A=S_A=10\times5=50m\ ,\ \Delta x_B=S_B=\frac{5\times(2+12)}{2}=35m$$

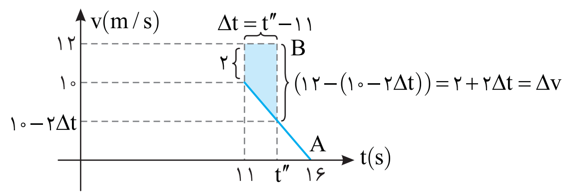
۵ تندی اولیهٔ متحرک A بیشتر از تندی اولیهٔ متحرک B است و در ابتدا A از متحرک B جلو زده و همانطور که در حساب کردن جابه‌جایی مشخص است متحرک A در $5s$ اولیه بیشتر از متحرک B جابه‌جا شده است و این دو در این مدت به هم نمی‌رسند. حال جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $11s$ را حساب‌می‌کنیم. $\Delta x_A=11\times10=110m\ ,\ \Delta x_B=35+(12\times6)=107m$

۶ بنابراین تا لحظهٔ $t=11s$ متحرک A به اندازهٔ $110-107=3m$ جلوتر از متحرک B است و اگر در لحظهٔ t'' این دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی متحرک B از $t=11s$ تا t'' به اندازهٔ $3m$ بیشتر از جابه‌جایی متحرک A در این بازه باشند و با توجه به نمودار، سرعت متحرک در لحظهٔ t'' را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_B-\Delta x_A=3m \xrightarrow[\text{جابه‌جایی برابر سطح رنگی ذوزنقه شکل زیر نمودار است}]{\text{با توجه به شکل این اختلاف}}$$

$$\frac{(\Delta t)\times((2\Delta t+2)+2)}{2}=3 \Rightarrow (\Delta t)(2\Delta t+4)=6$$

$$\Delta t(\Delta t+2)=3 \Rightarrow \Delta t=1s\ ,\ t''=11+1=12s$$

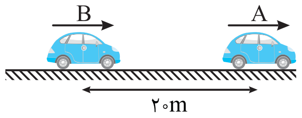


۷ بنابراین دو متحرک در لحظهٔ $t''=12$ به یکدیگر می‌رسند و اختلاف سرعت متحرک یعنی Δv برابر است با: $\Delta v=2+2\times1=4m/s$

B ۴۶۸ ۳

خط فکری سه متحرک همزمان شروع به حرکت کرده‌اند و در یک لحظه از کنار هم می‌گذرند. بنابراین شما باید ابتدا زمان رسیدن متحرک B به متحرک A را به‌دست بیاورید. سپس معادلهٔ متحرک C و متحرک A را نوشته برابر قرار دهید.

۱ متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در هر ثانیه ۲ متر به متحرک A نزدیک می‌شود، بنابراین بعد از $10s$ فاصلهٔ $20m$ بین A و B را جبران خواهد کرد و در این لحظه متحرک C کنار آن‌هاست.

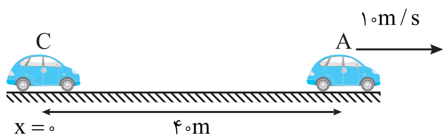


۲ معادلهٔ حرکت A و C را نوشته برابر قرار می‌دهیم.

$$x_C=\frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{t=10s} x_{C'}=50a$$

$$x_A=v_At+x_0 \Rightarrow x_A=10t+40 \xrightarrow{t=10s} x_A=140m$$

در لحظهٔ $t=10s$: $x_C=x_A \Rightarrow 50a=140 \Rightarrow a=2.8m/s^2$



C ۴۶۹ ۲

نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه دو متحرک خلاف جهت هم با سرعت‌های v_1 و v_2 حرکت کنند چنانچه یکی از آن‌ها را ساکن فرض کنیم، سرعت دیگری نسبت به آن از جمع اندازهٔ سرعت‌ها به‌دست می‌آید. $v=v_1+v_2$

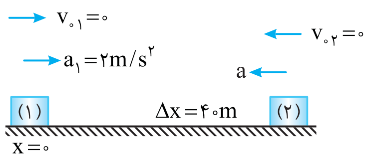
نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه شتاب دو متحرک در خلاف جهت هم باشد می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرده و شتاب دیگری را نسبت به آن از جمع اندازهٔ شتاب‌ها به‌دست آورد.

با توجه به شکل می‌توان فرض کرد یکی از آن‌ها ساکن است و دیگری پس از طی مسیر $40m$ به اولی می‌رسد.

چون شتاب‌ها در خلاف جهت هم هستند: $a_{\text{نسبی}}=a_1+a_2=2+a$

حال می‌توان روابط نسبی را به کار برد. $v^2_{\text{نسبی}}-v^2_{0\,\text{نسبی}}=2a_{\text{نسبی}}\Delta x$

$$\Rightarrow 20^2-0=2(2+a)\times40 \Rightarrow 400=80(2+a) \Rightarrow a=3m/s^2$$



پنجره ۳ روبه‌روی ۴

B ۴۶۹ ۴

۱ در ابتدا بردار سرعت و بردار شتاب مطلق شکل در خلاف جهت هم بوده و حرکت کندشونده است. اما دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. حالت اول اینکه متحرک پس از مدتی می‌ایستد و دیگر به حرکت خود ادامه نمی‌دهد. مانند توپی که روی سطح زمین پرتاب شده و بعد از مدتی می‌ایستد و گزینهٔ (۱) درست است.

حالت دوم اینکه متحرک پس از توقف در خلاف جهت شروع به حرکت کند، در این حالت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. مانند توپی که رو به بالا پرتاب می‌شود در ابتدا حرکتش کندشونده است، متوقف می‌شود و برمی‌گردد. بنابراین گزینهٔ (۳) نیز می‌تواند درست باشد. اما گزینهٔ (۲) قطعاً نادرست است.

B ۴۶۹ ۳

۲ سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با:

$$v=\frac{3}{2}t^2\Rightarrow v_1=\frac{3}{2}t_1^2\ ,\ v_2=\frac{3}{2}t_2^2$$

فرمول شتاب متوسط را نوشته مقدار v_1 و v_2 را در آن قرار می‌دهیم.

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{\frac{3}{2}(t_2^2-t_1^2)}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{3}{2}\frac{(t_2-t_1)(t_2+t_1)}{(t_2-t_1)}=\frac{3}{2}(t_2+t_1)$$

نمای ۱۶

B ۴۶۹ ۳

۳ **نکته** در هر نقطه از مسیر بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است.

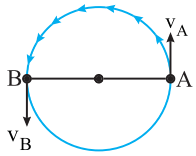
۱ محیط دایره ۱۲m است. شعاع آن را حساب می‌کنیم.

$$2\pi R=12\xrightarrow{\pi=3}R=2m$$

۲ متحرک در مدت ۶s، $\frac{3}{4}$ محیط دایره را طی می‌کند. با یک تناسب ساده، مسافتی که در ۴s طی می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{c|c} 6s & \frac{3}{4}\times(\text{محیط}) \\ 4s & \ell \end{array}\Rightarrow \ell=\frac{1}{2}\times\text{محیط}$$

۳ بنابراین اگر متحرک در نقطهٔ A باشد پس از ۴s نصف دایره را دور می‌زند و به نقطهٔ B می‌رود و جابه‌جایی آن برابر قطر AB است.



$$\Delta x=AB=2R\Rightarrow\Delta x=2\times2=4m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{4}{4}=1\,m/s$

۵ تندی حرکت را به‌دست می‌آوریم. در هر ۶s، متحرک $\frac{3}{4}$ محیط را طی می‌کند.

بنابراین: $v=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{\frac{3}{4}\times12}{6}\Rightarrow v=1/5\,m/s$

۶ اگر سرعت در نقطهٔ A را $+1/5\,m/s$ در نظر بگیریم، سرعت در نقطهٔ B، $-1/5\,m/s$ است و اندازهٔ تغییر سرعت خواهد شد: $|\Delta v|=|-1/5-1/5|=3\,m/s$

۷ شتاب متوسط حرکت را حساب می‌کنیم. $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{3}{4}=0/75\,m/s^2$

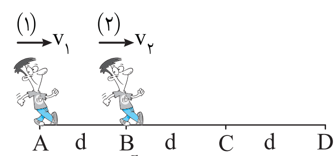
نمای ۱۵

B ۴۶۹ ۲

۴ **خط فکری** دو نفر در نقطهٔ C به هم می‌رسند. نقطهٔ A را مبدأ و سمت راست را جهت مثبت بگیرید. معادله‌های حرکت را بنویسید و در نقطهٔ C با هم برابر قرار دهید تا رابطه‌ای بین v_1 و v_2 به‌دست بیاورید.

۱ شخص (۲)، ۲۰s پس از شخص (۱) راه افتاده است. بنابراین اگر شخص (۱) مدت t در حرکت باشد، شخص (۲) مدت $t-20$ در حرکت خواهد بود. با دانستن این مطلب معادلهٔ حرکت هر شخص خواهد شد.

$$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases}\text{(۱) شخص}\ x_1=v_1t+0 & (I)\\ \text{(۲) شخص}\ x_2=v_2(t-20)+d & (II)\end{cases}$$



۲ وقتی دو متحرک به C می‌رسند مکان‌های آن‌ها با هم برابر می‌شود. بنابراین:

$$x_1=v_1t\Rightarrow 2d=v_1t\Rightarrow t=\frac{2d}{v_1}$$

$$x_2=v_2(t-20)+d\Rightarrow 2d=v_2(t-20)+d\Rightarrow d=v_2(\frac{2d}{v_1}-20)\Rightarrow\frac{d}{v_2}=\frac{2d}{v_1}-20$$

شخص (۱) فاصلهٔ C تا D را در $t_1=\frac{d}{v_1}$ و شخص (۲) فاصلهٔ B تا O را در $t_2=\frac{d}{v_2}$ طی می‌کند، بنابراین اختلاف زمانی رسیدن دو شخص به D خواهد شد:

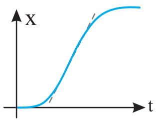
$$\Delta t=|\frac{d}{v_2}-\frac{d}{v_1}|=\frac{2d}{v_1}-20-\frac{d}{v_1}=\frac{d}{v_1}-20$$

نمای ۱۱

B ۴۶۹ ۱

۵ **نکته** شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان برابر سرعت لحظه‌ای است و هرگاه متحرک بدون سرعت اولیه باشد، باید نمودار مکان – زمان در مبدأ زمان بر محور t مماس باشد.

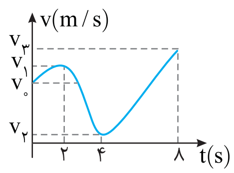
متحرک از حال سکون حرکت کرده بنابراین نمودار مکان زمان در $t=0$ باید بر محور زمان مماس باشد، سپس سرعت ثابت مانده و باید نمودار مکان زمان خط راست مایلی باشد که بر نمودار سهمی قسمت اول مماس باشد هم‌چنین بر نمودار سهمی قسمت کندشوندهٔ حرکت نیز باید مماس باشد تا سرعت در این لحظات با هم برابر شود، بنابراین گزینهٔ (۱) درست و گزینهٔ (۲) نادرست است.



به شکل روبه‌رو دقت کنید، شیب خط راست و شیب خط مماس بر دو منحنی یکسان است. نمای ۲۱

B ۴۶۹ ۲

۶ **خط فکری** در حل این مسئله باید به فاصلهٔ سرعت‌ها کاملاً دقت کنید. یعنی باید بدانید که با توجه به نمودار $|v_2-v_1|>|v_1-v_0|$ است بازهٔ زمانی‌ها



یکسان بوده پس با توجه به اینکه $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است پس شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s بزرگ‌تر از صفر تا ۲s است. در بازهٔ ۴s تا ۸s بازهٔ زمانی دو برابر بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s است. تغییرات سرعت در بازهٔ ۴s تا ۸s بیشتر از ۲s تا ۴s بوده اما دو برابر این بازه نیست و تغییرات سرعت در بازهٔ ۴s تا ۸s کمتر از دو برابر بازهٔ ۲s تا ۴s است و شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s بیشتر از ۴s تا ۸s است. بازهٔ ۴s تا ۸s هم بازهٔ زمانی بیشتری از ۲s تا ۴s داشته و هم تغییرات سرعت آن کوچک‌تر است. پس شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s از شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۸s بیشتر است. نمای ۱۸

B ۴۶۹ ۳

۷ **خط فکری** زمان واکنش راننده ۰/۵s است. یعنی از لحظه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که پدال ترمز را می‌فشرد ۰/۵s طول می‌کشد و در این مدت خودرو با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد شما باید جابه‌جایی در این ۰/۵s را حساب کنید. سپس، جابه‌جایی خودرو را در قسمت کندشونده به‌دست بیاورید اگر جمع این دو جابه‌جایی از فاصلهٔ خودرو تا مانع کمتر بود برخوردی صورت نمی‌گیرد اما اگر جمع جابه‌جایی تا توقف از فاصلهٔ خودرو تا مانع بیشتر باشد، خودرو قبل از توقف به مانع برخورد می‌کند. حال به سراغ حل مسئله برویم.

در مدت زمان واکنش راننده، خودرو با تندی ثابت $v=72km/h=20m/s$ به حرکت ادامه می‌دهد و مسافت Δx_1 را طی می‌کند. $\Delta x_1=vt=20\times0/5=10m$

پس از ترمز، خودرو با تندی اولیهٔ $20m/s$ و شتاب $-4m/s^2$ با حرکت کندشونده می‌ایستد.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-400=2(-4)\Delta x_2\Rightarrow\Delta x_2=50m$$

بنابراین اگر مانعی در کار نبود، خودرو پس از $10+50=60m$ متوقف می‌شد اما فاصلهٔ خودرو از مانع ۵۲m است یعنی خودرو پس از $52-10=42m$ جابه‌جایی در قسمت کندشوندهٔ حرکت به مانع برخورد می‌کند بنابراین سرعت برخورد آن به مانع خواهد شد.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2-400=2(-4)\times42\Rightarrow v^2=64\Rightarrow v=8m/s$$

یعنی خودرو با تندی $8m/s$ به مانع برخورد می‌کند. نمای ۲۷

B ۴۶۹ ۳

۸ **خط فکری** دو متحرک در یک لحظه از یک مبدأ به سوی یک مقصد به راه افتاده‌اند. یعنی جابه‌جایی دو متحرک از ابتدا تا انتهای مسیر یکسان است $(\Delta x_1=\Delta x_2)$ اما متحرک دوم که دارای شتاب بزرگ‌تری است ۴s زودتر به مقصد می‌رسد. یعنی اگر زمان متحرک اول t_1 باشد زمان متحرک دوم $t_2=t_1-4$ است. بنابراین شما معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به مبدأ حرکت بنویسید و آن‌ها را با هم برابر قرار دهید.

معادلهٔ حرکت دو متحرک خواهد شد:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[v_0=0]{x_0=0} \begin{cases} \xrightarrow{\text{متحرک اول}} x_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2+0 \\ \xrightarrow{\text{متحرک دوم}} x_2=\frac{1}{2}a_2(t_1-4)^2+0 \end{cases}$$

دو معادله را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_1=x_2\Rightarrow \frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2(t_1-4)^2\Rightarrow \frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}(\frac{9}{4}a_1)(t_1-4)^2$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{3}{2}(t_1-4)\Rightarrow 2t_1=3t_1-12\Rightarrow t_1=12s$$

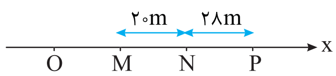
بنابراین زمان حرکت متحرکی که زودتر به مقصد می‌رسد خواهد شد.

$$t_2=t_1-4\Rightarrow t_2=12-4=8s$$

نمای ۳۴

B ۴۶۹ ۲

۹ به روش حل دقت کنید. شتاب ثابت است. بنابراین اگر شتاب را a در نظر بگیریم و سرعت در نقطهٔ N را v فرض کنیم با توجه به تعریف شتاب که برابر تغییر سرعت در هر ثانیه است، سرعت ۴s قبل از N خواهد شد: $(v_M=v-4a)$ و سرعت ۴s بعد از N خواهد شد. $(v_P=v+4a)$



۱ اکنون به سراغ فرمول مستقل از شتاب می‌رویم:

$$\Delta x=\frac{v_2+v_1}{2}t\Rightarrow 20+28=\frac{v_P+v_M}{2}\times 8\Rightarrow 48=(v-4a+v+4a)\times 4$$

$$\Rightarrow v=6m/s$$

۲ مجدداً فرمول مستقل از شتاب را برای جابه‌جایی MN می‌نویسیم.

$$MN=\frac{v_M+v_N}{2}t_{MN}\Rightarrow 20=\frac{6-4a+6}{2}\times 4\Rightarrow 10=12-4a\Rightarrow a=\frac{1}{2}m/s^2$$

۳ سرعت در مکان M خواهد شد: $v_M=v-4a=6-4\times\frac{1}{2}=4m/s$

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان فاصلهٔ OM را حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_M^2-0=2a(OM)\Rightarrow 4^2=2\times\frac{1}{2}OM\Rightarrow OM=16m$$

میانبر برای به‌دست آوردن شتاب می‌توانستید از نکتهٔ زیر استفاده کنید:

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازه‌های زمانی یکسان t جابه‌جایی‌ها دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت at^2 تشکیل می‌دهند.

$$d_2-d_1=at^2\xrightarrow[t=4s]{d_1=20m,\ d_2=28m} 8=a(4)^2\Rightarrow a=\frac{1}{2}m/s^2$$

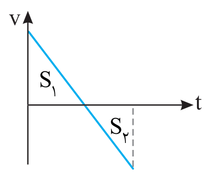
نمای ۲۸

B ۴۶۹ ۳

۱۰ **نکته** در نمودار v-t سطح زیر نمودار مسافت و جابه‌جایی متحرک را مشخص می‌کند:

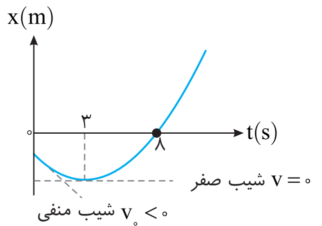
$$\Delta x=S_1+S_2\ ;\ S_1>0,S_2<0$$

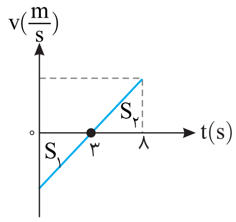
$$\ell=S_1+|S_2|$$



خط فکری برای به‌دست آوردن مسافت و تندی متوسط بهتر است نمودار v-t رسم شود. در گام اول از روی نمودار x-t باید نمودار v-t رسم شود.

با توجه به اینکه شیب خط مماس بر منحنی x-t نشان‌دهنده سرعت لحظه‌ای است، سرعت اولیهٔ متحرک منفی و سرعت در لحظهٔ t=3s برابر صفر است. از طرفی چون دهانه منحنی x-t رو به بالاست، شتاب حرکت مثبت است و شیب نمودار v-t مثبت خواهد بود پس:





یادآوری ریاضی نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌ها است.

با توجه به نمودار v-t و با استفاده از تشابه مثلث‌ها نسبت مساحت‌های S_1 و S_2 محاسبه می‌شود.

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(8-3)^2}{3^2}=\frac{25}{9}\Rightarrow S_2=\frac{25}{9}S_1$$

با توجه به نکته ابتدایی سؤال از روی S_1 و S_2 جابه‌جایی و مسافت مشخص می‌شود.

دقت کنید که S_1 زیر محور افقی بوده و در جابه‌جایی علامت منفی باید لحاظ شود.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مسافت}\ \ell=S_1+S_2=S_1+\frac{25}{9}S_1=\frac{34}{9}S_1 \\ \text{جابه‌جایی}\ \Delta x=S_2-S_1=\frac{25}{9}S_1-S_1=\frac{16}{9}S_1 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\Delta x}{\ell}=\frac{\frac{16}{9}S_1}{\frac{34}{9}S_1}=\frac{8}{17}$$

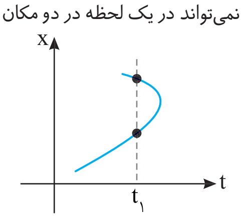
نمای ۲۹

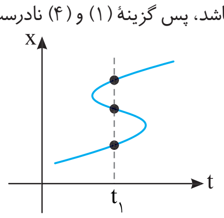
پنجره ۵

B ۴۷۰ ۳

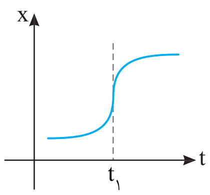
خط فکری دقت کنید که نمودار مکان – زمان به ما در هر لحظه مکان متحرک را نشان می‌دهد و یک متحرک در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان مختلف باشد از این‌رو یک خط عمود بر محور زمان (t) رسم کنید اگر نمودار را در دو یا چند نقطه قطع کند این نمودار نمی‌تواند نمودار مکان – زمان باشد. از طرفی در هیچ نقطه‌ای خط مماس بر نمودار نباید بر محور زمان عمود شود زیرا در این صورت شیب خط مماس که برابر سرعت لحظه‌ای است بی‌نهایت می‌شود حال با توجه به این نکات گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

متحرک نمی‌تواند در یک لحظه در دو مکان باشد، پس گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.





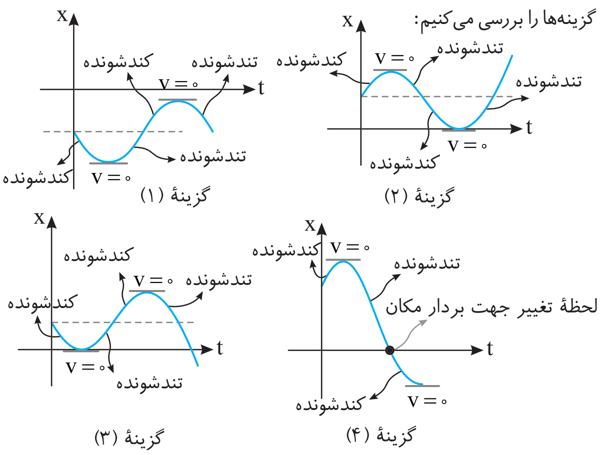
شیب خط مماس بر نمودار x-t برابر سرعت متحرک است، در لحظهٔ نشان داده شده خط مماس در نمودار گزینهٔ (۲) خط قائم است که شیب آن ∞ می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.



B ۴۷۱ | ۴

نکته هرگاه متحرک تغییر جهت بدهد، سرعت آن صفر می‌شود و برای ادامهٔ حرکت باید نوع حرکت آن تغییر کند. یعنی قبل از صفر شدن سرعت، باید حرکت کندشونده و بعد از آن تندشونده باشد.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



در گزینهٔ (۱) مطابق شکل، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و نمودار محور - زمان را قطع نمی‌کند یعنی بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

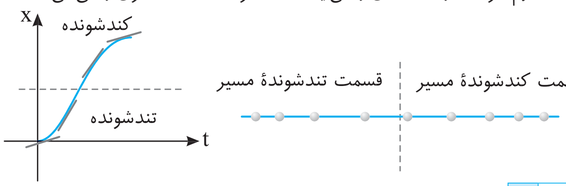
در گزینهٔ (۲) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و یک بار مکان آن صفر می‌شود $(x=۰)$ اما بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در گزینهٔ (۳) نیز متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده اما از مبدأ مکان $(x=۰)$ نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در گزینهٔ (۴) نوع حرکت دو بار تغییر کرده و نمودار یک بار محور زمان را قطع می‌کند، یعنی بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۴) درست است.

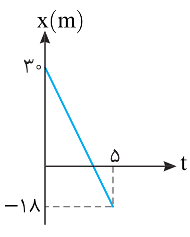
B ۴۷۲ | ۳

با توجه به نمودار $x-t$ ابتدا حرکت تندشونده و سپس کندشونده است، بنابراین در قسمت اول حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت بیشتری طی می‌کند و در قسمت دوم حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت کمتری را طی می‌کند.



A ۴۷۳ | ۴

نمودار مکان - زمان خط راست و متحرک دارای سرعت ثابت است. از این‌رو سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.



۱ به کمک داده‌های روی نمودار سرعت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{-۱۸-۳۰}{۵-۰}=\frac{-۴۸}{۵}\Rightarrow v=-۹/۶\,m/s$$

۲ معادله حرکت خواهد شد: $x=vt+x_۰\Rightarrow x=-۹/۶t+۳۰$

۳ در $t=۳s$ مکان را حساب می‌کنیم:

$$x=-۹/۶\times۳+۳۰=-۲۸/۸+۳۰\Rightarrow x=+۱/۲m$$

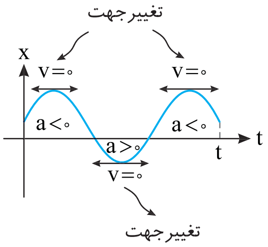
۴ جابه‌جایی درمدت $۳s$ خواهد شد: $\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x=-۹/۶\times۳=-۲۸/۸m$

A ۴۷۴ | ۴

یادآوری ۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان، سرعت صفر بوده و حرکت تغییر جهت می‌دهد (به شرط تغییر علامت شیب خط مماس بر نمودار)

۲ هرگاه دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.

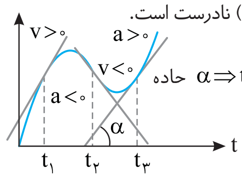
نمودار دارای سه نقطه بیشینه و کمینه است و سه بار متحرک تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.



ابتدا شتاب منفی سپس شتاب مثبت و سرانجام شتاب منفی شده است. بنابراین شتاب دو بار تغییر علامت داده است و گزینهٔ (۲) درست است.

A ۴۷۵ | ۳

در لحظهٔ $t_۱$، شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، پس سرعت مثبت است. اما جهت تقعر نمودار رو به پایین است، پس شتاب منفی است و در لحظهٔ $t_۱$، $av<۰$ است و حرکت کندشونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.



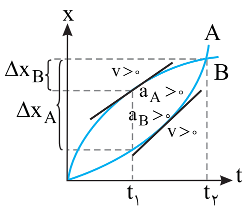
α حاده $\Rightarrow \tan\alpha>۰\Rightarrow v>۰$

در لحظهٔ $t_۲$، سرعت منفی است زیرا شیب خط مماس بر نمودار منفی است (خط مماس در لحظهٔ $t_۲$ با محور زمان زاویهٔ منفرجه می‌سازد) اما در مورد علامت شتاب نمی‌توان اظهارنظر کرد یعنی جایی که جهت تقعر منحنی و در نتیجه علامت شتاب عوض می‌شود، مشخص نیست پس نوع حرکت در لحظهٔ $t_۲$ مشخص نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است. در لحظهٔ $t_۳$ جهت تقعر رو به بالا است، پس شتاب مثبت و شیب خط مماس بر نمودار نیز مثبت است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

$(av>۰)$ در لحظهٔ $t_۳$ حرکت تندشونده $\Leftarrow v_۳>۰\ ,\ a_۳>۰$

B ۴۷۶ | ۳

برای بررسی و مقایسه سرعت متوسط دو متحرک در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ باید جابه‌جایی دو متحرک را بررسی کنید. در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ جابه‌جایی A از B بیشتر بوده و سرعت متوسط A از سرعت متوسط B بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.

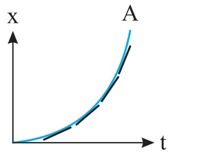


برای بررسی نوع حرکت دو راه وجود دارد.

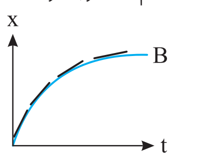
۱ علامت شتاب و سرعت را در بازهٔ زمانی داده شده مشخص کنید. اگر هم‌علامت باشند حرکت تندشونده و اگر مختلف‌العلامت باشند حرکت کندشونده است.

جهت تقعر نمودار A رو به بالا بوده پس شتاب آن مثبت است و اگر در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بر منحنی A مماس رسم شود، شیب خط مماس مثبت بوده در نتیجه سرعت نیز مثبت است، بنابراین حرکت تندشونده $(av>۰)$ است. اما جهت تقعر نمودار B رو به پایین بوده پس شتاب آن منفی است و شیب خط مماس بر نمودار B در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ مثبت بوده درنتیجه سرعت مثبت است، بنابراین حرکت B کندشونده $(av<۰)$ است و گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۳) درست است.

۲ روش دوم این است که تعدادی خط مماس بر نمودار رسم کنید اگر خط مماس به سمت افقی شدن برود حرکت کندشونده و اگر به سمت قائم شدن برود حرکت تندشونده است.



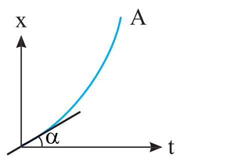
حرکت A تندشونده است



حرکت B کندشونده است

A ۴۷۷ ۳

راه‌حل اول: چون نمودار مکان- زمان بخشی از سهمی است، پس حرکت با شتاب ثابت است. در لحظهٔ $t=۰$ منحنی بر محور t مماس نبوده، پس سرعت اولیه صفر نیست بلکه $v_۰>۰$ است. جهت تقعر منحنی رو به بالا است، پس شتاب مثبت است و چون سرعت اولیه و سرعت در لحظات بعد از آن مثبت است حرکت تندشونده است.

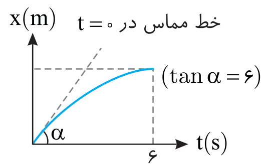


خط مماس بر نمودار $\Rightarrow v_۰\neq ۰$ در $t=۰$

راه‌حل دوم: اگر بر منحنی چند مماس در لحظه‌های مختلف رسم کنید، مشاهده می‌کنید که با گذشت زمان، شیب این خط‌های مماس در حال افزایش است، پس سرعت در حال زیاد شدن بوده و حرکت تندشونده است.

A ۴۷۸ ۱

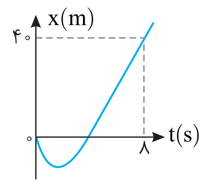
نکته شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر سرعت لحظه‌ای است.



با توجه به نمودار شیب خط مماس بر نمودار در $t=۰$ $(\tan\alpha=۶)$ سرعت اولیهٔ متحرک $۶m/s$ و در لحظهٔ $t=۶s$ که خط مماس بر نمودار موازی محور زمان است سرعت صفر است، بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) مسئلهٔ قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{۰+۶}{۲}\times ۶\Rightarrow \Delta x=۱۸\,m$$

A ۴۷۹ ۲



شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در هر لحظه برابر سرعت در آن لحظه‌ای است در صورت مسئله بیان شده که در لحظهٔ $t=۸s$، شیب خط مماس ۲۰ واحد SI است یعنی سرعت $v=۲۰m/s$ است. در بازهٔ صفر تا ۸s جابه‌جایی ۴۰m بوده و به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت اولیه را می‌توان حساب کرد.

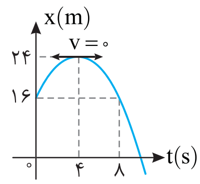
$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۴۰=\frac{۲۰+v_۰}{۲}\times ۸\Rightarrow v_۰=-۱۰m/s$$

شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۲۰-(-۱۰)}{۸}=۳/۷۵m/s^۲$$

B ۴۸۰ ۱

خط فکری نمودار مکان- زمان سهمی است و سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس متقارن است. به نمودار دقت کنید در لحظهٔ $t=۰$ و $t=۸s$ مکان $x=۱۶m$ است. بنابراین لحظهٔ رأس سهمی $t=۴s$ خواهد بود و در این لحظه سرعت صفر است. اکنون می‌توانید با این اطلاعات مسئله را حل کنید.



۱ نمودار مکان- زمان سهمی است و حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. در لحظهٔ $t=۴s$ سرعت صفر می‌شود بنابراین سرعت اولیه خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t$$

$$\Rightarrow(۲۴-۱۶)=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۴\Rightarrow v_۰=۴m/s$$

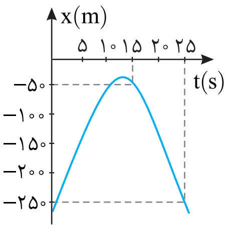
۲ سرعت در لحظهٔ $t=۸s$ به دلیل تقارن سهمی برابر $-۴m/s$ است. از این‌رو:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow |a_{av}|=|\frac{-۴-۴}{۸}|=+۱\,m/s$$

۳ متحرک در بازهٔ صفر تا ۸s از مکان $+۱۶m$ به همان مکان برگشته است از این‌رو سرعت متوسط صفر است.

$$\Delta x=۰\Rightarrow v_{av}=۰$$

C ۴۸۱ ۲



خط فکری نمودار مکان - زمان بخشی از یک سهمی است بنابراین حرکت با شتاب ثابت روی خط راست بوده و معادلهٔ مکان - زمان این نمودار به‌صورت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ است. می‌دانیم که مختصات هر نقطه روی نمودار باید در معادله صدق کند. سرعت اولیه $(v_۰=۴۰m/s)$ داده شده است، بنابراین شما باید به کمک مختصات دو نقطه دیگر روی نمودار دو معادله به‌دست بیاورید تا به کمک آن بتواند شتاب و مکان اولیه را حساب کنید البته مسئله از شما فقط شتاب را خواسته است.

۱ با توجه به نمودار مکان متحرک در لحظهٔ $t_۱=۱۵s$ برابر $x_۱=-۵۰m$ و در لحظهٔ $t_۲=۲۵s$ برابر $x_۲=-۲۵۰m$ است. این مختصات را در معادلهٔ مکان- زمان قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow -۲۵۰=\frac{۱}{۲}a(۶۲۵)+۴۰\times ۲۵+x_۰$$

$$\Rightarrow ۳۱۲/۵a+x_۰=-۱۲۵۰ \qquad (۱)$$

$$-۵۰=\frac{۱}{۲}a(۲۲۵)+۴۰\times ۱۵+x_۰\Rightarrow ۱۱۲/۵a+x_۰=-۶۵۰ \qquad (۲)$$

۲ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم و شتاب را به دست می‌آوریم:

$$۲۰۰a=-۶۰۰\Rightarrow a=-۳m/s^۲$$

B ۴۸۲ ۱

۱ $t=۲s$ رأس سهمی است و سرعت در این لحظه صفر است از این‌رو:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=a\times ۲+v_۰\Rightarrow v_۰=-۲a$$

۲ نمودار مکان - زمان است و حرکت دارای شتاب ثابت است مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادلهٔ مکان‌زمان صدق کند از این‌رو در لحظهٔ $t=۲s$ مکان $x=-۳m$ و در لحظهٔ $t=۵s$ مکان $x=+۱۵m$ است.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\begin{cases} t=۲s\Rightarrow -۳=\frac{۱}{۲}a\times ۴+(-۲a)\times ۲+x_۰\\ \Rightarrow -۳=-۲a+x_۰ \qquad (۱)\\ t=۵s\Rightarrow ۱۵=\frac{۱}{۲}a\times ۲۵+(-۲a)\times ۵+x_۰\\ \Rightarrow ۱۵=۲/۵a+x_۰ \qquad (۲)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم می‌کنیم}} ۱۸=۴/۵a\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۳ شتاب را در معادله (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-۳=-۲\times ۴+x_۰\Rightarrow x_۰=۵m$$

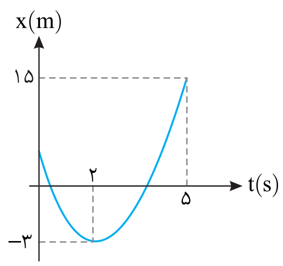
راه‌حل پیشنهادی یک دانش‌آموز: در بازهٔ ۲s تا ۵s خواهیم داشت:

$$x=\frac{v+v_۰}{۲}t+x_۰\Rightarrow ۱۵=\frac{v+۰}{۲}\times ۳-۳\Rightarrow v=۱۲m/s$$

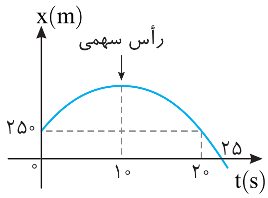
$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۱۲-۰}{۵-۲}=۴m/s^۲$$

به دلیل تقارن سهمی مکان در $t=۰$ و $t=۴s$ یکی است از این‌رو برای یافتن $x_۰$ از لحظهٔ $t=۲s$ که سرعت صفر و مکان $-۳m$ است تا لحظهٔ $t=۴s$ می‌توانیم بنویسیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times ۴(۴-۲)^۲-۳\Rightarrow x=۵m\Rightarrow x_۰=۵m$$



C ۴۸۳ ۱



۱ نمودار x−t حرکت با شتاب ثابت به صورت سهمی می‌باشد و می‌دانیم که سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس آن تقارن دارد. بنابراین لحظهٔ رأس سهمی خواهد شد: $t_{رأس}=\frac{0+20}{2}=10s$

۲ در رأس سهمی یعنی در نقطهٔ بیشینه نمودار مکان – زمان سرعت صفر است. به کمک معادلهٔ سرعت – زمان سرعت اولیه را بر حسب a به‌دست می‌آوریم.

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a\times 10+v_0 \Rightarrow v_0=-10a$ (۱)

۳ در لحظهٔ $t=25s$ مکان متحرک $x=0$ است که باید در معادلهٔ مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت صدق کند.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{(1)} 0=\frac{1}{2}a(25)^2+(-10a)\times(25)+250$$

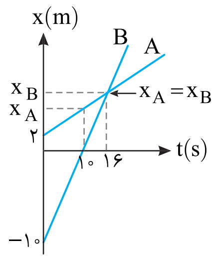
$$\Rightarrow a=-4m/s^2 \Rightarrow v_0=-10a=+40m/s$$

۴ در $t=10s$ سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد مکان تغییر جهت را به کمک معادلهٔ مکان – زمان به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times(-4)\times(10)^2+40\times10+250 \Rightarrow x=450m$$

B ۴۸۴ ۱

به نمودار نگاه کنید. متحرک B در لحظهٔ $t=10s$ از مبدأ مکان می‌گذرد و در لحظهٔ $t=16s$ مکان هر دو متحرک یکسان است ($x_A=x_B$).



۱ به کمک شیب خط B، مکان متحرک B را در لحظهٔ $t=16s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x_B-(-10)}{16-0}=\frac{0-(-10)}{10-0}\Rightarrow\frac{x_B+10}{16}=1$$

$$\Rightarrow x_B+10=16\Rightarrow x_B=6m$$

بنابراین در لحظهٔ $t=16s$ مکان متحرک A نیز $x_A=+6m$ است.

۲ به کمک شیب خط A، مکان متحرک A را در لحظهٔ $t=10s$ یعنی لحظهٔ عبور متحرک B از مبدأ مکان را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{6-2}{16-0}=\frac{x_A-2}{10-0}\Rightarrow\frac{4}{8}=\frac{x_A-2}{5}\Rightarrow 20=8x_A-16\Rightarrow 36=8x_A\Rightarrow x_A=4/5m$$

A ۴۸۵ ۴

۱ سرعت حرکت هر متحرک را از روی نمودار به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم:

$$v_A=\frac{0-(-5)}{2/5-0}\Rightarrow v_A=2m/s\ ,\ v_B=\frac{0-3}{6-0}\Rightarrow v_B=-0/5m/s$$

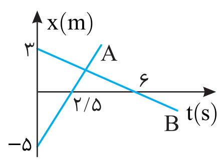
۲ معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0\Rightarrow x_A=2t-5\ ,\ x_B=-0/5t+3$$

۳ با توجه به صورت مسئله قرار است فاصلهٔ دو متحرک از هم ۵m باشد از این‌رو خواهیم داشت:

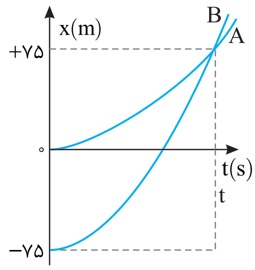
$$|x_A-x_B|=5\Rightarrow|2t-5+0/5t-3|=5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2/5t-8=5\Rightarrow t=\frac{13}{2/5}\Rightarrow t=5/2s\\ 2/5t-8=-5\Rightarrow t=\frac{3}{2/5}\Rightarrow t=1/2s\end{cases}$$



دقت کنید فاصلهٔ دو متحرک از هم ابتدا ($3+5=8m$) بوده و دو متحرک در حال نزدیک شدن به هم هستند و برای اولین بار هنگام نزدیک شدن یعنی در لحظهٔ $t=1/2s$ فاصلهٔ آن‌ها از هم ۵m می‌شود سپس دو متحرک از کنار هم می‌گذرند و از هم دور می‌شوند و دوباره در لحظهٔ $t=5/2s$ فاصلهٔ آن‌ها از هم ۵m می‌شود.

A ۴۸۶ ۲



خط فکری نمودار داده شده نمودار مکان – زمان است و جابه‌جایی در مدت t برای هر دو متحرک A و B مشخص است از طرفی سرعت اولیه هر دو متحرک صفر است. شتاب متحرک A را در اختیار داریم می‌توانیم به کمک آن زمان t یعنی زمانی که دو متحرک به هم می‌رسند (زمان سبقت) را حساب کرده و سرانجام به کمک معادلهٔ سرعت – زمان، سرعت هر دو متحرک را هنگام سبقت حساب کرد.

۱ جابه‌جایی متحرک A در مدت t، ۷۵m و شتاب آن ثابت و برابر $1/5m/s^2$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\xrightarrow{x_{0A}=0,v_{0A}=0}75=\frac{1}{2}(1/5)t^2\Rightarrow t=10s$$

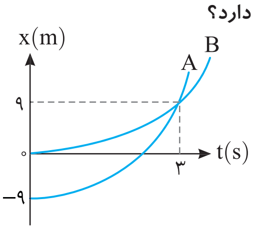
۲ متحرک B در مدت ۱۰s از مکان $x_0=-75m$ به مکان $x=75m$ رفته است از این‌رو خواهیم داشت:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\xrightarrow{v_{0B}=0}75=\frac{1}{2}a(10)^2+0-75\Rightarrow a=3m/s^2$$

زمان سبقت دو متحرک $t=10s$ است، در این لحظه به کمک معادلهٔ سرعت زمان، سرعت هر یک را حساب می‌کنیم:

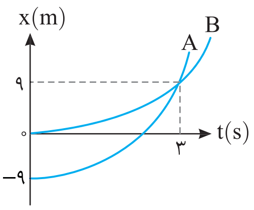
$$v_A=a_At+v_{0A}\Rightarrow v_A=(1/5)(10)\Rightarrow v_A=15m/s$$
$$v_B=a_Bt+v_{0B}\Rightarrow v_B=(3)(10)\Rightarrow v_B=30m/s$$
$$\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\frac{30}{15}=2$$

بازی با سؤال نمودار مکان – زمان دو متحرک که از حال سکون و با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کنند، مطابق شکل روبه‌رو است. در لحظهٔ $t=10s$ متحرک A چندمتر جلوتر از B قرار دارد؟



۱) ۹۱
۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۹
۴) ۲۰۰

پاسخ حرکت با شتاب ثابت است. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب مسئله را حل می‌کنیم:



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\ ,\ B:9=\frac{v_B+0}{2}\times3$$
$$\Rightarrow v_B=6m/s$$
$$A:9-(-9)=\frac{v_A+0}{2}\times3$$
$$\Rightarrow v_A=12m/s$$

شتاب را برای هر متحرک به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_A=\frac{12-0}{3}=4m/s^2\ ,\ a_B=\frac{6-0}{3}=2m/s^2$$

مکان هر متحرک را در $t=10s$ به‌دست می‌آوریم.

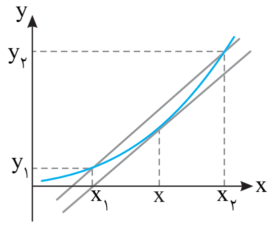
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}\times4\times100+0+(-9)=191m\\ x_B=\frac{1}{2}\times2\times100+0+0=100m\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_A-x_B=91m$$

گزینهٔ ۱

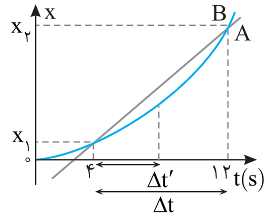
A | ۴۸۷ | ۲

روش اول: با توجه به آنچه در کتاب حسابان برای شکل شبیه نمودار مقابل بیان می‌شود، شیب خط قاطع بین دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ با شیب خط مماس گذرنده از نقطهٔ $x=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$ برابر است از این‌رو در



نمودارهای A و B نیز شیب خط مماس بر نمودار سهمی (B) در لحظهٔ $t=\frac{t_۱+t_۲}{۲}$ با شیب خط قاطع A برابر می‌شود. بنابراین $t=\frac{۴+۱۲}{۲}=۸s$.

روش دوم: جابه‌جایی متحرک A و B در بازهٔ $t=۴s$ و $t=۱۲s$ یکسان است. متحرک A حرکت سرعت ثابت داشته و سرعت لحظه‌ای و متوسط آن همواره با هم برابر است:



$$v_{av_A}=v_A\xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}}\frac{\Delta x_A}{\Delta t}=v_A$$

$$\xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B=\frac{۱}{۲}a(\Delta t)^۲+v\Delta t}$$

$$v_A=\frac{\frac{۱}{۲}a\Delta t^۲+v\Delta t}{\Delta t}=\frac{۱}{۲}a\Delta t+v\Rightarrow v_A=a\frac{\Delta t}{۲}+v$$

برای متحرک B معادلهٔ سرعت به صورت $v_B=a\Delta t'+v$ است و چون سرعت A و B با هم برابر است.

$$a\frac{\Delta t}{۲}+v=a\Delta t'+v\Rightarrow \Delta t'=\frac{\Delta t}{۲}\Rightarrow \Delta t'=\frac{۱۲-۴}{۲}=۴s$$

بنابراین لحظهٔ مورد نظر خواهد شد: $۴+۴=۸s$

روش سوم:

نکته در نمودار $x-t$ شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر سرعت متوسط متحرک است.

شیب نمودار A از طرفی برابر سرعت این متحرک است و از طرف دیگر چون خط قاطع بین دو لحظهٔ $t_۱=۴s$ تا $t_۲=۱۲s$ متحرک B بوده برابر سرعت متوسط متحرک B در این بازه خواهد بود:

$$v_{av_B}(\text{۴s تا ۱۲s})=v_A\quad (I)$$

نکته در حرکت شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ با سرعت در وسط بازه برابر است:

$$v_{av}(t_۱\ \text{تا}\ t_۲)=v(\frac{t_۱+t_۲}{۲})$$

سرعت متوسط متحرک B که دارای حرکت شتاب ثابت است (چون نمودار $x-t$ آن به صورت سهمی بوده) برابر سرعت در وسط آن بازه خواهد بود:

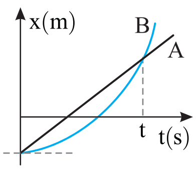
$$v_{av_B}(\text{۴s تا ۱۲s})=v_B(t=\frac{۴+۱۲}{۲})\Rightarrow v_{av_B}(\text{۴s تا ۱۲s})=v_B(۸s)\quad (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} v_{av_B}(\text{۴s تا ۱۲s})=v_A \\ v_{av_B}(\text{۴s تا ۱۲s})=v_B(۸s)\end{cases}\Rightarrow v_A=v_B(۸s)$$

B | ۴۸۸ | ۲

سرعت اولیهٔ متحرک B صفر است. $(v_{\circ B}=\circ)$



نکته در نمودارهای شبیه نمودار سؤال، شیب خط A (سرعت متحرک A) با شیب خط مماس بر سهمی در لحظهٔ وسط بازهٔ زمانی تقاطع دو نمودار برابر است.

نکته در حرکت با شتاب ثابت در هر بازهٔ زمانی، سرعت در وسط بازه برابر میانگین سرعت‌ها در لحظات ابتدایی و انتهایی بازه است. $v=v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$

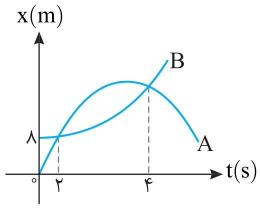
با توجه به نکات بیان شده باید سرعت متحرک A با سرعت B در لحظهٔ $\frac{t+\circ}{۲}=\frac{t}{۲}$ وسط بازه برابر شود از این‌رو:

$$v_A=\frac{v_{Bt}+v_{\circ B}}{۲}\Rightarrow v_A=\frac{v_{Bt}}{۲}\Rightarrow v_{Bt}=۲v_A$$

C | ۴۸۹ | ۲

خط فکری دقت کنید در اصل در این مسئله نمی‌توانید سرعت اولیه A $(v_{\circ A})$ و سرعت اولیه $(v_{\circ B})$ را جداگانه حساب کرده وسپس اختلاف آن‌ها را به دست بیاورید به‌همین دلیل باید به کمک معادلهٔ مکان - زمان و مختصات نقاط روی نمودار مسئله را حل کنید.

۱ شتاب دو متحرک هم‌اندازه است اما دهانهٔ نمودار متحرک B رو به بالاست پس حرکت این متحرک دارای شتاب مثبت است. $a_B>\circ$



دهانهٔ نمودار متحرک A رو به پایین است پس حرکت این متحرک دارای شتاب منفی است. $a_A<\circ$

بنابراین اگر شتاب B برابر a باشد شتاب A برابر $-a$ خواهد بود.

۲ معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_B=\frac{۱}{۲}at^۲+v_{\circ B}t+۸\ ,\ x_A=-\frac{۱}{۲}at^۲+v_{\circ A}t$$

۳ در دو لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۴s$ مکان دو متحرک یکسان است. بنابراین در این دو لحظه مکان متحرک A و B را به‌دست می‌آوریم و برابر قرار می‌دهیم.

$$x_B=x_A\Rightarrow\begin{cases} t=۲s\Rightarrow ۲a+۲v_{\circ B}+۸=-۲a+۲v_{\circ A} \\ \Rightarrow ۴a+۸=۲(v_{\circ A}-v_{\circ B})\Rightarrow ۲a+۴=v_{\circ A}-v_{\circ B}\quad (۱) \\ t=۴s\Rightarrow ۸a+۴v_{\circ B}+۸=-۸a+۴v_{\circ A} \\ \Rightarrow ۱۶a+۸=۴(v_{\circ A}-v_{\circ B})\quad (۲)\end{cases}$$

۴ در رابطهٔ (۲) به جای $v_{\circ A}-v_{\circ B}$ از رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۱۶a+۸=۸a+۱۶\Rightarrow ۸a=۸\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

۵ با جای‌گذاری $a=۱m/s^۲$ در معادلهٔ (۱)، اختلاف سرعت اولیهٔ دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$۲a+۴=v_{\circ A}-v_{\circ B}\xrightarrow{a=۱m/s^۲}v_{\circ A}-v_{\circ B}=۶m/s$$

B | ۴۹۰ | ۱

خط فکری حرکت خودروی A شتابدار و با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه است بنابراین نمودار A سهمی بوده که در $t=\circ$ بر نمودار t مماس است که ۴۲ متر عقب‌تر از A است. برای آنکه نمودار درست را تشخیص بدهید باید ابتدا لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند را حساب کنید و اگر محل حرکت خودروی A را مبدأ مکان بگیرید باید مکان اولیهٔ B $(x_{\circ B}=-۴۲m)$ شود.

زمان رسیدن دو خودرو به هم را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، معادلهٔ مکان- زمان هر دو را نوشته و برابر قرار می‌دهیم:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{\circ A}t+x_{\circ A}=v_Bt+x_{\circ B}$$

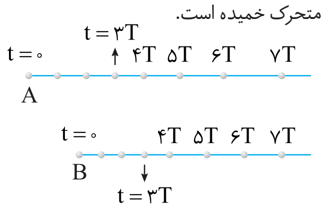
$$\frac{۱}{۲}\times ۲\times t^۲+\circ+\circ=۱۷t-۴۲\Rightarrow t^۲-۱۷t+۴۲=\circ$$

$$\Rightarrow(t-۳)(t-۱۴)=\circ\Rightarrow t=۳s\ ,\ t=۱۴s$$

با توجه به این‌که متحرک A از حال سکون شروع به حرکت کرده و این که مکان اولیهٔ B منفی است، گزینهٔ (۱) درست است.

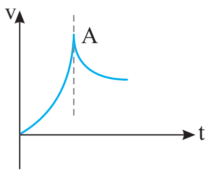
A ۴۹۱ ۴

با توجه به شکل مسیر، متحرک A از مکان عقب‌تر از B شروع به حرکت کرده و سرعت ابتدایی A بیشتر از سرعت B است $(v_A > v_B)$، زیرا در مدت ۳T مسیر طولانی‌تری را طی کرده است. جابه‌جایی هر دو در مدت ۳T با تندی ثابت انجام شده زیرا مسافت طی شده در بازه‌های T یکسان است. در ادامهٔ مسیر شتاب B بیشتر از A است و بر تندی B مقدار بیشتری اضافه می‌شود زیرا جابه‌جایی‌ها در بازه‌های ۳T و ۷T برای B بزرگ‌تر از A بوده و در ۷T دو متحرک کنار یکدیگرند. در این صورت در بازهٔ صفر تا ۳T نمودار A و B خط راست مایل بوده که شیب خط A بیشتر از شیب خط B است و در ادامهٔ نمودار هر دو متحرک خمیده است.

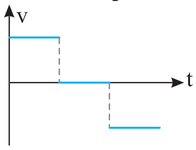


A ۴۹۲ ۱

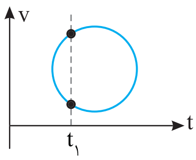
در شکل (الف) اگر در نقطهٔ A خط مماس بر نمودار را رسم کنید این خط بر محور افقی عمود است بنابراین شتاب که برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان است بی‌نهایت (∞) خواهد شد که ممکن نیست و شکل (الف) نادرست است. نمودار $v-t$ یک نمودار پیوسته است یعنی نمی‌توان در یک لحظه از سرعت $+v$ به صفر رسید، پس نمودار (ب) نیز نادرست است. در شکل (پ) نمودار یک دایره است در این صورت در یک لحظهٔ مانند t_1 متحرک دو سرعت مختلف دارد که این ممکن نیست و شکل (پ) نادرست است. بنابراین شکل (ت) تنها شکل درست است.



شکل (الف)



شکل (ب)



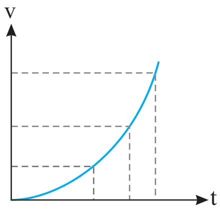
شکل (پ)

B ۴۹۳ ۱

حرکت تندشونده یعنی حرکتی که در آن بزرگی سرعت (تندی) در حال افزایش است. در نمودار گزینهٔ (۱) در بازهٔ t_1 تا t_2 بزرگی سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است. در نمودار گزینه‌های (۲) و (۴) بزرگی سرعت در حال کاهش است پس در بازهٔ t_1 تا t_2 حرکت کندشونده است و گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند. در نمودار گزینهٔ (۳) ابتدا تندی (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش بوده و صفر می‌شود و سپس افزایش می‌یابد، بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

A ۴۹۴ ۴

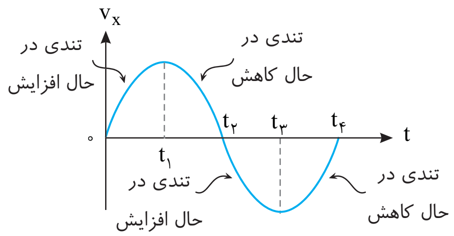
نمودار سرعت – زمان است و در $t=0$ سرعت صفر است. با گذشت زمان، سرعت در حال افزایش است. پس حرکت تندشونده است. نمودار سهمی بوده و اما شتاب متغیر است زیرا اگر شتاب ثابت بود بنا به معادلهٔ سرعت – زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_0)$ باید نمودار سرعت – زمان خط راست می‌شد که چنین نیست و گزینهٔ (۴) درست است.



B ۴۹۵ ۱

هرگاه تندی متحرک (اندازهٔ سرعت) کاهش یابد حرکت کندشونده است، با توجه به شکل در بازهٔ t_1 تا t_2 تندی کاهش یافته و در لحظهٔ t_2 صفر می‌شود، بنابراین در این بازه حرکت کندشونده است. از طرفی در بازهٔ t_1 تا t_2، نمودار بالای محور زمان است.

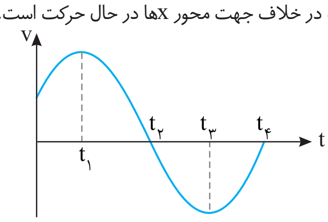
بنابراین سرعت مثبت و حرکت متحرک در جهت محور xها است.



B ۴۹۶ ۱

خط فکری در نمودار $v-t$ مطابق شکل زیر به نکات زیر دقت کنید:

الف) در بازهٔ ۰ تا t_2 سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و در مدت t_2 تا t_4 سرعت منفی شده و جهت حرکت متحرک تغییر کرده و متحرک در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است.



نکته جهت حرکت با جهت سرعت مشخص می‌شود و اگر سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور xها حرکت می‌کند و بالعکس.

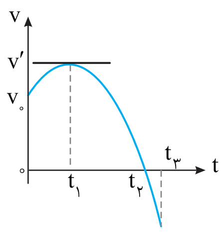
ب) شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب حرکت است. در بازهٔ ۰ تا t_1 و t_3 تا t_4 نمودار صعودی با شیب مثبت بوده و شتاب مثبت است و در بازهٔ t_1 تا t_3 نمودار نزولی بوده و شتاب منفی است.

پ) در بازهٔ ۰ تا t_1 و t_2 تا t_3 نمودار از محور زمان در حال دور شدن بوده و تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده است و از طرف دیگر در بازهٔ t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4 نمودار به محور زمان در حال نزدیک شدن بوده و تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

ت) در لحظهٔ t_2 سرعت صفر شده و پس از آن تغییر علامت می‌دهد، پس در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد و در بیشینه و کمینهٔ نمودار یعنی لحظه‌های t_1 و t_3 شیب خط مماس صفر بوده و در نتیجه شتاب صفر می‌شود و علامت شتاب تغییر می‌کند.

با توجه به این نکات به بررسی تک‌تک گزاره‌ها می‌پردازیم:

الف) در لحظهٔ t_1 شیب خط نمودار افقی و صفر شده پس در این لحظه تنها شتاب صفر شده و تغییر علامت می‌دهد اما سرعت v' بوده و تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین گزارهٔ (الف) نادرست است.



ب) در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت مثبت بوده پس متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و گزارهٔ (ب) درست است.

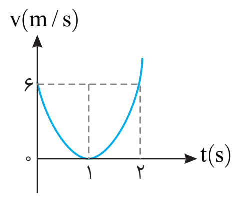
پ) در بازهٔ ۰ تا t_1 نمودار از محور افقی زمان در حال دور شدن است، پس حرکت متحرک تندشونده بوده و تندی آن از v_0 تا v' افزایش می‌یابد و گزارهٔ (پ) نادرست است.

ت) در بازهٔ ۰ تا t_1 نمودار صعودی با شیب مثبت بوده و شتاب آن مثبت است (شتاب در جهت محور x است) و در بازهٔ t_1 تا t_2 نمودار نزولی با شیب منفی بوده و شتاب آن منفی است (شتاب خلاف جهت محور x است) بنابراین گزارهٔ (ت) نادرست است و تنها گزارهٔ (ب) درست است.

نکته البته می‌توانیم کمی حرفه‌ای‌تر باشیم، با توجه به گزینه‌ها گزارهٔ (ب) و (ت) دو بار در گزینه‌ها تکرار شده‌اند، پس تنها همین دو گزاره را بررسی کنیم و چون گزارهٔ (ب) درست و گزارهٔ (ت) نادرست است، پس پاسخ گزینهٔ (۱) می‌شود.

B ۴۹۷ ۲

نمودار سهمی است و سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس دارای تقارن است. لحظهٔ $t=1s$ رأس سهمی است بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t=0$ و $t=2s$ یکسان و برابر $6m/s$ است. از طرفی در لحظهٔ $t=1s$ سرعت صفر است بنابراین شتاب متوسط در ثانیهٔ دوم یعنی در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ خواهد شد:

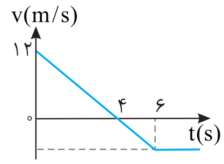


$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{6-0}{2-1}\Rightarrow a=6m/s^2$$

B ۴۹۸ ۲

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است وقتی نمودار سرعت - زمان خط راست مایل باشد. شیب نمودار ثابت یعنی شتاب حرکت ثابت است.

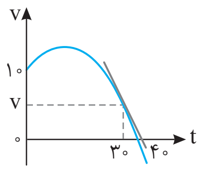
در بازهٔ صفر تا $6s$ حرکت دارای شتاب ثابت است یعنی در تمام بازه‌های زمانی بین صفر تا $6s$ شتاب متحرک یکسان و برابر شیب خط است از این رو کافی است شیب نمودار را در بازهٔ صفر تا $4s$ از روی نمودار حساب کنیم.



$$a=\frac{v-v_0}{t-t_0}=\frac{0-12}{4-0}=-3m/s^2\Rightarrow|a|=3m/s^2$$

B ۴۹۹ ۴

۱ در نمودار $v-t$ شیب خط مماس در هر لحظه برابر شتاب لحظه‌ای است بنابراین شتاب متحرک در لحظهٔ $t=30s$ را به کمک شیب خط مماس بر نمودار به‌دست می‌آوریم



$$a_{t=30}=\frac{0-v}{40-30}=\frac{-v}{10}\quad(1)$$

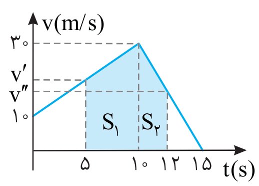
۲ شتاب متوسط در مدت $30s$ اول یعنی در بازهٔ $t=0$ تا $t=30s$ خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_{t=30}-v_t}{\Delta t}=\frac{v-10}{30}\quad(2)$$

۳ در صورت مسئله بیان شده شتاب در لحظهٔ $t=30s$ با شتاب متوسط در $30s$ اول برابر است بنابراین رابطهٔ (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم:

$$a_{av}=a_{t=30}\Rightarrow\frac{v-10}{30}=\frac{-v}{10}\Rightarrow v-10=-3v\Rightarrow 4v=10\Rightarrow v=2/5m/s$$

B ۵۰۰ ۲



۱ شتاب حرکت در قسمت اول برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_1=\frac{30-10}{10}=2m/s^2$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=5s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v'=2\times5+10=20m/s$$

۳ شتاب حرکت در قسمت دوم ($10s$ تا $15s$) برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_2=\frac{0-30}{15-10}\Rightarrow a_2=-6m/s^2$$

۴ سرعت در لحظهٔ $t=12s$ (لحظهٔ $2s$ این قسمت) برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v''=-6\times(12-10)+30\Rightarrow v''=18m/s$$

۵ مساحت سطح رنگی را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=S=S_1+S_2=\frac{20+30}{2}\times5+\frac{18+30}{2}\times2\Rightarrow\Delta x=125+48=173m$$

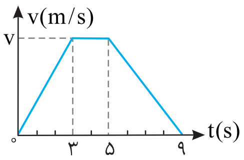
روش استفاده از شیب نمودار برای یافتن سرعت در لحظهٔ $t=5s$ و $t=12s$:

سرعت در لحظهٔ $t=5s$: $\frac{30-10}{10-0}=\frac{v'-10}{5-0}\Rightarrow v'=20m/s$

سرعت در لحظهٔ $t=8s$: $\frac{0-30}{15-10}=\frac{0-v''}{15-12}\Rightarrow 6=\frac{v''}{3}\Rightarrow v''=18m/s$

بقیهٔ حل مسئله همان محاسبهٔ سطح S_1 و S_2 است.

A ۵۰۱ ۱



۱ سطح زیر نمودار را در بازهٔ صفر تا $9s$ برابر $165m$ قرار می‌دهیم.

$$\Delta x=S\Rightarrow165=\frac{9+2}{2}\times v$$

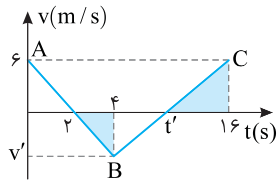
$$\Rightarrow v=30m/s$$

۲ اندازهٔ شتاب در قسمت کندشوندهٔ حرکت خواهد بود:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow|a|=\left|\frac{0-30}{9-5}\right|=7/5m/s^2$$

A ۵۰۲ ۴

خط فکری قرار است مسافت طی شده در بازهٔ زمانی که حرکت تندشونده است را حساب کنیم در این بازهٔ زمانی باید تندی متحرک (اندازهٔ سرعت آن) در حال افزایش باشد. بنابراین شما ابتدا باید این بازه‌های زمانی را شناسایی کرده سپس اندازهٔ سطح زیر نمودار را در این بازه‌ها با هم جمع کنید.



۱ تندی متحرک در بازهٔ $2s$ تا $4s$ و بازهٔ t' تا $t=16s$ در حال افزایش بوده و حرکت متحرک تندشونده است.

۲ سرعت متحرک در $t=4s$ را به کمک شیب خط AB به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v'-6}{4-0}=\frac{0-6}{2-0}\Rightarrow v'=-6m/s$$

۳ لحظهٔ t' را به کمک شیب خط BC حساب می‌کنیم.

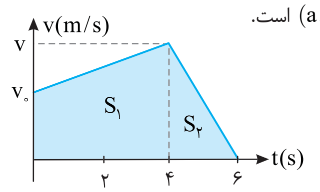
$$\frac{6-(-6)}{16-4}=\frac{6-0}{16-t'}\Rightarrow16-t'=6\Rightarrow t'=10s$$

۴ حال مساحت سطح زیر نمودار را در این دو بازه که حرکت تندشونده است، به‌دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases}t=2s\ \text{تا}\ t=4s\ : & |L_1|=\frac{2\times6}{2}=6m\\ t=10s\ \text{تا}\ t=16s\ : & |L_2|=\frac{6\times6}{2}=18m\end{cases}\Rightarrow L=6+18=24m$$

A ۵۰۳ ۳

در بازهٔ صفر تا $4s$ شیب نمودار مثبت بنابراین شتاب حرکت مثبت $(a_1=+2/5m/s^2)$ و در بازهٔ زمانی $4s$ تا $6s$ شیب نمودار منفی و شتاب حرکت نیز منفی $(a_2=-7/5m/s^2)$ است.



۱ ابتدا به کمک شتاب در بازهٔ $t=4s$ تا $t=6s$، سرعت را در لحظهٔ $t=4s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow-7/5=\frac{0-v}{6-4}\Rightarrow v=15m/s$$

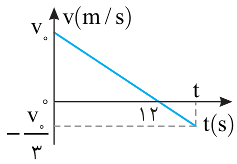
۲ سرعت اولیهٔ متحرک را از قسمت اول حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow2/5=\frac{15-v_0}{4-0}\Rightarrow v_0=5m/s$$

۳ جابه‌جایی برابر سطح زیر نمودار است از این رو خواهیم داشت:

$$\Delta x=S_1+S_2=\frac{15+5}{2}\times4+\frac{15\times2}{2}\Rightarrow\Delta x=55m$$

B ۵۰۴ ۴



۱ نمودار $v-t$ خط راست است. پس حرکت با شتاب ثابت بوده و در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$ است، با توجه به فرض مسئله سرعت متوسط قرار است $\frac{1}{3}v_0$ باشد از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{v_0+v}{2}=\frac{1}{3}v_0\Rightarrow v_0+v=\frac{2}{3}v_0\Rightarrow v=-\frac{1}{3}v_0$$

۲ سرعت متحرک از $t=0$ تا $t=12s$ از v_0 به صفر می‌رسد. شتاب حرکت را برحسب v_0 به‌دست می‌آوریم. $v=at+v_0\Rightarrow -v_0=12a\Rightarrow a=\frac{-v_0}{12}$

۳ اکنون لحظه‌ای که سرعت متحرک به $-\frac{1}{3}v_0$ می‌رسد را حساب می‌کنیم (نگران v_0 نباشید از رابطه حذف می‌شود)

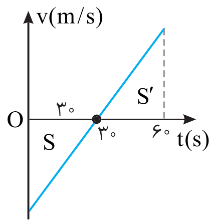
$$v=at+v_0\Rightarrow -\frac{1}{3}v_0=\frac{-v_0}{12}t+v_0\Rightarrow \frac{-4}{3}v_0=\frac{-v_0}{12}t\Rightarrow t=16s$$

روش دیگر استفاده از شیب نمودار $v-t$ که در آن نیازی نیست که شتاب را حساب کنیم.

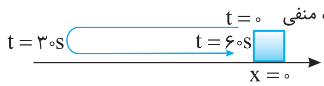
$$\frac{v_0-0}{0-12}=\frac{\frac{-v_0}{3}-0}{t-12}\Rightarrow t-12=4\Rightarrow t=16s$$

C ۵۰۵ ۱

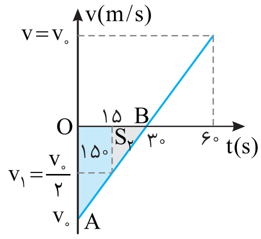
خط فکری متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان $(x_0=0)$ گذشته تا لحظهٔ $t=30s$ با سرعت منفی در جهت منفی به حرکت ادامه می‌دهد تا سرعتش صفر شده و با همان شتاب مسیر را برمی‌گردد و از لحظهٔ $t=30s$ تا $t=60s$ در جهت مثبت محور در حال حرکت است و به مبدأ نزدیک می‌شود. اگر به نمودار دقت کنید. با توجه به اینکه قاعدهٔ دو مثلث در بازهٔ صفر تا 30s برابر قاعدهٔ مثلث در بازهٔ 30s تا 60s است (طول هر دو قاعده 30s) بنابراین این دو مثلث هم‌نهشت بوده و دارای مساحت‌های یکسانی‌اند:



بنابراین جمع جابه‌جایی‌های متحرک در این بازه‌ها برابر $S+S'$ بوده که با هم برابراند اما جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا 30s منفی است و جابه‌جایی کل برابر صفر می‌شود، یعنی متحرک در $t=60s$ مجدداً به مبدأ مکان می‌رسد پس نتیجه می‌گیریم بیشترین فاصله از مبدأ در لحظهٔ تغییر جهت $t=30s$ اتفاق می‌افتد و در این مدت شما باید مساحت مثلث OAB را به‌دست بیاورید.



یادداشت ریاضی در تشابه دو مثلث نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه اضلاع برابر است.



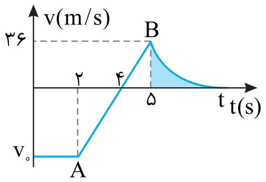
در بازهٔ صفر تا 15s مکان متحرک از $x=0$ به $x=-150m$ رسیده است یعنی جابه‌جایی متحرک $-150m$ است، بنابراین اندازهٔ سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا 15s برابر 150m است. نسبت مساحت‌ها را می‌نویسیم.

$$\frac{S_{OAB}}{S_2}=\left(\frac{30}{15}\right)^2\Rightarrow\frac{150+S_2}{S_2}=(2)^2\Rightarrow 150+S_2=4S_2\Rightarrow S_2=50m$$

$$\Rightarrow S_{OAB}=150+50=200m$$

بنابراین بیشترین فاصله متحرک از مبدأ ۲۰۰ متر است.

B ۵۰۶ ۱



۱ با توجه به شیب خط AB، سرعت اولیهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{36-0}{5-4}=\frac{36-v_0}{5-2}\Rightarrow 3\times36=36-v_0\Rightarrow v_0=-72m/s$$

۲ با توجه به صورت مسئله مساحت قسمت هاشورخورده برابر ۳۰ واحد SI است یعنی متحرک در بازهٔ 5s تا t جابه‌جایی $+30m$ را در جهت مثبت محور xها می‌پیماید.

۳ جابه‌جایی کل متحرک برابرسطح زیر نمودار سرعت − زمان است بنابراین:

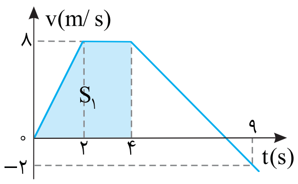
$$\Delta x=S=(4+2)\times\frac{-72}{2}+\frac{36\times1}{2}+30\Rightarrow\Delta x=-216+48\Rightarrow\Delta x=-168m$$

۴ مکان اولیه بنا به فرض مسئله $x_0=+150m$ است بنابراین مکان نهایی خواهد شد:

$$\Delta x=x-x_0\Rightarrow -168=x-(150)\Rightarrow x=-18m$$

C ۵۰۷ ۲

خط فکری متحرک از مکان $x_0=-36m$ شروع به حرکت کرده است و برای اینکه متحرک از مبدأ مکان بگذرد باید جابه‌جایی برابر $+36m$ انجام دهد. سطح محصور بین نمودار سرعت − زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، بنابراین باید شما لحظه‌ای را به‌دست بیاورید که سطح زیر نمودار برابر ۳۶ واحد SI شود.



۱ ابتدا سطح زیر نمودار را در مدت 4s به‌دست می‌آوریم:

$$0\to4s\Rightarrow S_1=\Delta x$$

$$\Rightarrow\Delta x=\frac{4+2}{2}\times8=24m$$

۲ در مدت 4s متحرک 24m حرکت کرده و به مکان $-36+24=-12m$ می‌رسد و هنوز از مبدأ مکان عبور نکرده بنابراین لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد. بعد از $t=4s$ رخ می‌دهد و از لحظهٔ $t=4s$ متحرک باید 12m جابه‌جا شود تا به مبدأ برسد.

۳ شتاب را در بازهٔ 4s تا 9s به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{-2-8}{9-4}=-2m/s^2$$

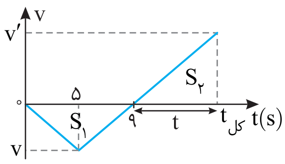
۴ مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک با شتاب $-2m/s^2$ و سرعت اولیهٔ 8m/s به اندازهٔ 12m جابه‌جا شود را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 12=\frac{1}{2}(-2)t^2+8t\Rightarrow t^2-8t+12=0$$

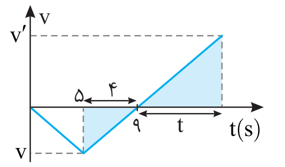
$$\Rightarrow(t-2)(t-6)=0\Rightarrow t=2s,t=6s$$

۵ لحظهٔ گذر از مبدأ برای اولین بار $2+4=6s$ است. لحظهٔ $6+4=10s$ مربوط به لحظه‌ای است که متحرک پس از توقف و در برگشت برای دومین بار از مبدأ مکان می‌گذرد.

B ۵۰۸ ۱



خط فکری برای آنکه متحرک به جای اول بازگردد باید جابه‌جایی آن صفر شود، یعنی جمع جبری سطح‌های محصور بین نمودار $v-t$ با محور زمان صفر می‌شود. از این‌رو باید $|S_1|=|S_2|$ باشد.



دو مثلث هاشورخورده در شکل مقابل با هم متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{v'}{v}=\frac{t}{4}\Rightarrow v'=v\frac{t}{4}$$

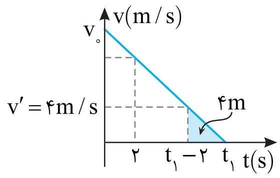
با توجه به خط فکری باید سطح زیر نمودار قسمت اول نمودار (S_1) با سطح زیر نمودار قسمت دوم (S_2) برابر باشد.

$$S_1=S_2\Rightarrow\frac{9\times v}{2}=\frac{v'\times t}{2}\Rightarrow\frac{9\times v}{2}=\frac{vt}{4}\times\frac{t}{2}\Rightarrow t^2=36\Rightarrow t=6s$$

$$t_{کل}=6+9=15s$$

B ۵۰۹ ۲

۱ نمودار $v-t$ به صورت خط راست است پس حرکت با شتاب ثابت است. در ۲s آخر متحرک با شتاب ثابت جابه‌جایی ۴m را طی می‌کند و سرعتش از v' به صفر می‌رسد. مقدار v' را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta x=\frac{v_۲+v_۱}{۲}t\Rightarrow ۴=\frac{v'}{۲}\times ۲\Rightarrow v'=۴m/s$$

۲ در ۲s آخر سرعت از ۴m/s به صفر رسیده است بنابراین شتاب خواهد شد:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-۴}{۲}=-۲m/s^۲$$

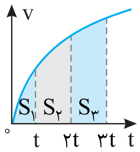
۳ متحرک در مدت ۲s آغازین با سرعت اولیه $v_۰$ و شتاب $-۲m/s^۲$ جابه‌جایی ۳۶ متر را طی می کند بنابراین می‌توان به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، سرعت اولیه را حساب کرد.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow ۳۶=\frac{۱}{۲}(-۲)\times(۲)^۲+v_۰\times ۲\Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$

۴ اکنون با معادلهٔ سرعت - زمان، $t_۱$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۲t+۲۰\Rightarrow t=۱۰s$$

B ۵۱۰ ۳

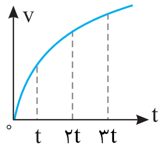


سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است. از طرفی سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر با جابه‌جایی است. بازه‌های زمانی در گزینه‌ها یکسان است از این‌رو باید جابه‌جایی یعنی سطح زیر نمودارها را در این بازه‌های زمانی با هم مقایسه کرد.

$$S_۳>S_۲>S_۱\Rightarrow v_{av_۳}>v_{av_۲}>v_{av_۱}$$

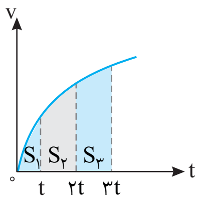
بنابراین در بازهٔ ۲t تا ۳t، سرعت متوسط از بقیهٔ گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

بازی با سؤال **نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است، مطابق شکل روبه‌رو است، در کدام بازهٔ زمانی سرعت متوسط متحرک بزرگ‌تر است؟**



۱) صفر تا ۳t **۲)** صفر تا ۲t **۳)** ۲t تا ۳t **۴)** t تا ۲t

پاسخ **سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۳t:**



$$v_{av_۱}=\frac{S_۱+S_۲+S_۳}{۳t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۲s :

$$v_{av_۲}=\frac{S_۱+S_۲}{۲t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ ۲t تا ۳t :

$$v_{av_۳}=\frac{S_۳}{t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ t تا ۲t :

$$v_{av_۴}=\frac{S_۲}{t}$$

با توجه به اینکه $S_۳>S_۲>S_۱$ است، داریم:

در بازهٔ صفر تا ۳t $\Rightarrow v_{av}=\frac{S_۱+S_۲+S_۳}{۳t}\xrightarrow{S_۱+S_۲+S_۳<۳S_۳} v_{av_۱}<\frac{۳S_۳}{۳t}$

$$\Rightarrow v_{av_۱}<\frac{S_۳}{t}\Rightarrow v_{av_۱}<v_{av_۳}$$

در بازهٔ صفر تا ۲t $\Rightarrow v_{av}=\frac{S_۱+S_۲}{۲t}\xrightarrow{S_۱+S_۲<۲S_۲} v_{av_۲}<v_{av_۳}$

در بازهٔ t تا ۲t $\Rightarrow v_{av_۴}=\frac{S_۲}{t}\xrightarrow{S_۲<S_۳} v_{av_۴}<v_{av_۳}$

گزینهٔ ۳

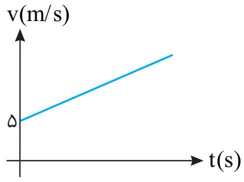
B ۵۱۱ ۳

ابتدا سرعت را در لحظه‌های $t_۱=۴s$ و $t_۲=۱۲s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱=at_۱+v_۰\Rightarrow v_۱=۵\times۴+۵=۲۵m/s$$

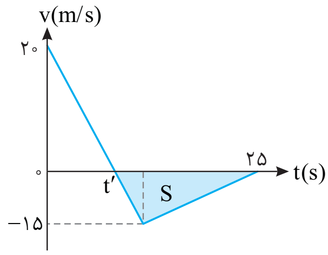
$$v_۲=at_۲+v_۰\Rightarrow v_۲=۵\times۱۲+۵=۶۵m/s$$

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازه است از این‌رو خواهیم داشت: $v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}=\frac{۶۵+۲۵}{۲}=۴۵m/s$



A ۵۱۲ ۳

خط فکری جهت حرکت و جهت سرعت یکی است بنابراین وقتی متحرک در خلاف جهت محور در حرکت است یعنی سرعت آن منفی است. در بازهٔ t' تا ۲۵s سرعت متحرک منفی است در این بازه سطح زیر نمودار (S) را برحسب t' حساب کنید نگران مقدار t' نباشید زیرا در محاسبهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حذف خواهد شد.



۱ جابه‌جایی یا سطح زیر نمودار را حساب می کنیم. $|\Delta x|=S=\frac{|-۱۵\times(۲۵-t')|}{۲}$

۲ اندازهٔ سرعت متوسط خواهد شد:

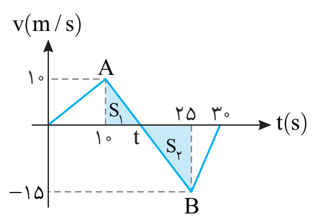
$$v_{av}=\frac{\frac{۱۵(۲۵-t')}{۲}}{۲۵-t'}=۷/۵m/s$$

B ۵۱۳ ۲

نکته شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است، هرگاه شیب منفی باشد شتاب منفی و اگر شیب مثبت باشد شتاب مثبت است.

۱ در بازهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۲۵s$ شیب خط نمودار $v-t$ منفی بنابراین در این بازه شتاب منفی است. به کمک شیب خط AB، لحظهٔ t را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۱۰-۰}{۱۰-t}=\frac{۰-(-۱۵)}{t-۲۵}\Rightarrow ۲t-۵۰=۳۰-۳t\Rightarrow t=۱۶s$$

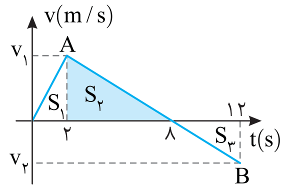


۲ مجموع سطح‌های $S_۱$ و $S_۲$ برابر مسافت طی شده است از این‌رو تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{|S_۱|+|S_۲|}{\Delta t}=\frac{\frac{۱۰\times۶}{۲}+\frac{۹\times۱۵}{۲}}{۲۵-۱۰}\Rightarrow s_{av}=\frac{۳۰+۶۷/۵}{۱۵}\Rightarrow s_{av}=\frac{۹۷/۵}{۱۵}$$

$$\Rightarrow s_{av}=۶/۵m/s$$

B ۵۱۴ — ۴



در بازهٔ ۲s تا ۸s تندی جسم در حال کاهش و حرکت کندشونده است و برای به‌دست آوردن شتاب در این بازه شما باید سرعت در لحظهٔ $t=2s$ (v_1) را حساب کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را v_1 و سرعت در لحظهٔ $t=12s$ را v_2 می‌نامیم، حال به کمک شیب خط AB یک رابطهٔ ریاضی بین v_1 و v_2 به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_1-0}{2-8}=\frac{v_2}{12-8}\Rightarrow v_1=-\frac{3}{2}v_2\Rightarrow v_1=\frac{3}{2}(v_2)$$

۲ تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۱۲s، $\frac{10}{3}m/s$ بنابراین مسافت طی شده خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\frac{10}{3}=\frac{\ell}{12}\Rightarrow\ell=40m$$

۳ با توجه به مسافت طی شده که برابر قدرمطلق مساحت زیر نمودار است داریم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|+|S_3|=\frac{2\times v_1}{2}+\frac{6\times v_1}{2}+\frac{4\times|v_2|}{2}=4v_1+2|v_2|$$

$$\Rightarrow 40=4v_1+2|v_2|\xrightarrow{v_1=\frac{3}{2}(v_2)}8|v_2|=40\Rightarrow|v_2|=5m/s$$

۴ مقدار v_1 خواهد شد:

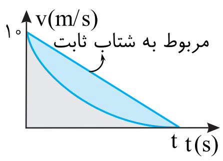
$$v_1=\frac{3}{2}|v_2|=\frac{3}{2}\times5\Rightarrow v_1=7.5m/s$$

۵ شتاب در قسمت کندشونده خواهد شد:

$$|a|=\left|\frac{0-7.5}{8-2}\right|\Rightarrow|a|=1.25m/s^2$$

B ۵۱۵ — ۴

خط فکری سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است و جابه‌جایی (Δx) برابر سطح زیر نمودار سرعت - زمان است. اما نمودار $v-t$ داده شده منحنی (خمیده) است و یافتن سطح زیر آن ممکن نیست بنابراین چگونه باید به مسئله پاسخ داده شود. به گزینه‌ها نگاه کنید برای سرعت متوسط محدوده ارائه شده است شما بهتر است در بازهٔ صفر تا t یک خط راست رسم کنید این خط مربوط به حرکت با شتاب ثابت است و مقدار سرعت متوسط این حرکت برابر $\frac{10+0}{2}=5m/s$ است. با مقایسهٔ سطح زیر نمودار منحنی با سطح زیر نمودار خط راست (مربوط به حرکت با شتاب ثابت) می‌تواند در مورد سرعت متوسط اظهارنظر کرد.

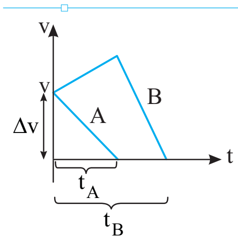


سطح زیر نمودار سرعت - زمان برای شتاب ثابت از سطح زیر نمودار سرعت - زمان برای شتاب متغیر بیشتر است.

$$S_{\text{منحنی}}<S_{\text{شتاب ثابت}}\Rightarrow\Delta x_{\text{منحنی}}<\Delta x_{\text{شتاب ثابت}}\xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}}v_{av_{\text{منحنی}}}<v_{av_{\text{ثابت}}}$$

$$\Rightarrow v_{av_{\text{منحنی}}}<\frac{0+10}{2}\Rightarrow v_{av}<5m/s$$

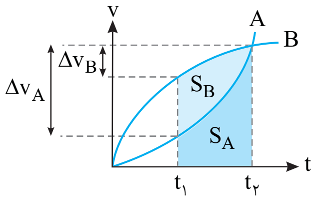
B ۵۱۶ — ۱



شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. به نمودار نگاه کنید، تغییر سرعت دو متحرک A و B در بازهٔ صفر تا لحظهٔ توقف آن‌ها یکسان است $\Delta v_A=\Delta v_B$. اما بازهٔ زمانی این تغییر برای متحرک A از متحرک B کمتر در نتیجه شتاب متوسط A از شتاب متوسط B بیشتر است.

$$a_{av_A}=\frac{\Delta v}{\Delta t_A},a_{av_B}=\frac{\Delta v}{\Delta t_B}\xrightarrow{\Delta t_A<\Delta t_B}a_{av_A}>a_{av_B}$$

B ۵۱۷ — ۲



به نمودار دقت کنید. در بازهٔ t_1 تا t_2، تغییرات سرعت متحرک A از تغییرات سرعت متحرک B بیشتر است بنابراین شتاب متوسط A از شتاب متوسط B بزرگ‌تر است.

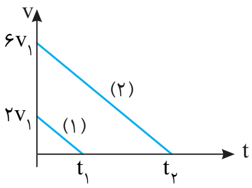
$$\begin{cases}a_{av_A}=\dfrac{\Delta v_A}{t_2-t_1}\\ a_{av_B}=\dfrac{\Delta v_B}{t_2-t_1}\end{cases}\xrightarrow{\Delta v_A>\Delta v_B}a_{av_A}>a_{av_B}$$

اکنون به سراغ بررسی و مقایسهٔ سرعت متوسط دو متحرک می‌رویم.

در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برای متحرک A کمتر از متحرک B است، بنابراین سرعت متوسط A کمتر از سرعت متوسط B است.

$$\begin{cases}v_{av_A}=\dfrac{\Delta x_A}{t_2-t_1}=\dfrac{S_A}{t_2-t_1}\\ v_{av_B}=\dfrac{\Delta x_A}{t_2-t_1}=\dfrac{S_B}{t_2-t_1}\end{cases}\xrightarrow{S_A<S_B}v_{av_A}<v_{av_B}$$

B ۵۱۸ — ۳



۱ شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است در صورت مسئله بیان شده که شتاب دو متحرک یکسان است بنابراین شیب این دو نمودار باید با هم برابر باشد. شیب دو نمودار را با هم برابر قرار می‌دهیم و یک رابطهٔ ریاضی بین t_1 و t_2 به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{0-2v_1}{t_1-0}=\frac{0-6v_1}{t_2-0}\Rightarrow t_2=3t_1\qquad(1)$$

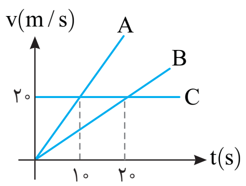
۲ سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی متحرک است سطح زیر نمودار متحرک اول را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_1=S_1\Rightarrow\Delta x_1=\frac{2v_1\times t_1}{2}\Rightarrow\Delta x_1=v_1t_1\Rightarrow v_1t_1=10\qquad(2)$$

۳ اکنون سطح زیر نمودار دوم را به‌دست آورده و از رابطهٔ (۱) و (۲) در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$S_2=\Delta x_2=\frac{6v_1\times t_2}{2}=\frac{6v_1\times3t_1}{2}=9v_1t_1\Rightarrow\Delta x_2=90m$$

A ۵۱۹ — ۳



با توجه به نمودار متحرک‌های A و B دارای حرکت با شتاب ثابت و متحرک C دارای حرکت با سرعت ثابت ۲۰m/s است. شتاب متحرک A را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_A=\frac{20-0}{10}=2m/s^2$$

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت متحرک A را پس از جابه‌جایی ۴۰۰m حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_A^2-0=2\times2\times400\Rightarrow v_A=40m/s$$

شتاب متحرک B خواهد شد:

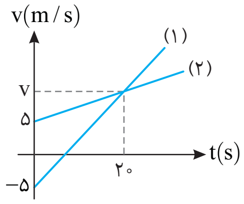
$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_B=\frac{20-0}{20}=1m/s^2$$

سرعت متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_B^2-0=2\times1\times400\Rightarrow v_B=20\sqrt{2}\,m/s$$

B ۵۲۰ ۲

هر دو متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده‌اند. با توجه به نمودار، سرعت ابتدایی و انتهایی هر دو حرکت را داریم در این مسئله بهترین روش استفاده از معادله مستقل از شتاب (فرمول طلایی) است.



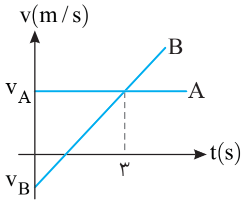
$$x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-5+v}{2}\times 20=10(-5+v)\\ x_2=\frac{5+v}{2}\times 20=10(5+v)\end{cases}$$

فاصلهٔ دو متحرک برابر است با:

$$|x_1-x_2|=10(5+v)-10(-5+v)=50+10v+50-10v\Rightarrow|x_1-x_2|=100m$$

A ۵۲۱ ۲

۱ سرعت متحرک A ثابت و متحرک B دارای شتاب ثابت است، می‌دانیم شیب خط نمودار $v-t$ برابر شتاب ثابت است پس شتاب متحرک A خواهد شد:



$$a_B=\frac{v_A-v_B}{3}$$

۲ هر دو هم‌زمان از یک نقطه که آن را مبدأ مکان می‌گیریم شروع به حرکت کرده‌اند $(x_{0A}=x_{0B})$.

۳ معادلهٔ حرکت هر دو را می نویسیم:

معادلهٔ حرکت A: $x=vt+x_0\Rightarrow x_A=v_At$

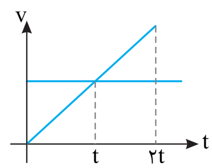
معادلهٔ حرکت B: $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_B=\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t^2+v_Bt$

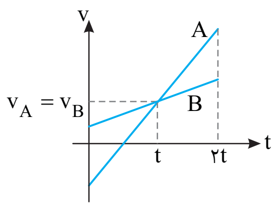
۴ اگر در لحظهٔ t_1 از کنار هم بگذرند. مکان آن‌ها در این لحظه برابر است.

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t_1^2+v_Bt_1=v_At_1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t_1^2=(v_A-v_B)t_1\Rightarrow t_1=6s$$

میانبر **اثر پروانه‌ای:** هرگاه دو متحرک که از یک نقطه شروع به حرکت کنند و در لحظهٔ t دارای سرعت یکسان باشند، دو متحرک در لحظهٔ 2t از کنار هم می‌گذرند.





B ۵۲۲ ۳

۱ دو متحرک هم‌زمان از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند $(x_{0A}=x_{0B})$.

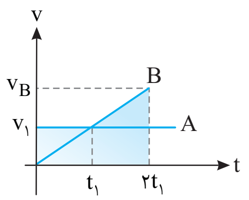
۲ سرعت متحرک B را در لحظهٔ $2t_1$ به کمک شیب نمودار B به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_B-0}{2t_1-0}=\frac{v_1-0}{t_1-0}\Rightarrow v_B=2v_1$$

۳ برای مقایسهٔ سرعت متوسط دو متحرک $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ چون Δt برای هر دو یکسان است باید جابه‌جایی دو متحرک را در بازهٔ صفر تا $2t_1$ مقایسه کنیم.

$$\Delta x_A=S=v_1(2t_1)=2v_1t_1\quad,\quad\Delta x_B=S=\frac{(2v_1)(2t_1)}{2}=2v_1t_1$$

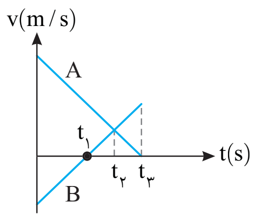
۴ بنابراین جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان برابر بوده و سرعت متوسط آن‌ها یکی است.



B ۵۲۳ ۲

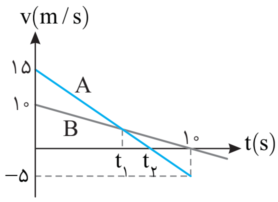
نکته هرگاه متحرک B به دنبال متحرک A در حرکت باشد تا لحظه‌ای که $v_B<v_A$ است، فاصلهٔ دو متحرک در حال افزایش است و اگر $v_B=v_A$ شود فاصلهٔ دو متحرک ثابت می‌ماند اما اگر $v_B>v_A$ شود فاصلهٔ متحرک B از A شروع به کاهش می‌کند.

دو متحرک A و B، A با سرعت مثبت و B با سرعت منفی هم‌زمان به راه می‌افتند و از هم دور می‌شوند. در لحظهٔ t_1 متحرک B سرعتش صفر شده و تغییر جهت می‌دهد و به دنبال متحرک A می‌رود، اما از لحظهٔ t_1 تا t_2 همچنان سرعت A بیشتر از سرعت B است و تا لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر شود یعنی تا لحظهٔ t_2 فاصلهٔ دو متحرک، در حال افزایش است، از این لحظه به بعد $(t>t_2)$، سرعت B از سرعت A بیشتر شده و متحرک B فاصله‌اش از متحرک A شروع به کم شدن می‌کند بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از هم در لحظهٔ t_2 رخ می‌دهد.



C ۵۲۴ ۴

خط فکری سرعت اولیهٔ متحرک A، $15m/s$ و سرعت اولیهٔ متحرک B، $10m/s$ است از این رو متحرک A از متحرک B جلو می‌افتد و تا لحظه‌ای که سرعت متحرک B کمتر از A است فاصلهٔ A و B در حال افزایش است تا لحظه‌ای که $v_A=v_B$ می‌شود بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از هم در 10s نخست حرکت لحظه‌ای است که سرعت‌ها برابر می‌شوند، یعنی لحظهٔ t_1. بنابراین شما باید لحظهٔ t_1 را از روی نمودار به‌دست بیاورید. سپس جابه‌جایی A و B را حساب کنید.



۱ شتاب حرکت هر متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow\begin{cases}a_A=\frac{-5-15}{10}=-2m/s^2\\ a_B=\frac{0-10}{10}=-1m/s^2\end{cases}$$

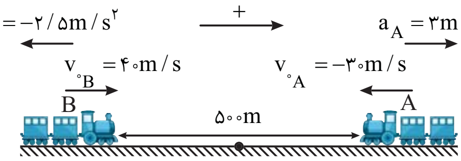
۲ در لحظهٔ t_1، سرعت دو متحرک را برابر قرار می دهیم.

$$v_A=v_B\xrightarrow{v=at+v_0}-2t_1+15=-t_1+10\Rightarrow t_1=5s$$

۳ مکان دو متحرک را در این لحظه به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}(-2)(5)^2+15\times5=50m\\ x_B=\frac{1}{2}(-1)(5)^2+10\times5=37/5m\end{cases}\Rightarrow x_A-x_B=12/5m$$

C ۵۲۵ ۲



۱ نمودار $v-t$ هر دو قطار خط راست و حرکت هر دو با شتاب ثابت می‌باشد.
شتاب هر یک را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v-v_\circ}{t}\Rightarrow\begin{cases}a_A=\frac{۰-(-۳۰)}{۱۰}=۳m/s^۲\\ a_B=\frac{۰-۴۰}{۱۶}=-۲/۵m/s^۲\end{cases}$$

۲ محل قطار A را در $t=۰$ مبدأ اختیار کرده و معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t=۱۰s$ مکان A را حساب می‌کنیم.

$$x_A=\frac{۱}{۲}\times۳\times t^۲-۳۰t\xrightarrow{t=۱۰s}x_A=۱۵۰-۳۰۰=-۱۵۰m$$

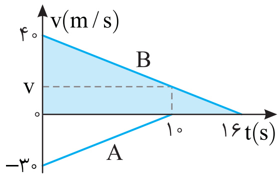
۳ معادلهٔ حرکت قطار B را می‌نویسیم و مکان آن را در $t=۱۰s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_B=\frac{۱}{۲}\times(-۲/۵)t^۲+۴۰t-۵۰۰\xrightarrow{t=۱۰s}x_B=-۱۲۵+۴۰۰-۵۰۰$$
$$\Rightarrow x_B=-۲۲۵m$$

۴ فاصلهٔ دو متحرک از هم خواهد شد:

$$d=|x_A-x_B|=۷۵m$$

روش دیگر: در لحظهٔ $t=۱۰s$ متحرک A می‌ایستد. به کمک شیب خط سرعت متحرک B را در لحظهٔ $t=۱۰s$ به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{۰-۴۰}{۱۶-۰}=\frac{۰-v}{۱۶-۱۰}\Rightarrow\frac{۱۰}{۴}=\frac{v}{۶}$$
$$\Rightarrow v=۱۵m/s$$

اکنون سطح زیر دو نمودار را در بازهٔ صفر تا ۱۰s به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_A=\frac{-۳۰\times۱۰}{۲}=-۱۵۰m\ ,\ \Delta x_B=\frac{۴۰+۱۵}{۲}\times۱۰=۲۷۵m$$

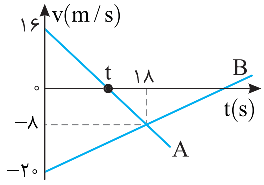
متحرک A، ۱۵۰m و متحرک B، ۲۷۵ متر به سمت هم حرکت کرده‌اند و در ابتدا فاصلهٔ آن‌ها از هم ۵۰۰m بوده، بنابراین در این لحظه فاصلهٔ آن‌ها از هم خواهد شد:

$$۵۰۰-(۱۵۰+۲۷۵)=۷۵m$$

B ۵۲۶ ۲

جهت حرکت همان جهت سرعت متحرک است، بنابراین در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت A مثبت است و این بازه زمانی از لحظهٔ صفر تا t (محل برخورد نمودار با محور زمان) است.

۱ لحظهٔ t را به کمک شیب نمودار A به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{۱۶-(-۸)}{۰-۱۸}=\frac{۱۶-۰}{۰-t}$$
$$\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{۱۶}{t}\Rightarrow t=۱۲s$$

۲ شتاب حرکت B را حساب می‌کنیم:

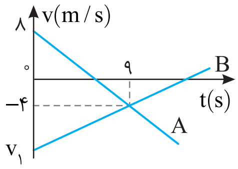
$$a=\frac{v-v_\circ}{t}\Rightarrow a_B=\frac{-۸-(-۲۰)}{۱۸}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}m/s^۲$$

۳ جابه‌جایی B در مدت $t=۱۲s$ خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_\circ t\Rightarrow\Delta x_B=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times(۱۲)^۲+(-۲۰)\times۱۲\Rightarrow\Delta x_۲=۴۸-۲۴۰$$
$$\Rightarrow\Delta x_۲=-۱۹۲m$$

بنابراین بزرگی جابه‌جایی B برابر ۱۹۲ متر است.

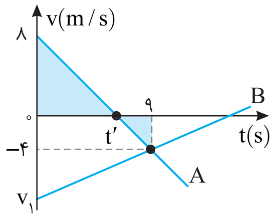
بازی با سؤال - نمودار سرعت زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند مطابق شکل روبه‌رو است. در مدتی که حرکت متحرک A کندشونده است متحرک B به اندازهٔ ۹۶m مسافت طی می‌کند. بزرگی $v_۱$ برابر چند متر بر ثانیه است؟



مشابه ریاضی – ۹۵

۱) ۲۲ ۲) ۱۱ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

پاسخ هنگامی‌که نمودار $v-t$ متحرکی به محور زمان‌ها نزدیک می‌شود حرکت آن کندشونده است. مطابق نمودار از $t=۰$ تا $t=t'$ حرکت متحرک A کندشونده است. با استفاده از تشابه مثلث داریم: $\frac{۹-t'}{۴}=\frac{t'}{۸}\Rightarrow۱۸-۲t'=t'\Rightarrow t'=۶s$



بنابراین در بازهٔ $t=۰$ تا $t'=۶$ حرکت متحرک A کندشونده است و در این بازه مسافت طی شده توسط متحرک B برابر ۹۶m است، شتاب متحرک B را به‌دست می‌آوریم: $a=\frac{v-v_\circ}{t}\Rightarrow a_B=\frac{-۴-v_۱}{۹}$

معادلهٔ مکان زمان را برای متحرک B می‌نویسیم. دقت کنید جابه‌جایی متحرک B در بازهٔ صفر تا ۶s که سرعت منفی است برابر $-۹۶m$ است.

$$\Delta x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+v_۱t'\Rightarrow-۹۶=\frac{۱}{۲}(\frac{-۴-v_۱}{۹})\times۳۶+۶v_۱$$
$$\Rightarrow-۹۶=-۸-۲v_۱+۶v_۱\Rightarrow-۸۸=۴v_۱\Rightarrow v_۱=-۲۲m/s\Rightarrow|v_۱|=۲۲m/s$$

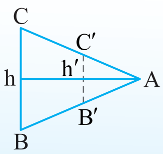
گزینهٔ ۱

B ۵۲۷ ۲

با یک مسئلهٔ ریاضی در مبحث تشابه مثلث‌ها سروکار داریم.

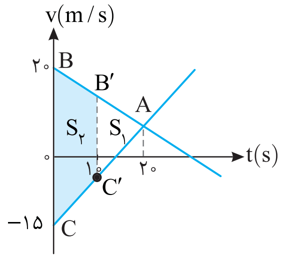
یادداشت ریاضی در مثلث روبه‌رو نسبت مساحت ABC به مساحت $A'B'C'$ با مجذور نسبت ارتفاع Ah/Ah' برابر است.

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=(\frac{Ah'}{Ah})^۲$$



مسئله در واقع مساحت $S_۲$ را می‌خواهد، بنابراین با توجه به یادداشت ریاضی می‌توان نوشت:

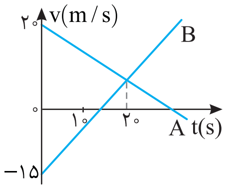
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=(\frac{۱۰}{۲۰})^۲\Rightarrow\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۴}$$
$$S_۱=\frac{۱}{۴}S_{ABC}\xrightarrow{S_{ABC}=S_۱+S_۲}S_۲=\frac{۳}{۴}S_{ABC}$$



برای به‌دست آوردن مساحت مثلث ABC دقت کنید که ارتفاع آن ۲۰ و قاعدهٔ آن $۲۰+۱۵=۳۵$ است. از این‌رو می‌خواهیم داشت: $S_۲=\frac{۳}{۴}(\frac{۳۵\times۲۰}{۲})\Rightarrow S_۲=۲۶۲/۵m$

بازی با سؤال **نمودار سرعت - زمان**

دو متحرک A و B که در مبدأ زمان از مبدأ مکان روی محور xها می‌گذرند به صورت شکل روبه‌رو است، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=۱۰s$ چند متر است؟



۱) ۳۵۰ ۲) ۲۶۲/۵ ۳) ۳۵۰ ۴) ۱۲۵/۵

پاسخ **حل این مسئله دقیقاً شبیه مسئلهٔ اصلی است.** گزینهٔ ۳

B ۵۲۸ ۳

دو متحرک A و B در مبدأ زمان سرعت مثبت در یک جهت از یک نقطه می‌گذرند. در تمام مدت ۲۸s ، سرعت متحرک B از سرعت متحرک A بیشتر است بنابراین فاصلهٔ دو متحرک در تمام مدت ۲۸s در حال افزایش است.

B ۵۲۹ ۳

۱ شتاب حرکت A و B را در اختیار داریم بنابراین سرعت ثابت هر دو متحرک را می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

$$v=at+v_۰\begin{cases}\xrightarrow{a_A=۱m/s^۲} v_A=۱\times۴۵=۴۵m/s\\ \xrightarrow{a_B=۳m/s^۲} v_B=۳\times۱۲=۳۶m/s\end{cases}$$

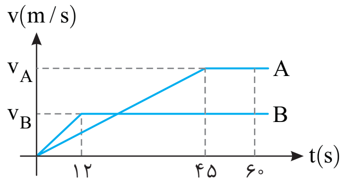
۲ سطح زیر نمودار A از لحظهٔ صفر تا ۶۰s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_A=S_A\Rightarrow\Delta x_A=(۶۰+۱۵)\times\frac{۴۵}{۲}=۱۶۸۷/۵m$$

۳ سطح زیر نمودار B از لحظهٔ صفر تا ۶۰s را به‌دست می‌آوریم.

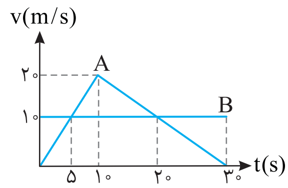
$$\Delta x_B=S_B\Rightarrow\Delta x_B=(۶۰+۴۸)\times\frac{۳۶}{۲}=۱۹۴۴m$$

۴ فاصلهٔ دو متحرک در $t=۶۰s$ خواهد شد: $۱۹۴۴-۱۶۸۷/۵=۲۵۶/۵m$



B ۵۳۰ ۳

برای حل این پرسش در لحظه‌های بیان شده در گزینه‌ها، سطح زیر نمودارها را با هم مقایسه می‌کنیم. در هر لحظه‌ای که سطح زیر نمودارها یکی شود، دو متحرک از کنار هم می‌گذرند.



$$t=۵s\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_A=S_A=\frac{۵\times۱۰}{۲}=۲۵m\\ x_B=S_B=۵\times۱۰=۵۰m\end{array}\right\}\Rightarrow x_A\neq x_B$$

$$t=۱۰s\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_A=S_A=\frac{۲۰\times۱۰}{۲}=۱۰۰m\\ x_B=S_B=۱۰\times۱۰=۱۰۰m\end{array}\right\}\Rightarrow x_A=x_B$$

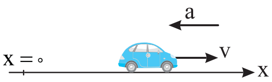
$$t=۲۰s\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_A=S_A=۱۰۰+\frac{۲۰+۱۰}{۲}\times۱۰=۲۵۰m\\ x_B=S_B=۱۰\times۲۰=۲۰۰m\end{array}\right\}\Rightarrow x_A\neq x_B$$

$$t=۳۰s\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_A=S_A=\frac{۳۰\times۲۰}{۲}=۳۰۰m\\ x_B=S_B=۱۰\times۳۰=۳۰۰m\end{array}\right\}\Rightarrow x_A=x_B$$

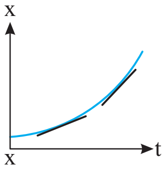
بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

A ۵۳۱ ۴

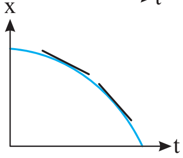
به شکل نگاه کنید، بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم هستند، بنابراین حرکت کندشونده است.



در گزینهٔ (۱)، شتاب مثبت است و سرعت مثبت است و اگر در نمودار مکان - زمان چند مماس رسم کنیم، شیب خط مماس در حال افزایش است بنابراین حرکت تندشونده و این گزینه نادرست است.

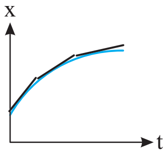


گزینهٔ (۲): نمودار مکان - زمان مربوط به حرکت تندشونده است. زیرا با رسم چند مماس مشخص است که خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود و تندی در حال افزایش است. از طرفی سرعت و شتاب هر دو منفی هستند بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



گزینهٔ (۳): با اینکه سرعت مثبت و شتاب منفی است اما نمودار مکان زمان مانند گزینهٔ (۲) مربوط به حرکت تندشونده است و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۴): در نمودار مکان - زمان اگر چند مماس رسم کنیم خط مماس به حالت افقی نزدیک می‌شود یعنی شیب خط مماس به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است. از طرفی سرعت مثبت و شتاب منفی است و این گزینه درست است.



A ۵۳۲ ۳

نکته هرگاه متحرک از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کند، جسم در جهت شتاب حرکت کرده و تا لحظه‌ای که شتاب تغییر جهت ندهد حرکت آن تندشونده است.

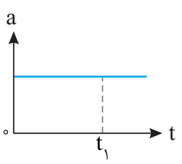
در گزینهٔ (۱) شتاب تغییر علامت و تغییر جهت داده است یعنی ابتدا شتاب منفی و سپس شتاب مثبت می‌شود، بنابراین ابتدا حرکت تندشونده و با تغییر جهت بردار شتاب، حرکت کندشونده می‌شود.

در گزینهٔ (۲) نیز ابتدا شتاب مثبت و سپس منفی است. بنابراین حرکت متحرک که از حال سکون شروع به حرکت کرده ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است و گزینهٔ (۲) نادرست است. متحرک در جهت مثبت از حال سکون شروع به حرکت کرده بنابراین شتاب حرکت آن مثبت است و حرکت همواره تندشونده است یعنی جهت شتاب تغییر نکرده از این رو گزینهٔ (۳) درست است و گزینهٔ (۴) نادرست است. زیرا در گزینهٔ (۴) شتاب منفی است.

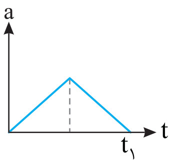
B ۵۳۳ ۴

نکته هرگاه سرعت اولیهٔ متحرک مشخص نباشد و تنها نمودار شتاب زمان را در اختیار داشته باشیم، در مورد چگونگی حرکت نمی‌توانیم اظهارنظر کنیم.

فرض کنید متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد در این صورت چون شتاب ثابت بوده و تغییر جهت نمی‌دهد حرکت همواره تندشونده است و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد. اگر از ابتدا سرعت اولیهٔ متحرک منفی باشد چون شتاب مثبت است می‌تواند حرکت کندشونده باشد و متحرک در لحظهٔ $t_۱$ متوقف شود و گزینهٔ (۲) می‌تواند درست باشد. البته ممکن است ابتدا حرکت کندشونده باشد و قبل از $t_۱$ متحرک متوقف شده و برگردد و سپس حرکت تندشونده باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نیز می‌تواند درست باشد.



بازی با سؤال **نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور xها با سرعت اولیهٔ $v_۰$ شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل روبه‌رو است. حرکت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ چگونه است؟**



۱) تندشونده ۲) کندشونده

۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده ۴) بستگی به $v_۰$ دارد.

پاسخ **نمودار شتاب - زمان نوع حرکت را مشخص نمی‌کند مگر آن‌که سرعت اولیه مشخص باشد.** گزینهٔ ٤

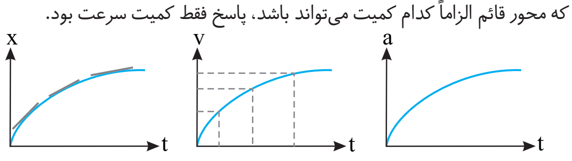
B ۵۳۴ ۳

به کلمهٔ می‌تواند در صورت مسئله دقت کنید. از طرفی قرار است که حرکت تندشونده باشد. نمودار الف نمودار مکان - زمان فرض شده. اگر شما چند خط مماس بر نمودار رسم کنید شیب خط مماس به حالت افقی نزدیک شده یعنی تندی در حال کاهش است و حرکت کندشونده است. بنابراین محور b نمی‌تواند محور مکان باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

اگر محور b محور سرعت باشد، حرکت قطعاً تندشونده است. (نمودار (ب))

اگر محور b محور شتاب باشد و سرعت اولیه صفر یا مثبت باشد، حرکت تندشونده است و اگر سرعت اولیه منفی باشد، حرکت ابتدا کندشونده است. (نمودار (پ))

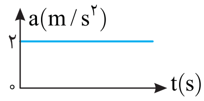
بنابراین محور b می‌تواند سرعت یا شتاب باشد. اما اگر در صورت مسئله بیان می‌کرد که محور قائم الزاماً کدام کمیت می‌تواند باشد، پاسخ فقط کمیت سرعت بود.



(الف) (ب) (پ)

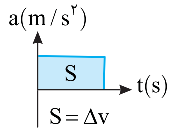
B ۵۳۵ ۳

سرعت اولیه $+۵m/s$ و شتاب مثبت است یعنی بردار سرعت و بردار شتاب همواره هم‌جهت بوده و حرکت همواره تندشونده است.



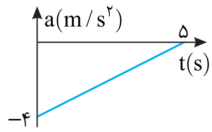
B ۵۳۶ ۳

نکته سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.



خط فکری سرعت اولیهٔ متحرک $+۱۴m/s$ به شما داده شده همچنین نمودار شتاب - زمان را در اختیار دارید بنابراین به کمک سطح زیر نمودار شتاب - زمان، تغییر سرعت را به‌دست آورید و به کمک این تغییر سرعت و سرعت اولیه دربارهٔ نوع حرکت اظهارنظر کنید.

۱ ابتدا سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان که بیانگر تغییر سرعت متحرک است را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta v=S\Rightarrow\Delta v=\frac{-۴\times۵}{۲}\Rightarrow\Delta v=-۱۰m/s$$

۲ اکنون سرعت نهایی متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v=v-v_۰\Rightarrow-۱۰=v-۱۴\Rightarrow v=۴m/s$$

۳ بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا ۵s، سرعت متحرک از $+۱۴m/s$ به $+۴m/s$ کاهش یافته است و حرکت کندشونده است.

B ۵۳۷ ۴

خط فکری نکته‌ای که شما باید به آن دقت کنید این است که اگر سرعت جسم مثلاً از $-۵m/s$ به $+۸m/s$ برسد یعنی تندی متحرک از $-۵m/s$ ابتدا به صفر رسیده و حرکت کندشونده و سپس تندی از صفر به $۸m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است. بنابراین شما باید در به‌دست آوردن سرعت نهایی به این نکته دقت کنید سپس دربارهٔ نوع حرکت اظهارنظر کنید.

۱ ابتدا سطح زیر نمودار شتاب - زمان را که بیانگر تغییر سرعت است به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v=S\Rightarrow\Delta v=\frac{۷\times(-۳)}{۲}=-۱۰/۵m/s$$

۲ بنابراین سرعت نهایی در لحظهٔ $t=۷s$ برابر است با:

$$\Delta v=v-v_۰\Rightarrow-۱۰/۵=v-۴\Rightarrow v=-۶/۵m/s$$

۳ در نتیجه ابتدا تندی از $+۴m/s$ به صفر کاهش یافته و حرکت کندشونده بوده سپس تندی از صفر به $۶/۵m/s$ در جهت منفی محور افزایش یافته است و حرکت تندشونده است.

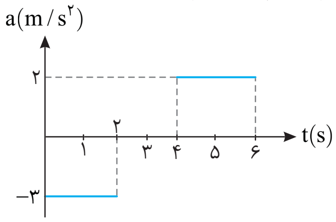
B ۵۳۸ ۲

خط فکری برای آنکه بتوان تشخیص داد در یک لحظه حرکت تندشونده و یا کندشونده است، باید علامت سرعت و علامت شتاب را در آن لحظه تعیین کرد. در لحظهٔ $t=۱s$ و $t=۴/۵s$ علامت سرعت را به‌دست بیاورید و نوع حرکت در این لحظه‌ها مشخص کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=۱s$ خواهد شد:

$$v=at+v_۰\xrightarrow{t=۱s}v=-۳\times۱+۴\Rightarrow v=+۱m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=۱s$ سرعت مثبت $(v=+۱m/s)$ و شتاب منفی $(a=-۳m/s^۲)$ بوده و حرکت کندشونده $(av<۰)$ است.



۳ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰=-۳\times۲+۴=-۲m/s$$

۴ از لحظهٔ $t=۲s$ تا $t=۴s$، شتاب صفر است و حرکت دارای سرعت ثابت بوده از این‌رو در لحظهٔ $t=۴s$ سرعت همچنان برابر $-۲m/s$ است.

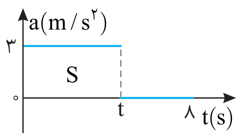
۵ اکنون سرعت در لحظهٔ $t=۴/۵s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times(۴/۵-۴)+(-۲)\Rightarrow v=-۱m/s$$

۶ در لحظهٔ $t=۴/۵s$ سرعت منفی $(-۱m/s)$ و شتاب مثبت $(a=۲m/s^۲)$ است بنابراین حرکت کندشونده $(av<۰)$ است.

B ۵۳۹ ۱

یادآوری شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ بوده، از طرفی مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییرات سرعت است.



۱ ابتدا سطح زیر نمودار در بازهٔ ۰ تا ۸s را به‌دست می‌آوریم.

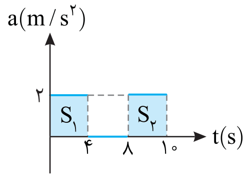
$$\Delta v=S=۳t$$

۲ بنابه فرض مسئله خواهیم داشت:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow۱/۲=\frac{۳t}{۸}\Rightarrow t=۳/۲s$$

B ۵۴۰ ۳

شتاب متوسط برابر تغییر سرعت در یکای زمان است و تغییر سرعت برابر سطح زیر نمودار شتاب - زمان است.

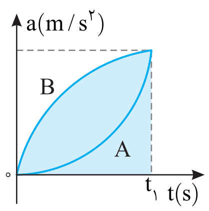


$$S=\Delta v=۲\times۴+۲\times۲=۱۲m/s$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۲}{۱۰}\Rightarrow a_{av}=۱/۲m/s^۲$$

A ۵۴۱ ۳

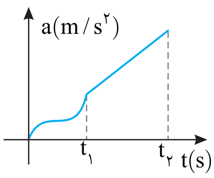
مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییر سرعت است. با توجه به نمودار، مساحت زیر نمودار $a-t$، متحرک B بزرگ‌تر از مساحت زیر نمودار $a-t$ متحرک A است بنابراین تغییرات سرعت B بیشتر از A است و در یک مدت زمان یکسان شتاب متوسط B بزرگ‌تر از شتاب متوسط A می‌باشد.



$$\Delta v_B>\Delta v_A\Rightarrow\frac{\Delta v_B}{\Delta t}>\frac{\Delta v_A}{\Delta t}\xrightarrow{a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}}a_{av_B}>a_{av_A}$$

B ۵۴۲ ۲

بررسی این مسئله به کمک سطح زیر نمودار راه به جایی نمی‌برد اما می‌توان این‌گونه استدلال کرد که در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ شتاب در تمام لحظات از شتاب در لحظات مختلف بازهٔ صفر تا $t_۱$ بیشتر بوده بنابراین شتاب متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بزرگ‌تر از شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۱$ است.



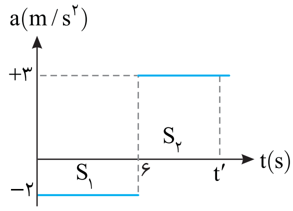
B ۵۴۳ ۳

نکته هرگاه در مسئله خواسته شود که بزرگی سرعت به بزرگی سرعت اولیه برسد یعنی تغییر سرعت صفر شود.

سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است از این‌رو سطح زیر نمودار را در مدت t' برابر صفر قرار می‌دهیم.

$\Delta v=S \Rightarrow S_۱+S_۲=۰$

$\Rightarrow -۲\times۶+۳\times(t'-۶)=۰ \Rightarrow -۳۰=-۳t' \Rightarrow t'=۱۰s$



B ۵۴۴ ۱

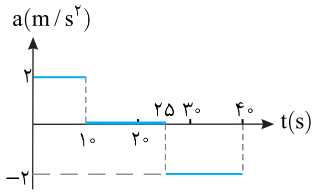
در حل این پرسش کافی است از معادلهٔ سرعت - زمان در هر مرحله استفاده کنیم:

$v=at+v_۰$

$۰\rightarrow۱۰s:\quad v=۲\times۱۰+۴ \Rightarrow v=۲۴\,m/s$

$۱۰s\rightarrow۲۵s:\quad a=۰ \Rightarrow v=۲۴m/s$

$۲۵s\rightarrow۳۰s:\quad v=-۲\times(۳۰-۲۵)+۲۴ \Rightarrow v=۱۴m/s$



حل به کمک سطح زیر نمودار شتاب - زمان

سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

$\Delta v=S=۲\times۱۰+(-۲)\times(۳۰-۲۵) \Rightarrow \Delta v=+۱۰m/s$

سرعت اولیه $v_۰=+۴m/s$ است. از این‌رو خواهیم داشت:

$\Delta v=v-v_۰ \Rightarrow ۱۰=v-۴ \Rightarrow v=۱۴m/s$

دقت کنید که سرعت در لحظهٔ $t=۳۰s$ از شما خواسته شده نه لحظهٔ $t=۴۰s$.

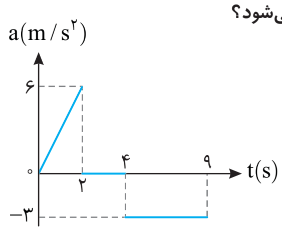
بازی با سؤال سرعت اولیهٔ متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند برابر $۳m/s$ و نمودار شتاب - زمان آن به شکل روبه‌رو است. در چه لحظه‌ای سرعت این متحرک برابر $v=-۳m/s$ می‌شود؟

۱) $t=۳s$

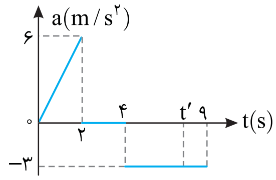
۲) $t=۶s$

۳) $t=۸s$

۴) $t=۱۲s$



پاسخ مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت می‌باشد. بنابراین:



$\Delta v_{t=۰ تا ۲s}=\frac{۶\times۲}{۲}=۶m/s$

$\Rightarrow \Delta v=v-v_۰$

$\Rightarrow ۶=v-۳ \Rightarrow v_{t=۲s}=۹m/s$

در بازهٔ $t=۲s$ تا $۴s$ شتاب صفر است پس سرعت تغییر نمی‌کند. از بازهٔ $۴s$ تا t' که سرعت در t' برابر $-۳m/s$ می‌شود، حرکت با شتاب ثابت $-۳m/s^۲$ است از این‌رو: $v=at+v_۰ \Rightarrow -۳=-۳(t-۴)+۹ \Rightarrow t=۸s$

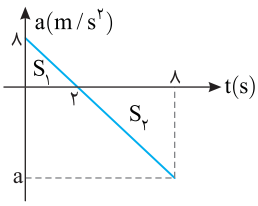
گزینهٔ ۳

B ۵۴۵ ۲

خط فکری در لحظهٔ $t=۸s$ جهت حرکت عوض شده بنابراین در این لحظه قطعاً سرعت صفر شده است. به کمک شیب نمودار شتاب در لحظهٔ $۸s$ را به‌دست آورده سطح زیر نمودار را حساب کنید تا تغییر سرعت را به‌دست آورده باشید سپس به سراغ سرعت اولیه بروید.

۱ شتاب در لحظهٔ $t=۸s$ را به‌دست می‌آوریم:

$\frac{۰-۸}{۲-۰}=\frac{a-۰}{۸-۲} \Rightarrow a=-۲۴m/s^۲$



۲ سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

$\Delta v=S_۱+S_۲ \Rightarrow \Delta v=۸+(\frac{-۲۴\times۶}{۲})=-۶۴m/s$

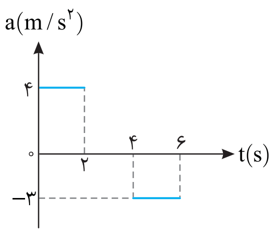
۳ در $t=۸s$ جهت حرکت تغییر کرده بنابراین $v_{t=۸s}=۰$ است:

$\Delta v=v_{t=۸s}-v_{t=۰}=-۶۴ \Rightarrow ۰-v_{t=۰}=-۶۴m/s \Rightarrow v_{t=۰}=۶۴m/s$

B ۵۴۶ ۳

خط فکری سرعت در لحظه‌های $t=۲s$، $t=۴s$ و $t=۶s$ را به‌دست بیاورید.

حرکت در بازهٔ ۰ تا ۲s با شتاب ثابت مثبت، در بازهٔ ۲s تا ۴s با سرعت ثابت و در بازهٔ ۳s تا ۶s با شتاب ثابت منفی بوده است. در نمودار سرعت - زمان در هر نقطه‌ای که نمودار محور زمان را قطع کند، متحرک تغییر داده است.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ خواهد شد:

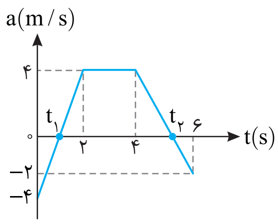
$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۴\times۲+(-۴) \Rightarrow v=+۴m/s$

۲ در لحظهٔ $t=۴s$ همچنان سرعت $۴m/s$ است.

۳ سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ را حساب می‌کنیم.

$v=at+v_۰ \Rightarrow v=-۳\times۲+۴ \Rightarrow v=-۲m/s$

۴ نمودار را رسم می‌کنیم، در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ متحرک تغییر جهت داده است.



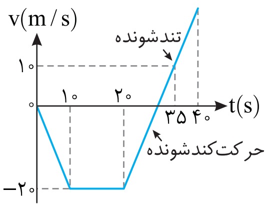
A ۵۴۷ ۳

باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. در هر قسمت که تندی در حال کاهش باشد حرکت کندشونده و در هر قسمت که تندی در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است. ابتدا سرعت جسم را در لحظهٔ $t_1=20s$ و $t_2=35s$ حساب می‌کنیم. با توجه به نمودار سؤال در بازهٔ صفر تا $10s$ حرکت دارای شتاب ثابت $-2m/s^2$ است از این‌رو:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-2\times10+0 \Rightarrow v=-20m/s$$

در بازهٔ $10s$ تا $20s$ شتاب صفر و حرکت یکنواخت بوده و سرعت همچنان $-20m/s$ است. در بازهٔ $20s$ تا $35s$ حرکت دارای شتاب ثابت $2m/s^2$ است، در نتیجه:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=2(35-20)+(-20) \Rightarrow v=10m/s$$



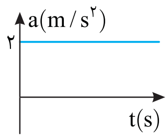
نمودار را رسم می‌کنیم (متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعت اولیه صفر است).

در بازهٔ $20s$ تا $35s$ تندی ابتدا در حال کاهش و حرکت کندشونده است و سپس افزایش یافته و به $10m/s$ می‌رسد، پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. نمودار سرعت - زمان در این بازه محور زمان را قطع کرده و سرعت صفر شده و تغییر علامت داده بنابراین یک بار متحرک تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است. در ابتدا سرعت منفی بوده یعنی متحرک در ابتدا در جهت منفی محور در حرکت است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۵۴۸ ۳

حرکت دارای شتاب ثابت است و معادلهٔ حرکت به صورت زیر است:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=t^2-4t+3$$



معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم تا مشخص کنیم در بازهٔ صفر تا $3s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه:

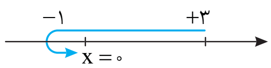
$$v=2t-4 \xrightarrow{v=0} t=2s$$

متحرک در $t=2s$ تغییر جهت می‌دهد. حال مکان را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=3s$ مشخص می‌کنیم.

$$t=2s \Rightarrow x=4-8+3 \Rightarrow x=-1m$$

$$t=3s \Rightarrow x=9-12+3 \Rightarrow x=0$$

مسافت طی شده برابر است با:



$$d=3+1+1=5m$$

حل با استفاده از رسم نمودار سرعت - زمان

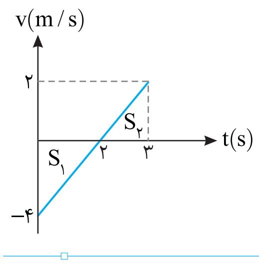
متحرک از مکان اولیهٔ $x_0=+3m$ با سرعت اولیهٔ $v_0=-4m/s$ با شتاب $+2m/s^2$ می‌گذرد. معادلهٔ سرعت - زمان آن را می‌نویسیم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=2t-4$$

نمودار سرعت - زمان آن را رسم می‌کنیم.

$$v=0 \Rightarrow 2t-4=0 \Rightarrow t=2s$$

$$t=3s \Rightarrow v=2\times3-4=2m/s$$

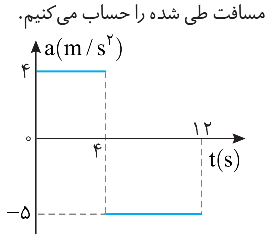


حال به کمک مجموع مساحت‌های S_1 و S_2 مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{4\times2}{2}+\frac{1\times2}{2}=5m$$

B ۵۴۹ ۳

خط فکری سرعت در $t=0$ برابر $v_0=4m/s$ است. سرعت را در $t=4s$ و $t=12s$ را به‌دست می‌آوریم، نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.



۱ در بازهٔ صفر تا $4s$ شتاب حرکت $4m/s^2$ است و سرعت در $t=4s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=4\times4+4 \Rightarrow v=20m/s$$

۲ در بازهٔ $4s$ تا $12s$ شتاب حرکت $-5m/s^2$ بوده و سرعت اولیهٔ این قسمت همان سرعت انتهای بازهٔ قبلی یعنی $20m/s$ است.

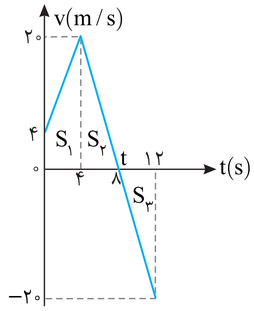
$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-5(12-4)+20 \Rightarrow v=-5\times8+20 \Rightarrow v=-20m/s$$

۳ لحظه‌ای که نمودار محور زمان را قطع می‌کند و سرعت صفر می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

$$0=-5(t-4)+20 \Rightarrow -5t+20+20=0 \Rightarrow t=8s$$

۴ اکنون می‌توانیم نمودار را رسم کنیم.

۵ با محاسبهٔ مساحت‌های S_1، S_2 و S_3، مسافت در بازهٔ صفر تا $12s$ را حساب می‌کنیم:



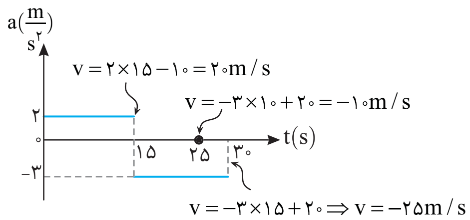
$$d=|S_1|+|S_2|+|S_3|$$

$$d=\frac{20+4}{2}\times4+\frac{20\times4}{2}+\frac{20\times4}{2}$$

$$d=48+40+40=128m$$

B ۵۵۰ ۱

خط فکری نمودار شتاب - زمان به شما اطلاعات زیادی نمی‌دهد. در نمودار شتاب - زمان مسئله، متحرک در بازهٔ صفر تا $15s$ دارای شتاب ثابت $2m/s^2$ و در بازهٔ زمانی $15s$ تا $30s$ دارای شتاب ثابت $-3m/s^2$ است از این‌رو شما می‌توانید از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده کنید. ابتدا به کمک معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی در $5s$ اول را حساب کنید. سپس سرعت متحرک را در لحظهٔ $t=15s$ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان $(v=at+v_0)$ به‌دست بیاورید و فراموش نکنید سرعت در این لحظه، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی حرکت است. اما ۵ ثانیهٔ ششم یعنی چه؟ یعنی بازهٔ زمانی بین $t=25s$ تا $t=30s$ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت متحرک را در این لحظه‌ها حساب کنید و سپس به کمک فرمول مستقل از شتاب $(\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t)$ جابه‌جایی در این بازه را به‌دست بیاورید. اکنون به سراغ حل مسئله بروید.



ابتدا در ۵ ثانیهٔ اول جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. حرکت دارای شتاب ثابت $2m/s^2$ و سرعت اولیه $-10m/s$ است، از این رو در پنج ثانیهٔ اول جابه‌جایی خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}\times2\times25-10\times5 \Rightarrow |\Delta x_1|=25m$$

برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در پنج ثانیهٔ ششم (یعنی بازهٔ $25s$ تا $30s$) مراحل زیر را باید طی کنیم:

۱ سرعت در لحظهٔ $t=15s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=2\times15-10=20m/s$$

۲ سرعت در لحظه‌های $t=25s$ و $t=30s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=25s\ ,\ v_1=-3(25-15)+20 \Rightarrow v_1=-10m/s$$

$$t=30s\ ,\ v_2=-3(30-15)+20 \Rightarrow v_2=-25m/s$$

۳ اندازهٔ جابه‌جایی در بازه ۵ ثانیهٔ ششم خواهد شد:

$$|\Delta x_2|=\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|\Delta t \Rightarrow |\Delta x_2|=\frac{|10+25|}{2}\times5=87/5m$$

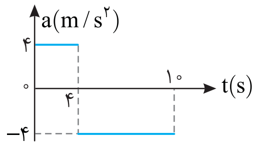
اکنون نسبت اندازهٔ جابه‌جایی‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{|\Delta x_2|}{|\Delta x_1|}=\frac{87/5}{25}=3/5$$

البته شما می‌توانید این مسئله را به کمک رسم نمودار سرعت زمان نیز حل کنید اما فراموش نکنید برای رسم نمودار $v-t$ نیز باید تمام محاسبات بالا را انجام دهید.

B ۵۵۱ ۳

حرکت از دو مرحله با شتاب ثابت تشکیل شده است.



v_0 $\qquad v_1 = at + v_0 \Rightarrow v_1 = ۴×۴ + v_0 = ۱۶ + v_0$

$\Delta x_1 \qquad \Delta x_2$

۱ جابه‌جایی متحرک در قسمت اول مسیر را برحسب v_0 به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}×۴×۱۶+۴v_0 \Rightarrow \Delta x_1 = ۳۲+۴v_0$$

۲ سرعت انتهایی مرحلهٔ اول برابر سرعت اولیهٔ مرحلهٔ دوم حرکت است و جابه‌جایی متحرک در این قسمت را حساب می‌کنیم و به جای سرعت اولیه از روی شکل مقدار $۱۶+v_0$ را قرار می‌دهیم.

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{1}{2}(-۴)×۳۶+۶v_1 \Rightarrow \Delta x_2 = -۷۲+۶(۱۶+v_0)$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = ۲۴+۶v_0$$

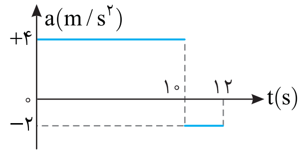
۳ بنا به فرض مسئله باید جمع Δx_1 و Δx_2 را برابر ۱۵۶m قرار داده و v_0 را حساب کنیم:

جابه‌جایی کل برابر ۱۵۶ متر است از این رو:

$$\Delta x_t = \Delta x_1+\Delta x_2 \Rightarrow ۱۵۶ = ۳۲+۴v_0+۲۴+۶v_0 \Rightarrow v_0 = ۱۰m/s$$

B ۵۵۲ ۴

۱ جابه‌جایی را در بازه‌ها زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه برابر است با:



$$۰ \to ۱۰s: \Delta x = \frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}×۴×۱۰۰+۵×۱۰ = ۲۵۰m$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را حساب می‌کنیم:

$$v_1 = at+v_0 \Rightarrow v_1 = ۴×۱۰+۵ = ۴۵m/s$$

این سرعت، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است، از این رو جابه‌جایی در بازهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۱۲s$ برابر است با: $۱۰s \to ۱۲s: \Delta x = \frac{1}{2}at^2+v_1t \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{1}{2}×(-۲)×۴+۴۵×۲ = ۸۶m$

۳ سرعت متوسط برابر خواهد شد با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t_1+\Delta t_2} = \frac{۲۵۰+۸۶}{۱۲} = \frac{۳۳۶}{۱۲} = \frac{۱۱۲}{۴} \Rightarrow v_{av} = ۲۸m/s$$

حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان:

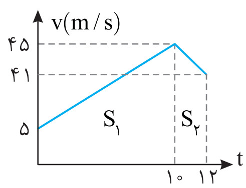
۱ سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v = at+v_0 \Rightarrow v = ۴×۱۰+۵ \Rightarrow v = ۴۵m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$v = -۲(۱۲-۱۰)+۴۵ \Rightarrow v = ۴۱m/s$$

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم و سطح زیر نمودار را به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta x = S_1+S_2$$

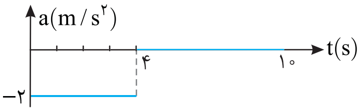
$$\Rightarrow \Delta x = (۴۵+۵)×\frac{۱۰}{۲}+(۴۵+۴۱)×\frac{۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \Delta x = ۲۵۰+۸۶ \Rightarrow \Delta x = ۳۳۶m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳۳۶}{۱۲} = \frac{۱۱۲}{۴} \Rightarrow v_{av} = ۲۸m/s$

بازی با سؤال نمودار شتاب - زمان ذره‌ای که با سرعت اولیهٔ ۴m/s در جهت مثبت محور x شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط متحرک تا پایان ثانیهٔ دهم چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴/۸
۲) −۲/۴
۳) ۲/۴
۴) −۴/۸



پاسخ ۱ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ صفر تا ۴s برابر است با:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}×(-۲)(۴)^2+۴×۴ \Rightarrow \Delta x_1 = ۰$$

۲ در انتهای این بازه سرعت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

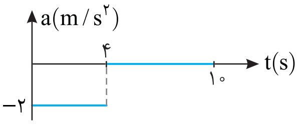
$$v = at+v_0 \Rightarrow v = -۲×۴+۴ \Rightarrow v = -۴m/s$$

۳ بعد از $t=۴s$ شتاب صفر و حرکت با سرعت ثابت $-۴m/s$ است، جابه‌جایی در مدت ۴s تا ۱۰s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_2 = vt \Rightarrow \Delta x_2 = -۴×۶ \Rightarrow \Delta x_2 = -۲۴m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

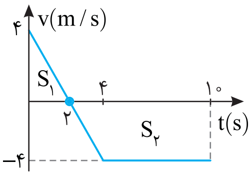
$$v_{av} = \frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{۰+(-۲۴)}{۱۰} \Rightarrow v_{av} = -۲/۴m/s$$



حل مسئله به کمک رسم نمودار سرعت - زمان در لحظهٔ $t=۴s$ برابر است با:

$$v = at+v_0$$

$$\Rightarrow v = -۲×۴+۴ = -۴m/s$$



لحظهٔ صفر شدن سرعت را حساب می‌کنیم: $۰ = -۲t+۴ \Rightarrow t = ۲s$

از لحظهٔ $t=۴s$ به بعد حرکت با سرعت ثابت $-۴m/s$ است. نمودار را رسم کرده، سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x = S = S_1+S_2 \Rightarrow \Delta x = \frac{۴×۲}{۲}+(۸+۶)×(-\frac{۴}{۲}) = ۴+(-۲۸) \Rightarrow \Delta x = -۲۴m$$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۲۴}{۱۰} \Rightarrow v_{av} = -۲/۴m/s$

گزینهٔ ۲

B ۵۵۳ ۳

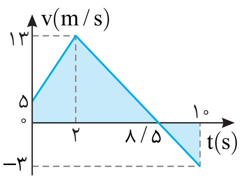
۱ برای رسم نمودار سرعت - زمان، سرعت را در لحظه‌های نشان داده شده روی نمودار شتاب - زمان و لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود به‌دست می‌آوریم.

$$v = at+v_0 \xrightarrow{t=۲s} v_1 = ۴×۲+۵ = ۱۳m/s$$

$$v = a(t-۲)+v_1 \xrightarrow{v=۰} ۰ = -۲(t-۲)+۱۳ \Rightarrow t-۲ = ۶/۵ \Rightarrow t = ۸/۵s$$

$$v = at+v_0 \xrightarrow[t=۸s]{t-۲=۱۰s} v_2 = -۲×۸+۱۳ \Rightarrow v_2 = -۳m/s$$

۲ در بازهٔ صفر تا ۲s نمودار سرعت زمان خط راستی مایلی با شیب مثبت و در بازهٔ ۲s تا ۱۰s نمودار سرعت - زمان خط راست مایل با شیب منفی است، نمودار را رسم می‌کنیم.



۳ اکنون با استفاده از سطح زیر نمودار $v-t$ مسافت طی شده را به دست می‌آوریم.

$$\ell = \left|\frac{۵+۱۳}{۲}×۲\right|+\left|\frac{۱۳×۶/۵}{۲}\right|+\left|\frac{-۳×۱/۵}{۲}\right| = ۱۸+\frac{۸۴/۵}{۲}+\frac{۴/۵}{۲}$$

$$\ell = ۱۸+۴۲/۲۵+۲/۲۵ \Rightarrow \ell = ۶۲/۵m$$

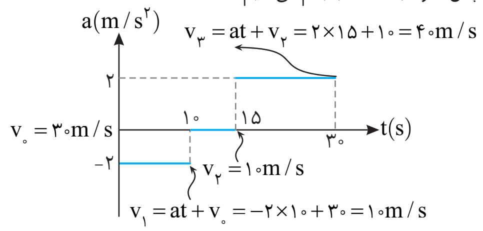
۴ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۶۲/۵}{۱۰} = ۶/۲۵m/s$

B ۵۵۴ ۳

خط فکری نمودار شتاب - زمان اطلاعات زیادی در مورد حرکت به ما نمی‌دهد اما می‌توانیم از روی آن، سرعت در هر لحظه را البته با داشتن سرعت اولیه به‌دست بیاوریم. برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در بازهٔ ۱۰s تا ۳۰s باید جابه‌جایی متحرک را حساب کنید. برای این کار می‌توانید نمودار سرعت زمان را رسم کرده و سطح زیر نمودار را حساب کنید و یا از معادلات حرکت با شتاب ثابت و حرکت با سرعت ثابت استفاده کنید. هر دو روش را برای شما به کار می‌بریم.

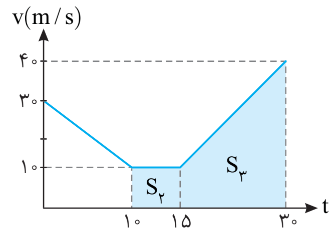
روش اول:

۱ سرعت در هر لحظه را روی نمودار شتاب زمان به کمک رابطهٔ $v=at+v_۰$ نوشته، سپس نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.



۲ جابه‌جایی متحرک در بازه ۱۰s تا ۳۰s برابر مجموع $S_۲$ و $S_۳$ است.

$$\Delta x=S_۲+S_۳=۱۰\times ۵+\frac{۴۰+۱۰}{۲}\times ۱۵\Rightarrow \Delta x=۴۲۵m$$



۳ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۴۲۵}{۳۰-۱۰}=۲۱/۲۵m$

روش دوم:

نیازی به رسم شکل $v-t$ نیست.

۴ در بازهٔ ۱۰s، ۱۵s حرکت با سرعت ثابت ۱۰m/s بوده و جابه‌جایی برابر است با: $\Delta x_۱=vt=۱۰\times ۵=۵۰m$

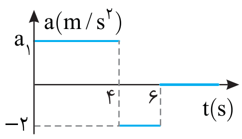
۵ در بازهٔ ۱۵s تا ۳۰s حرکت با شتاب ثابت، $۲m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ ۱۰m/s است بنابراین جابه‌جایی خواهد شد:

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲\times (۱۵)^۲+۱۰\times ۱۵$$
$$=۲۲۵+۱۵۰\Rightarrow \Delta x_۲=۳۷۵m$$

۶ جابه‌جایی کل و سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{۳۷۵+۵۰}{۳۰-۱۰}=۲۱/۲۵m/s$

B ۵۵۵ ۳

در بازهٔ $t>۶s$ حرکت یکنواخت است $(a=۰)$ پس سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ برابر سرعت در لحظهٔ $t=۸s$ یعنی برابر ۱۲m/s است. به کمک معادلهٔ سرعت-زمان، سرعت در لحظهٔ $t=۴s$ را به‌دست می‌آوریم: $v=at+v_۱\Rightarrow ۱۲=-۲\times ۲+v_۱\Rightarrow v_۱=۱۶m/s$



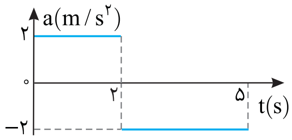
در بازهٔ ۰ تا ۴s حرکت دارای شتاب ثابت $a_۱$ بوده و سرعت متوسط در ۴s نخست برابر ۸m/s است برای سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۰}{۲}\Rightarrow ۸=\frac{۱۶+v_۰}{۲}\Rightarrow v_۰=۰$$

و شتاب $a_۱$ برابر خواهد شد با: $a_۱=\frac{v_۱-v_۰}{t}=\frac{۱۶-۰}{۴}=۴m/s^۲$

B ۵۵۶ ۲

یادآوری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی در یکای زمان است. $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$



۱ جابه‌جایی در مدت ۵s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{v_{av}=۶/۴m/s}۶/۴=\frac{\Delta x}{۵}\Rightarrow \Delta x=۳۲m$$

۲ حرکت این متحرک از دو قسمت با دو شتاب مختلف تشکیل شده است و جابه‌جایی متحرک در مدت ۵ ثانیه برابر مجموع جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۲s با شتاب $۲m/s^۲$ و جابه‌جایی در بازهٔ ۲s تا ۵s با شتاب $-۲m/s^۲$ است. جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۲s را برحسب $v_۰$ می‌نویسیم. $\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}a_۱t^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}(۲)(۲)^۲+۲v_۰\Rightarrow \Delta x_۱=۴+۲v_۰$

۳ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را برحسب $v_۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱=a_۱t_۱+v_۰\Rightarrow v_۱=۴+v_۰$$

۴ جابه‌جایی در بازهٔ ۲s تا ۵s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}a_۲t_۲^۲+v_۱t_۲\Rightarrow \Delta x_۲=\frac{۱}{۲}\times(-۲)\times(۳)^۲+(۴+v_۰)\times ۳$$
$$\Rightarrow \Delta x_۲=-۹+۱۲+۳v_۰\Rightarrow \Delta x_۲=۳+۳v_۰$$

۵ جابه‌جایی متحرک در مدت ۵s برابر ۳۲m است. بنابراین مجموع $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ را برابر ۳۲ قرار داده مسئله را حل می‌کنیم:

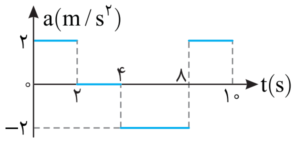
$$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲\Rightarrow ۳۲=۴+۲v_۰+۳+۳v_۰\Rightarrow ۲۵=۵v_۰\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

دنبال راه‌حل ساده‌تری نگردید، وجود ندارد!

B ۵۵۷ ۴

خط فکری متحرک از حال سکون با شتاب $۲m/s^۲$ در جهت مثبت محور xها از مبدأ $(x_۰=۰)$ شروع به حرکت کرده به کمک نمودار شتاب - زمان، نمودار سرعت - زمان را رسم کنید. تا لحظه‌ای که مجموع سطح‌های زیر نمودار $v-t$ مثبت است، مکان متحرک مثبت بوده یعنی جهت بردار مکان در جهت مثبت محور xها است.

سرعت را در لحظه‌های روی نمودار به‌دست آورده سپس به کمک آن‌ها نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم: $v=at+v_۰$



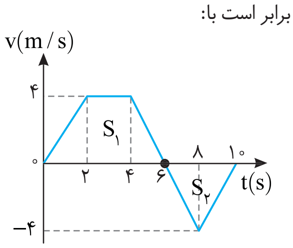
$$t=۲s\Rightarrow v_۱=۲\times ۲=۴m/s\ ,\ t=۴s\Rightarrow v_۱=۴m/s$$
$$t=۸s\Rightarrow v_۲=-۲\times ۴+۴=-۴m/s\quad t=۱۰s\Rightarrow v_۳=۲\times ۲+(-۴)=۰$$

در بازهٔ صفر تا ۶s سطح زیر نمودار مثبت و برابر است با:

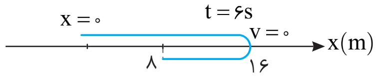
$$\Delta x_۱=S_۱=(۶+۲)\times(\frac{۴}{۲})=۱۶m$$

در بازهٔ ۶s تا ۱۰s سطح زیر نمودار منفی و برابر است با:

$$\Delta x_۲=S_۲=\frac{-۴\times(۱۰-۶)}{۲}=-۸m$$



بنابراین در مدت ۰ تا ۶s متحرک از مبدأ به مکان +۱۶m رفته و در بازهٔ ۶s تا ۱۰s به اندازهٔ ۸m برگشته و به مکان +۸m رسیده یعنی در تمام مدت ۱۰s بردار مکان متحرک مثبت $(x>۰)$ بوده است.



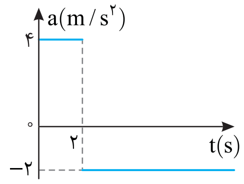
البته با نگاه کردن به نمودار سرعت - زمان می‌توان بدون محاسبه این‌گونه استدلال کرد که در بازهٔ صفر تا ۶s سطح زیر نمودار مثبت بوده و مکان متحرک که از مبدأ شروع به حرکت کرده مثبت است. با مقایسهٔ سطح زیر نمودار از صفر تا ۶s و ۶s تا ۱۰s کاملاً مشخص است که متحرک در بازهٔ ۶s تا ۱۰s در خلاف جهت محور جابه‌جا شده است امّا هم‌چنان مکان مثبت است و متحرک به مبدأ برنمی‌گردد پس در مدت ۱۰s مکان متحرک مثبت است.

B ۵۵۸ ۲

خط فکری لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد. متحرک در مبدأ زمان از مکان $+2m$ شروع به حرکت کرده باید در مرحلهٔ اول مشخص کنید مکان متحرک کجاست. سپس در بازه‌ای که شتاب منفی شده است تعیین کنید در چه لحظه‌ای مکان متحرک صفر می‌شود.

۱ مکان متحرک در لحظهٔ $t=2s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\times4\times4+0+2 \Rightarrow x=10m$$



۲ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ برابر است با:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=4\times2=8m/s$$

در قسمت دوم سرعت اولیهٔ $8m/s$ است و لحظهٔ تغییر بردار مکان هنگامی است که $x=0$ می‌شود.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}(-2)t^2+8t+10 \Rightarrow t^2-8t-10=0$$

$$\Rightarrow t=4\pm\sqrt{16+10} \Rightarrow t=4\pm\sqrt{26} \Rightarrow t\approx4+5\approx9s$$

B ۵۵۹ ۴

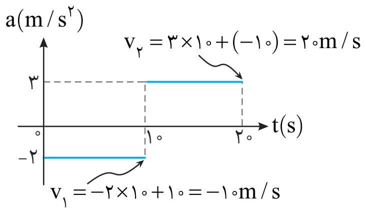
روش اول: **خط فکری** در لحظهٔ $t=0$ متحرک برای اولین بار در جهت مثبت محور با سرعت $10m/s$ از مبدأ می‌گذرد.

شما باید در لحظهٔ $t=10s$ و $t=20s$ سرعت جسم را به کمک رابطهٔ سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_0)$ به‌دست بیاورید. سرعت در لحظهٔ $t=10s$ که جهت شتاب عوض می‌شود برابر سرعت اولیهٔ قسمت دوم است. لحظه‌هایی که سرعت متحرک صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد را نیز باید حساب کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=10s$ و $t=20s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_1=-2\times10+10 \Rightarrow v_1=-10m/s$$

$$\Rightarrow v_2=3\times10+(-10) \Rightarrow v_2=20m/s$$



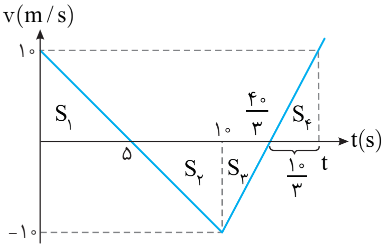
۲ لحظه‌هایی که سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یک بار در بازهٔ صفر تا $10s$ و بار دیگر در بازهٔ $10s$ تا $20s$ رخ می‌دهد از این‌رو:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[a=-2m/s^2]{v=0,\,v_0=10m/s} 0=-2\times t+10 \Rightarrow t_1=5s$$

$$v=at+v_1 \xrightarrow[a=3m/s^2]{v=0,\,v_1=-10m/s} 0=3t+(-10) \Rightarrow t=\frac{10}{3}s$$

دقت کنید این $\frac{10}{3}s$ بعد از $10s$ رخ داده یعنی لحظه‌ای که سرعت برای بار دوم صفر می‌شود $10+\frac{10}{3}=\frac{40}{3}s$ است.

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.

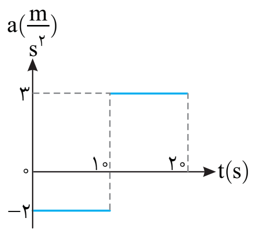


نکته هرگاه متحرک به مکان اولیه‌اش باز گردد یعنی جابه‌جایی آن صفر باشد، باید سطح زیر نمودار سرعت زمان صفر شود.

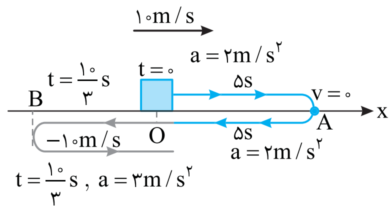
۴ در بازهٔ ۰ تا $10s$ سطح S_1 و S_2 هم‌اندازه و قرینه هستند و جابه‌جایی صفر است یعنی در لحظهٔ $t=10s$ برای بار دوم متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. (بار اول در $t=0$ از مبدأ مکان گذشته است.)

۵ برای آنکه برای بار سوم از مبدأ بگذرد باید سطح S_3 و S_4 هم‌اندازه و قرینه هم باشند. برای همنهشتی این دو مثلث که شیب وتر آن‌ها یکی است باید ارتفاع هر دو $10m/s$ و قاعدهٔ هر دو $\frac{10}{3}s$ باشد. در این صورت t خواهد شد: $t=\frac{40}{3}+\frac{10}{3}=\frac{50}{3}s$

روش دوم: سؤال سختی برای جلسه کنکور است. اما با توجه به رفتار متحرک در حرکت با شتاب ثابت می‌توان آن را حل کرد. متحرک در لحظهٔ $t=0$ برای اولین بار با سرعت $+10m/s$ از مبدأ می‌گذرد سپس با شتاب $-2m/s^2$ بعد از $5s$ متوقف می‌شود و در لحظهٔ $t=10s$ یعنی $5s$ بعد از توقف در نقطهٔ A از نقطهٔ O مبدأ می‌گذرد و در این لحظه سرعتش $-10m/s$ است و با شتاب $3m/s^2$ بعد از مدت $t=\frac{v}{a}=\frac{10}{3}s$ در نقطهٔ B متوقف می‌شود و پس از $\frac{10}{3}s$ برای بار سوم به مبدأ می‌رسد و برای همیشه از آن دور می‌شود.



بنابراین در لحظهٔ $t=5+5+\frac{10}{3}+\frac{10}{3}=\frac{50}{3}s$ برای سومین بار از مبدأ می‌گذرد.



B ۵۶۰ ۴

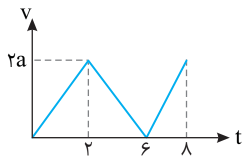
خط فکری متحرک از حال سکون در جهت مثبت محور شروع به حرکت کرده و تا لحظه‌ای که سرعت آن مثبت است متحرک در حال دور شدن از مبدأ بوده و بیشترین فاصله از مبدأ لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر شده و علامت سرعت منفی شده و متحرک به سوی مبدأ بازمی‌گردد، بنابراین تکلیف شتاب مشخص است. شما باید لحظه‌ای را بیابید که متحرک بازمی‌گردد.

در لحظهٔ $t=2s$ سرعت خواهد شد: $v=at+v_0 \xrightarrow{t=2s} v_1=2a$

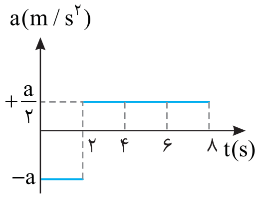
در لحظهٔ $t=6s$ سرعت را حساب می‌کنیم. $v_2=-\frac{a}{2}(4)+2a=0$

در لحظهٔ $t=8s$ سرعت برابر است با: $v_3=a(2)+0=2a$

بنابراین در تمام لحظات سرعت مثبت است و متحرک هرگز بازنمی‌گردد. در نتیجه بیشترین فاصله از مبدأ در لحظهٔ $t=8s$ اتفاق می‌افتد.

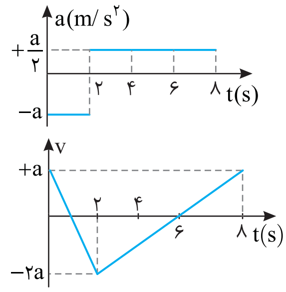


بازی با سؤال متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان روی محور xها از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. نمودار شتاب- زمان این متحرک مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام لحظهٔ فاصلهٔ متحرک از مبدأ از بقیه لحظه‌ها بیشتر است؟



۱) $t=۳s$ ۲) $t=۴s$ ۳) $t=۶s$ ۴) $t=۸s$

پاسخ متحرک از حال سکون $(v_۰=۰)$ از مبدأ مکان $(x=۰)$ در مبدأ زمان $(t=۰)$ شروع به حرکت کرده و شتاب ابتدایی حرکت منفی است، بنابراین متحرک در جهت منفی محور حرکت می‌کند تا سرعتش به $v_۱=-۲a$ می‌رسد. در $t=۲s$ شتاب مثبت می‌شود اما سرعت همچنان منفی بوده و متحرک در حال دور شدن از مبدأ است در لحظهٔ $t=۶s$ سرعت متحرک $v_۲=\frac{a}{۲}(۶-۲)+(-۲a)=۰$ می‌شود.



در این لحظه متحرک دارای بیشترین فاصله از مبدأ مکان است از این لحظه به بعد سرعت مثبت شده و متحرک به سوی مبدأ باز می‌گردد و فاصلهٔ متحرک از مبدأ کم می‌شود اما در $t=۸s$ به مبدأ نمی‌رسد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است. گزینهٔ ۳

C ۵۶۱ ۳

سرعت اولیهٔ متحرک $v_۰=-۱۰m/s$ و در ابتدا شتاب مثبت و متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور است، تا لحظه‌ای که سرعت آن صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد. نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم برای این منظور سرعت در لحظه‌های $t=۱۰s$ و $t=۱۵s$ و $t=۳۵s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۰=-۱۰m/s \quad , \quad v_۱=a_۱\Delta t_۱+v_۰=۲\times۱۰+(-۱۰)=۱۰m/s$$

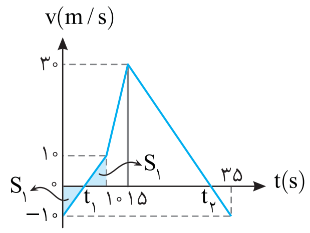
$$v_۲=a_۲\Delta t_۲+v_۱=۴\times۵+۱۰=۳۰m/s$$

$$v_۳=a_۳\Delta t_۳+v_۲=-۲\times۲۰+۳۰=-۱۰m/s$$

لحظه‌هایی را که سرعت صفر است را مشخص می‌کنیم:

$$v=a_۱t_۱+v_۰\Rightarrow ۰=۲t_۱+(-۱۰)\Rightarrow t_۱=۵s$$

$$v=a_۳t_۳+v_۰\Rightarrow ۰=-۲(t_۲-۱۵)+۳۰\Rightarrow ۰=-۲t_۲+۳۰+۳۰\Rightarrow t_۲=۳۰s$$



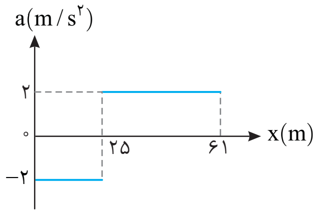
با توجه به نمودار سرعت - زمان، در لحظهٔ $t=۱۰s$ متحرک به مکان اولیه باز می‌گردد $(S_۱=S_۲)$ یعنی در مبدأ است و از این لحظه $(t=۱۰s)$ تا لحظهٔ $t_۲=۳۰s$ متحرک در حال دور شدن از مبدأ است و باید این جابه‌جایی را حساب کرد:

$$\Delta x=\frac{۱۰+۳۰}{۲}\times۵+\frac{۳۰\times۱۵}{۲}\Rightarrow \Delta x=۱۰۰+۲۲۵=۳۲۵m$$

A ۵۶۲ ۲

خط فکری نمودار داده شده نمودار شتاب - مکان است و از زمان خبری نیست، بنابراین استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان در حل مسئله اولین راهی است که باید به ذهن شما برسد.

سرعت متحرک را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان در مکان $x=۲۵m$ به‌دست می‌آوریم:



$$x=۲۵m: v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(x_۱-x_۰)\xrightarrow{x_۰=۰}v_۱^۲-۱۰۰=۲(-۲)(۲۵)$$

$$\Rightarrow v_۱^۲=۰\Rightarrow v_۱=۰$$

اکنون سرعت در مکان $x=۶۱m$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۶۱m: v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)\Rightarrow v_۲^۲-۰=۲(۲)\times(۶۱-۲۵)$$

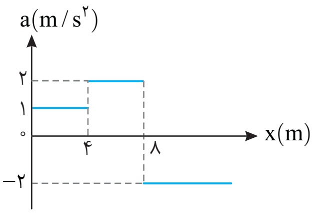
$$\Rightarrow v_۲^۲=۴\times۳۶\Rightarrow v_۲=۲\times۶=۱۲m/s$$

B ۵۶۳ ۳

خط فکری نمودار شتاب - مکان بوده بنابراین باید به سراغ معادلهٔ مستقل از زمان برویم. در صورت مسئله بیان شده که متحرک تا چند متری مبدأ در جهت مثبت محور xها می‌رود، بنابراین مکانی را باید به‌دست بیاورید که متحرک متوقف شده و برمی‌گردد.

۱ سرعت در مکان $x=+۴m$ را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم.

$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(x_۱-x_۰)\Rightarrow v_۱^۲-۰=۲\times۱\times۴\Rightarrow v_۱=۲\sqrt{۲}m/s$$



۲ سرعت در مکان $+۸m$ را حساب می‌کنیم البته سرعت انتهایی هر مرحله سرعت اولیهٔ مرحلهٔ بعدی است.

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a_۲\Delta x_۲\Rightarrow v_۲^۲-(۲\sqrt{۲})^۲=۲\times۲\times(۸-۴)$$

$$\Rightarrow v_۲^۲=۲۴\Rightarrow v_۲=۲\sqrt{۶}m/s$$

۳ اکنون متحرک در مکان $x=+۸m$ دارای سرعت $۲\sqrt{۶}m/s$ است و باید بررسی کنیم در چه مکانی با شتاب $-۲m/s^۲$، سرعت صفر می‌شود.

$$v_۳^۲-v_۲^۲=۲a_۳(x_۳-x_۲)\Rightarrow ۰-۲۴=۲(-۲)(x_۳-۸)\Rightarrow x_۳=۱۴m$$

در مکان $x=۱۴m$ متحرک تغییر جهت می‌دهد و در خلاف جهت شروع به حرکت می‌کند.

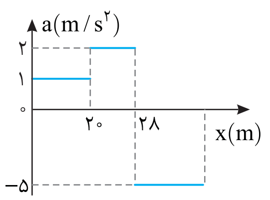
B ۵۶۴ ۱

۱ با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان سرعت در مکان $x=۲۰m$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a_۱(x_۱-x_۰)$$

$$\xrightarrow{v_۰=۳m/s}v_۱^۲-۹=۴۰$$

$$\Rightarrow v_۱^۲=۴۹\Rightarrow v_۱=۷m/s$$

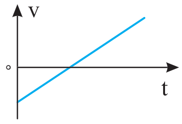


۲ سرعت در مکان $+۲۸m$ را حساب می‌کنیم. سرعت اولیهٔ این قسمت همان سرعت انتهایی در مکان $+۲۰m$ یعنی $v_۱=۷m/s$ است. بنابراین:

$$v_۲^۲-۴۹=۲a_۲\Delta x_۲ \xrightarrow{\Delta x=(x_۲-x_۱)} v_۲^۲-۴۹=۲\times۲\times(۲۸-۲۰)$$
$$\Rightarrow v_۲^۲=۸۱\Rightarrow v_۲=۹m/s$$

۳ در قسمت آخر حرکت شتاب $-۵m/s^۲$ و سرعت ابتدایی آن همان سرعت نهایی قسمت قبل است. در این بازه متحرک تا زمان تغییر جهت $v=۰$ به حرکت خود ادامه می‌دهد.
$$۰-۸۱=۲\times(-۵)(x-۲۸)\Rightarrow ۸/۱=x-۲۸\Rightarrow x=۳۶/۱m$$

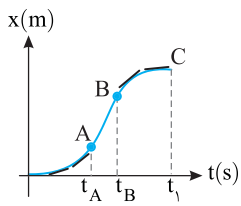
B ۵۶۵ ۱



۱ شیب نمودار سرعت – زمان برابر شتاب متحرک است شیب این نمودار مثبت است. بنابراین شتاب حرکت مثبت است.

۲ اگر جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان – زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت است. بنابراین دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان – زمان این متحرک باید رو به بالا باشد، در نتیجه گزینهٔ (۱) درست است.

B ۵۶۶ ۳

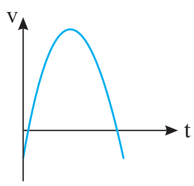


اتوبوس از ایستگاهی شروع به حرکت کرده و در ایستگاه بعد متوقف می‌شود پس در $t=۰$ و $t=t_۱$ سرعت صفر است. هم‌چنین شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در بازهٔ ۰ تا t_A مثبت و در حال افزایش و در بازهٔ t_B تا $t_۱$ نیز مثبت اما در حال کاهش است. یعنی در این دو بازه سرعت مثبت است و نمودار باید بالای محور زمان باشد، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۵۶۷ ۱

خط فکری باید این نکات را یادآوری کنید.

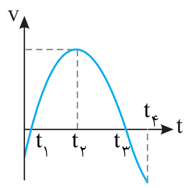
۱ شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان برابر شتاب است و جهت تقعر نمودار مکان – زمان علامت شتاب را مشخص می‌کند.



۲ هرگاه سرعت متحرک منفی باشد شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان باید منفی باشد.

۳ لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود یعنی در نمودار مکان – زمان، در نقاط بیشینه و کمینه نمودار هستیم.

ابتدا سرعت منفی است، بنابراین شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان باید منفی باشد در نتیجه گزینهٔ (۴) نادرست است.

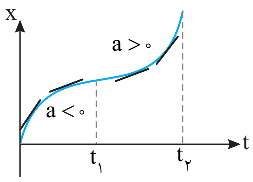


از لحظهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان داده شده مثبت و پس از آن منفی است. بنابراین دهانه (تقعر) نمودار مکان – زمان باید ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین باشد، گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند.

در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۳$ سرعت صفر شده یعنی نمودار مکان – زمان باید دارای دو نقطهٔ بیشینه و کمینه باشد، گزینهٔ (۱) دارای تمام شرایط بیان شده بوده و درست است.

B ۵۶۸ ۳

۱ در بازهٔ صفر تا $t_۱$ دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان – زمان رو به پایین است، بنابراین شتاب منفی و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ که جهت تقعر رو به بالاست شتاب مثبت است.



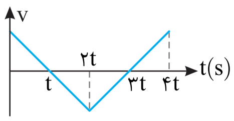
۲ شیب نمودار سرعت – زمان برابر شتاب است. در نمودار گزینه‌های (۱) و (۲) شیب ثابت بوده یعنی این نمودارها مربوط به حرکت با شتاب ثابت است اما در نمودار داده شده شتاب تغییر می‌کند و گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

۳ شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان برابر سرعت متحرک است. در تمام بازهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط مماس مثبت است، بنابراین در تمام بازهٔ صفر تا $t_۲$ سرعت مثبت است. از این‌رو گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۵۶۹ ۲

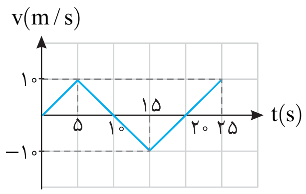
خط فکری نمودار ارائه شده نمودار سرعت زمان است و هر گاه نمودار سرعت – زمان خط راست مایل باشد حرکت دارای شتاب ثابت است و نمودار آن قسمتی از یک سهمی است. از طرفی هر گاه شتاب مثبت باشد جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان زمان رو به بالا و هر گاه شتاب منفی باشد تقعر (دهانه) نمودار مکان – زمان رو به پایین است. اکنون شما گزینه‌ها را بررسی کنید تا مشخص شود کدام گزینهٔ دارای شرایط بیان شده است.

در بازهٔ صفر تا ۲t نمودار سرعت زمان خط راست بوده و شیب آن یعنی شتاب حرکت منفی است بنابراین نمودار مکان زمان سهمی است که دهانهٔ آن باید رو به پایین باشد در بازهٔ ۲t تا ۴t شیب نمودار سرعت – زمان مثبت است بنابراین دهانه (تقعر) نمودار مکان زمان نیز باید رو به بالا باشد. در نتیجه گزینهٔ (۲) جواب مسئله است.



A ۵۷۰ ۲

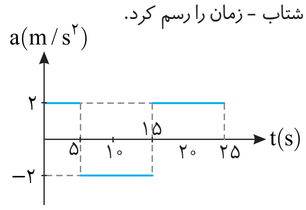
در بازهٔ ۰ تا ۵s شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a_۱=\frac{۱۰-۰}{۵-۰}=۲m/s^۲$



شتاب در بازهٔ ۵s تا ۱۵s ثابت و برابر است با: $a_۲=\frac{-۱۰-۱۰}{۱۵-۵}=-۲m/s^۲$

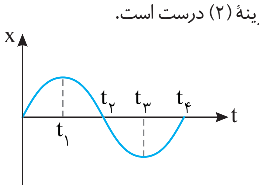
شتاب در بازهٔ ۱۵s تا ۲۵s را به‌دست می‌آوریم: $a_۳=\frac{۱۰-(-۱۰)}{۲۵-۱۵}=۲m/s^۲$

اکنون می‌توان نمودار شتاب – زمان را رسم کرد.

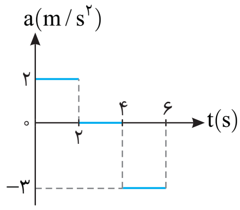


B ۵۷۱ ۲

لحظه‌های $t_۱$ و $t_۳$ نقاط بیشینه و کمینه نمودار است و در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان – زمان، سرعت لحظه‌ای صفر است. در حالی که در گزینه‌های (۳) و (۴) در این لحظات سرعت صفر نیست و این دو نمودار نادرست هستند. شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در بازهٔ صفر تا $t_۱$ مثبت است یعنی در این بازه سرعت مثبت است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست و گزینهٔ (۲) درست است.



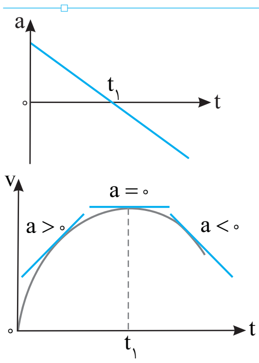
A ۵۷۲ ۳



در بازهٔ صفر تا ۲s متحرک با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعتش به $v=۲\times۲+۰=۴m/s$ می‌رسد در بازهٔ ۲s تا ۴s شتاب صفر و حرکت یکنواخت با سرعت ثابت ۴m/s است، پس از آن شتاب $-۳m/s^۲$ است و سرعت متحرک در t=۶s خواهد شد: $v=at+v_۰\Rightarrow-۳\times(۶-۴)+۴=-۲m/s$

بنابراین نمودار گزینهٔ (۳) درست است.

A ۵۷۳ ۲



ابتدا شتاب مثبت بوده و شیب خط مماس بر نمودار سرعت-زمان باید مثبت باشد، سپس شتاب صفر می‌شود و سرانجام شتاب منفی بوده و شیب خط مماس بر نمودار سرعت-زمان باید منفی شود، بنابراین نمودار سرعت-زمان مطابق شکل روبه‌رو یعنی گزینهٔ (۲) است.

A ۵۷۴ ۲

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، بنابراین نمودار مکان-زمان در مبدأ زمان باید به محور زمان مماس شود، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند. باید بین گزینه‌های (۲) و (۴) یکی را انتخاب کنیم. سرعت در لحظه‌های t=۱۰s ، t=۲۰s و t=۳۰s را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\begin{cases}\xrightarrow{t=۱۰s} v_۱=-۱\times۱۰+۰=-۱۰m/s\\ \xrightarrow{t=۲۰s} v_۲=۱\times(۲۰-۱۰)+(-۱۰)=۰\\ \xrightarrow{t=۳۰s} v_۳=۱\times(۳۰-۲۰)+۰=۱۰m/s\end{cases}$$

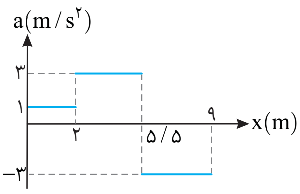
بنابراین ابتدا سرعت به $-۱۰m/s$ می‌رسد سپس در t=۲۰s سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد در نتیجه گزینهٔ (۲) پاسخ درست است.

در گزینهٔ (۴) نمودار پس از $v=۰$ ادامه پیدا نکرده و این گزینه نادرست است.

B ۵۷۵ ۲

خط فکری می‌خواهیم از روی نمودار شتاب - مکان، نمودار شتاب - زمان را رسم کنیم، بنابراین برای هر بازهٔ مکانی روی نمودار باید بازهٔ زمانی آن را مشخص کرد.

۱ متحرک از حال سکون $(v_۰=۰)$ شروع به حرکت کرده است. سرعت در مکان x=+۲m را به‌دست آوریم. $v_۱^۲-v_۰^۲=۲ax\Rightarrow v_۱^۲=۴\Rightarrow v_۱=۲m/s$



۲ بازهٔ زمانی که در آن متحرک ۲m را طی کرده سرعت متحرک به ۲m/s رسیده است را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v_۰+v_۱}{۲}\Delta t_۱\Rightarrow ۲=\frac{۲}{۲}\Delta t_۱\Rightarrow\Delta t_۱=۲s$$

۳ از ۲m تا ۵/۵m متحرک با شتاب $۳m/s^۲$ از سرعت $v_۱=۲m/s$ به سرعت $v_۲$ خواهد رسید بنابراین: $v_۲^۲-v_۱^۲=۲ax\Rightarrow v_۲^۲-۴=۲۱\Rightarrow v_۲=۵m/s$

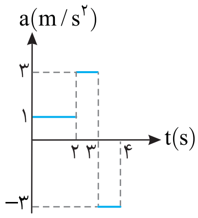
$$\Delta x=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t_۲\Rightarrow\Delta t_۲=۱s$$

۴ از ۵/۵m تا ۹m متحرک با شتاب $-۳m/s^۲$ از سرعت $v_۲$ به سرعت $v_۳$ خواهد رسید بنابراین:

$$v_۳^۲-v_۲^۲=۲ax\Rightarrow v_۳^۲-۲۵=-۲۱\Rightarrow v_۳=۲m/s$$

$$\Delta x=\frac{v_۳+v_۲}{۲}\Delta t\Rightarrow ۳/۵=\frac{۵+۲}{۲}\times\Delta t_۳\Rightarrow\Delta t_۳=۱s$$

۵ اکنون نمودار شتاب - زمان را می‌توان رسم کرد.



B ۵۷۶ ۳

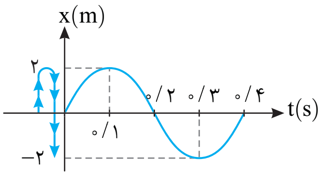
خط فکری تنها راه حل این مسئله رسم نمودار $x-t$ است.

یادآوری ریاضی در تابع‌های $y=A\sin ax$ و $y=A\cos ax$ دورهٔ تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است و مقدار بیشینه تابع همان ضریب sin (و یا cos) یعنی A است.

۱ دورهٔ تابع $y=۲\sin ۵\pi t$ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=\frac{۲\pi}{۵\pi}\Rightarrow T=۰/۴s$$

۲ نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.



۳ در بازهٔ t=۰ تا t=۰/۳s مسافت طی شده را از روی نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=۲+۲+۲=۶m$$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم.

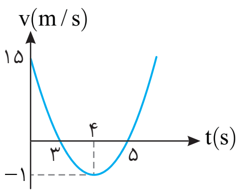
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۶}{۰/۳}\Rightarrow s_{av}=۲۰m/s$$

C ۵۷۷ ۲

کافی است نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. برای این منظور باید مختصات رأس سهمی و همچنین محل تلاقی نمودار با محور زمان را به‌دست بیاوریم:

رأس سهمی: $t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow t=۴s\Rightarrow v=۱۶-۳۲+۱۵\Rightarrow v=-۱m/s$

$$v=۰\Rightarrow t^۲-۸t+۱۵=۰\Rightarrow(t-۳)(t-۵)=۰\Rightarrow t=۳s\ ,t=۵s$$



با توجه به نمودار در بازهٔ صفر تا ۳s سرعت از ۱۵m/s تا صفر در حال کاهش و حرکت کندشونده است. همچنین در بازهٔ ۴s تا ۵s به مدت ۱s تندی متحرک از ۱m/s به صفر کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است، بنابراین جمعاً ۴s حرکت کندشونده است.

B ۵۷۸ ۲

یادآوری شـتاب متوسـط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ و سطح زیر نمودار شـتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.

خط فکری باید نمودار شـتاب - زمان معادلهٔ $a=-۲t+۵$ را رسـم کنید و در بازهٔ $t=۲s$ تا $t=۴s$ سطح زیر نمودار را به‌دست بیاورید سپس شتاب متوسط را حساب کنید.

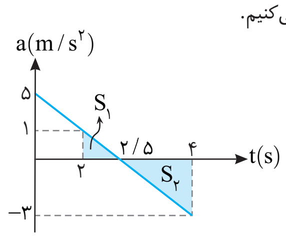
۱ شتاب را در لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۴s$ حساب می‌کنیم.

$$a=-۲t+۵\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۲s} a=-۲\times۲+۵=۱\,m/s^۲\\ \xrightarrow{t=۴s} a=-۲\times۴+۵=-۳\,m/s^۲\end{cases}$$

۲ لحظهٔ صفر شدن شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$a=۰\Rightarrow -۲t+۵=۰\Rightarrow t=۲/۵s$$

۳ نمودار را رسم می‌کنیم.



۴ تغییرات سرعت برابر مجموع مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ است بنابراین:

$$\Delta v=S_۱+S_۲\Rightarrow\Delta v=\frac{۰/۵\times۱}{۲}+\frac{-۳\times۱/۵}{۲}=۰/۲۵-۲/۲۵=-۲m/s$$

۵ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۲}{۲}=-۱m/s^۲$$

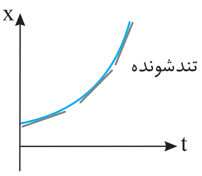
B ۵۷۹ ۱

نکته هرگاه حاصل‌ضرب سرعت در مکان متحرک مثبت $(vx>۰)$ باشد، متحرک در حال دور شدن از مبدأ و هرگاه منفی $(vx<۰)$ باشد، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

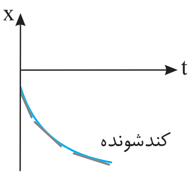
نکته هرگاه $av>۰$ باشـد، حرکت تندشـونده اسـت و تندی یعنی شـیب خط مماس بر نمودار مکان زمان در حال افزایش و هرگاه $av<۰$ باشـد حرکت کندشـونده است و تندی یعنی خط مماس بر نمودار مکان - زمان در حال کاهش است.

با توجه به فرض مسئله نموداری که در آن متحرک در حال دور شدن از مبدأ بوده و دارای حرکت تندشـونده اسـت را باید پیدا کنیم. در گزینهٔ (۲) و گزینهٔ (۳) در ابتدا متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ $(x=۰)$ است و این نمودارها نادرست هستند.

در گزینهٔ (۱) و (۴)، متحرک‌ها در حال دور شدن از مبدأ هستند اما مطابق شکل در گزینهٔ (۴) حرکت کند شـونده بوده و نمودار گزینهٔ (۴) نادرست است. اما در نمودار گزینهٔ (۱) متحرک دارای حرکت تند شونده است و این گزینه درست است.



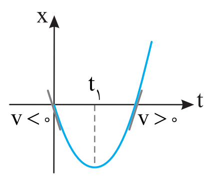
گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۴)

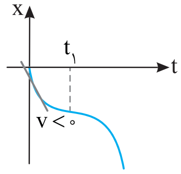
B ۵۸۰ ۳

۱ متحـرک در ابتدا دارای سـرعت اولیه مثبت است. بنابراین شـیب خط مماس بر نمودار باید در لحظـهٔ $t=۰$ مثبت باشـد. (یعنی خط ممـاس با جهت مثبت محور زمان زاویه حاده بسازد. از این‌رو مطابق شکل گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست هستند.

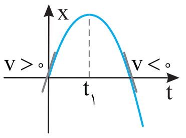


گزینهٔ (۲)

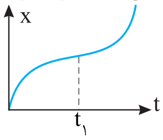
۲ متحرک در $t_۱$ متوقف شده بنابراین سرعت در این لحظهٔ صفر است و شیب خط مماس در نمودار $x-t$ در لحظهٔ $t_۱$ باید افقی باشد. متحرک با اینکه در $t_۱$ متوقف شده اما تغییر جهت نداده یعنی علامت سرعت قبل و بعد از $t_۱$ تغییـر نمی‌کند و متحـرک در جهت مثبت محور به حرکت خود ادامه می‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۱) نادرست است.



گزینهٔ (۴)

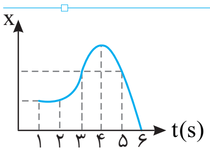


گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۳)

B ۵۸۱ ۲



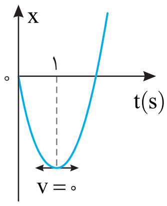
دقت کنید نمودار از لحظهٔ $t=۱s$ شروع شده است.

در بـازهٔ $۱s$ تـا $۲s$ متحـرک سـاکن اسـت، پس سرعت صفر است.

در بازهٔ $۲s$ تا $۳s$ حرکت با شـتاب ثابت و مثبت است، پس نمودار سرعت - زمان خط راستی است که شیب آن مثبت است و با محور زمان زاویهٔ حاده می‌سازد.

در بازهٔ $۳s$ تا $۵s$ چون منحنی یک سهمی است و جهت تقعر آن رو به پایین است، شتاب ثابت و منفی است و چون شیب نمودار سرعت - زمان، علامت شتاب را نشان می‌دهد، در این بازه باید شیب نمودار سرعت - زمان منفی باشد و با محور زمان زاویهٔ منفرجه بسازد. با توجه به فرض مسئله در بازهٔ $۵s$ تا $۶s$ نمودار خط راست بوده حرکت دارای سرعت ثابت است.

B ۵۸۲ ۱



۱ شتاب حرکت ثابت و برابر $۲m/s^۲$ است و در لحظهٔ $t=۱s$ سرعت صفر شده است. از این‌رو می‌توان سرعت اولیه را به‌دست آورد.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow ۲=\frac{۰-v_۰}{۱}\Rightarrow v_۰=-۲m/s$$

یادآوری هر جابه‌جایی در ثانیهٔ tاُم در حرکت با شـتاب ثابت a و سرعت اولیه $v_۰$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\Delta x_{(t)}=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰$$

۲ در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x_{(۳)}=\frac{۱}{۲}\times۲(۲\times۳-۱)+(-۲)\Rightarrow\Delta x_{(۳)}=۳m$$

B ۵۸۳ ۱

خط فکری اولاً شما باید توجه باشید که اندازهٔ شتاب دو متحرک یکی است اما چون جهـت تقعـر نمودار مکان زمان A رو به بالاسـت، شـتاب آن مثبت $(a_A=+a)$ و شـتاب متحـرک B کـه جهت تقعر نمـودارش رو به پایین اسـت منفی $(a_B=-a)$ اسـت. ثانیاً در $t=۲s$ مکان دو متحرک برابر $+۴m$ بوده و در این نقطه دو نمودار بر هم مماس هستند. یعنی شـیب خط مماس در این لحظه یکسـان بوده پس سرعت لحظه‌ای این دو متحرک با هم برابر است. اکنون سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ و مکان در این لحظه را برای دو متحرک برابر قرار دهید.

۱ سرعت دو متحرک در $t=۲s$ برابر است، از این‌رو:

$$v_A=v_B\xrightarrow[t=۲s]{v=at+v_۰}a\times۲+v_{۰A}=(-a)\times۲+v_{۰B}\Rightarrow v_{۰B}-v_{۰A}=۴a\ (I)$$

۲ مکان دو متحرک در $t=۲s$ را برابر قرار می‌دهیم.

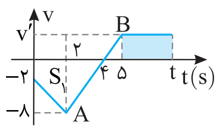
$$x_A=x_B\xrightarrow[t=۲s]{x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰}\frac{۱}{۲}a\times۴+۲v_{۰A}+۸=\frac{۱}{۲}(-a)۴+۲v_{۰B}$$

$$\Rightarrow ۴a+۲(v_{۰A}-v_{۰B})+۸=۰\qquad(II)$$

۳ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جایگذاری می‌کنیم.

$$۴a-۲(۴a)+۸=۰\Rightarrow -۴a=-۸\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

B ۵۸۴ ۳



خط فکری متحرک از مکان $-۵m$ با سرعت $-۲m/s$ عبور کرده است، یعنی اولین بار که فاصلهٔ آن از مبدأ ۵ متر است لحظهٔ $t=۰$ است. متحرک ابتدا در جهت منفی محور حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t=۴s$ با توجه به نمودار سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد. باید بررسی کنیم در چه لحظه‌ای مجدداً از مکان $-۵m$ می‌گذرد و در چه لحظه‌ای به مکان $+۵m$ می‌رسد.

۱ مساحت سطح زیر نمودار را در بازهٔ ۰ تا ۴s حساب می‌کنیم. یعنی جابه‌جایی متحرک را در این بازه مشخص می‌کنیم.

$$\Delta x_۱=S_۱=\frac{-۲+(-۸)}{۲}\times ۲+\frac{(-۸)\times ۲}{۲}=-۱۰+(-۸)=-۱۸m$$

۲ مکان متحرک در $t=۴s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_۱-x_۰\Rightarrow -۱۸=x_۱-(-۵)\Rightarrow x_۱=-۲۳m$$

۳ اگر متحرک به مکان $x=+۵m$ برسد، برای سومین بار فاصلهٔ متحرک از مبدأ ۵ متر می‌شود. بنابراین متحرک باید از مکان $-۲۳m$ به مکان $+۵m$ برود. یعنی جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۴ تا t ثانیه باید $+۲۸m$ باشد.

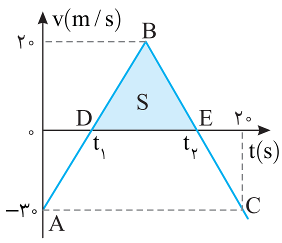
۴ به کمک شیب خط AB سرعت در لحظهٔ $t=۵s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۰-(-۸)}{۴-۲}=\frac{v'-۰}{۵-۴}\Rightarrow v'=۴m/s$$

۵ اکنون سطح زیر نمودار از $t=۴s$ تا لحظهٔ t حساب کرده و برابر $+۲۸m$ قرار داده و t را به‌دست آورید.

$$\Delta x=S\Rightarrow (t-۴+t-۵)\times\frac{۴}{۲}=۲۸\Rightarrow ۴t-۱۸=۲۸\Rightarrow ۴t=۴۶\Rightarrow t=۱۱/۵s$$

B ۵۸۵ ۳



خط فکری مسئلهٔ مسافت طی شده در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ را از شما خواسته است. یعنی باید سطح S را به‌دست بیاورید. ارتفاع مثلث معلوم و برابر ۲۰ واحد است، اما قاعدهٔ آن یعنی $t_۲-t_۱$ را باید حساب کنید. چگونه؟ با تشابه مثلث‌های ABC و DBE. پس حل را شروع کنید.

با توجه به شکل و تشابه دو مثلث رنگی بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ را به دست می‌آوریم.

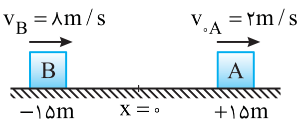
$$\frac{۲۰}{t_۲-t_۱}=\frac{۳۰+۲۰}{۲۰}\Rightarrow t_۲-t_۱=\frac{۴۰۰}{۵۰}=۸s$$

مسافت طی شده در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ برابر مساحت زیر نمودار در این بازه است و آن را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۲۰\times ۸}{۲}=۸۰m$$

B ۵۸۶ ۳

خط فکری متحرک A از مکان $+۱۵m$ و متحرک B از مکان $-۱۵m$ در جهت مثبت محور در حرکت هستند. یعنی در $t=۰$ فاصلهٔ آن‌ها از هم ۳۰ متر است. سرعت متحرک B ثابت و برابر $۸m/s$ و سرعت متحرک A، $v_{۰A}=۲m/s$ است. بنابراین متحرک B در حال نزدیک شدن به متحرک A است. اما تا کی؟ تا لحظه‌ای که سرعت B از سرعت A بیشتر است و لحظه‌ای که سرعت A از $۸m/s$ بیشتر می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم افزایش می‌یابد. لحظه‌ای را که متحرک A سرعتش به $۸m/s$ می‌رسد طبق نمودار $t=۳s$ است، در این لحظه مکان دو متحرک A و B را حساب کرده فاصلهٔ دو متحرک را به‌دست آورید.



۱ شتاب متحرک A برابر است با:

$$a_A=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a_A=\frac{۸-۲}{۳}=۲m/s^۲$$

۲ معادلهٔ حرکت B را نوشته و مکان آن را در $t=۳s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=vt+x_۰\Rightarrow x_B=۸t-۱۵\xrightarrow{t=۳s}x_B=۲۴-۱۵\Rightarrow x_B=۹m$$

۳ معادلهٔ حرکت A را نوشته و مکان آن را در $t=۳s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

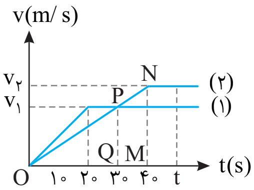
$$\Rightarrow x_A=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲+۲t+۱۵\xrightarrow{t=۳s}x_A=۹+۶+۱۵=۳۰m$$

۴ کمترین فاصلهٔ دو متحرک خواهد شد.

$$x_A-x_B=۳۰-۹=۲۱m$$

B ۵۸۷ ۴

خط فکری دو متحرک از مبدأ شروع به حرکت کرده‌اند. متحرک (۱) جلو می‌افتد. چرا؟ چون زودتر سرعتش افزایش می‌یابد و در لحظهٔ $t=۲۰s$ سرعتش ثابت و برابر $v_۱$ می‌شود. متحرک (۲) شتاب کمتری دارد اما در لحظهٔ $t=۳۰s$ سرعتش از $v_۱$ بیشتر می‌شود. بنابراین می‌تواند عقب‌افتادگی خود را جبران کند. وقتی متحرک (۲) به متحرک (۱) می‌رسد که جابه‌جایی دو متحرک یکسان بوده و از این‌رو تا لحظهٔ t که دو متحرک به هم می‌رسند باید سطح زیر نمودار دو متحرک برابر باشد. سطح زیر نمودارها را برابر قرار دهید. البته باید ابتدا یک رابطهٔ ریاضی بین $v_۱$ و $v_۲$ پیدا کنید. مقدار $۶۰۰m$ در حل مسئله نقشی ندارد.



با توجه به تشابه مثلث‌های OPQ و ONM می‌توان نوشت:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۴۰}{۳۰}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۴}{۳}$$

در لحظهٔ t که دو متحرک به هم می‌رسند، باید سطح زیر نمودارها برابر شود.

$$S_۱=S_۲\Rightarrow\frac{t+t-۲۰}{۲}v_۱=\frac{t+t-۴۰}{۲}v_۲$$

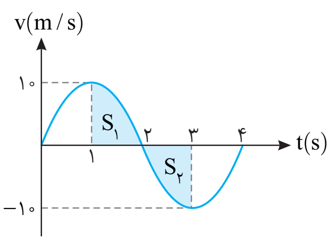
$$\Rightarrow(۲t-۲۰)v_۱=(۲t-۴۰)\times\frac{۴}{۳}v_۱\Rightarrow ۲t-۲۰=\frac{۴}{۳}(۲t-۴۰)\Rightarrow t=۵۰s$$

B ۵۸۸ ۲

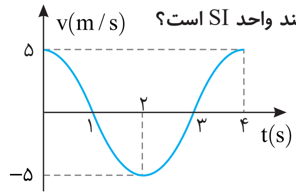
۱ به نمودار نگاه کنید. در لحظهٔ $t_۱=۱s$، سرعت متحرک $v_۱=۱۰m/s$ و در لحظهٔ $t_۲=۳s$ سرعت متحرک $v_۲=-۱۰m/s$ است. از این‌رو شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{-۱۰-۱۰}{۳-۱}\Rightarrow a_{av}=-۱۰m/s^۲$$

۲ برای به‌دست آوردن سرعت متوسط باید جابه‌جایی در بازهٔ ۱s تا ۳s را حساب کرد. البته برای جابه‌جایی باید به سراغ سطح زیر نمودار $v-t$ برویم. دوباره به نمودار نگاه کنید، مساحت سطح زیر نمودار در بازهٔ ۱s تا ۳s مجموع $S_۱$ و $S_۲$ است که $S_۱$ و $S_۲$ هم‌اندازه و قرینه هم بوده. بنابراین مجموع آن‌ها یعنی جابه‌جایی متحرک صفر است $(\Delta x=۰)$ بنابراین سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ صفر است.



بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط و سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۲ تا ۴ ثانیه به‌ترتیب از راست به چپ چند واحد SI است؟



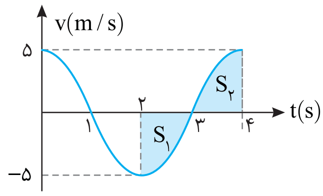
۱) صفر، صفر
۲) ‎+۵، صفر
۳) صفر، ‎−۵
۴) ۵، ‎−۵

پاسخ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{5-(-5)}{4-2}\Rightarrow a_{av}=5m/s$$

سطح زیر نمودار سرعت - زمان در بازهٔ ۲s تا ۴s برابر مجموع S_1 و S_2 است.

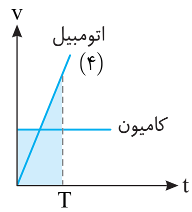
$$\Delta x=S=S_1+S_2\xrightarrow{S_1=-S_2}\Delta x=0\Rightarrow v_{av}=0$$



گزینهٔ ۲

B ۵۸۹ ۴

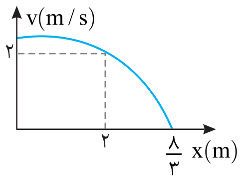
برای آن‌که اتومبیل بتواند به کامیون برسد باید سرعتش از کامیون بیشتر شود. در مدت T در نمودار (۱) و (۲) سرعت اتومبیل از کامیون کمتر است. بنابراین اتومبیل و کامیون به هم نمی‌رسد و این نمودارها نادرست هستند.



از طرفی باید جابه‌جایی اتومبیل و کامیون یکسان شود تا اتومبیل به کامیون برسد. یعنی مساحت سطح زیر نمودار دو متحرک باید یکی شود، سطح زیر نمودار (۳) از سطح زیر نمودار کامیون کمتر است. بنابراین این نمودار نیز درست نیست و مطابق شکل نمودار (۴) جواب مسئله است.

B ۵۹۰ ۳

نمودار داده شده، نمودار سرعت مکان است. آن را با نمودار سرعت زمان اشتباه نگیرید.



۱ در مکان $x_1=2m$ سرعت متحرک $v_1=2m/s$ و در مکان $x_2=\frac{8}{3}m$ سرعت متحرک صفر $(v_2=0)$ است.

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow 0-4=2(a)(\frac{8}{3}-2)\Rightarrow$$

$$-2=a(\frac{2}{3})\Rightarrow a=-3m/s^2$$

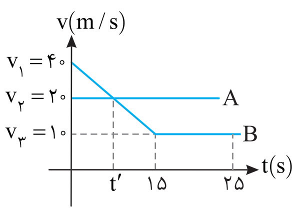
۲ مجدداً معادلهٔ مستقل از زمان را نوشته و سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v_1^2-v_0^2=2a(x_1-x_0)\xrightarrow{x_0=0}2^2-v_0^2=2(-3)(2-0)$$

$$4-v_0^2=-12\Rightarrow v_0^2=16\Rightarrow v_0=4m/s$$

B ۵۹۱ ۲

خط فکری سرعت متحرک A ثابت و برابر ۲۰m/s است و سرعت اولیهٔ متحرک B برابر ۴۰m/s است. بنابراین B از A جلو می‌افتد و تا لحظه‌ای که سرعت B از ۲۰m/s بیشتر است، متحرک B در حال دور شدن از A می‌باشد و پس از این لحظه سرعت متحرک A از سرعت متحرک B بیشتر می‌شود و شروع به کم کردن فاصلهٔ خود از متحرک B می‌کند و ممکن است از متحرک B سبقت بگیرد.

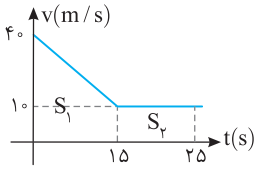


۱ لحظه‌ای که سرعت متحرک B، ۲۰m/s می‌شود را حساب می‌کنیم. از t=0 تا t=15s شیب خط حرکت ثابت می‌ماند:

$$\overbrace{\frac{v_1-v_3}{15s}}^{\text{شیب خط در بازهٔ ۰ تا ۱۵ثانیه}}=\overbrace{\frac{v_1-v_2}{t'}}^{\text{شیب خط در بازهٔ ۰ تا } t'}\Rightarrow\frac{40-10}{15-0}=\frac{40-20}{t'-0}\Rightarrow t'=10s$$

۲ سرعت متحرک A ثابت بوده و جابه‌جایی آن برابر $\Delta x_A=v_At$ است و در این مدت متحرک A به اندازهٔ $\Delta x_A=v_At=200m$ و متحرک B به اندازهٔ $\Delta x_B=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t=\frac{40+20}{2}\times10=300m$ جابه‌جا شده‌اند. بنابراین در این مدت متحرک B، ۱۰۰m جلو می‌افتد.

۳ از t=10s متحرک A به B نزدیک می‌شود و ممکن است از آن جلو بیفتد. اکنون جابه‌جایی دو متحرک از t=0 تا 25s را حساب می‌کنیم:



$$\Delta x_A=20\times25=500m$$

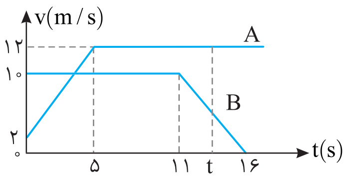
$$\Delta x_B=\underbrace{\frac{40+10}{2}\times15}_{S_1}+\underbrace{10\times10}_{S_2}=475m$$

$$\Rightarrow500-475=25m$$

۴ یعنی در انتهای زمان، A تنها ۲۵ متر بیشتر از B جابه‌جا شده و در t=25s فاصلهٔ دو متحرک از هم ۲۵ متر است پس بیشترین فاصلهٔ آن‌ها در همان t=10s رخ داده که متحرک B، ۱۰۰m جلوتر از متحرک A است.

B ۵۹۲ ۳

خط فکری این مسئله با روش‌هایی که می‌شناسیم و به آن‌ها عادت کردیم حل نمی‌شود. شما باید مرحله به مرحله جابه‌جایی دو متحرک (یعنی سطح زیر نمودار دو متحرک) را با هم مقایسه کنید تا مشخص شود دو متحرک در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند.



۱ ابتدا بررسی می‌کنیم که در لحظه‌های کلیدی مانند t=5s و t=11s دو متحرک در کنار یکدیگر هستند یا خیر؟ سطح زیر نمودار سرعت-زمان برابر با جابه‌جایی است و هر دو متحرک از مکان x=0 به حرکت درآمده‌اند. بنابراین سطح زیر نمودار در این حالت بیانگر مکان هر متحرک نیز هست.

$$t=5s\Rightarrow x_A=\frac{2+12}{2}\times5=35m\ ,\ x_B=10\times5=50m$$

۲ با توجه به عددهای به دست آمده متحرک B، در لحظهٔ t=5s، ۱۵ متر جلوتر از متحرک A است.

۳ مکان دو متحرک در t=11s را حساب می‌کنیم.

$$t=11s\Rightarrow x_A=\frac{2+12}{2}\times5+12\times(11-5)=107m\ ,\ x_B=10\times11=110m$$

۴ در لحظهٔ t=11s همچنان متحرک B، ۳ متر از متحرک A جلوتر است و با توجه به سرعت متحرک A در این لحظه $(v_A=12m/s)$ متحرک A پس از زمان t=11s می‌تواند به متحرک B برسد.

۵ معادلهٔ حرکت دو متحرک را پس از t=11s به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=12(t-11)+107$$

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_0t+x_0=\frac{1}{2}(\frac{0-10}{16-11})(t-11)^2+10(t-11)+110$$

۶ معادله‌های مکان A و B را برابر قرار می‌دهیم:

$$12(t-11)+107=-(t-11)^2+10(t-11)+110\Rightarrow(t-11)^2+2(t-11)-3=0$$

$$\Rightarrow[(t-11)+3][(t-11)-1]=0\Rightarrow(t-9)(t-12)=0\Rightarrow\begin{cases}t=9s & \text{غ ق ق}\\ t=12s & \text{جواب}\end{cases}$$

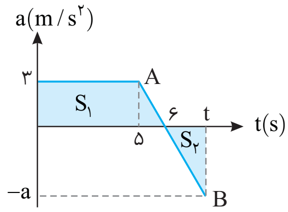
B ۵۹۳ | ۳

هر دو متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند، بنابراین حرکت هر دو تندشونده بوده و متحرک A که دارای شتاب مثبت است در جهت مثبت محور شروع به حرکت کرده و متحرک B که دارای شتاب منفی است، در جهت منفی محور شروع به حرکت کرده است.

نکته هرگاه متحرکی از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کند، جهت حرکت آن در جهت شتاب بوده و تا لحظه‌ای که شتاب تغییر جهت بدهد، متحرک دارای حرکت تندشونده است.

B ۵۹۴ | ۲

سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است. متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده، پس سرعت اولیه $v_\circ = \circ$ است. لحظه‌ای که مجدداً متحرک متوقف می‌شود را با حرف t نمایش می‌دهیم.



۱ شتاب حرکت در لحظهٔ t را به کمک شیب خط AB به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\circ-۳}{۶-۵}=\frac{-a-\circ}{t-۶}\Rightarrow a=۳(t-۶) \qquad (I)$$

۲ برای آن‌که سرعت متحرک مجدداً صفر شود، باید تغییرات سرعت در بازهٔ صفر تا t صفر شود. یعنی در این بازه باید سطح زیر نمودار شتاب - زمان صفر شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$\Delta v=\circ\Rightarrow S_1+S_2=\circ\Rightarrow\frac{۵+۶}{۲}\times۳=\frac{a\times(t-۶)}{۲}\Rightarrow a(t-۶)=۳۳ \qquad (II)$$

۳ شتاب را از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) قرار می‌دهیم.

$$۳(t-۶)(t-۶)=۳۳$$

$$\Rightarrow(t-۶)(t-۶)=۱۱\Rightarrow(t-۶)^۲=۱۱\Rightarrow t-۶=\sqrt{۱۱}\Rightarrow t=۶+\sqrt{۱۱}\,s$$

B ۵۹۵ | ۱

در ابتدا با توجه به فرض پرسش، سرعت منفی و برابر $v_\circ=-۸m/s$ است، از طرفی سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.

بنابراین به کمک سطح زیر نمودار اندازهٔ سرعت در لحظه‌های $t=۲s$، $t=۴s$ و $t=۵s$ را به‌دست می‌آوریم و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\circ\to۲s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{۲+۱}{۲}\times۲=۳m/s\xrightarrow{\Delta v=v-v_\circ}۳=v-(-۸)$$

$$\Rightarrow v=-۵m/s$$

$$۲s\to۴s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{۲+۱}{۲}\times۲=۳m/s\xrightarrow{\Delta v=v'-v}۳=v'-(-۵)$$

$$\Rightarrow v'=-۲m/s$$

$$۴s\to۵s\Rightarrow\Delta v=S=(-۲\times۱)\times\frac{۱}{۲}=-۱m/s\xrightarrow{\Delta v=v''-v'}-۱=v''-(-۲)$$

$$\Rightarrow v''=-۳m/s$$

بنابراین اندازهٔ سرعت اولیه از بقیهٔ لحظه‌های بیان شده بیشتر است.

B ۵۹۶ | ۱

متحرک از حال سکون با شتاب مثبت شروع به حرکت کرده، پس ابتدا در جهت مثبت محور در حال حرکت بوده است. در مدت ۲ ثانیهٔ اول بر سرعتش افزوده می‌شود زیرا در این مدت شتاب و سرعت هر دو مثبت بوده و حرکت تندشونده است. سپس در بازهٔ ۲ تا ۴ ثانیه شتاب منفی، اما سرعت همچنان مثبت بوده و حرکت در جهت مثبت محور کندشونده است تا لحظهٔ $t=۴s$ که متحرک متوقف می‌شود.

برای درک بهتر موضوع سرعت‌ها را در لحظهٔ ۱s، ۲s، ۳s و ۴s به‌دست می‌آوریم.

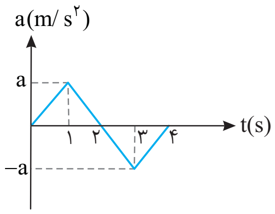
$$t=\circ\Rightarrow v_\circ=\circ$$

$$t=۱s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{a\times۱}{۲}\xrightarrow{\Delta v=v-v_\circ}v_1=\frac{a}{۲}$$

$$t=۲s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{a\times۱}{۲}=\frac{a}{۲}\xrightarrow{v_2-v_1=\frac{a}{۲}}v_2=a$$

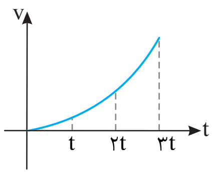
$$t=۳s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{-a\times۱}{۲}=-\frac{a}{۲}\xrightarrow{v_3-v_2=-\frac{a}{۲}}v_3=\frac{a}{۲}$$

$$t=۴s\Rightarrow\Delta v=\frac{-a\times۱}{۲}=S=-\frac{a}{۲}\xrightarrow{v_4-v_3=-\frac{a}{۲}}v_4=\circ$$

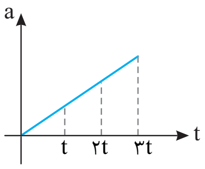


کاملاً مشخص است که در هر لحظه در بازهٔ صفر تا ۴s سرعت مثبت است. یعنی در تمام این مدت متحرک در جهت مثبت محور در حال حرکت بوده بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

B ۵۹۷ | ۳



اندازهٔ شتاب مثبت و در حال افزایش است، پس شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ باید مثبت و در حال افزایش باشد. همچنین متحرک از حال سکون $(v_\circ=\circ)$ شروع به حرکت می‌کند بنابراین نمودار سرعت - زمان آن به شکل روبه‌رو است. با توجه به نمودار، سرعت در تمام لحظات ۲t تا ۳t، از سرعت در تمام لحظات دو بازهٔ دیگر بیشتر است و سرعت متوسط از ۲t تا ۳t از بقیه بازه‌ها بزرگ‌تر است.



بازی با سؤال نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط در کدام بازهٔ زمانی از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) صفر تا t
۲) t تا ۲t
۳) ۲t تا ۳t
۴) اظهار نظر قطعی ممکن نیست.

پاسخ متحرک از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کرده بنابراین حرکت آن تندشونده است. در تمام مدت شتاب در حال افزایش است و علامت آن مثبت است. بنابراین سرعت متحرک در حال افزایش است.

در حرکت تندشونده هرچه زمان می‌گذرد، سرعت بیشتر شده و در بازه‌های زمانی یکسان متحرک جابه‌جایی‌های بزرگتری را طی می‌کند و از این‌رو در بازه ۲t تا ۳t چون جابه‌جایی بیشتر است، سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ بزرگتر است.

$\circ$ — t — t — t — ۲t — t — ۳t

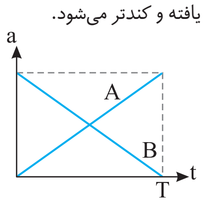
Δx_1 $\qquad \Delta x_2$ $\qquad \Delta x_3$

$$v_{av_1}=\frac{\Delta x_1}{t} \qquad v_{av_2}=\frac{\Delta x_2}{t} \qquad v_{av_3}=\frac{\Delta x_3}{t}$$

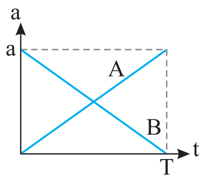
گزینهٔ ۳

B ۵۹۸ ۳

۱ دو متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده‌اند و در مدت صفر تا T شتاب آن‌ها تغییر علامت نداده. بنابراین تغییرات سرعت برای هر دو متحرک مثبت است و چون $v_0=0$ بوده پس تندی در حال افزایش بوده و حرکت آن‌ها در کل مدت T، تندشونده است. البته چون در هر لحظه شتاب A در حال افزایش و شتاب B در حال کاهش است، چنانچه نمودار سرعت زمان این دو متحرک را رسم کنیم در هر لحظه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ که معرف شتاب متحرک است برای متحرک A رفته‌رفته افزایش می‌یابد اما برای متحرک B رفته‌رفته شیب کاهش یافته و کندتر می‌شود.



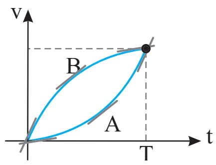
۲ سطح زیر نمودار شتاب زمان برابر تغییرات سرعت متحرک است. در این‌جا هر دو متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند و تغییرات سرعت برابر سرعت نهایی متحرک است و گزینهٔ (۴) نادرست است.



۳ سطح زیر نمودار A و سطح زیر نمودار B برابر است. از این‌رو:

$$\Delta v=S\Rightarrow S_A=\frac{aT}{2}$$

$$S_B=\frac{aT}{2}\Rightarrow \Delta v_A=\Delta v_B=v_A=v_B$$



۴ اگر نمودار سرعت زمان A را رسم کنیم چون شتاب A در حال افزایش است، باید نمودار به‌گونه‌ای باشد که شیب خط مماس بر آن در حال افزایش باشد. اما در مورد نمودار سرعت زمان B برعکس است. بنابراین نمودار سرعت زمان این دو متحرک باید شبیه شکل روبرو باشد.

۵ سطح زیر نمودار سرعت زمان برابر جابه‌جایی متحرک است و سطح زیر نمودار B از سطح زیر نمودار A بزرگتر است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۶ جابه‌جایی متحرک B از جابه‌جایی متحرک A در مدت T بیشتر است. بنابراین سرعت متوسط B از سرعت متوسط A بزرگتر بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

پنجره ۴ روبه‌روی ۵

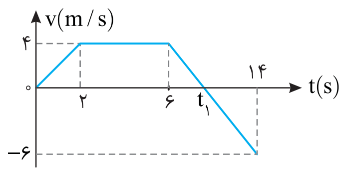
B ۵۹۸ ۲

۱ خط فکری جهت حرکت همان جهت سرعت است. بنابراین وقتی که متحرک در خلاف جهت محور در حرکت است یعنی سرعت منفی است، بنابراین از لحظهٔ t_1 تا ۱۴s متحرک در خلاف جهت محور در حرکت بوده است. باید t_1 را به‌دست بیاوریم.

به کمک شیب خط AB، t_1 را حساب می‌کنیم.

$$\frac{-6-4}{14-6}=\frac{-6-0}{14-t_1}\Rightarrow\frac{-5}{4}=\frac{-6}{14-t_1}\Rightarrow -70+5t_1=-24$$

$$\Rightarrow 5t_1=46\Rightarrow t_1=9/2s$$

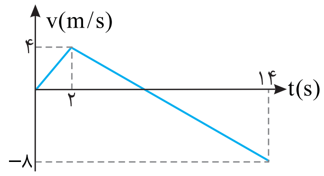


بنابراین متحرک به مدت $14-9/2=4/8s$ در خلاف جهت محور در حال حرکت بوده است.

نمای ۴۰

بازی با سؤال متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت - زمان آن مطابق شکل زیر است. متحرک در ۱۴ ثانیه اول، چند ثانیه در سوی مخالف محور x حرکت کرده است؟

ریاضی - ۸۹



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۲

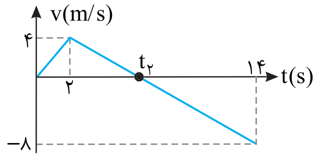
پاسخ در بازهٔ زمانی که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x در حرکت بوده است. ابتدا در بازهٔ $t=2s$ تا $t=14s$ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{-8-4}{14-2}=-1m/s^2$$

اکنون لحظهٔ صفر شدن سرعت را حساب می‌کنیم:

$$v_2=a(t_2-t_1)+v_0$$

$$\Rightarrow 0=-1(t_2-2)+4\Rightarrow t_2=6s$$



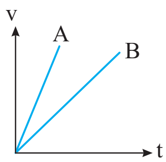
بنابراین در بازهٔ بین 6s تا 14s یعنی به مدت 8s، متحرک در خلاف جهت محور x در حرکت است.

مسئله را می‌توانید به کمک شیب خط نیز حل کنید.

گزینهٔ ۳

A ۵۹۸ ۳

۲ به نمودار $v-t$ دقت کنید. هر دو متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند، بنابراین در لحظهٔ $t=0$ باید هر دو نمودار $x-t$ متحرک A و B بر محور زمان مماس باشند، بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست هستند.

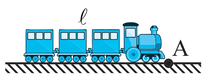


سرعت متحرک A در هر لحظه از سرعت متحرک B بیشتر است، بنابراین در هر لحظه A از B جلوتر است $(x_A>x_B)$. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

نمای ۴۳

A ۵۹۸ ۱

۳ مسئلهٔ ساده‌ای است. قطار در مدت 10s به اندازهٔ ℓ با شتاب $1m/s^2$ و سرعت اولیهٔ 20m/s جابه‌جا شده است بنابراین از معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت L را حساب می‌کنیم.



$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \ell=\frac{1}{2}\times1\times10^2+20\times10\Rightarrow \ell=250m$$

نمای ۲۲

C ۵۹۸ ۳

۴ خط فکری حرکت دارای شتاب ثابت است و در ثانیهٔ سوم حرکت یعنی در بازهٔ $t=2s$ تا $t=3s$ جابه‌جایی متحرک صفر است. در این بازه سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده است. به دلیل تقارن حرکت با شتاب ثابت در دو طرف لحظهٔ تغییر جهت، باید لحظهٔ تغییر جهت $t=2/5s$ باشد و در مدت 2/5s سرعت متحرک از 10m/s به صفر رسیده است. با این دانسته‌ها اکنون شما می‌توانید برای یافتن مسافت طی شده در 5s، ابتدا جابه‌جایی در بازهٔ ۰ تا 2/5s را حساب کرده سپس آن را دو برابر کنید.

جابه‌جایی متحرک در بازهٔ صفر تا 2/5s را از معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم.

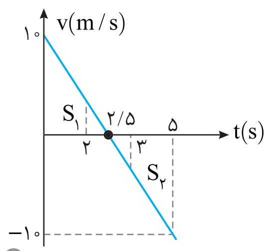
$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{0+10}{2}\times2/5=12/5m$$

مسافت طی شده در مدت صفر تا 5s خواهد شد: $\ell=12/5+12/5=25m$

روش حل به کمک نمودار $v-t$:

$$\ell=|S_1|+|S_2|$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{10\times2/5}{2}+\left|\frac{-10\times2/5}{2}\right|=25m$$



نمای ۳۲

B ۵۹۸ ۴

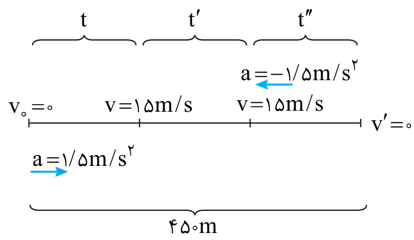
۵ [۱] ابتدا باید سرعت خودرو به $15m/s$ برسد. بنابراین زمان و جابه‌جایی متحرک را تا رسیدن به سرعت $15m/s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow 15=1.5t\Rightarrow t=10s\ ,\ \Delta x=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times1.5\times100=75m$$

[۲] سپس با سرعت $15m/s$ با حرکت یکنواخت پیش می‌رود و سرانجام با شتاب $-1.5m/s^2$ می‌ایستد، مدت زمان حرکت کندشونده و جابه‌جایی در این مدت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-1.5t''+15\Rightarrow t''=10s$$

$$\Delta x''=\frac{1}{2}a(t'')^2+vt''\Rightarrow \Delta x''=75m$$



[۳] در قسمت تندشونده و کندشونده جمعاً $75+75=150m$ جابه‌جایی صورت گرفته است. در حالی که تمام مسیر 450 متر است. پس این متحرک 300 متر را با سرعت $15m/s$ پیموده است. حال زمان حرکت با سرعت ثابت را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x'=vt'\Rightarrow 300=15t'\Rightarrow t'=20s$$

[۴] حداقل زمان حرکت $t_{کل}=10+20+10=40s$ است. نمای ۳۳

بازی با سؤال **قطاری از یک ایستگاه روی مسیر مستقیمی به سوی ایستگاه دیگری در فاصلهٔ $3km$ از حال سکون به راه می‌افتد. ابتدا در $\frac{2}{3}t$ با شتاب ثابت $3m/s^2$ بر سرعت خود می‌افزاید و سپس t ثانیه با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و در نهایت با شتاب ثابت $2m/s^2$ ترمز می‌کند و در ایستگاه مقصد متوقف می‌شود. t به کدام گزینه بر حسب ثانیه نزدیک‌تر است؟**

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۱۸ ۴) ۳۲

پاسخ **با توجه به شکل زیر، برای هر قسمت سرعت در انتهای هر قست و جابه‌جایی در آن قسمت را بر حسب پارامتر t حساب می‌کنیم.**

قسمت اول: $v=at+v_0\Rightarrow v=3\times\frac{2}{3}t\Rightarrow v=2t$

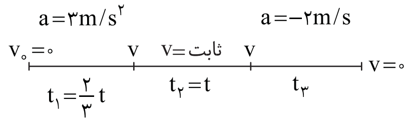
$$\Delta x_1=\frac{v+v_0}{2}t_1\Rightarrow\Delta x_1=\frac{2t+0}{2}\times\frac{2t}{3}\Rightarrow\Delta x_1=\frac{2t^2}{3}$$

قسمت دوم: $\Delta x_2=vt_2\Rightarrow\Delta x_2=2t(t)=2t^2$

قسمت سوم: $v=at+v_0\Rightarrow 0=-2t_3+v$

$$\Rightarrow t_3=\frac{v}{2}\xrightarrow{(1)}t_3=\frac{2t}{2}=t$$

$$\Delta x_3=\frac{v+v_0}{2}t_3\Rightarrow\Delta x_3=\frac{0+v}{2}t\Rightarrow\Delta x_3=\frac{0+2t}{2}t=t^2$$



با توجه به صورت سؤال فاصلهٔ دو ایستگاه از هم ۳ کیلومتر است، از این‌رو باید جمع جابه‌جایی‌ها برابر $3000m$ شود.

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=3000m$$

$$\frac{2t^2}{3}+2t^2+t^2=3000\Rightarrow\frac{2t^2+6t^2+3t^2}{3}=3000\Rightarrow t^2=\frac{9000}{11}\Rightarrow t\approx28s$$

گزینهٔ ۲

B ۵۹۸ ۲

۶ **نکته** در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی T دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.

در دنبالهٔ حسابی، جملهٔ وسط میانگین دو جملهٔ دیگر است. از چهار گزینه، گزینه‌های (۳) و (۴)، دنبالهٔ حسابی نبوده و نادرست هستند. اما بین گزینه‌های (۱) و (۲) کدام را باید انتخاب کرد؟ با توجه به صورت مسئلهٔ حرکت تندشونده است. در این صورت با گذشت زمان متحرک جابه‌جایی بزرگتری طی می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۲) ($10m$، $30m$ و $50m$) درست است. نمای ۳۷

بازی با سؤال **خودرویی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند. این خودرو در ثانیهٔ پنجم حرکت خود $56m$ و در ثانیهٔ ششم حرکت خود $59m$ را می‌پیماید. در این صورت شتاب و سرعت اولیهٔ خودرو به ترتیب از راست به چپ چند واحد SI می‌باشند؟**

۱) ۳، ۴۲/۵ ۲) ۶، ۲۹ ۳) −۳، ۴۲/۵ ۴) ۶، −۲۹

پاسخ **در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:**

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\begin{cases}t=5s\Rightarrow 56=\frac{1}{2}a(9)+v_0\\ t=6s\Rightarrow 59=\frac{1}{2}a(11)+v_0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}59-56=\frac{1}{2}a(11-9)\Rightarrow a=3m/s^2$$

اکنون با قرار دادن شتاب در یکی از معادله‌ها، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$56=\frac{1}{2}\times3\times9+v_0\Rightarrow v_0=42.5m/s$$

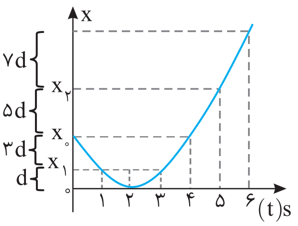
روش دیگر: در حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی به اندازهٔ شتاب باهم فرق دارند، یعنی اگر در ثانیهٔ t و t+1 جابه‌جایی‌ها را از هم کم کنیم شتاب به‌دست می‌آید. از این‌رو کافی است جابه‌جایی در ثانیهٔ پنجم و ششم را از هم کم کرده و شتاب را به‌دست آورد:

$$a=59-56=3m/s^2$$

گزینهٔ ۱

B ۵۹۸ ۴

۷ **خط فکری** هرگاه نمودار مکان – زمان سهمی باشد یعنی حرکت دارای شتاب ثابت است. در حرکت با شتاب ثابت اگر در لحظهٔ t سرعت صفر شود و جابه‌جایی در مدت 1s پس از t را با حرف d نمایش دهیم خواهیم داشت:



شما باید در بازه‌هایی که مسئله بیان می‌کند، مسافت‌ها را حساب کنید.

گزینهٔ (۱): مسافت طی شده در 3s اول یعنی از صفر تا 3s برابر است با: $L=3d+d+d=5d$

مسافت طی شده در 3s دوم یعنی از 3s تا 6s برابر است با: $L'=3d+5d+7d=15d$

بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

نکته هر گاه متحرک در یک بازهٔ زمان سرعتش صفر شده و تغییر جهت دهد همواره مسافت طی شده از جابه‌جایی بزرگ‌تر است.

گزینهٔ (۲): در بازهٔ صفر تا 3s سرعت در لحظهٔ $t=2s$ صفر می‌شود یعنی متحرک می‌ایستد و برمی‌گردد، بنابراین مسافت طی‌شده در 3s اول از جابه‌جایی متحرک در 3s اول بیشتر است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳): $t=2s$ رأس سهمی است و نمودار نسبت به محور گذرنده از $t=2s$ دارای تقارن است یعنی اگر متحرک در $t=0$ در مکان x_0 باشد در $t=4s$ نیز در مکان x_0 است و جابه‌جایی و سرعت متوسط در بازهٔ 0 تا 4s صفر است، در حالی که جابه‌جایی در بازهٔ $t=1s$ تا $t=5s$ برابر x_2-x_1 است و مخالف صفر است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

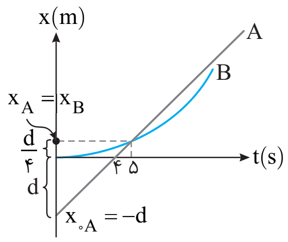
گزینهٔ (۴): به نموداری که رسم کرده‌ایم به دقت نگاه کنید جابه‌جایی متحرک در 3s اول یعنی در بازهٔ $t=0$ تا $t=3s$ برابر 3d است همچنین در بازهٔ $t=1s$ تا $t=4s$ جابه‌جایی 3d است بنابراین در هر دو حالت سرعت متوسط $v_{av}=\frac{3d}{3}$ خواهد شد و سرعت متوسط در این دو بازه با هم برابر است و گزینهٔ (۴) درست است. نمای ۲۹

C ۵۹۸ ۲

۸ **خط فکری** در حل این مسئله دقت کنید که ما پارامتری به نام d را معرفی می‌کنیم و به کمک آن مسئله را حل می‌کنیم. مکان اولیه متحرک A، $x_0=-d$ است و با توجه به شیب خط، مکان متحرک A در $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم و بقیه ماجرا را دنبال کنید.

۱ محل ملاقات A و B در لحظهٔ $t=5s$ را به کمک شیب نمودار A به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{d-0}{4-0}=\frac{x_A}{5-4}\Rightarrow x_A=\frac{d}{4}\Rightarrow x_B=\frac{d}{4}$$



۲ متحرک B در بازه صفر تا 5s با شتاب ثابت جابه‌جایی $\frac{d}{4}$ را طی کرده است، شتاب حرکت B را برحسب d به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\frac{d}{4}=\frac{1}{2}a_B\times5^2\Rightarrow a_B=\frac{d}{50}\qquad(I)$$

۳ متحرک A دارای سرعت ثابت است، مقدار آن را برحسب d حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta x=\frac{d}{4}}v=\frac{\frac{d}{4}}{5-4}\Rightarrow v_A=\frac{d}{4}$$

۴ معادلهٔ سرعت زمان B را می‌نویسیم: $v_B=a_Bt+v_0\xrightarrow{(I)}v_B=\frac{d}{50}t$

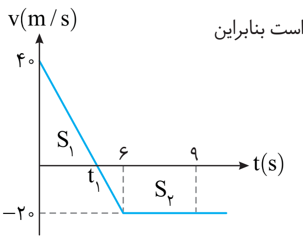
۵ اکنون لحظه‌ای که سرعت A و B برابر است را می‌توان حساب کرد.

$$v_A=v_B\Rightarrow\frac{d}{4}=\frac{d}{50}t\Rightarrow t=12/5s$$

نمای ۳۹

B ۵۹۸ ۳

۹ **خط فکری** وقتی به شما نمودار سرعت زمان متحرکی را می‌دهند و به شما می‌گویند متحرک در مدت t به مکان اولیهٔ خود باز می‌گردد یعنی سطح زیر نمودار $v-t$ در این مدت باید صفر شود. با توجه به این مطالب باید جمع S_1 و S_2 صفر شود.



۱ جابه‌جایی در مدت 9s صفر شده است بنابراین

$$S=\Delta x=0\Rightarrow S_1+S_2=0$$

$$\Rightarrow\frac{40t_1}{2}+(9-t_1+9-6)\times\frac{(-20)}{2}=0$$

$$20t_1+(12-t_1)(-10)=0$$

$$\Rightarrow20t_1-120+10t_1=0\Rightarrow t_1=4s$$

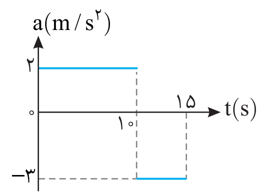
۲ اکنون با توجه به نمودار در بازهٔ صفر تا $t_1=4s$ تندی متحرک در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

نمای ۴۰

B ۵۹۸ ۳

۱۰ ۱ سرعت در لحظهٔ $t=3s$، $+1m/s$ است، بنابراین سرعت در لحظهٔ $t_1=7s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times(7-3)+1\Rightarrow v_1=9m/s$$



۲ سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را حساب می‌کنیم

$$v=at+v_0\Rightarrow v_2=2\times(10-3)+1\Rightarrow v_2=15m/s$$

۳ جابه‌جایی را در بازهٔ 7s تا 10s به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_1=\frac{v_1+v_2}{2}\times\Delta t_1=\frac{15+9}{2}\times(10-7)=36m$$

۴ سرعت متوسط برابر است با:

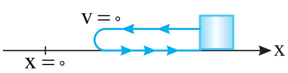
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{36}{10-7}\Rightarrow v_{av}=12m/s$$

نمای ۴۲

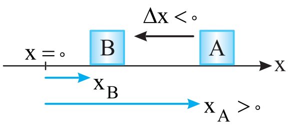
پنجره تو در تو

B ۵۹۹ ۴

۱ مطابق شکل روبه‌رو ممکن است متحرک در مکان‌های مثبت $(x>0)$ در حال حرکت باشد و در همان جا تغییر جهت دهد و علامت بردار مکان هم‌چنان مثبت باشد، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.



در شکل روبه‌رو متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته، جابه‌جایی منفی $(\Delta x<0)$ است اما بردار مکان در نقاط A و B هر دو مثبت است و گزینهٔ (۲) نادرست است. سرعت متوسط، برابر است با $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ بنابراین بردار سرعت متوسط همواره هم‌جهت با بردار جابه‌جایی است، در نتیجه گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.



نمای ۲

بازی با سؤال **با تغییر مبدأ مکان، چه تعداد از پارامترهای حرکتی زیر تغییر می‌کند؟**

«بردار جابه‌جایی - سرعت - شتاب متوسط - بردار مکان - مسافت طی‌شده»

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **نکته** **جابه‌جایی، سرعت، شتاب و مسافت طی شده به محل مبدأ مکان اختیاری بستگی ندارد و تنها بردار مکان تابعی از محل مبدأ مکان است.**

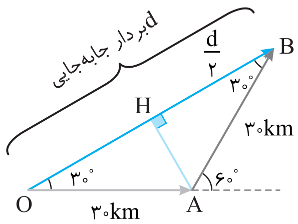
گزینهٔ ۱

B ۵۹۹ ۲

۲ **خط فکری** باید شکل مسیر حرکت را رسم کنیم. مطابق شکل متحرک از نقطهٔ O به نقطهٔ A و سپس به نقطهٔ B می‌رود. جابه‌جایی دوچرخه‌سوار برداری است که از O به B رسم می‌شود. بنابراین باید به کمک ریاضی طول بردار جابه‌جایی (d) را حساب کنیم.

با توجه به شکل روبه‌رو خط عمود AH را رسم می‌کنیم. در مثلث AHB می‌توان نوشت:

$$\cos30^\circ=\frac{HB}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{d}{2}}{30}\Rightarrow d=30\sqrt{3}m$$



نمای ۱

B | ۵۹۹ | ۳

۳ با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان سرعت در انتهای هر مرحله را به‌دست آورده و دربارهٔ نوع حرکت اظهار نظر می‌کنیم:

$$\bar{v}=\frac{v+v_۰}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{v+۰}{۲}\Rightarrow v=۸m/s$$

بنابراین در t ثانیهٔ اول، سرعت از صفر به $۸m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است.

در t ثانیهٔ دوم:
$$v_{av}=\frac{v'+v}{۲}\Rightarrow ۶=\frac{v'+۸}{۲}\Rightarrow v'=۴m/s$$

در این مرحله سرعت از $۸m/s$ به $۴m/s$ رسیده و حرکت کندشونده است.

در t ثانیهٔ سوم:
$$v_{av}=\frac{v''+v'}{۲}\Rightarrow ۶=\frac{v''+۴}{۲}\Rightarrow v''=۸m/s$$

در این مرحله سرعت از $۴m/s$ به $۸m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است.

$v_۰=۰$ — t — $v=۸m/s$ — t — $v'=۴m/s$ — t — $v''=۸m/s$

نمای ۲۵

A | ۵۹۹ | ۳

۴ **خط فکری** جهت حرکت همان جهت سرعت متحرک است، بنابراین مدت زمانی که متحرک در جهت منفی محور در حرکت است یعنی مدت زمانی که سرعت منفی است. بنابراین شما باید ریشه‌های معادلهٔ سرعت - زمان $v=t^۲-۲t-۳$ را به‌دست آورده، تابع را تعیین علامت کنید.

یادآوری ریاضی در تابع درجه دو $y=ax^۲+bx+c$، علامت تابع بین دو ریشه مخالف علامت a و بیرون دو ریشه موافق علامت a است.

ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

$$t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=-۱\,,t=۳s$$

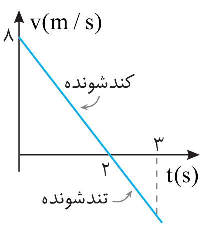
به کمک جدول روبه‌رو علامت سرعت را مشخص می‌کنیم. بنابراین در بازهٔ صفر تا $۳s$ سرعت منفی است. دقت کنید قسمت رنگی جدول به دلیل منفی بودن زمان $(t<۰)$ است.

t	$-\infty$	-۱	۰	۳	$+\infty$
v	+	۰	−	۰	+
	غ ق ق		$v<۰$	تغییر جهت	$v>۰$

نمای ۱۶

A | ۵۹۹ | ۱

۵ **راه‌حل اول:** با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، معادلهٔ سرعت - زمان و شتاب - زمان را به‌دست آورده، تعیین علامت می‌کنیم.



$$\begin{cases}x=-۲t^۲+۸t+۱۰\\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-۴m/s^۲,v_۰=۸m/s\Rightarrow v=at+v_۰$$

$$\Rightarrow v=-۴t+۸\xrightarrow{v=۰}t=۲s$$

سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا $۲s$ مثبت و در بازهٔ $۲s$ تا $۳s$ منفی است، بنابراین ابتدا حرکت کندشونده $(av<۰)$ و سپس حرکت تندشونده $(av>۰)$ است.

راه‌حل دوم: کافی است نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. مشخص است که در بازهٔ صفر تا $۲s$ سرعت کاهش یافته و صفر شده سپس از $۲s$ تا $۳s$ بزرگی سرعت افزایش می‌یابد و گزینهٔ (۱) درست است.

میانبر هر گاه در معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت روی خط راست ضریب $t^۲$ و ضریب t ناهمنام باشند، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

نمای ۲۴

بازی با سؤال معادلهٔ حرکت جسمی که روی خط راست در حرکت است در SI به صورت $x=۲t^۲-۳t-۸$ می‌باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) متحرک همواره در جهت مثبت محور در حرکت است.

۲) بردار مکان حتماً تغییر جهت می‌دهد.

۳) متحرک در ابتدا در حال حرکت به سمت مبدأ است.

۴) متحرک در مکان‌های مثبت تغییر جهت می‌دهد.

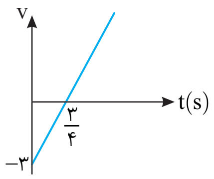
پاسخ معادلهٔ حرکت $x=۲t^۲-۳t-۸$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ مقایسه کرده و شتاب a و سرعت اولیه $v_۰$ را به‌دست آورده و معادله سرعت زمان را می‌نویسیم.

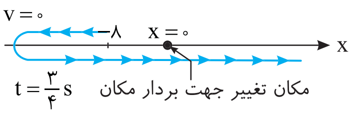
شتاب حرکت $a=+۴m/s^۲$ سرعت اولیه $-۳m/s$ و مکان اولیه $-۸m$ است.

معادلهٔ سرعت - زمان و لحظهٔ تغییر جهت حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v=۴t-۳=۰\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}s$$

بنابراین مطابق نمودار سرعت زمان رسم شده متحرک ابتدا در جهت منفی محور در حرکت است و در لحظهٔ $t=\frac{۳}{۴}s$ متوقف شده و در جهت مثبت محور حرکت می‌کند سپس از مبدأ می‌گذرد پس بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.





گزینهٔ ۲

B | ۵۹۹ | ۴

۶ **خط فکری** در حرکت با شتاب ثابت بهترین روش برای به‌دست آوردن مسافت طی شده از روی معادلهٔ حرکت این است که ابتدا معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست آورده سپس نمودار را رسم کرده و سرانجام در بازهٔ زمانی بیان شده مسافت را به کمک سطح زیر نمودار $v-t$ حساب کنید.

۱ معادلهٔ حرکت $x=-t^۲+۴t+۵$ را با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\,,\ x=-t^۲+۴t+۵$$

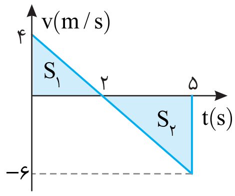
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}a=-۱\Rightarrow a=-۲m/s^۲,v_۰=۴m/s\quad,\quad x_۰=۵m$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۲t+۴$$

۳ نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم. البته باید بعضی از نقاط را مشخص کرد.

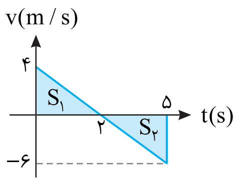
$$t=۰\Rightarrow v_۰=۴m/s\,,$$
$$v=۰\Rightarrow -۲t+۴=۰\Rightarrow t=۲s$$
$$t=۵s\Rightarrow v=-۲\times۵+۴\Rightarrow v=-۶m/s$$



۴ قدرمطلق سطح‌های محصور بین نمودار و محور زمان را جمع کنیم.

$$L=|S_۱|+|S_۲|$$

$$L=|\frac{۴\times۲}{۲}|+|\frac{-۶\times۳}{۲}|=۱۳m$$



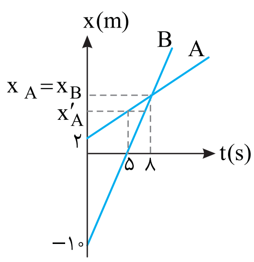
نمای ۳۲

B | ۵۹۹ | ۱

۷ **۱** به کمک شیب نمودار B مکان متحرک A و B را در لحظهٔ $t=۸s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x_B-(-۱۰)}{۸-۰}=\frac{۰-(-۱۰)}{۵-۰}$$

$$\Rightarrow\frac{x_B+۱۰}{۸}=۲\Rightarrow x_B=۶m$$



در این لحظه x_A نیز $x_A=x_B=۶$ است.

۲ لحظهٔ گذر B از مبدأ $t=۵s$ است. به کمک شیب نمودار A در این لحظه مکان متحرک A را که روی شکل با x'_A نشان داده‌ایم حساب می‌کنیم.

$$\frac{۶-۲}{۸-۰}=\frac{x'_A-۲}{۵-۰}\Rightarrow\frac{۴}{۸}=\frac{x'_A-۲}{۵}\Rightarrow ۲/۵=x'_A-۲\Rightarrow x'_A=۴/۵m$$

نمای ۱۴

A ۵۹۹ ۱

۸ متحرک از حال سکون ۴s با شتاب ثابت حرکت کرده و سرعتش در حال افزایش است یعنی در هر ثانیه جابه‌جایی آن از ثانیهٔ قبلی باید بیشتر باشد. از لحظهٔ $t=۴s$ تا لحظهٔ $t=۷s$ باید جابه‌جایی یکسان باشند زیرا سرعت ثابت است بعد از $t=۷s$، با شتاب ثابت قرینهٔ شتاب قسمت اول از سرعت خود می‌کاهد بنابراین در هر ثانیه جابه‌جایی آن کوچک‌تر از ثانیهٔ قبل است این مشخصات با گزینه (۱) هماهنگی دارد. نمای ۳۵

A ۵۹۹ ۲

۹ کافی است لحظهٔ گذر از مکان $x_{۰}=-۳m$ با تندی $v_{۰}=۱/۵m/s$ را مبدأزمان $(t=۰)$ بگیریم و سپس به کمک معادلهٔ حرکت مکان متحرک را در $t=۴s$ به‌دست بیاوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t+x_{۰}$$

$$x=\frac{۱}{۲}\times ۲\times(۴)^{۲}+۱/۵\times ۴+(-۳)=۱۶+۶-۳\Rightarrow x=۱۹m$$

نمای ۲۲

B ۵۹۹ ۲

۱۰ **راه‌حل اول:** استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x=\frac{v+v_{۰}}{۲}t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_{۰}}{۲}\times ۱/۵\Rightarrow v_{۰}=۱۲m/s$$

بنابراین شتاب خواهد شد: $a=\frac{v-v_{۰}}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۱۲}{۱/۵}\Rightarrow a=-۸m/s^{۲}\Rightarrow |a|=۸m/s^{۲}$

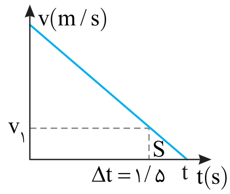
راه‌حل دوم: کافی است متحرکی را فرض کنیم که از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت در آمده است و در مدت ۱/۵s جابه‌جایی ۹ متر را طی کرده است.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^{۲}\Rightarrow ۹=\frac{۱}{۲}a(۱/۵)^{۲}\Rightarrow a=۸m/s^{۲}$$

راه‌حل سوم: نمودار سرعت زمان با توجه به صورت مسئله سطح S برابر ۹ واحد است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$S=\Delta x=\frac{v_{۱}\Delta t}{۲}\Rightarrow ۹=\frac{v_{۱}\times ۱/۵}{۲}$$

$$\Rightarrow v_{۱}=۱۲m/s$$



شتاب ثابت را از هر قسمت از حرکت می‌توان حساب کرد. از این‌رو:

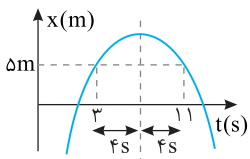
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{۰-۱۲}{۱/۵}=-۸m/s^{۲}\Rightarrow |a|=۸m/s^{۲}$$

نمای ۲۶

A ۵۹۹ ۲

۱۱ متحرک دارای شتاب ثابت است و در حال حرکت در جهت مثبت حرکت بود و در لحظهٔ $t=۷s$ بیشترین فاصله مثبت از مبدأ را داشته یعنی در این لحظه سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ مکان-زمان تابع درجه ۲ است $(x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t+x_{۰})$ و نمودار سهمی است و خط گذرنده از رأس سهمی خط تقارن سهمی است.



در $t=۷s$ مکان بیشینه است یعنی $t=۷s$ رأس سهمی است و در فاصله‌های زمانی یکسان از $t=۷s$ مکان‌ها یکسان است، پس در $t=۳s$ و $t=۱۱s$ مکان $+۵m$ است (به شکل سهمی دقت کنید). نمای ۲۶

B ۵۹۹ ۳

۱۲ **نکته:** در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی $t_{۱}$ تا $t_{۲}$ سرعت متوسط متحرک با سرعت در لحظهٔ وسط بازه زمانی برابر است.

$$v_{\frac{t_{۱}+t_{۲}}{۲}}=\frac{v_{۱}+v_{۲}}{۲}$$

۱ در ثانیهٔ دوم سرعت متوسط ۸m/s شده است. ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین ۱s تا ۲s است و لحظهٔ وسط این بازه برابر $t=۱/۵s$ است و سرعت در این لحظه برابر سرعت متوسط یعنی $v_{۱/۵s}=۸m/s$ است.

۲ در ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $t=۳s$ تا $t=۴s$، سرعت متوسط ۱۶m/s شده است یعنی سرعت در لحظهٔ $\frac{۳+۴}{۲}=۳/۵s$ برابر ۱۶m/s است.

۳ شتاب حرکت را در بازهٔ ۱/۵s تا ۳/۵s حساب می‌کنیم که شتاب کل مسیر حرکت است.

$$a=\frac{v_{۲}-v_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}=\frac{۱۶-۸}{۳/۵-۱/۵}=۴m/s^{۲}$$

نمای ۲۵ و ۳۷

B ۵۹۹ ۲

۱۳ ۱ در قسمت اول حرکت متحرک با شتاب ثابت $۲m/s^{۲}$ به سرعت ۱۰m/s می‌رسد. مدت زمان حرکت با این شتاب و جابه‌جایی در این مدت را حساب می‌کنیم.

$$v_{۱}=at+v_{۰}\xrightarrow{v_{۰}=۰}۱۰=۲t_{۱}\Rightarrow t_{۱}=۵s\ ,\ \Delta x_{۱}=\frac{۱}{۲}at_{۱}^{۲}+v_{۰}t_{۱}$$

$$\xrightarrow{t_{۱}=۵s}\Delta x_{۱}=\frac{۱}{۲}\times ۲\times(۵)^{۲}\Rightarrow \Delta x_{۱}=۲۵m$$

۲ در قسمت دوم متحرک ۳s با سرعت ثابت ۱۰m/s حرکت می‌کند و جابه‌جایی آن خواهد شد: $\Delta x_{۲}=vt_{۲}\Rightarrow \Delta x_{۲}=۱۰(۳)\Rightarrow \Delta x_{۲}=۳۰m$

۳ در قسمت سوم متحرک با شتاب $a=-۲m/s^{۲}$ سرعتش از ۱۰m/s کاهش می‌یابد تا به صفر برسد $v=at_{۳}+v_{۰}\Rightarrow ۰=-۲t+۱۰\Rightarrow t_{۳}=۵s$

مدت زمان و جابه‌جایی در قسمت کندشونده را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_{۳}=\frac{۱}{۲}at_{۳}^{۲}+v_{۰}t_{۳}\Rightarrow \Delta x_{۳}=\frac{۱}{۲}(-۲)(۵)^{۲}+۱۰(۵)\Rightarrow \Delta x_{۳}=۲۵m$$

۴ اکنون می‌توان تندی متوسط را به دست آورد.

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{\Delta x_{۱}+\Delta x_{۲}+\Delta x_{۳}}{\Delta t_{۱}+\Delta t_{۲}+\Delta t_{۳}}=\frac{۲۵+۳۰+۲۵}{۵+۳+۵}=\frac{۸۰}{۱۳}m/s$$

نمای ۳۵

B ۵۹۹ ۳

۱۴ متحرک اول دارای حرکت با شتاب ثابت $۲m/s^{۲}$ است و بدون سرعت اولیه به راه می‌افتد. معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم:

$$x_{۱}=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t\Rightarrow x_{۱}=\frac{۱}{۲}\times ۲t_{۱}^{۲}\Rightarrow x_{۱}=t_{۱}^{۲}$$

متحرک دوم ۵s بعد از متحرک اول به راه می‌افتد، یعنی اگر مدت زمان حرکت متحرک اول $t_{۱}$ باشد مدت زمان حرکت متحرک دوم $t_{۲}=t_{۱}-۵$ خواهد بود. از این‌رو معادلهٔ حرکت متحرک دوم خواهد شد: $x_{۲}=vt_{۲}\Rightarrow x_{۲}=۵(t_{۱}-۵)$

معادلهٔ دو متحرک را با هم قرار می‌دهیم:

$$x_{۱}=x_{۲}\Rightarrow t_{۱}^{۲}=۵t_{۱}-۲۵\Rightarrow t_{۱}^{۲}-۵t_{۱}+۲۵=۰\Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=۲۵-۱۰۰<۰$$

معادلهٔ بدون جواب است یعنی دو متحرک هرگز به هم نمی‌رسند. نمای ۳۴

بازی با سؤال **متحرک A با شتاب ثابت $۱m/s^{۲}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، هم‌زمان با آن متحرک B از ۱۰۰ متر عقب‌تر در همان جهت با سرعت ثابت ۵۴km/h به دنبال A به راه می‌افتد. دو متحرک در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه از کنار هم می‌گذرند؟**

۱) ۱۰ و ۲۰ ۲) ۱۰ و ۳۰ ۳) ۲۰ و ۳۰ ۴) ۱۵ و ۲۵

پاسخ **معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و برابر قرار می‌دهیم:**

معادلهٔ حرکت متحرک A را می‌نویسیم محل شروع حرکت متحرک A مبدأ مکان فرض می‌کنیم.

$$x_{A}=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t+x_{۰}\Rightarrow x_{A}=\frac{۱}{۲}t^{۲}$$

متحرک B از ۱۰۰ متر عقب‌تر هم‌زمان با سرعت ۵۴km/h به راه می‌افتد. سرعت B را بر حسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v_{B}=۵۴km/h=۵۴\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}\Rightarrow v_{B}=۱۵m/s$$

معادلهٔ حرکت B را نوشته و با معادلهٔ حرکت A برابر قرار می‌دهیم.

$$x_{B}=vt+x_{۰}\Rightarrow x_{B}=۱۵t-۱۰۰\ ,\ x_{A}=x_{B}\Rightarrow \frac{۱}{۲}t^{۲}=۱۵t-۱۰۰$$

$$t^{۲}-۳۰t+۲۰۰=۰\Rightarrow (t-۱۰)(t-۲۰)=۰\Rightarrow t=۱۰s\ ,\ t=۲۰s$$

گزینه ۱

B ۵۹۹ ۳

۱۵ خط فکری شتاب حرکت متحرک اول داده نشده، زمان رسیدن دو متحرک به هم از شما خواسته نشده بلکه سرعت متحرک اول در لحظهٔ رسیدن به متحرک دوم از شما خواسته شده بنابراین برای متحرک اول از معادلهٔ مستقل از شتاب و برای متحرک دوم معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت را بنویسید و برابر قرار دهید.

جابه‌جایی دو متحرک یکسان است. متحرک اول دارای حرکت با شتاب ثابت با تندی اولیهٔ $\frac{v}{۲}$ و متحرک دوم دارای حرکت با تندی ثابت v است، بنابراین:

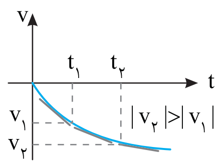
$$\begin{cases} \Delta x_۱=\frac{v_۲+v_۱}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{v'+\frac{v}{۲}}{۲}\Delta t \\ \Delta x_۲=v\Delta t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_۱=\Delta x_۲ \Rightarrow v\Delta t=\frac{v'+\frac{v}{۲}}{۲}\Delta t \Rightarrow v'=\frac{۳v}{۲}$$

نمای ۳۴

B ۵۹۹ ۲

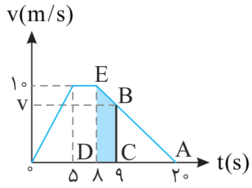
۱۶ به نمودار دقت کنید. تندی متحرک در حال افزایش است و حرکت تندشونده است. از طرفی نمودار سرعت زمان سهمی است بنابراین قطعاً حرکت دارای شتاب ثابت نیست زیرا نمودار $v-t$ حرکت با شتاب ثابت خط راست مایل است بنابراین شتاب این متحرک متغیر است.



نمای ۱۸

B ۵۹۹ ۳

۱۷ باید مساحت سطح رنگی را به‌دست آورید. قاعدهٔ بزرگ این ذوزنقه $ED=۱۰$ است. باید قاعدهٔ کوچک آن (BC) یعنی سرعت v را به کمک شیب خط AE به‌دست آورد.



$$\frac{۰-۱۰}{۲۰-۸}=\frac{۰-v}{۲۰-۹} \Rightarrow v=\frac{۱۱۰}{۱۲}m/s$$

اکنون جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=S \Rightarrow S=\frac{۱۰+\frac{۱۱۰}{۱۲}}{۲}\times ۱=\frac{۲۳۰}{۲\times ۱۲}=\frac{۱۱۵}{۱۲}m$$

نمای ۴۰

B ۵۹۹ ۲

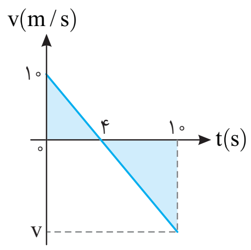
۱۸ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a=\frac{۰-۱۰}{۴}=-۲/۵m/s^۲$$

مکان را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

$$x=\frac{۱}{۲}(-۲/۵)(۱۰۰)+۱۰\times ۱۰+۲ \Rightarrow x=-۱۲۵+۱۰۰+۲ \Rightarrow x=-۲۳m$$



روش استفاده از سطح زیر نمودار:

۱ ابتدا سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به کمک شیب خط حساب می‌کنیم:

$$\frac{v-۱۰}{۱۰-۰}=\frac{۰-۱۰}{۴-۰} \Rightarrow v=-۱۵m/s$$

۲ سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=S \Rightarrow x-x_۰=\frac{۱۰\times ۴}{۲}+(\frac{-۱۵\times ۶}{۲}) \xrightarrow{x_۰=۲m}$$

$$x-۲=۲۰+(-۴۵) \Rightarrow x=-۲۳m$$

نمای ۴۰

B ۵۹۹ ۳

۱۹ ۱ سرعت از صفر در مدت $t_۱$ با شتاب $۲m/s^۲$ به v می‌رسد، سپس در مدت $t_۲$ با شتاب $-۳m/s^۲$، از v به صفر می‌رسد. بنابراین شما می‌توانید به کمک معادلهٔ سرعت زمان رابطهٔ بین $t_۱$ و $t_۲$ را به‌دست بیاورید.

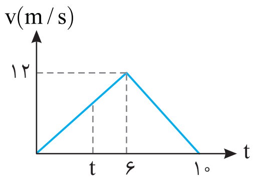
$$v=at+v_۰ \begin{cases} \xrightarrow{a=۲m/s^۲} v=۲t_۱ \Rightarrow t_۱=\frac{v}{۲} \\ \xrightarrow{a=-۳m/s^۲} ۰=-۳t_۲+v \Rightarrow t_۲=\frac{v}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲}=\frac{۳}{۲} \quad (۱)$$

۲ کل مدت حرکت $۱۰s$ است بنابراین:

$$t_۱+t_۲=۱۰ \xrightarrow{(۱)} \frac{۳}{۲}t_۲+t_۲=۱۰ \Rightarrow t_۲=۴s\ ,\ t_۱=۶s$$

۳ سرعت در لحظهٔ $t_۱=۶s$ خواهد شد: $v=at+v_۰ \Rightarrow v=۲\times ۶=۱۲m/s$

۴ جابه‌جایی کل برابر سطح زیر نمودار سرعت زمان شکل روبه‌روست:



$$\Delta x=\frac{۱۲\times ۱۰}{۲} \Rightarrow \Delta x=۶۰m$$

۵ بنا به فرض مسئله جابه‌جایی در $\frac{۵}{۱۲}$ اول مسیر برابر است با:

$$\Delta x_۱=\frac{۵}{۱۲}\times ۶۰=۲۵m$$

۶ نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه مثلث برابر است، از این‌رو:

$$\frac{۲۵}{۳۶}=(\frac{t}{۶})^۲ \Rightarrow \frac{۵}{۶}=\frac{t}{۶} \Rightarrow t=۵s$$

۷ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۵}{۵} \Rightarrow v_{av}=۵m/s$$

میانبُر هر گاه متحرک با شتاب $a_۱$ از حال سکون به راه بیافتد و در مدت $t_۱$ جابه‌جایی $\Delta x_۱$ را طی کند سپس ترمز کرده با شتاب $a_۲$ در مدت $t_۲$ و جابه‌جایی $\Delta x_۲$ متوقف شود خواهیم داشت:

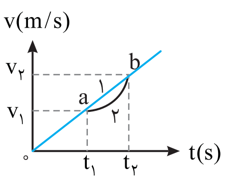
$$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۲}$$

بنابراین نسبت $\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۳}{۲}$ خواهد بود.

نمای ۳۵

B ۵۹۹ ۲

۲۰ چون نمودار منحنی است، پس حرکت با شتاب متغیر می‌باشد. بنابراین $v_{av}\neq\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ خواهد بود. زیرا فقط در حرکت با شتاب ثابت که نمودار سرعت – زمان آن خط راست بوده سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ است. از طرفی



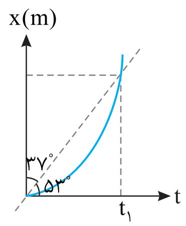
سطح زیر نمودار سرعت – زمان برابر تغییر مکان متحرک است و سطح زیر نمودار (۲) در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ از سطح زیر نمودار یک حرکت فرضی با شتاب ثابت مانند نمودار (۱) کمتر است، پس سرعت متوسط در نمودار (۲) از سرعت متوسط در نمودار (۱) کمتر خواهد بود.

$$S_۲<S_۱ \Rightarrow \Delta x_۲<\Delta x_۱ \Rightarrow v_{av,۲}<v_{av,۱} \Rightarrow v_{av}<\frac{v_۱+v_۲}{۲}$$

نمای ۴۰

A ۵۹۹ ۲

۲۱ شیب خط قاطع نمودار x-t برابر سرعت متوسط است از این‌رو:



$$v_{av}=\tan\alpha=\tan ۵۳^\circ$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{۰/۸}{۰/۶}=\frac{۴}{۳}m/s$$

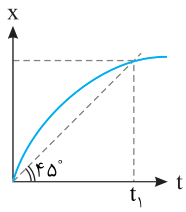
از طرفی نمودار مکان - زمان سهمی است، یعنی حرکت دارای شتاب ثابت است، از این‌رو: $v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}$

در لحظهٔ $t=۰$ سرعت اولیه صفر است. بنابراین سرعت در لحظهٔ $t_۱$ خواهد شد:

$$\frac{۴}{۳}=\frac{v+۰}{۲}\Rightarrow v=\frac{۸}{۳}m/s$$

نمای ۳۸

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان متحرکی که بخشی از یک سهمی است، رسم شده است. در لحظهٔ $t=\frac{t_۱}{۲}$ سرعت متحرک چند متر بر ثانیه است؟ (مقیاس روی هر محور معادل یکای کمیت است.)



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ شیب خط قاطع نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است. پس سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۱$ را به کمک شیب خط قاطع به‌دست می‌آوریم.

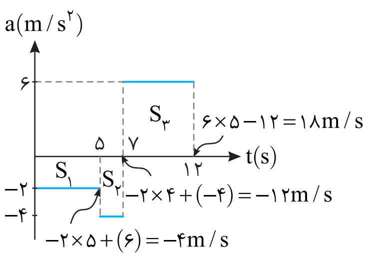
$$v_{av}=\tan ۴۵^\circ\Rightarrow v_{av}=۱m/s$$

نمودار سهمی است و حرکت دارای شتاب ثابت است و سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ بوده و در واقع سرعت متوسط میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی بوده و برابر سرعت در وسط بازهٔ زمانی است. بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{t_۱}{۲}$ سرعت برابر است با: $v=۱m/s$

گزینهٔ ۱

B ۵۹۹ ۴

۲۲ **خط فکری** یک مسئلهٔ محاسباتی ریاضی در اختیار داریم. باید نمودار سرعت - زمان را با دقت رسم کنید و جابه‌جایی و مکان متحرک را از سطح زیر نمودار حساب کرده و مشخص کنید که دورترین فاصله متحرک از مبدأ چند متر است.



۱ سرعت در لحظه‌های $t=۵s$، $t=۷s$ و $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=۵s:S_۱=\Delta v\Rightarrow -۲\times۵=v_۱-۶\Rightarrow v_۱=-۴m/s$$

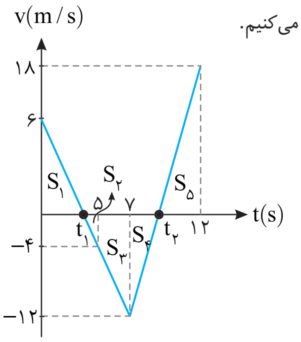
$$t=۷s:S_۲=\Delta v_۲\Rightarrow -۴\times(۷-۵)=v_۲-(-۴)$$

$$\Rightarrow -۸=v_۲+۴\Rightarrow v_۲=-۱۲m/s$$

$$t=۱۲s:S_۳=\Delta v_۳\Rightarrow ۶\times(۱۲-۷)=v_۳-(-۱۲)$$

$$\Rightarrow v_۳=۳۰-۱۲\Rightarrow v_۳=۱۸m/s$$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.



۳ لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را به کمک شیب خط مشخص می‌کنیم.

$$\frac{۶-(-۴)}{۵-۰}=\frac{۶-۰}{t_۱-۰}\Rightarrow t_۱=۳s$$

$$\frac{۱۸-(-۱۲)}{۱۲-۷}=\frac{۱۸-۰}{۱۲-t_۲}\Rightarrow ۱۲-t_۲=۳\Rightarrow t_۲=۹s$$

۴ مکان در لحظه‌های ۳s، ۵s، ۷s، ۹s و ۱۲s را به‌دست می‌آوریم.

$$t=۳s\ :S_۱=\Delta x_۱\Rightarrow\frac{۶\times۳}{۲}=x_۱-۴\Rightarrow x_۱=۱۳m$$

$$t=۵s\ :S_۲=\Delta x_۲\Rightarrow\frac{(۵-۳)\times(-۴)}{۲}=x_۲-۱۳\Rightarrow x_۲=۹m$$

$$t=۷s\ :S_۳=\Delta x_۳\Rightarrow\frac{-۴+(-۱۲)}{۲}\times۲=x_۳-۹\Rightarrow x_۳=-۷m$$

$$t=۹s\ :S_۴=\Delta x_۴\Rightarrow\frac{-۱۲\times(۹-۷)}{۲}=x_۴-(-۷)\Rightarrow x_۴=-۱۹m$$

$$t=۱۲s\ :S_۵=\Delta x_۵\Rightarrow\frac{۱۸\times(۱۲-۹)}{۲}=x_۵-(-۱۹)\Rightarrow x_۵=+۸m$$

۵ بنابراین در لحظهٔ $t=۹s$ دورترین فاصله از مبدأ ۱۹m است. نمای ۴۲

B ۵۹۹ ۲

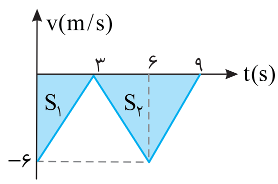
۲۳ تندی در لحظه‌های $t=۰$، $t=۳s$، $t=۶s$ و $t=۹s$ را به‌دست آورده و نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

$$t=۰\Rightarrow v_۰=-۶m/s$$

$$t=۳s\Rightarrow v=a_۱t_۱+v_۰\Rightarrow v=۲\times۳+(-۶)=۰$$

$$t=۶s\Rightarrow v=(-۲\times۳)+۰=-۶m/s$$

$$t=۹s\Rightarrow v=(۲\times۳)+(-۶)=۰$$



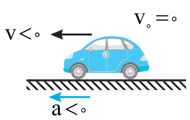
مسافت طی شده برابر است با:

$$d=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow d=|\frac{(-۶)\times۳}{۲}|+|\frac{۶\times(-۶)}{۲}|\Rightarrow d=۹+۱۸=۲۷m$$

نمای ۴۲

C ۵۹۹ ۳

۲۴ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است. در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s در جهت منفی محور، با شتاب منفی بر تندی آن افزوده می‌شود. دقت کنید شتاب منفی به معنی حرکت کندشونده نیست. اگر مطابق شکل، متحرک از مبدأ و خلاف جهت محور، شروع به حرکت کند، با شتاب منفی دارای حرکت تندشونده است زیرا بردار سرعت و شتاب هم‌جهت است. در لحظهٔ $t=۲s$، شتاب تغییر جهت (علامت) داده است یعنی شتاب مثبت است اما همچنان سرعت منفی است و حرکت بعد از $t=۲s$ کندشونده است، پس بیشترین سرعت در $t=۲s$ است.

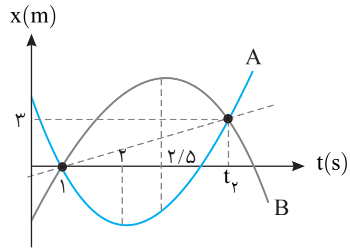


نمای ۴۲

C ۵۹۹ ۳

۲۵

نکته هرگاه دو متحرک دارای حرکت با شتاب ثابت، یکبار در لحظهٔ t_1 از کنار هم بگذرند و مجدداً در لحظهٔ t_2 نیز از کنار هم بگذرند در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$، سرعت آن‌ها با هم برابر است.



به نمودار نگاه کنید در لحظهٔ $t_1=1s$ و در لحظهٔ t_2 دو متحرک از کنار هم می‌گذرند و در لحظهٔ $t=2/5s$ سرعت آن‌ها با هم برابر است. از این‌رو لحظهٔ t_2 خواهد شد:

$$t=\frac{t_1+t_2}{2}\Rightarrow 2/5=\frac{1+t_2}{2}\Rightarrow t_2=4s$$

با توجه به نمودار متحرک A باید نقاط $(1,0)$ و $(4,3)$ در معادلهٔ حرکت صدق کند.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{t=1s} 0=\frac{1}{2}a+v_0+x_0 \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{t=4s} 3=\frac{1}{2}a\times 4^2+4v_0+x_0\Rightarrow 3=8a+4v_0+x_0 \qquad (2)$$

برای رأس سهمی $t=2s$ می‌توان نوشت:

$$t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow 2=\frac{-v_0}{2(\frac{1}{2}a)}\Rightarrow v_0=-2a \qquad (3)$$

دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم:

$$3=8a+4v_0+x_0$$

$$0=\frac{1}{2}a+v_0+x_0$$

$$3=7/5a+3v_0$$

از رابطهٔ (۳) در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$3=7/5a+3(-2a)\Rightarrow 3=1/5a\Rightarrow a=2m/s^2$$

نمای ۳۹

فصل دوم

دینامیک

پنجره ۱

A ۶۰۰ — ۴

اثر نیرو بر یک جسم به شکل‌های مختلف مانند شروع به حرکت، توقف، کم و زیاد شدن تندی، تغییر جهت سـرعت و تغییر شـکل جسـم، خود را نشـان می‌دهد. به‌طور خلاصه «نیروی وارد بر جسم می‌تواند سبب تغییر سرعت جسم یا تغییر شکل آن شود» بنابراین هر سه گزینه درست است.

A ۶۰۱ — ۱

یادآوری «یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند مگر آنکه نیروی خالصی (غیرصفر) به آن وارد شود.» (قانون اول نیوتون)

به عبارت بهتر وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند وقتی که جسم در حال حرکت باشد سرعت جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

بازی با سؤال **هنگامی که برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است، کدام گزارهٔ زیر درست است؟**

۱) جسم الزاماً ساکن است.

۲) جسم الزاماً در حال حرکت است.

۳) جسم ممکن است ساکن یا متحرک باشد.

۴) جسم الزاماً دارای حرکت با سرعت ثابت است.

پاسخ **بنابر قانون اول نیوتون، هرگاه بر جسـمی نیرو وارد نشود، اگر جسم ساکن است، ساکن می‌ماند (تعادل ایستا)، اگر در حال حرکت است، به حرکت با سرعت ثابت ادامه می‌دهد (تعادل جنبشی).** گزینهٔ ۳

A ۶۰۲ — ۱

آزمایش گالیله بیانگر قانون اول نیوتون می‌باشد که هرگاه جسمی در حال حرکت با سرعت ثابت باشد و به آن نیروی خالصی وارد نشود به حرکت با همان سرعت ادامه خواهد داد.

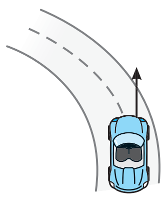
A ۶۰۳ — ۳

با توجه به قانون اول جسـم درون واگن قطار تمایل دارد حرکت خود را حفظ کند. بنابراین می‌توان گفت هنگامی که شخص درون واگن قرار دارد همواره از تغییر حرکت لحظه‌ای قطار جا می‌ماند. یعنی هنگامی که قطار ترمز می‌کند شخص با همان سرعت قبلی در حال حرکت می‌باشـد، پس به سمت جلو منحرف می‌شود و هنگامی که حرکت قطار تندشونده می‌شود و ناگهان سـرعت قطار افزایش یابد، شـخص با همان سرعت کم در حال حرکت است پس شخص به سمت عقب منحرف می‌شود. در پاسخ این تست‌ها همواره به زندگی روزمرهٔ خود دقت کنید. اگر در اتوبوس ایسـتاده باشـید و اتوبوس ناگهان ترمز کند رو به جلو منحرف می‌شود و اگر از حال سکون ناگهان به راه بیفتد به سمت عقب منحرف می‌شوید.

A ۶۰۴ — ۲

بناهای سـاختمانی وقتی سر چکش آن‌ها مقداری شُل می‌شـود، دستهٔ آن را محکم به سطح زمین می‌کوبند. زیرا آن‌ها به‌طور تجربی می‌دانند با این حرکت، دسـته چکش که رو به پایین در حرکت است ناگهان متوقف می‌شـود. اما سرچکش به حرکت خود رو به پایین (بنا بـه قانـون اول) ادامه می‌دهـد. در چکش‌هـا معمولاً ضخامت دسـتهٔ چکش از سـر تا ته آن افزایش می‌یابد. بنابراین با پایین رفتن سر چکش، درگیری سر چکش با دسته بیشتر می‌شود و دسته در سر چکش سفت می‌شود.

B ۶۰۵ — ۴



تمایـل اجسـام بـه حفـظ وضـع موجـود را لختـی جسـم می‌گوییـم. در واقـع وقتی خـودرو با سـرعت v روی خط راست در حرکت است، شما نیز روی خط راست با سرعت v در حرکت هسـتید. وقتی خودرو دور می‌زند، شـما بنابر قانـون اول نیوتون تمایل دارید بر مسـیر مسـتقیم حرکت کنیـد و به سـمت خارج پیچ متمایل می‌شـوید. قانون اول نیوتون را اصل اینرسی (لختی) نیز می‌گویند.

B ۶۰۶ — ۴

در پاسـخ به این پرسـش باید به مفهوم لختی بپردازیم. جسم بنا به قانون اول نیوتون در مقابل تغییر سـرعت از خود مقاومت نشـان می‌دهد، یعنی جسم تمایل دارد وضع موجود خود را حفظ کند. به این مقاومت، لختی گویند.

اگر نخ پایینی را به سرعت بکشیم، لختی وزنه مانع حرکت کردن وزنه شده و نخ از پایین وزنه پاره می‌شـود. اما اگر نخ پایینی را به آرامی پایین بکشیم، نیروی F و وزن وزنه با هم جمع شده و نخ از قسمت بین وزنه و سقف یعنی از قسمت بالایی پاره می‌شود.

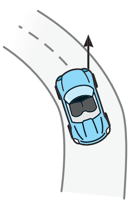
A ۶۰۷ — ۲

اتومبیل B ساکن است و می‌خواهد حالت خود را حفظ کند هنگامی که A ناگهان شروع به حرکت کند مقاومت اتومبیل B در مقابل تغییر حالت (لختی B) سبب پاره‌شدن سیم بکسل می‌شود.

به‌طور مثال: اگر یک نایلکس را پر از سیب‌زمینی کرده و شما دسته نایلکس را بگیرید و بخواهید ناگهان آن را از سطح زمین بلند کنید، به دلیل لختی، امکان دارد دستهٔ نایلکس پاره شود.

A ۶۰۸ — ۲

نکته اگر در خودرو نشسته باشید و خودرو با تندی ثابت دور میدانی به سمت چپ بچرخد شـما به سـمت خارج پیچ (به سمت راست) منحرف می‌شوید که این پدیده شاهدی بر قانون اول نیوتون است.

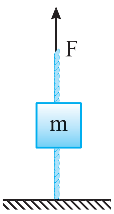


عروسکی که از نخ آویزان است اگر اتومبیل ترمز کند، عروسک به حرکت خودرو به جلو ادامه می‌دهد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

اگـر اتومبیـل به سـمت چـپ در حـال پیچیدن باشـد از دید شـخص درون اتومبیـل عروسـک به سـمت راسـت منحرف می‌شـود. زیرا می‌خواهد مطابق شـکل بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه دهد و گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

وقتی تندی اتومبیل (بزرگی سـرعت آن) ثابت باشد، ممکن است جهت سرعت آن تغییر کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۶۰۹ — ۲



نکتهٔ مهم در حل این مسـئله این اسـت که آیا وزن وزنهٔ m در کشیدگی و پاره شدن ریسمان پایینی مؤثر است؟

فرض کنید که وزنهٔ m روی سـطح زمین قرار دارد و ریسـمان پایینی به آن متصل است اگر نیروی F را به تدریج و یا ناگهانی بـه ریسـمان وارد کنیم در هر دو حالت نیرو ریسـمان بالایی را می‌کشد و می‌تواند آن را پاره کند.

اگـر مطابق شـکل نیروی F وزنه را از سـطح زمین بلند کند و ریسـمان پایینی را بکشـد همواره کشیدگی ریسمان پایینی از کشیدگی ریسمان بالایی کمتر بوده و احتمال پاره شدن ریسمان بالایی بیشتر است.

A ۶۱۰ — ۴

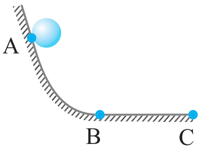
یادآوری قانون دوم نیوتون: هرگاه بر جسـمی نیرو وارد شـود، جسـم در جهت نیرو، شتابی می‌گیرد که با نیرو متناسب و با جرم جسم نسبت وارون دارد. $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$

ممکن اسـت نیروی خالص وارد بر جسـم در خلاف جهت حرکت جسـم باشـد و باعث توقف جسم شود بنابراین گزینهٔ (۱) و (۳) نادرست است.

اگر نیروی خالص وارد بر جسـم ثابت باشـد، شـتاب جسـم نیز ثابت است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

وقتی بر جسم نیروی خارجی خالصی وارد شود، بنابه قانون دوم نیوتون $(\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m})$، جسم شتاب می‌گیرد و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۶۱۱ ۳

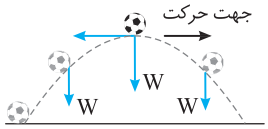


جسم در نقطهٔ A رها شده و شروع به حرکت کرده بنابراین حرکتش شتاب‌دار است و نیروی خالص وارد بر جسم قطعاً صفر نیست. $F_{net_1} \neq 0$

جسم در مسیر BC روی سطح افقی کاملاً صیقلی قرار دارد و نیرویی در جهت حرکت و یا در خلاف جهت حرکت بر آن وارد نمی‌شود و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و $F_{net_2} = 0$ است.

B ۶۱۲ ۴

نکته چگونگی حرکت جسم پس از وارد آمدن نیرو، به سرعت اولیهٔ جسم و زاویه‌ای که نیرو با راستای سرعت اولیه می‌سازد، بستگی دارد.



اگر جسم ساکن باشد و بر آن یک نیرو وارد شود، جسم در راستای نیرو شروع به حرکت می‌کند و اگر نیرو تغییر جهت ندهد، حرکت جسم روی خط راست است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

اگر جسم دارای سرعت اولیه باشد، مثلاً گلوله‌ای که در شرایط خلأ مطابق شکل، پرتاب شود، در تمام مسیر نیروی وارد بر جسم نیروی گرانشی و رو به پایین است، اما مسیر حرکت خمیده است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

اگر یک اتوبوس دور یک میدان با تندی ثابت در حال حرکت باشد چون مسیر آن خمیده است حرکت آن شتاب‌دار است و نیروی خالص وارد بر آن صفر نیست بنابراین ممکن است که بر جسم نیرو وارد شود و بزرگی سرعت (تندی) آن ثابت بماند. پس گزینهٔ (۳) نیز درست است.

A ۶۱۳ ۴

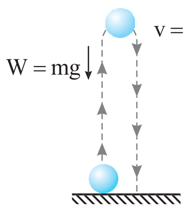
نکته برایند نیروهای وارد بر جسم، تنها شتاب حرکت را مشخص می‌کند و در مورد جهت حرکت جسم به تنهایی اطلاعاتی نمی‌دهد. $\vec{F} = m\vec{a}$

نیروی خاص وارد بر جسم رو به شمال است، بنابراین شتاب حرکت بنا به قانون دوم نیوتون $(\vec{F} = m\vec{a})$ رو به شمال است. حرکت متحرک کندشونده باشد، جهت سرعت در خلاف جهت شتاب و رو به جنوب است و گزینهٔ (۱) درست است.

اگر حرکت تندشونده باشد، جهت سرعت باید در جهت شتاب باشد یعنی متحرک رو به شمال در حرکت است و گزینهٔ (۲) درست است.

اگر مسیر خمیده باشد، نیروی وارد بر جسم و سرعت جسم با هم زاویه می‌سازند، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۶۱۴ ۲

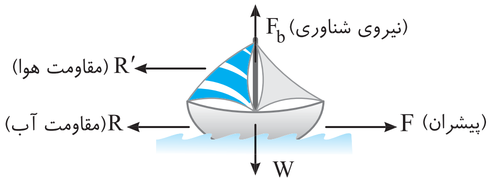


اگر نیروهای وارد بر جسم در بالاترین نقطه مسیر متوازن باشند بنا به قانون اول نیوتون جسم باید ساکن باقی بماند اما جسم به سوی پایین برمی‌گردد بنابراین در بالاترین نقطهٔ مسیر نیروها متوازن نیستند و در طول مسیر رفت و برگشت به جسم نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود. بنابراین جسم در بالاترین نقطهٔ مسیر به‌طور لحظه‌ای ساکن است اما در تعادل نیست. $(F_{net} \neq 0)$

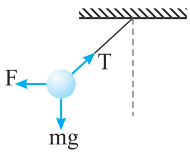
B ۶۱۵ ۴

یادآوری اگر جسمی درون مایعی قرار گیرد از طرف مایع بر آن نیرویی رو به بالا وارد می‌شود که منشأ این نیرو اختلاف فشار مایع در عمق‌های مختلف است و همین نیرو است که کشتی‌ها را بر سطح آب شناور نگه می‌دارد که به آن نیروی شناوری (F_b) گویند. منظور از نیروی پیشران نیز همان نیروی موتور قایق یا نیرویی که باد بر بادبان‌ها وارد می‌کند یا نیرویی است که در اثر پارو زدن باعث پیشروی قایق می‌شود. قایق با سرعت ثابت در حال حرکت روی سطح دریاچه آرام است، بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و بر آن چهار نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی شناوری ۲ نیروی وزن ۳ نیروی پیشران (F)
۴ نیروی مقاومت آب R (و هوا 'R)

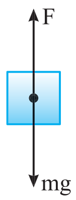


A ۶۱۶ ۳



برای آن که یک گلولهٔ متصل به نخ را از راستای قائم منحرف کرده و ثابت نگه دارید قطعاً باید بر آن نیرویی مانند F وارد کنید. بنابراین حداقل تعداد نیروهای وارد بر گلوله که باعث می‌شود گلوله در این وضعیت ساکن بماند، سه نیرو نشان داده شده در شکل است.

B ۶۱۷ ۱



گلوله در حال سقوط آزاد است و به آن نیروی وزن mg وارد می‌شود. برای آن‌که حرکت آن کندشونده شود و متوقف گردد باید نیروی F رو به بالا بر آن وارد شود که این نیرو باید از W بزرگ‌تر باشد تا نیروی خالص وارد بر گلوله رو به بالا و خلاف جهت حرکت بوده سبب کاهش سرعت شده و گلوله متوقف شود.

A ۶۱۸ ۴

بنابر قانون سوم نیوتون، هرگاه جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز بر جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند. بنابراین نقطهٔ اثر نیروهای کنش و واکنش متفاوت است، به همین علت بررسی برایند آن‌ها اصولاً مفهوم فیزیکی ندارد.

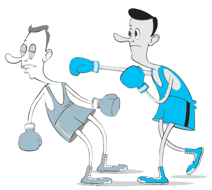
دقت کنید در گزینهٔ (۳) بیان شده است که برایند نیروی کنش و واکنش صفر نیست درحالی که این دو نیرو، بر دو جسم وارد می‌شود و برایند فیزیکی ندارند که صفر و یا غیرصفر باشد.

A ۶۱۹ ۳

اندازهٔ نیروی کنش و واکنش یکسان است و گزارهٔ (الف) درست است.

نیروهای کنش و واکنش در خلاف جهت هم بوده و جهت آن‌ها یکسان نیست پس گزارهٔ (ب) نادرست است. نیروهای کنش و واکنش همواره به دو جسم وارد می‌شوند و هم نوع‌اند، جنس نیروهای کنش و واکنش یکسان است و گزارهٔ (پ) درست است.

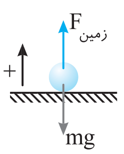
A ۶۲۰ ۳



بنابر قانون سوم نیوتون نیروهای کنش و واکنش بین دو جسم یکسان و در خلاف جهت یکدیگر است.

از این‌رو نیرویی که صورت شما بر دست تایسون وارد می‌کند با نیرویی که تایسون به صورت شما وارد می‌کند دقیقاً هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند.

B ۶۲۱ ۲



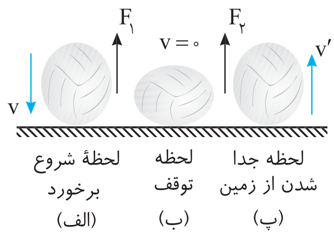
هنگام برخورد توپ با زمین ابتدا توپ با سرعت v به سمت پایین به زمین برخورد می‌کند تا به طور لحظه‌ای متوقف شود یعنی در این حالت حرکت متحرک کندشونده است و سرعت و شتاب خلاف جهت هم‌اند پس جهت شتاب به سمت بالا است. می‌دانیم شتاب در جهت نیروی برایند قرار دارد پس نیروی برایند وارد بر جسم به سمت بالا می‌باشد.

$$F_{net} = ma \xrightarrow{a>0} F_{net} > 0 \Rightarrow F_{زمین} - mg > 0 \Rightarrow F_{زمین} > mg$$

هنگام بلند شدن توپ از زمین سرعت از $v = 0$ به سرعت 'v به سمت بالا خواهد رسید، پس حرکت تندشونده و جهت شتاب و سرعت یکسان است، پس شتاب به سمت بالا و برایند نیروها مجدداً به سمت بالا است که مشابه محاسبات بالا $F_{زمین} > mg$ است.

B ۶۲۲ ۴

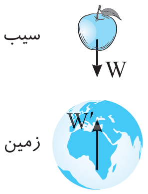
به جمله‌ها و عبارت‌های تست دقت کنید. «در تماس توپ با زمین» نه قبل و نه بعد از تماس توپ با زمین و «نیروی وارد بر توپ» نه نیروی وارد بر سطح، بنابراین از لحظهٔ شروع تماس توپ با زمین (شکل الف) بر توپ نیرویی رو به بالا وارد شده و آن‌را از حرکت می‌اندازد (شکل ب) و سپس این نیروی رو به بالا، توپ را مجدداً رو به بالا هُل می‌دهد. شکل (پ)



بنابراین F_1 و F_2 هر دو رو به بالا هستند.

B ۶۲۳ ۴

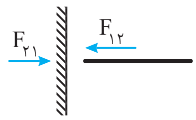
خط فکری در بررسی نیروی واکنش باید شما مشخص کنید که بر جسم از طرف کدام جسم نیرو وارد می‌شود تا بتوانید دربارهٔ نیروی واکنش اظهارنظر کنید.



بنا به قانون سوم نیوتون، اگر جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز به جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند. نیروی وزن نیرویی است که کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌کند پس واکنش آن نیرویی است که جسم بر مرکز کرهٔ زمین وارد می‌کند.

A ۶۲۴ ۳

خط فکری در بررسی نیروی واکنش ابتدا باید دو جسمی که به هم نیرو وارد می‌کنند و مورد پرسش است را مشخص کنید. در این تست، یک جسم، دست شخص و جسم دیگر طناب است بنابراین نیروی کشش بر یکی و واکنش بر دیگری وارد می‌شود و نیرویی که دیوار به طناب وارد می‌کند و بالعکس نقشی در کشش و واکنش بین دست و طناب ندارد.

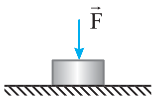


نیرویی که طناب بر دیوار وارد می‌کند واکنش نیرویی است که دیوار بر طناب وارد می‌کند و گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.

واکنش نیرویی که دست بر طناب وارد می‌کند توسط طناب بر دست وارد می‌شود.

گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **جسمی به وزن W روی یک سطح افقی (تکیه‌گاه) قرار دارد و نیروی عمودی F رو به پایین بر آن وارد می‌شود. کدام گزینه واکنش نیروی F است؟**



۱) نیروی عمودی تکیه‌گاه F_N

۲) نیرویی که توسط سطح بر جسم وارد می‌شود.

۳) نیروی وزن جسم منهای نیروی عمودی تکیه‌گاه

۴) نیرویی که توسط جسم بر عامل به‌وجود آورندهٔ F وارد می‌شود.

پاسخ **گزینهٔ (۴) دقیقاً تعریف قانون سوم نیوتون در مورد نیروهای کنش و واکنش است.**

گزینهٔ ۴

B ۶۲۵ ۱

با توجه به قانون سوم نیوتون واکنش نیروی F بر عامل به‌وجود آورنده‌اش وارد می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نیروی W نیرویی است که توسط کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن توسط جسم بر کرهٔ زمین وارد می‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است.

نیروی عمودی تکیه‌گاه (F_N) نیرویی است که توسط سطح بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن توسط جسم بر سطح وارد می‌شود بنابراین F_N و W واکنش یکدیگر نیستند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

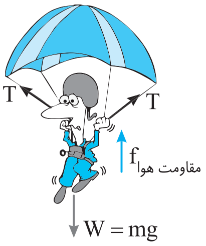
نیروی F نیرویی است که سبب حرکت جسم می‌شود و واکنش آن بر عاملی که F را وارد می‌کند وارد می‌شود و نیروی f نیروی اصطکاکی است که از طرف سطح بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن نیرویی است که از طرف جسم بر سطح وارد می‌شود یعنی F و f ارتباط به هم نداشته و واکنش هم نیستند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۶۲۶ ۲

یادآوری قانون سوم نیوتون: هرگاه جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز بر جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند.

هنگام پرتاب موشک، موشک بر گازهای خروجی‌اش نیرویی رو به عقب (رو به پایین) وارد می‌کند. بنابه قانون سوم نیوتون گازهای خروجی به موشک نیرویی رو به جلو (رو به بالا) وارد می‌کنند که سبب حرکت موشک می‌شود.

A ۶۲۷ ۲



خط فکری واکنش نیروهای وارد بر چترباز از شما خواسته شده است بنابراین ابتدا شما باید مشخص کنید چه اجسامی، چه نیروهایی به چترباز وارد می‌کنند. آن‌گاه می‌توانید بگویید که واکنش نیروها به چه اجسامی وارد می‌شود.

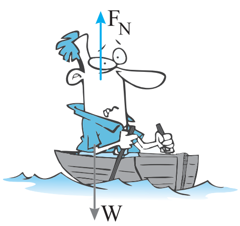
نیروهای وارد بر چترباز عبارتند از:

۱ نیروی وزن که توسط کرهٔ زمین بر شخص وارد می‌شود.

۲ نیرویی که طناب‌های چترنجات بر شخص وارد می‌کنند.

۳ نیروی مقاومت هوا که توسط هوا بر چترباز وارد می‌شود بنابراین واکنش این نیروها بر کرهٔ زمین، طناب‌ها و هوا وارد می‌شود.

A ۶۲۸ ۳



مطابق شکل شخص درون قایق نشسته و از طرف کرهٔ زمین نیروی وزن بر شخص وارد می‌شود که واکنش آن توسط شخص بر کره زمین وارد می‌شود. از طرفی کف قایق بر شخص نیروی F_N رو به بالا وارد می‌کند که واکنش آن توسط شخص بر کف قایق رو به پایین وارد می‌شود. نیرویی که شخص بر پارو و پارو بر شخص وارد می‌کند نیز نیروی کنش و واکنش یکدیگرند. بنابراین واکنش نیروهای وارد به شخص توسط شخص به قایق، پارو و زمین وارد می‌شود.

A ۶۲۹ ۲

قانون دوم نیوتون را برای هر جسم به‌طور جداگانه نوشته و طرفین روابط را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$F=m_1a_1\ ,\ F=m_2a_2 \xrightarrow{F=F} m_1a_1=m_2a_2 \Rightarrow ۶a_1=۹a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{۳}{۲}$$

A ۶۳۰ ۱

رابطهٔ $F=ma$ را یک بار برای حالت اول و بار دیگر برای حالت دوم می‌نویسیم و سپس طرفین تساوی‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$F=m\times ۲\quad (۱)\ ,\ F=(m+۵)۱/۸\quad (۲) \Rightarrow ۲m=۱/۸m+۹ \Rightarrow m=۴۵kg$$

$$\xrightarrow{\text{در (۱) قرار می‌دهیم}} F=m\times ۲ \Rightarrow F=۹۰N$$

A ۶۳۱ ۱

۱ با توجه به شتاب و جرم واگن‌ها نیروی پیشران لوکوموتیو را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{\text{پیشران}}=m_1a \Rightarrow F_{\text{پیشران}}=۵(۲۰۰)\times ۲=۲۰۰۰N$$

۲ در حالت دوم یک واگن از لوکوموتیو جدا شده و جرم کل قطار کاهش پیدا کرده و چون نیروی پیشران تغییر نکرده شتاب حرکت افزایش یافته و برابر خواهد شد با:

$$F_{\text{پیشران}}=m_2a' \Rightarrow ۲۰۰۰=۴(۲۰۰)a' \Rightarrow a'=۲/۵m/s^۲$$

۳ بنابراین شتاب از $a=۲m/s^۲$ به $a'=۲/۵m/s^۲$ رسیده است:

$$\text{درصد تغییرات}=\frac{\Delta a}{a}\times ۱۰۰ \Rightarrow \text{درصد تغییرات}=\frac{۲/۵-۲}{۲}\times ۱۰۰=۰/۲۵\times ۱۰۰=۲۵\%$$

A ۶۳۲ ۳

به نیروی وارد بر جسم ٪۲۰ افزوده شده پس نیروی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_2=F_1+0.2F_1\Rightarrow F_2=1.2F_1$$

بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$ خواهیم داشت:

$$F_2=1.2F_1\Rightarrow ma_2=1.2ma_1\Rightarrow a_2=1.2a_1$$

A ۶۳۳ ۲

خط فکری به کمک قانون دوم نیوتون $F=ma$ با توجه به ثابت بودن F، جرم m_1 و m_2 را برحسب F به‌دست بیاورید سپس شتاب حرکت را برای جسمی به جرم m_2-m_1 و m_2+m_1 حساب کرده بر هم تقسیم کنید.

۱ با توجه به شتابی که نیروی F به جسم m_1 و m_2 می‌دهد داریم:

$$\begin{cases} F=m_1a_1\xrightarrow{a_1=10m/s^2}F=10m_1\Rightarrow m_1=\frac{F}{10} \\ F=m_2a_2\xrightarrow{a_2=6m/s^2}F=6m_2\Rightarrow m_2=\frac{F}{6}\end{cases}$$

۲ حال شتاب داده شده به جسمی به جرم m_2-m_1 و m_2+m_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F=(m_2-m_1)a'\Rightarrow F=(\frac{F}{6}-\frac{F}{10})a'\Rightarrow F=(\frac{5F-3F}{30})a' \\ \Rightarrow a'=\frac{30}{2}=15m/s^2 \\ F=(m_2+m_1)a''\Rightarrow F=(\frac{F}{6}+\frac{F}{10})a'\Rightarrow F=(\frac{5F+3F}{30})a'' \\ \Rightarrow F=\frac{8F}{30}a''\Rightarrow a''=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}m/s^2\end{cases}$$

۳ نسبت شتاب‌ها خواهد شد: $\frac{a'}{a''}=\frac{15}{\frac{15}{4}}=4$

A ۶۳۴ ۱

نکته هرگاه دو نیرو هم‌جهت باشند، اندازه نیروی خالص از جمع اندازهٔ دو نیرو به‌دست می‌آید: $F_{net}=F_1+F_2$

شتاب وقتی دو نیرو هم‌جهت هستند خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow 3+4=2a_1\Rightarrow a_1=3.5m/s^2$$

نکته هرگاه دو نیرو در خلاف جهت هم باشد، اندازهٔ نیروی خالص از تفاضل اندازهٔ دو نیرو به‌دست می‌آید: $F_{net}=|F_1|-|F_2|$

شتاب وقتی دو نیرو خلاف جهت هم هستند خواهد شد

$$F_{net}=ma\Rightarrow 4-3=2a\Rightarrow a_2=0.5m/s^2$$

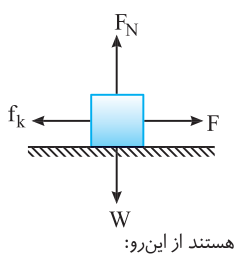
نیروی خالص وقتی دو نیرو عمود بر هم هستند از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید.

$$F_{net}=\sqrt{3^2+4^2}=5N$$

شتاب حرکت خواهد شد: $F_{net}=ma\Rightarrow 5=2a_3\ \Rightarrow\ a_3=2.5m/s^2$

A ۶۳۵ ۴

خط فکری وقتی که جسم روی خط راست با سرعت ثابت در حرکت است نیروهای وارد بر آن متوازن است. نیروهای وارد بر جسم را به شکل ساده‌ای رسم کنید. به کمک متوازن بودن نیروها نیروی اصطکاک را حساب کنید سپس شتاب حرکت در حال جدید را به‌دست بیاورید.



۱ نیروی $F=50N$ و نیروی اصطکاک متوازن هستند از این‌رو:

$$f_k=F\xrightarrow{F=50N}f_k=50N$$

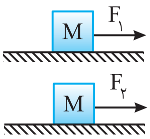
۲ وقتی نیروی $F=60N$ می‌شود، بنا به قانون دوم نیوتون:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow 60-50=10a\Rightarrow a=1m/s^2$$

A ۶۳۶ ۲

خط فکری ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون نیروهای F_1 و F_2 را برحسب M به‌دست می‌آوریم. در حالت دوم این نیروها بر هم عمود هستند و نیروی خالص را می‌توان به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست آورده و شتاب را در حالت جدید حساب کرد.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون:



$$F_1=Ma_1\xrightarrow{a_1=4m/s^2}F_1=4M$$

$$F_2=Ma_2\xrightarrow{a_2=3m/s^2}F_2=3M$$

۲ نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{16M^2+9M^2}=5M$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد: $F_{net}=2Ma\Rightarrow 5M=2Ma\Rightarrow a=2.5m/s^2$

A ۶۳۷ ۱

یادآوری ریاضی جمع برداری دو بردار $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$ و $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}$ خواهد شد: $\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}$

۱ نیروی خالص وارد بر جسم را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{F}_{net}=3(2\vec{i}+4\vec{j})\Rightarrow\vec{F}_{net}=6\vec{i}+12\vec{j}\qquad (I)$$

۲ نیروی خالص را از جمع دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_1+\vec{F}_2\Rightarrow\vec{F}_{net}=13\vec{i}+\alpha\vec{j}+\beta\vec{i}+5\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{net}=(13+\beta)\vec{i}+(5+\alpha)\vec{j}\quad (II)$$

۳ F_{net} در رابطهٔ (I) و (II) با هم برابرند از این‌رو می‌توان نوشت:

$$13+\beta=6\Rightarrow\beta=-7\ ,\ 5+\alpha=12\Rightarrow\alpha=7,\frac{\alpha}{\beta}=-1$$

بازی با سؤال **فرض کنید بر جسمی به جرم 0.5kg دو نیروی $\vec{F}_1=-6\vec{i}+8\vec{j}$ و $\vec{F}_2=-\frac{\vec{F}_1}{2}$ اثر می‌کند. بزرگی شتاب حرکت این جسم چقدر است؟ (تمام مقادیر در SI هستند.)**

مشابه کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۷/۵ ۴) ۲/۵

پاسخ **ابتدا بردار نیروی F_2 را به‌دست می‌آوریم:** $\vec{F}_2=-\frac{\vec{F}_1}{2}=3\vec{i}-4\vec{j}$

برایند نیروها خواهد شد: $\vec{F}_{net}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=-6\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{i}-4\vec{j}=-3\vec{i}+4\vec{j}$

اندازهٔ نیروی وارد بر جسم برابر است با: $F_{net}=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5N$

$F_{net}=ma\Rightarrow 5=0.5a\Rightarrow a=10m/s^2$ گزینهٔ ۲

A ۶۳۸ ۴

هرگاه سرعت جسم ثابت باشد نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{F}_{net}=0$$

$$\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=0\xrightarrow{\vec{F}_1=2\vec{i}-6\vec{j}}\vec{F}_2=-\vec{F}_1\Rightarrow\vec{F}_2=-2\vec{i}+6\vec{j}$$

A ۶۳۹ ۳

۱ ابتدا نیروی خالص جسم را از جمع بردارهای نیرو به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(20\vec{i}-50\vec{j})+(10\vec{i}+20\vec{j})+(-10\vec{j})=30\vec{i}-40\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{net}=30\vec{i}-40\vec{j}$$

۲ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow F_{net}=\sqrt{30^2+40^2}\Rightarrow F_{net}=50N$$

۳ شتاب حرکت جسم خواهد شد: $F_{net}=ma\Rightarrow a=\frac{F_T}{m}=\frac{50}{5}=10m/s^2$

بازی با سؤال جسمی به جرم $5kg$ تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_1=-15\vec{i}+8\vec{j}$ ، $\vec{F}_2=-21\vec{i}+19\vec{j}$ و $\vec{F}_3$ قرار گرفته و شتاب $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}$ را پیدا کرده است. اندازهٔ نیروی $\vec{F}_3$ کدام است؟ ریاضی - ۸۹

۱) ۴   ۲) ۲۰   ۳) ۲۸   ۴) ۴۸

پاسخ با توجه به قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_T=m\vec{a}\Rightarrow \vec{F}_T=5(-4\vec{i}+3\vec{j})\Rightarrow \vec{F}_T=-20\vec{i}+15\vec{j}$$

$$\vec{F}_T=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3\Rightarrow -20\vec{i}+15\vec{j}=-15\vec{i}+8\vec{j}-21\vec{i}+19\vec{j}+\vec{F}_3$$

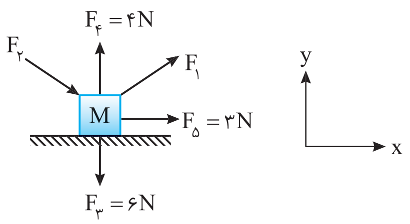
$$\Rightarrow \vec{F}_3=16\vec{i}-12\vec{j}\Rightarrow F_3=\sqrt{16^2+12^2}=4\sqrt{4^2+3^2}\Rightarrow F_3=4\times 5=20N$$

گزینهٔ ۲

۶۴۰ ۳ A

جسم در تعادل است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و برایند آن‌ها صفر است.

با توجه به شکل نیروی $\vec{F}_4=4\vec{j}$ ، نیروی $\vec{F}_3=-6\vec{j}$ و نیروی $\vec{F}_5=3\vec{i}$ است.

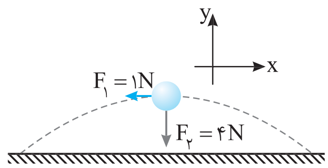


برایند نیروها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5=0\Rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_2+3\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{j}=0\Rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_2=-3\vec{i}+2\vec{j}$$

۶۴۱ ۲ A

خط فکری به شکل نگاه کنید. بر جسم دو نیرو یکی نیروی $F_1=1N$ در خلاف جهت محور x $(\vec{F}_1=-\vec{i})$ و دیگری نیروی وزن $F_2=4N$ در خلاف جهت محور y $(\vec{F}_2=-4\vec{j})$ وارد می‌شود بنابراین کافی است نیروی خالص را برحسب i و j به‌دست بیاورید سپس، شتاب را حساب کنید.



۱ ابتدا بردار نیروها را برحسب بردارهای یکه می‌نویسیم: $\vec{F}=-1\vec{i}-4\vec{j}$

۲ با توجه به قانون دوم نیوتون $\vec{F}=m\vec{a}$ داریم:

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow -\vec{i}-4\vec{j}=0/4\vec{a}\Rightarrow \vec{a}=-2/5\vec{i}-10\vec{j}$$

۶۴۲ ۴ A

نکته برایند دو نیرو وقتی بیشینه است که دو نیرو هم‌جهت باشند.

$$F_{max}=F_1+F_2$$

نکته برایند دو نیرو وقتی کمینه است که دو نیرو در خلاف جهت هم باشند.

$$F_{min}=F_2-F_1$$

بیشینه شتاب را حساب می‌کنیم:

$$F_{max}=F_1+F_2=10N \quad , \quad F_{max}=ma\Rightarrow 10=4a\Rightarrow a_{max}=2/5m/s^2$$

کمینه شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{min}=F_2-F_1=6-4=2N \ , \ F_{min}=ma\Rightarrow 2=4a\Rightarrow a_{min}=0/5m/s^2$$

شتاب جسم می‌تواند بین این دو مقدار باشد. $a_{min}\le a\le a_{max}\Rightarrow 0/5\le a\le 2/5$

تنها گزینهٔ (۴) که در آن $a=1m/s^2$ است در این بازه قرار دارد.

۶۴۳ ۱ A

نکته اندازهٔ برایند دو بردار عمود بر هم همواره از اندازهٔ تک‌تک آن‌ها بیشتر است.

اگر برایند نیروهای وارد بر جسم را F_{net} بگیریم:

$$F_{net}=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\Rightarrow F_{net}>F_1 \ , \ F_{net}>F_2$$

بنابراین اگر یکی از نیروها حذف شود تنها یک نیرو باقی می‌ماند که با توجه به اینکه مقدار این نیرو از F_{net} کمتر است پس شتاب جسم از $4m/s^2$ کمتر خواهد شد.

۶۴۴ ۲ A

خط فکری نکته مهمی که در حل این‌گونه مسایل وجود دارد این است که وقتی n نیرو متوازن هستند یعنی برایند آن‌ها صفر است همواره برایند $n-1$ بردار دلخواه از این بردارها هم‌اندازهٔ بردار nاُم است.

در صورت مسئله برایند سه نیروی $8N$، $6N$ و $12N$ صفر است و مفهوم آن این است در این مسئله سه نیرو به گونه‌ای قرار دارند که اندازه برایند $8N$ و $6N$ برابر $12N$ و اندازه برایند $8N$ و $12N$ برابر $6N$ و برایند $6N$ و $12N$ برابر $8N$ است. یعنی هرگاه نیروی $6N$ حذف شود، برایند دو نیروی $8N$ و $12N$ که باقی می‌مانند همان $F_{net}=6N$ خواهد بود. با توجه به این مفهوم مسئله به راحتی قابل حل است و کافی است بعد از حذف نیروی $6N$ شما نیروی خالص را برابر $6N$ قرار دهید.

سه نیرو متوازن می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases}|\vec{F}_1|=8N\\ |\vec{F}_2|=6N\\ |\vec{F}_3|=12N\end{cases} \xrightarrow{\text{نیرو متوازن}} \vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0\Rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_3=-\vec{F}_2 \quad (1)$$

هنگامی که نیروی $\vec{F}_2$ حذف می‌شود به جسم تنها دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ وارد خواهد شد:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_3=m\vec{a}\Rightarrow |\vec{F}_1+\vec{F}_3|=m|\vec{a}| \xrightarrow{|\vec{F}_1+\vec{F}_3|=|\vec{F}_2|=6N} 6=4a$$

$$\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

بازی با سؤال به یک جسم ۲ کیلوگرمی، هم‌زمان چهار نیرو به اندازه‌های ۲۰، ۱۵، ۱۰، ۸ نیوتون وارد می‌شود و جسم به حالت تعادل قرار می‌گیرد. اگر فقط نیروی ۱۵ نیوتونی حذف شود و دیگر نیروها با همان اندازه و جهت اثرگذار باشند، تغییر سرعت جسم بعد از ۲ ثانیه، چند متر بر ثانیه خواهد شد؟ خارج تجربی - ۸۵

۱) ۸   ۲) ۱۰   ۳) ۱۵   ۴) ۲۰

پاسخ جسم در تعادل است و برایند چهار نیروی $20N$، $15N$، $10N$ و $8N$ صفر است. از این‌رو هر نیرو هم‌اندازهٔ برایند سه نیروی دیگر است.

با حذف نیروی $15N$، سه نیروی $20N$، $10N$ و $8N$ باقی می‌مانند که برایند آن‌ها $15N$ است. بنابراین:

$$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow 15=2a\Rightarrow a=7/5m/s^2$$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow 7/5=\frac{\Delta v}{2}\Rightarrow \Delta v=15m/s$$

گزینهٔ ۳

۶۴۵ ۴ B

خط فکری دقت کنید سه نیرو در حال تعادل هستند یعنی برایند آن‌ها صفر است.

حال اگر هر نیرویی اضافه شود نیروی برایند دقیقاً برابر همان مقدار اضافه شده است.

وقتی جسم در تعادل است برایند نیروهای ۵، ۷ و ۱۰ نیوتونی صفر است. وقتی به نیروی ۷ نیوتونی، ۳ نیوتون اضافه شود، یعنی برایند نیروها برابر $3N$ می‌شود. بنابراین:

$$F=ma\Rightarrow 3=2a\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

۶۴۶ ۳ A

خط فکری هرگاه در مسئله زمان داده شود یا از شما زمان خواسته شود یعنی شما باید به سراغ روابط حرکت‌شناسی بروید. بنابراین شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست بیاورید سپس به کمک معادله سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت، زمانی که سرعت $15m/s$ می‌شود را به‌دست بیاورید.

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$F=ma \xrightarrow{m=400kg,\ F=800N} 800=400a\Rightarrow a=2m/s^2$$

۲ زمان را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow 15=2t+0\Rightarrow t=7/5s$$

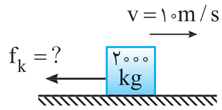
B ۶۴۷ ۴

۱ سرعت خودرو را برحسب m/s می‌نویسیم.

$$v=36\frac{km}{h}\times\frac{1h}{3600s}\times\frac{10^3m}{1km}\Rightarrow v=\frac{36}{3/6}\Rightarrow v=10m/s$$

۲ شتاب توقف جسم را به کمک حرکت‌شناسی از رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم. $v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow[\Delta x=4m]{v=0}0-10^2=2a\times4\Rightarrow a=-12/5m/s^2$

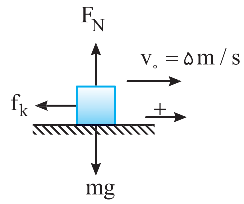
۳ نیروی خالصی که سبب توقف خودرو شده نیروی اصطکاک است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:



$$F_{net}=ma\Rightarrow0-f_k=2000\times-12/5\Rightarrow f_k=25000N$$

A ۶۴۸ ۴

۱ نیروی وارد بر جسم که مانع حرکت می‌شود و به جسم شتاب کندشونده می‌دهد، نیروی اصطکاک است. با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$$F_{خالص}=ma\Rightarrow-f_k=ma$$
$$\Rightarrow-0/5=0/2a\Rightarrow a=-2/5m/s^2$$

۲ اکنون جابه‌جایی را در ثانیهٔ اول به کمک معادله حرکت با شتاب ثابت حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{2}(-2/5)(1)+5(1)=3/75m$$

بازی با سؤال **اتومبیلی به جرم ۴ تُن با سرعت $20m/s$ روی سطح افقی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. این اتومبیل در اثر ترمز با شتاب ثابت در مدت $4s$ متوقف می‌شود. نیروی ترمز چند نیوتون است؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲۰۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰

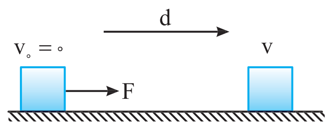
پاسخ **ابتدا شتاب ترمز اتومبیل را محاسبه می‌کنیم:**

$$v_2=at+v_1\Rightarrow a=-5m/s^2\xrightarrow{F_{net}=ma}F_{ترمز}=ma$$
$$\Rightarrow4\times10^3\times5=20\times10^3=20000N$$

گزینه ۱

B ۶۴۹ ۱

نیروی خالص وارد بر جسم نیروی افقی F است.



۱ بنا به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم: $F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}$

۲ به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، v را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2-0=2(\frac{F}{m})d\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

A ۶۵۰ ۱

نیروی وارد بر جسم ثابت است بنابراین شتاب حرکت نیز ثابت است. جسم از حال سکون $v_0=0$ در مدت t سرعتش به v رسیده است. چون شتاب ثابت است پس تغییر سرعت در بازه‌های زمانی یکسان t ثابت است، بنابراین همین مدت طول می‌کشد تا سرعت از v به $2v$ برسد.

$$F_{ثابت}=ma_{ثابت}\begin{cases}v=at+0\Rightarrow t=\frac{v}{a}\\2v=at'+v\Rightarrow t'=\frac{v}{a}\end{cases}\Rightarrow t'=t$$

A ۶۵۱ ۳

۱ ابتدا با توجه به مسافت طی شده و تندی نهایی شتاب حرکت را به دست می‌آوریم: $v_1^2-v_0^2=2a\Delta x_1\Rightarrow100-0=2a\times(10)\Rightarrow a=5m/s^2$

۲ چون نیرو ثابت است، با توجه به رابطهٔ $F=ma$ شتاب نیز همان $a=5m/s^2$ خواهد شد. بنابراین: $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x_2\Rightarrow400-100=2\times5\times\Delta x_2\Rightarrow\Delta x_2=30m$

A ۶۵۲ ۲

خط فکری تندی اولیه هر دو هنگام ترمز v است و قرار است هر دو متحرک در جابه‌جایی یکسان d متوقف شوند. با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان $(v^2-v_0^2=2a\Delta x)$ باید شتاب توقف موتور و خودرو یکسان باشد.

بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}F_{خودرو}=m_{خودرو}a\\F_{موتور}=m_{موتور}a\end{cases}\Rightarrow\frac{F_{موتور}}{F_{خودرو}}=\frac{m_{موتور}}{m_{خودرو}}\xrightarrow{m_{خودرو}=3/5m_{موتور}}$$

$$\frac{F_{موتور}}{F}=\frac{1}{3/5}\Rightarrow F_{موتور}=\frac{F}{3/5}\Rightarrow F_{موتور}=\frac{2F}{7}$$

A ۶۵۳ ۴

خط فکری دقت کنید در مسئله t_1 و t_2 داده شده است، بنابراین باید به سراغ فرمول‌های حرکت‌شناسی در حرکت با شتاب ثابت برویم. شتاب حرکت را در هر حالت برحسب Δx و t حساب کنید و نیرو را برحسب قانون دوم بنویسید.

۱ شتاب حرکت هر متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow a_1=\frac{2\Delta x_1}{t_1^2}\ ,\ a_2=\frac{2\Delta x_2}{t_2^2}$$

۲ اکنون شتاب‌ها را در قانون دوم نیوتون قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}F_1=m_1a_1\Rightarrow F_1=m_1\frac{2\Delta x}{t_1^2}\\F_2=m_2a_2\Rightarrow F_2=m_2\frac{2\Delta x}{t_2^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1t_2^2}{m_2t_1^2}$$

A ۶۵۴ ۲

۱ جرم میخ نسبت به چکش کم است. وقتی با چکش به میخ ضربه می‌زنیم و میخ $5mm$ در چوب فرو می‌رود یعنی سرعت چکش طی مسافت $5mm$ از $4m/s$ به صفر می‌رسد. بنابراین شتاب توقف چکش خواهد شد:

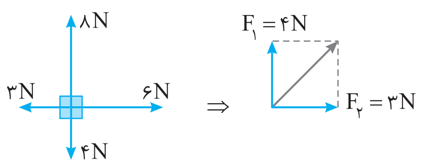
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-16=2a(5\times10^{-3})\Rightarrow a=-1600m/s^2$$

۲ نیرویی که سبب توقف چکش شده همان نیروی مقاومت متوسط چوب در مقابل حرکت میخ و چکش است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{m=0/25kg}|F|=0/25\times|-1600|\Rightarrow F_{net}=400N$$

A ۶۵۵ ۲

۱ ابتدا برایند نیروها را مشخص می‌کنیم: $F_T=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{16+9}=5N$



۲ حال با توجه به نیروی برایند، شتاب جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$F_T=ma\Rightarrow5=2a\Rightarrow a=2/5m/s^2$$

۳ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده از این‌رو:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2/5\times5+0\Rightarrow v=12/5m/s$$

نکته جسمی که از حال سکون تحت تأثیر نیروی خالص و ثابتی شروع به حرکت کند همواره حرکت آن روی خط راست با شتاب ثابت و در جهت نیروی خالص وارد بر جسم است.

جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و جهت حرکت (سرعت) در جهت نیرو است و می‌دانیم جهت شتاب نیز در جهت برایند نیروها قرار دارد بنابراین جهت سرعت ↗ است.

B | ۶۵۶ | ۱

خط فکری وقتی نیروهای وارد بر جسم متوازن باشد $(F_{net}=۰)$ در این صورت شتاب جسم نیز صفر است. بنابراین کافی است معادلهٔ شتاب زمان را برابر صفر قرار دهید و اولین باری که شتاب بعد از $t=۰$ صفر می‌شود را به کمک حل معادلهٔ مثلثاتی به‌دست بیاورید.

ریشهٔ معادلهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma \xrightarrow{F_{net}=۰} a=۰ \xrightarrow{a=-۱۶\pi^۲\sin ۴\pi t} ۰=-۱۶\pi^۲\sin ۴\pi t$$

$$\Rightarrow ۴\pi t=k\pi \Rightarrow t=\frac{k}{۴} \qquad k=۱,۲,\cdots$$

بنابراین اولین لحظه بعد از $t=۰$ برابر است با $t=\frac{۱}{۴}s$.

A | ۶۵۷ | ۳

یادآوری در حرکت روی خط راست، لحظه‌ای جهت سرعت تغییر می‌کند که سرعت به‌طور لحظه‌ای صفر شده و تغییر علامت دهد.

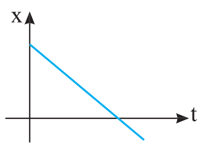
خط فکری معادلهٔ مکان زمان درجه ۲ یعنی حرکت با شتاب ثابت بنابراین وقتی شتاب ثابت باشد، نیروی خالص وارد بر جسم در همهٔ نقاط مسیر از جمله در لحظهٔ تغییر جهت سرعت ثابت است. با مقایسه معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب را حساب کرده و نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست بیاورید.

معادلهٔ مکان - زمان متحرک درجهٔ دوم می‌باشد یعنی حرکت با شتاب ثابت می‌باشد. شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=t^۲-۶t+۸ \\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a=۱ \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

نیروی خالص‌واردبرجسم‌خواهدشد: $F_{net}=ma \xrightarrow{m=۴kg} F_{net}=۴\times۲=۸N$

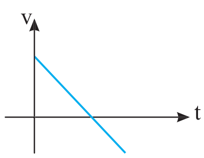
A | ۶۵۸ | ۲



نمودار $x-t$ به صورت خطی می‌باشد بنابراین حرکت متحرک با سرعت ثابت و شتاب صفر است، با توجه به قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$، برایند نیروها صفر می‌باشد و نیروها متوازن هستند.

B | ۶۵۹ | ۱

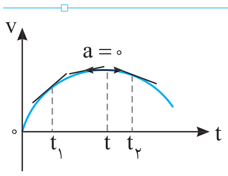
یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر است با شتاب متحرک.



شیب نمودار ثابت است بنابراین این حرکت دارای شتاب ثابت بوده و نیروی خالص $(F_{net}=ma)$ وارد بر آن نیز ثابت است.

دقت کنید که در لحظهٔ قطع نمودار علامت (یا جهت) سرعت عوض شده است ولی شتاب و نیرو تغییر نکرده است.

B | ۶۶۰ | ۴



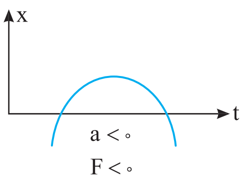
خط فکری هرگاه به شما نمودار مکان - زمان، سرعت - زمان و ... داده شود و از شما دربارهٔ چگونگی تغییر نیرو سؤال شود شما باید به سراغ چگونگی تغییر شتاب بروید.

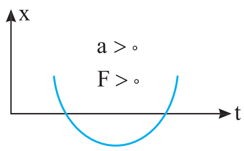
نکته در نمودار سرعت - زمان شیب خط مماس بر نمودار برابر شتاب لحظه‌ای است. شیب خط مماس بر نمودار از لحظهٔ $t_۱$ تا t در حال کاهش و از لحظهٔ t تا $t_۲$ اندازهٔ شیب خط مماس در حال افزایش است و بنا به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ بزرگی نیروی خالص وارد بر جسم ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

A | ۶۶۱ | ۱

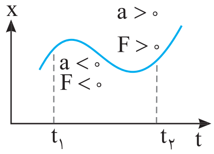
یادآوری بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$، همواره نیرو و شتاب حاصل از آن هم‌جهت هستند. از طرفی دهانهٔ منحنی مکان - زمان بیان‌گر علامت شتاب (مشتق دوم مکان) است.

اگر جهت دهانه منحنی مکان - زمان رو به بالا باشد شتاب جسم و در نتیجه نیروی وارد بر جسم مثبت است و اگر جهت دهانه منحنی مکان - زمان رو به پایین باشد شتاب جسم و در نتیجه نیروی وارد بر جسم منفی است.





اکنون به نمودار مکان - زمان تست دقت کنید. ابتدا دهانه رو به پایین بوده و بنابراین شتاب و درنتیجه نیروی وارد بر جسم منفی است و سپس دهانه (تقعر) نمودار رو به بالا بوده، شتاب و در نتیجه نیرو مثبت می‌شود، بنابراین نیروی وارد بر جسم یک بار تغییر جهت داده است.



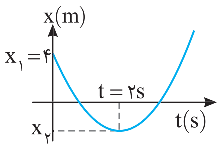
B | ۶۶۲ | ۲

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$F=ma \xrightarrow{F=۱۲N, m=۴kg} ۱۲=۴a \Rightarrow a=۳m/s^۲$$

نکته در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان زمان سرعت صفر است.

۲ در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت متحرک صفر می‌شود (خط مماس بر نمودار $x-t$ به‌صورت افقی می‌باشد).



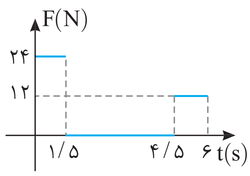
$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=۳\times۲+v_۰ \Rightarrow v_۰=-۶m/s$$

حال با توجه به سرعت اولیه مکان، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۱ \Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۲}\times۳\times(۲)^۲-۶(۲)+۴ \Rightarrow x_۲=-۲m$$

A | ۶۶۳ | ۴

خط فکری به نمودار دقت کنید. در بازهٔ صفر تا $۱/۵s$ نیروی وارد بر جسم $۲۴N$ است و از $۱/۵s$ تا $۴/۵s$ نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. یعنی از $۱/۵s$ تا $۴/۵s$ سرعت متحرک ثابت و برابر سرعت در لحظهٔ $t=۱/۵s$ است. بنابراین کافی است شما سرعت را در $t=۱/۵s$ حساب کنید.



۱ شتاب حرکت جسم را در بازه صفر تا $۱/۵s$ به‌دست می‌آوریم.

$$F=ma \xrightarrow{m=۳kg} ۲۴=۳a \Rightarrow a=۸m/s^۲$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱/۵s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \xrightarrow{v_۰=۰} v=۸\times۱/۵+۰ \Rightarrow v=۱۲m/s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=۳s$ سرعت $۱۲m/s$ است.

B | ۶۶۴ | ۱

خط فکری برای آن‌که نمودار نیرو - زمان را از روی نمودار سرعت - زمان رسم کنید کافی است شتاب در هر بازه را حساب کرده و با ضرب جرم در شتاب، نیرو را به‌دست آورده $(F=ma)$ نمودار نیرو زمان را رسم کنید.

۱ در بازهٔ زمانی صفر تا ۳ ثانیه شتاب ثابت است، پس نیرو ثابت و برابر است با:

$$F=ma=m\frac{v-v_۰}{t}=۲\times\frac{۳-(-۶)}{۳}=۶N$$

۲ در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه حرکت یکنواخت پس نیرو صفر است. $(F=۰)$

۳ در بازهٔ زمانی ۵ تا ۷ ثانیه نیز شتاب ثابت پس نیرو ثابت و برابر است با:

$$F=ma=۲\times\frac{۰-۳}{۷-۵}=-۳N$$

بنابرین گزینهٔ (۱) پاسخ مسئله است.

A ۶۶۵ ۳

نیرویی که شخص اول بر دوم وارد می‌کند به شخص دوم شتابی در جهت محور x ها می‌دهد:

$\vec{F}_{12}=m_2\vec{a}_2 \Rightarrow 100\vec{i}=50\vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_2=2\vec{i}$

بنا به قانون سوم نیوتون همین مقدار نیرو توسط شخص دوم بر شخص اول در خلاف جهت محور x ها وارد می‌شود و به شخص اول شتابی در خلاف جهت محور x ها خواهد داد:

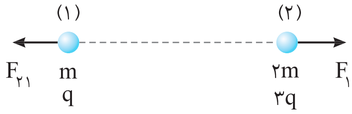
$\vec{F}_{21}=m_1\vec{a}_1 \Rightarrow -100\vec{i}=75\vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_1=-\frac{4}{3}\vec{i}$

A ۶۶۶ ۳

با توجه به قانون سوم نیوتون نیروی الکتریکی که ذرهٔ m با بار الکتریکی q به ذرهٔ 2m با بار الکتریکی 3q وارد می‌کند برابر نیرویی است که بار 3q به بار q وارد کرده است. بنابراین:

$|\vec{F}_{12}|=|\vec{F}_{21}|=F$

حال با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \text{جسم} \Rightarrow F=ma_1 \Rightarrow a_1=\frac{F}{m}\\ (2)\ \text{جسم} \Rightarrow F=2ma_2 \Rightarrow a_2=\frac{F}{2m}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=2$$

A ۶۶۷ ۳

خط فکری بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص (۱) بر شخص (۲) وارد می‌کند هم‌اندازه و در خلاف جهت نیرویی است که شخص (۲) بر شخص (۱) وارد می‌کند. نیروها یکسان است بنابراین شخصی که دارای جرم کمتری است بنا به قانون دوم نیوتون شتاب بیشتری خواهد داشت و زودتر بـه نقطهٔ O می‌رسد و از آن عبور می‌کند. حال به حل مسئله دقت کنید.

نیرویی که توسط طناب به هر دو شخص وارد می‌شود یکسان است:

$$\left.\begin{array}{l}F_1=m_1a_1 \Rightarrow a_1=\frac{F_1}{m_1}\\ F_2=m_2a_2 \Rightarrow a_2=\frac{F_2}{m_2}\end{array}\right\} \xrightarrow[F_1=F_2]{m_1>m_2} a_1<a_2$$

دو جسم در ابتدا ساکن هستند و $a_1<a_2$ است پس متحرک (۲) سریع‌تر حرکت می‌کند و هنگام رسیدن دو متحرک به هم متحرک (۲) جابه‌جایی بیشتری انجام می‌دهد بنابراین دو متحرک بین O و A به یکدیگر می‌رسند.

بازی با سؤال **دو شخص A و B هم‌قد با کفش‌های چرخ‌دار در حالت ایستاده در یک سالن مسطح و صاف دو سر طنابی را گرفته و هر یک دیگری را به سوی خود می‌کشد. کدام‌یک زودتر به خط پایان که وسط فاصلهٔ میان آن‌ها است می‌رسد؟ (جرم شخص A بیشتر از جرم شخص B است.)**

۱) شخص A **۲)** شخص B

۳) هر دو با هم می‌رسند. **۴)** نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

پاسخ **با توجه به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص A به B وارد می‌کند برابر نیرویی است که شخص B به A وارد می‌کند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:**

$\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA}$

حال با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$a=\frac{F}{m} \xrightarrow{|F_{AB}|=|F_{BA}|\ ,\ m_A>m_B} a_B>a_A$

پس شتاب B از شتاب A بیشتر است. بنابراین شخص B زودتر از شخص A به وسط طناب می‌رسد.

گزینهٔ ۲

B ۶۶۸ ۴

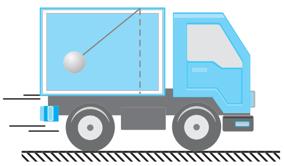
هرگاه جسم ساکن و یا دارای حرکت با سرعت ثابت باشد، نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده $(F_{net}=0)$ یعنی جسم در حال تعادل به سر می‌برد. بنابراین از نگاه قانون اول نیوتون حالت سکون و یا حرکت با سرعت ثابت هم‌ارز هستند و گزینهٔ (۱) درست است. بنا به قانون اول نیوتون اگر نیروی خالصی بر جسم وارد نشود اگر جسم ساکن است ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت است به حرکت روی خط راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد یعنی جسم تمایل دارد وضع موجود را حفظ کند، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نیز درست است.

A ۶۶۹ ۱

در قانون اول نیوتون بیان می‌شود که اگر جسم در حال حرکت است برای ادامه حرکت نیاز به نیرو ندارد و اگر بر آن نیرو وارد نشود، جسم به حرکت خود ادامه می‌دهد و برای ادامهٔ حرکتش به ارائهٔ دلیل نیازی نیست. اما اگر حرکتش تغییر کند، باید برای این تغییر به دنبال علت بود و گزینهٔ (۱) درست است.

بنابر قانون دوم نیوتون، نیرو با آهنگ تغییر سرعت یعنی شتاب متناسب است نه با خود تغییر سرعت $(\vec{F}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t})$ و گزینهٔ (۲) نادرست است. بنابر قانون سوم نیوتون نیروهای کنش و واکنش بر دو جسم وارد شده، بنابراین نمی‌توان گفت یکدیگر را خنثی می‌کنند و گزینهٔ (۳) نیز نادرست است.

A ۶۷۰ ۱

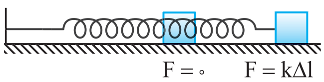


طبق قانون اول اجسام تمایل دارند که وضعیت حرکت خود را حفظ کنند. بنابراین می‌توان گفت هنگامی جسم درون کامیون قرار دارد همواره از تغییر حرکت لحظه‌ای کامیون جا می‌ماند. یعنی اگر کامیون ترمز کند (حرکت کندشونده) آونگ طبق سرعت قبلی به حرکت خود ادامه می‌دهد، پس به جلو پرتاب می‌شود و اگر کامیون تندشونده به سمت جلو حرکت کند آونگ با همان سرعت کمتر قبلی در حال حرکت است، پس از حرکت کامیون عقب می‌ماند و به سمت عقب پرتاب می‌شود و با توجه به شکل که در آن آونگ به سمت عقب منحرف شده است نتیجه می‌گیریم که کامیون با حرکت تندشونده رو به جلو در حرکت است.

C ۶۷۱ ۳

گزینهٔ (۱): اگر جسمی را در راستای قائم رو به بالا پرتاب کنیم، سرعت گلوله در اوج، صفر است و جسم به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است، اما نیروی وزن همچنان به جسم وارد می‌شود و شتاب حرکت برابر g است، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. / گزینهٔ (۲): هرگاه قطاری با سرعت ثابت یک مسیر خمیده را دور بزند، چون جهت بردار سرعت در حال تغییر است، حرکت شتابدار است و برایند نیروی وارد بر جسم صفر نیست. در این صورت گزینهٔ (۲) نادرست است، زیرا کلمهٔ الزاماً را به‌کار برده است.

گزینهٔ (۳): به وزنه و فنر روبه‌رو دقت کنید، اگر وزنه را به راست بکشیم و رها کنیم، هرچه وزنه به محل اولیه (تعادلش) نزدیک می‌شود تغییر طول فنر کمتر شده و نیروی کشسانی فنر کمتر می‌شود، در حالی‌که تا رسیدن وزنه به محل تعادل، سرعت آن در حال افزایش است، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



در مورد گزینهٔ (۴): اگر گلوله‌ای را در شرایط خلأ تحت زاویهٔ α مطابق شکل پرتاب کنیم، نیروی وارد بر جسم در تمام مسیر ثابت و برابر mg است. اما حرکت روی مسیر خمیده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است، زیرا کلمهٔ الزاماً در آن به‌کار رفته است.

A ۶۷۲ ۳

یادآوری در سال دهم در کتاب فیزیک (۱) خوانده‌اید که یکاها باید در دو طرف یک رابطهٔ فیزیکی دارای سازگاری باشند یعنی در دو طرف یکاها باید یکسان باشند.
در رابطهٔ $v=\alpha Ft$، یکای سرعت m/s، یکای نیرو نیوتون (N) و یکای t، ثانیه است. اما در گزینه‌ها خبری از نیوتون (N) نیست. بنابراین باید یکای فرعی نیرو یعنی kgm/s^2 را در بررسی خود استفاده کنید.

$$v=\alpha Ft\Rightarrow[m/s]=\alpha[kg\,m/s^2][s]\Rightarrow\alpha=[\frac{1}{kg}]$$

A ۶۷۳ ۲

۱ جرم هر جسم را بر حسب نیرو و شتاب به‌دست می‌آوریم.

جسم (۱): $F=m_1a_1\Rightarrow m_1=\frac{F}{a_1}$

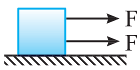
جسم (۲): $F=m_2a_2\Rightarrow m_2=\frac{F}{a_2}$

۲ شتاب نیروی F وارد بر جسمی به جرم (m_1+m_2) خواهد شد:

$$F=(m_1+m_2)a'\Rightarrow F=(\frac{F}{a_1}+\frac{F}{a_2})a'\Rightarrow F=F(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})a'\Rightarrow a'=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$$

A ۶۷۴ ۱

در حالت اول دو نیرو هم‌جهت و مساوی هستند، آن‌ها را با حرف F نمایش می‌دهیم. نیروی خالص خواهد شد:



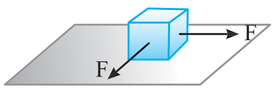
$F_{net}=F+F\Rightarrow F_{net}=2F$

بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow 2F=ma\xrightarrow{a=6m/s^2}2F=m\times6\Rightarrow F=3m\quad(I)$$

در حالت دوم دو نیروی افقی بر هم عمود و نیروی خالص را از رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم.

$$F'_{net}=\sqrt{F^2+F^2}=\sqrt{2}F\xrightarrow{(I)}F'_{net}=3\sqrt{2}m$$

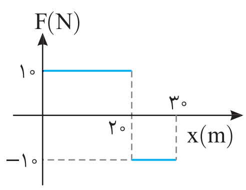


شتاب در این حالت را به‌دست می‌آوریم.

$$F'_{net}=ma'\Rightarrow 3\sqrt{2}m=ma'\Rightarrow a'=3\sqrt{2}m/s^2$$

B ۶۷۵ ۲

خط فکری نمودار داده شده، نمودار نیرو – مکان است. در صورت مسئله نیز از زمان حرفی زده نشده بنابراین فرمولی که از حرکت‌شناسی برای حل این مسئله باید کاندید کنیم رابطهٔ مستقل از زمان است. شتاب را در هر قسمت به کمک قانون دوم نیوتون حساب کنید (برحسب جرم جسم m) سپس به کمک رابطهٔ مستقل از زمان مسئله را حل کنید.



۱ طبق قانون دوم نیوتون $F=ma$ است. پس شتاب در قسمت اول حرکت برابر $a_1=\frac{10}{m}$ و در قسمت دوم حرکت $a_2=-\frac{10}{m}$ است.

۲ برای قسمت اول حرکت به کمک معادلهٔ سرعت – مکان (مستقل از زمان) خواهیم داشت:

$$v_1^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_1^2-0^2=2\times\frac{10}{m}\times20\Rightarrow v_1^2=\frac{400}{m}$$

۳ برای قسمت دوم حرکت نیز می‌توان نوشت:

$$v_2^2-v_1^2=2a_2\,\Delta x\Rightarrow 100-\frac{400}{m}=2\times(-\frac{10}{m})\times10\Rightarrow 100-\frac{400}{m}=-\frac{200}{m}$$

$$\Rightarrow 100=\frac{200}{m}\Rightarrow m=2kg$$

B ۶۷۶ ۳

بنا به قانون سوم هنگام شلیک، نیرویی که گلوله و ارابهٔ توپ بر هم وارد می‌کنند برابر و در خلاف جهت هم است، برای نیروهای وارد بر ارابهٔ توپ و گلوله می‌توان نوشت:

$$F_1=-F_2\xrightarrow{F=ma}m_1a_1=-m_2a_2\Rightarrow a=\frac{v-v_0}{t}$$

$$\Rightarrow m_1(\frac{v_1-0}{t})=-m_2(\frac{v_2-0}{t})\Rightarrow m_1v_1=-m_2v_2$$

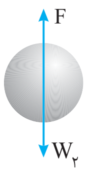
$$\Rightarrow|0/5\times2000|=|-80\times v_2|\Rightarrow v_2=12/5m/s$$

B ۶۷۷ ۱

خط فکری در قانون سوم نیوتون برای بررسی نیروی واکنش شما باید ابتدا مشخص کنید نیروی وارد بر جسم توسط کدام جسم بر جسم مورد نظر اعمال می‌شود به‌طور مثال برای یافتن واکنش نیروی وزن ابتدا باید از خود بپرسید نیروی وزن توسط چه جسمی بر جسم مورد نظر وارد شده تا بتوانید واکنش نیروی وزن را بیان کنید.
نیروی وزن (mg) نیرویی است که کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌کند و واکنش آن توسط جسم بر کرهٔ زمین وارد می‌شود از این رو گزارهٔ (الف) نادرست است.
در شکل T_2 نیروی کشش نخ است که توسط نخ بر m_2 وارد می‌شود در نتیجه واکنش T_2 نیرویی است که جسم m_2 بر نخ وارد می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.
در شکل T_4 نیروی کششی است که نخ بر دیوار وارد می‌کند، واکنش آن توسط دیوار بر نخ وارد می‌شود و گزارهٔ (پ) درست است.
T_3 بر m_2 و T_4 بر دیوار وارد می‌شوند و نمی‌توانند واکنش هم باشند و گزارهٔ (ت) نادرست است.

C ۶۷۸ ۲

اکنون باید به ذهن خود فشار آورید تا قانون سوم را بهتر درک کنید.
نیروهای وارد بر جسم را بررسی می‌کنیم.



۱ نیروی وزن W_2 که توسط کرهٔ زمین بر جسم رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیرویی که توسط مایع بر جسم رو به بالا وارد می‌شود که آن را حرف F نمایش داده‌ایم.

قطعاً نیروی F از W_2 کوچک‌تر است $(F<W_2)$ زیرا جسم با شتاب ثابت رو به پایین در حرکت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم رو به پایین است.

۳ بنا به قانون سوم نیوتون وقتی مایع به جسم نیروی F را رو به بالا وارد می‌کند جسم همان نیروی F را رو به پایین بر مایع وارد می‌کند.

۴ به مایع درون ظرف دو نیرو یکی وزن $W_{\text{مایع}}$ و دیگری F رو به پایین وارد می‌شود.

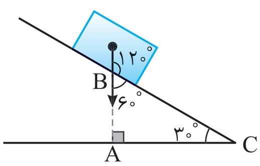
۵ عددی که نیروسنج نشان می‌دهد مجموع نیروی وزن مایع و ظرف (W_1) و نیروی واکنش F است از این‌رو خواهیم داشت:

$$W_3=W_1+F\xrightarrow{F<W_2}W_3<W_1+W_2\Rightarrow W_1+W_2>W_3$$

پنجره ۲

A ۶۷۹ ۲

یادآوری نیروی وزن، نیرویی است که توسط کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌شود. این نیرو همواره در امتداد قائم و رو به پایین است.



نیروی وزن را رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا خط افقی را قطع کند و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را تشکیل می‌دهیم. در این صورت اندازهٔ $\hat{B}$، زاویهٔ بین نیروی وزن و امتداد سطح شیبدار مطابق شکل 60° است.

A ۶۸۰ ۴

جرم از ویژگی‌های ذاتی جسم بوده و در مکان‌های مختلف تغییر نمی‌کند بنابراین اختلاف جرم ثابت می‌ماند و برابر ۴kg است. اما نیروی وزن برابر $W=mg$ است یعنی نیروی وزن وارد بر جسم به شتاب گرانش سیاره‌ای که جسم روی سطح آن قرار دارد بستگی دارد. از این‌رو اختلاف وزن آن بر سطح سیاره برابر است با:

$$\Delta W_{\text{سیاره}}=|m_A-m_B|g_{\text{سیاره}}\xrightarrow{g_{\text{سیاره}}=\frac{۳}{۴}\times ۱۰=۷/۵m/s^۲}$$

$$\Delta W_{\text{سیاره}}=۴\times ۷/۵=۳۰N$$

A ۶۸۱ ۴

۱ جرم جسم ثابت است بنابراین تغییر وزن مربوط به شتاب گرانش است، از این رو تغییر وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{\text{مریخ}}-W_{\text{ماه}}=mg_{\text{مریخ}}-mg_{\text{ماه}}\xrightarrow{(g_{\text{ماه}}=۱/۶N/kg,\ g_{\text{مریخ}}=۳/۶N/kg)}$$

$$\Delta W=۳/۶m-۱/۶m=۲m$$

۲ درصد تغییرات برابر است با: $\frac{W_{\text{مریخ}}-W_{\text{ماه}}}{W_{\text{ماه}}}\times ۱۰۰=\frac{۲m}{۱/۶m}\times ۱۰۰=۱۲۵٪$

بنابراین نیروی وزن ۱۲۵٪ افزایش می‌یابد.

A ۶۸۲ ۲

یادآوری بنا به تعریف چگالی یک جسم برابر $\rho=\frac{m}{V}$ است. حجم مکعب برابر طول یک ضلع به توان ۳ است. $V=a^۳$

۱ حجم مکعب برابر است با: $V=۲۰^۳\Rightarrow V=۸\times ۱۰^۳cm^۳$

۲ جرم جسم را به کمک چگالی حساب می‌کنیم.

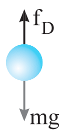
$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow ۵=\frac{m}{۸\times ۱۰^۳}\Rightarrow m=۴۰\times ۱۰^۳g\Rightarrow m=۴۰kg$$

۳ وزن جسم خواهد شد: $W=mg\Rightarrow W=۴۰\times ۱۰=۴\times ۱۰^۲N$

A ۶۸۳ ۲

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\xrightarrow[\Delta y=۲۰m]{v=۱۵m/s}۲۲۵-۰=۲a\times ۲۰\Rightarrow a=۵/۶۲۵m/s^۲$$

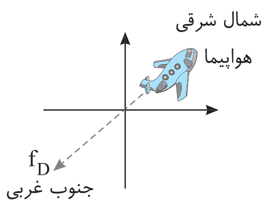


اگر جسم تنها تحت تأثیر نیروی وزن سقوط می‌کرد شتاب حرکت آن برابر شتاب گرانش $(g\sim ۱۰m/s^۲)$ بود اما اکنون شتاب از شتاب گرانش کمتر است $(a<g)$ بنابراین حداقل یک نیرو روبه بالا در خلاف جهت حرکت جسم مطابق شکل باید بر جسم وارد شده باشد. در نتیجه تعداد نیروهای وارد بر جسم حداقل دو نیرو است.

A ۶۸۴ ۳

نکته نیروی مقاومت هوا همواره خلاف جهت حرکت بر جسم وارد می‌شود.

هواپیما در حال حرکت به سمت شمال شرقی است، نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت هواپیما بر آن وارد می‌شود. از این‌رو جهت نیروی مقاومت هوا در جهت جنوب غربی است.



B ۶۸۵ ۲

نکته نیروی مقاومت شاره (هوا) به تندی جسم و ابعاد و شکل جسم بستگی دارد.

۱ مساحت وجهی از جسم که مقاومت هوا بر آن وارد می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$A_A=\frac{۲}{۳}a\times\frac{۳}{۲}a=a^۲\ ,\ A_B=۲a\times a=۲a^۲$$

سطح $A_B>A_A$ است از این رو نیروی مقاومت شاره وارد بر جسم B بزرگتر است.

$$f_{D_B}>f_{D_A}$$

۲ جرم دو جسم یکسان است، بنابراین نیروی وزن وارد بر دو جسم یکی است.

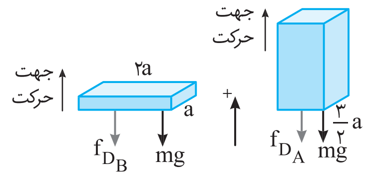
$$W_A=W_B$$

۳ نیروی خالص وارد بر هر جسم $(F_{net}=-(W+f_D))$ است.

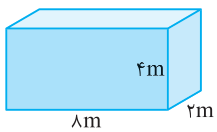
$$-(mg+f_{D_B})=ma_B\Rightarrow a_B=-g-\frac{f_{D_B}}{m}$$

$$-(mg+f_{D_A})=ma_A\Rightarrow a_A=-g-\frac{f_{D_A}}{m}$$

نیروی مقاومت f_{D_B} بیشتر از f_{D_A} است، بنابراین شتاب کندشوندهٔ جسم B بیشتر از جسم A بوده و زودتر متوقف می‌شود.



بازی با سؤال مکعب مستطیل روبه‌رو را از ارتفاعی مشخص در هوا به سمت زمین رها می‌کنیم. اگر فرض شود در طول سقوط مکعب‌مستطیل در هوا نمی‌چرخد، آن را از طرف کدام وجه رها کنیم که با سرعت کمتری به زمین برسد؟



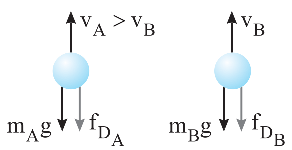
۱) ۲×۸ ۲) ۴×۸
۳) ۲×۴ ۴) سرعت رسیدن به زمین در هر سه حالت یکسان است.

پاسخ هرچه مساحت سطح جلوی جسم بیشتر باشد برخورد مولکول‌های هوا با جسم بیشتر می‌شود پس نیروی مقاومت بیشتری به جسم وارد شده و سرعت رسیدن آن به زمین کمتر است. بنابراین کمترین تندی برای زمانی است که مکعب را از وجه ۸×۴ به سمت پایین رها کنیم. **گزینهٔ ۲**

B ۶۸۶ ۲

نکته هر چه تندی جسم بیشتر باشد نیروی مقاومت شاره (هوا) وارد بر آن بیشتر است.

خط فکری ابتدا نیروی وارد بر هر جسم را در یک شکل ساده نشان دهید سپس برایند نیروهای وارد بر هر جسم را بررسی کنید.



۱ در لحظه‌ای که $v_A>v_B$ است نیروی مقاومت هوا وارد بر A از نیروی مقاومت هوا وارد بر B بزرگتر است.

$$f_{D_A}>f_{D_B}$$

۲ قانون دوم نیوتون را برای هر جسم می نویسیم و شتاب هریک را به‌دست می‌آوریم و به کمک نیروی خالص وارد بر آن‌ها شتاب‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

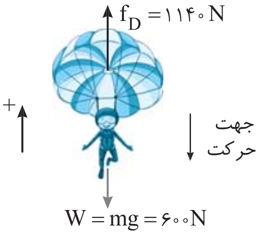
$$f_{net}=ma\begin{cases}\xrightarrow{A}|m_Ag+f_{D_A}|=m|a_A|\Rightarrow|a_A|=|g+\frac{f_{D_A}}{m}|\\ \xrightarrow{B}|m_Bg+f_{D_B}|=m|a_B|\Rightarrow|a_B|=|g+\frac{f_{D_B}}{m}|\end{cases}$$

۳ $f_{D_A}>f_{D_B}$ است بنابراین $|a_A|>|a_B|$ خواهد بود.

A ۶۸۷ ۴

۱ نیروی وزن چترباز را حساب می‌کنیم:

$$W=mg\xrightarrow{m=۶۰kg}W=۶۰\times۱۰=۶۰۰N$$



۲ در لحظهٔ مورد نظر نیروی مقاومت هوا $f_D=۱۱۴۰N$ رو به بالا است. این نیرو از نیروی وزن بزرگتر است. $(f_D>W)$ و نیروی خالص روبه بالا خواهد بود در حالی که جهت حرکت رو به پایین است بنابراین حرکت در این لحظه کندشونده است.

۳ اندازهٔ شتاب را به کمک قانون دوم به‌دست می‌آوریم.

$$f_{net}=ma\Rightarrow f_D-mg=ma\Rightarrow ۱۱۴۰-۶۰۰=۶۰a\Rightarrow a=۹m/s^۲$$

A ۶۸۸ ۳

۱ به جسم دو نیروی W و f_D عمود بر هم وارد می‌شود بنابراین نیروی خالص وارد بر جسم برابر است با: $F_{net}=\sqrt{f_D^۲+W^۲}\Rightarrow F_{net}=\sqrt{f_D^۲+(۴/۸)^۲}$ (I)

۲ با توجه به وزن داده‌شده و شتاب گرانش، جرم را به‌دست می‌آوریم:

$$W=mg\xrightarrow[W=۴/۸N]{g=۱۰m/s^۲}۴/۸=m\times۱۰\Rightarrow m=۰/۴۸kg$$

۳ با توجه به قانون دوم نیوتون،نیروی خالص برابر است:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_{net}=۰/۴۸\times\frac{۶۵}{۶}=۵/۲N\quad (II)$$

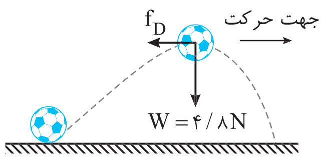
۴ با توجه به دو معادلهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

$$۵/۲=\sqrt{f_D^۲+(۴/۸)^۲}\Rightarrow(۵/۲)^۲=f_D^۲+(۴/۸)^۲$$
$$\Rightarrow f_D^۲=(۵/۲)^۲-(۴/۸)^۲$$

یادداشت ریاضی یک اتحاد پرکاربرد که محاسبات را برای ما ساده می‌کند، اتحاد مزدوج است: $x^۲-y^۲=(x-y)(x+y)$

۵ با توجه به اتحاد مزدوج معادله را حل می‌کنیم:

$$f_D^۲=(۵/۲-۴/۸)(۵/۲+۴/۸)\Rightarrow f_D^۲=۰/۴\times۱۰\Rightarrow f_D^۲=۴\Rightarrow f_D=۲N$$



میانبر بهتر است اعداد فیثاغورسی «۵ و۴ و۳» و «۱۳ و۱۲ و۵» را به خاطر بسپارید.

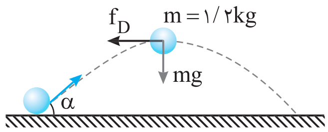
$$\underset{۱۳\times۰/۴}{۵/۲}=\sqrt{\underset{۵\times۰/۴}{f_D^۲}+(\underset{۱۲\times۰/۴}{۴/۸})^۲}\Rightarrow f_D=۵\times۰/۴=۲N$$

بازی با سؤال توپی به جرم $۱/۲kg$ را تحت زاویهٔ α به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر در بیشینهٔ ارتفاع توپ از زمین اندازهٔ شتاب حرکت توپ $۱۲/۵m/s^۲$ باشد، در این نقطه نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ چند نیوتون است؟ $(g=۱۰N/kg)$ از کتاب درسی

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۵

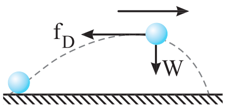
پاسخ در نقطهٔ بیشینه مطابق شکل دو نیروی وزن (رو به پایین) و مقاومت هوا (خلاف جهت حرکت) به جسم وارد می‌شوند.

$$|\vec{F}_{net}|=|m\vec{a}|\Rightarrow F_{net}=\sqrt{f_D^۲+mg^۲}=ma\Rightarrow\sqrt{f_D^۲+(۱۲)^۲}=۱۲/۵\times۱/۲=۱۵$$
$$f_D^۲+۱۴۴=۲۲۵\Rightarrow f_D=۹N$$



گزینهٔ ۱

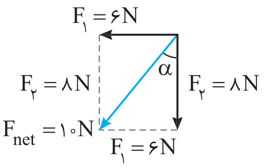
A ۶۸۹ ۲



نیروی مقاومت هوا، خلاف جهت حرکت است و نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود، بنابراین بنا به قانون دوم نیوتون همواره جهت بردار شتاب جسم در جهت نیروی خالص وارد بر جسم $(\vec{F}=m\vec{a})$ است. بنابراین کافی است شما نیروی برایند را رسم کنید و زاویهٔ این نیرو با راستای قائم را به‌دست بیاورید.

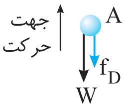
مطابق شکل زاویهٔ بین نیروی خالص و محور قائم (α) خواهد شد:

$$\tan\alpha=\frac{F_۱}{F_۲}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۶}{۸}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\alpha=۳۷^\circ$$



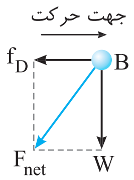
A ۶۹۰ ۱

خط فکری سؤال زیبایی است. مهم‌ترین نکتهٔ آن عبارت «اثر مقاومت هوا قابل ملاحظه باشد» بنابراین شما برای هر گلوله باید نیروهای وارد بر آن یعنی نیروی وزن را رو به پایین و نیروی مقاومت هوا را در خلاف جهت حرکت رسم کنید. نیروی خالص را به دست بیاورید و به کمک آن شتاب گلوله‌ها را با هم مقایسه کنید.



۱ جسم A: نیروی وزن و مقاومت شاره (هوا) وارد بر A هر دو رو به پایین است از این‌رو:

$$F_{net}=ma\Rightarrow|a|=\frac{|F_{net}|}{m}\Rightarrow|a|=\frac{|f_D+W|}{m}$$

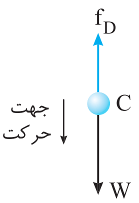


۲ جسم B:

$$F_{net}=ma\Rightarrow a_B=\frac{\sqrt{f_D^۲+W^۲}}{m}$$

۳ جسم C:

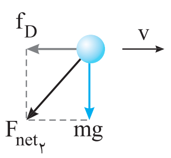
$$F_{net}=ma\Rightarrow a_C=\frac{W-f_D}{m}$$



۴ بنابراین بزرگی شتاب A از بزرگی شتاب‌های B و C بزرگتر است.

$$|a_A|>|a_B|>|a_C|$$

B ۶۹۱ ۴

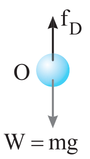


نکته نیروی مقاومت شاره (هوا) در خلاف جهت حرکت جسم است.

۱ نیروهای وارد بر گلوله (۲) را رسم می‌کنیم.

۲ نیروی خالص وارد بر گلوله (۲) را به کمک رابطهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:

$$F_{net}=\sqrt{f_D^۲+mg^۲}\xrightarrow[F_{net_۲}=۴\sqrt{۴۱}N]{m=۲kg}۴\sqrt{۴۱}=\sqrt{f_D^۲+۲۰^۲}$$
$$\Rightarrow۱۶\times۴۱=f_D^۲+۴۰۰\Rightarrow f_D^۲=۶۵۶-۴۰۰=۲۵۶\Rightarrow f_D=۱۶N$$

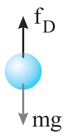


۳ نیروهای وارد بر گلوله (۱) را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم:

$$F_{net_۱}=ma\Rightarrow W-f_D=ma\Rightarrow۲۰-۱۶=۲a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

B ۶۹۲ ۲

نکته نیروی مقاومت هوا (f_D) به تندی جسم بستگی دارد و هرچه تندی بیشتر شود، نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد.



هنگامی که چترباز سقوط می‌کند، تندی آن افزایش می‌یابد. یعنی در ابتدا سرعت ثابت نیست و گزینهٔ (۳) نادرست است. با افزایش تندی، نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز نیز افزایش می‌یابد. بنابراین نیروی خالص وارد بر چترباز $(\underset{\text{متغیر}}{F_{net}} = \underset{\text{ثابت}}{W} - \underset{\text{متغیر}}{f_D})$ متغیر است و شتاب حاصل از آن نیز متغیر است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست است. هنگامی که جسم به تندی حدی خود می‌رسد نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن هم‌اندازه می‌شوند و چون در خلاف جهت هم هستند برایند نیروهای وارد بر چترباز صفر می‌شود و حرکت با سرعت ثابت ادامه پیدا می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

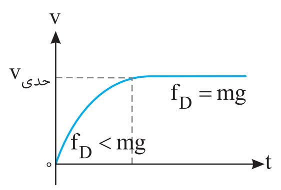
A ۶۹۳ ۲

وقتی یک چترباز بلافاصله بعد از سقوط چترش را باز می‌کند، ابتدا تندی‌اش افزایش می‌یابد پس در ابتدا حرکت تندشونده است در نتیجه نیروی مقاومت هوا نیز افزایش می‌یابد تا لحظه‌ای که نیروی مقاومت هوا با وزن چترباز هم‌اندازه شود، در این هنگام نیروی خالص صفر شده و چترباز با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

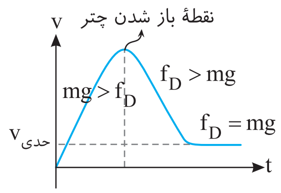
B ۶۹۴ ۲

خط فکری در موضوع مقاومت شاره و حرکت چترباز به دو حالت زیر دقت کنید:

الف) اگر چترباز در همان ابتدا با چتر باز پریده باشد، رفته‌رفته تندی آن افزایش یافته تا به تندی حدی برسد و پس از آن با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد:



ب) اگر چترباز بپرد و پس از مدتی چتر خود را باز کند، در لحظهٔ باز شدن چتر تندی حرکت متحرک بیشینه بوده و با باز شدن چتر تندی چترباز شروع به کم شدن می‌کند تا به تندی حدی برسد:

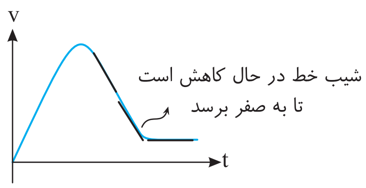


نکته مقاومت هوا به تندی جسم بستگی دارد و با افزایش و یا کاهش تندی جسم مقاومت هوا به ترتیب افزایش و یا کاهش می‌یابد.

با توجه به سؤال چترباز بعد از مدتی چتر خود را باز کرده یعنی حرکت چترباز مانند حالت (ب) خط فکری است. بعد از باز شدن چتر تندی چترباز شروع به کاهش می‌کند بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) که در آن‌ها بیان شده تندی جسم افزایش می‌یابد نادرست بوده و تنها گزینهٔ (۲) درست است.

اما بررسی شتاب حرکت: جهت حرکت چترباز به سمت پایین است و پس از باز کردن چتر حرکت چترباز کندشونده بوده و نیروی مقاومت هوا (f_D) به سمت بالا و بزرگ‌تر از W است و نیروی خالص وارد بر چترباز $f_D - W$، خواهد شد. در اصل $F_{net} = ma \Rightarrow f_D - W = ma$ است و با کم شدن تندی جسم f_D کاهش می‌یابد در نتیجه شتاب کاهش می‌یابد و در تندی حدی که $f_D = mg$ می‌شود شتاب صفر است یعنی شتاب بعد از باز شدن چتر در حال کاهش است.

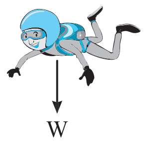
البته می‌توانستیم از روی نمودار $v-t$ و شیب خط مماس که شتاب را به ما می‌دهد نیز این موضوع را متوجه شویم:



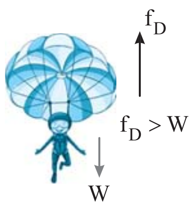
A ۶۹۵ ۴

چترباز از ارتفاع نسبتاً زیادی به بیرون می‌پرد و چتر خود را باز می‌کند. بنابراین در ابتدا تندی چترباز افزایش می‌یابد. با افزایش تندی مقاومت هوا نیز زیاد شده تا وقتی که نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر می‌شود $(W=f_D)$ بعد از این لحظه نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند $(F_{net}=۰)$ و حرکت جسم با سرعت ثابت ادامه پیدا می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۶۹۶ ۴



۱ چترباز بعد از پریدن از بالگرد تا مدتی با چتر بسته سقوط می‌کند و تقریباً با شتاب گرانشی ناشی از نیروی وزن پایین می‌آید $(g=۱۰m/s^۲)$ و در هر ثانیه تقریباً به اندازهٔ $۱۰m/s$ بر سرعتش افزوده می‌شود و نمودار سرعت - زمان باید با گذشت زمان صعودی باشد.



۲ هنگامی که چترباز چتر خود را باز می‌کند، به دلیل ابعاد بزرگ چتر، نیروی مقاومت هوا (f_D) به شدت افزایش می‌یابد به‌گونه‌ای که f_D از نیروی وزن (W) چترباز بزرگ‌تر است $(f_D > W)$ و مانند ترمز، سرعت چترباز را کاهش می‌دهد. بنابراین نمودار سرعت - زمان، نزولی می‌شود.

۳ هرچه از سرعت چترباز کاسته می‌شود، نیروی مقاومت هوا کاهش می‌یابد تا لحظه‌ای فرا می‌رسد که نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر می‌شود $(f_D = W)$ و نیروهای وارد بر چترباز متوازن شده و چترباز با سرعت ثابت پایین می‌آید بنابراین سرعت چترباز ثابت می‌ماند و نمودار سرعت - زمان خط راست افقی می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۶۹۷ ۳

یادآوری هرگاه هنگام سقوط جسم در هوا، نیروی وزن برابر نیروی مقاومت هوا شود نیروهای وارد بر جسم متوازن شده و جسم با تندی ثابت که به آن تندی حدی می‌گویند پایین می‌آید. نیروی وزن را با نیروی مقاومت هوا برابر قرار می‌دهیم و تندی جسم را به دست می‌آوریم.

$$f_D = W \xrightarrow{f_D=۱۵۰v} ۱۵۰v = mg \xrightarrow{m=۶۰kg} ۱۵۰v = ۶۰\times ۱۰$$

$$\Rightarrow v = ۴m/s$$

بازی با سؤال **قطعه سنگی به جرم $۷/۵kg$ از ارتفاع زیادی رها می‌شود و پس از طی مسافتی با تندی حدی $۲/۵m/s$ به زمین می‌رسد. اگر رابطهٔ بین اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر سنگ برحسب تندی در SI به‌صورت $f_D = bv^۲$ باشد، b کدام است؟** $(g=۱۰m/s^۲)$

۱) ۱/۲ ۲) ۶ ۳) ۰/۶ ۴) ۱۲

پاسخ **در تندی حدی، نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا با هم برابر است:**

$$f_D = mg \Rightarrow f_D = ۷۵N$$

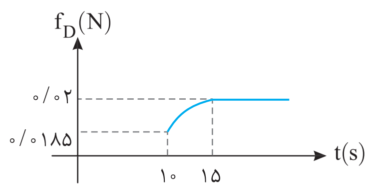
$$f_D = bv^۲ \xrightarrow[v=۲/۵m/s]{f_D=۷۵N} ۷۵ = b(۲/۵)^۲ \Rightarrow b = ۱۲$$

گزینهٔ ۴

B ۶۹۸ ۱

با توجه به نمودار نیز از لحظهٔ $t=۱۵s$ به بعد نیروی مقاومت هوا ثابت شده پس از $t=۱۵s$ به بعد قطره به تندی حدی خود رسیده است و نیروی وزن و مقاومت آن باهم برابر است.

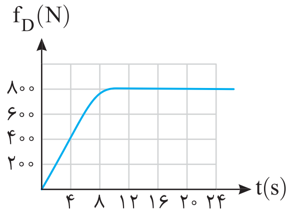
$$mg = f_D = ۰/۰۲N \Rightarrow m = ۰/۰۰۲kg \Rightarrow m = ۲g$$



B ۶۹۹ ۲

۱ در لحظه‌ای که نیروی مقاومت هوا $f_D=۸۰۰N$ شده است، این نیرو ثابت مانده است یعنی در این لحظه تندی چترباز به تندی حدی رسیده است و نیروی وزن با نیروی مقاومت هوا برابر شده است.

$F_{net}=۰=f_D=۸۰۰N$



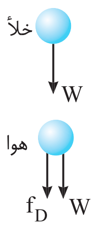
۲ جرم جسم را حساب می‌کنیم. $W=mg\Rightarrow ۸۰۰=m\times ۱۰\Rightarrow m=۸۰kg$

۳ در لحظه $t=۴s$ نیروی مقاومت هوا وارد بر جسم برابر $۴۰۰N$ است از این رو شتاب حرکت خواهد شد:

$F_{net}=ma\Rightarrow W-f_D=ma\Rightarrow ۸۰۰-۴۰۰=۸۰a\Rightarrow a=۵m/s^۲$

B ۷۰۰ ۴

۱ هنگامی که جسم در خلأ پرتاب می‌شود تنها نیروی وزن رو به پایین به آن وارد می‌شود $-mg=ma\Rightarrow|a|=g$. بنابراین با شتاب g از تندی جسم کاسته می‌شود تا گلوله متوقف شود.



۲ اما در هوا علاوه بر نیروی وزن، نیروی مقاومت هوا نیز خلاف جهت حرکت یعنی رو به پایین به جسم وارد می‌شود و بزرگی شتاب حرکت جسم خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow|mg+f_D|=ma'\Rightarrow a'=g+\frac{f_D}{m}>g$$

۳ شتاب توقف جسم وقتی در هوا رو به بالا پرتاب می‌شود بیشتر از g است. بنابراین گلوله سریع‌تر متوقف می‌شود در نتیجه، زمان توقف و ارتفاع اوج گلوله هنگام پرتاب در هوا کوچکتر از پرتاب در شرایط خلأ است. $t'<t \quad , \quad H'<H$

۴ به محاسبات زیر دقت کنید.

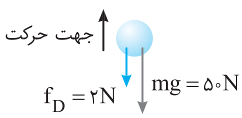
$$v=at+v_0\begin{cases}\xrightarrow{v=۰\ \text{خلأ}}۰=-gt+v_0\Rightarrow t=\frac{v_0}{g}\\ \xrightarrow{v=۰\ \text{هوا}}۰=(-g-\frac{f_D}{m})t'+v_0\Rightarrow t'=\frac{v_0}{g+\frac{f_D}{m}}\end{cases}\Rightarrow t'<t$$

$$v^۲-v_0^۲=۲a\Delta x\begin{cases}\xrightarrow{\text{خلأ}}۰-v_0^۲=۲(-g)H\Rightarrow H=\frac{v_0^۲}{۲g}\\ \xrightarrow{\text{هوا}}۰-v_0^۲=۲(-g-\frac{f_D}{m})H'\Rightarrow H'=\frac{v_0^۲}{۲(g+\frac{f_D}{m})}\end{cases}\Rightarrow H'<H$$

A ۷۰۱ ۲

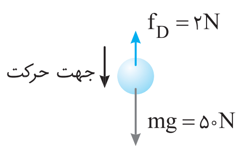
خط فکری شکل ساده‌ای از مسئله در دو حالت رسم می‌کنیم نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می دهیم سپس به کمک قانون دوم نیوتون شتاب جسم را در مسیر رفت و در مسیر برگشت حساب می‌کنیم.

۱ هنگام پرتاب توپ به سمت بالا نیروی مقاومت هوا که مخالف جهت حرکت است، به سمت پایین است. نیروی وزن نیز به سمت پایین است. بنابراین شتاب خواهد شد.



$F_{net}=ma\Rightarrow -۵۰-۲=۵a\Rightarrow a=-۱۰/۴m/s^۲\Rightarrow|a|=۱۰/۴m/s^۲$

۲ در مسیر برگشت، جهت حرکت رو به پایین و نیروی مقاومت هوا رو به بالا است. نیروی وزن نیز به سمت پایین است.



$F_{net}=ma'\Rightarrow -۵۰+۲=۵a'$

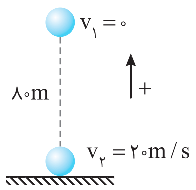
$\Rightarrow a'=-۹/۶m/s^۲\Rightarrow|a'|=۹/۶m/s^۲$

بنابراین: $\frac{|a|}{|a'|}=\frac{۱۰/۴}{۹/۶}=\frac{۱۳}{۱۲}$

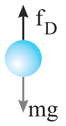
B ۷۰۲ ۳

۱ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده $(v_0=۰)$ و بعد از جابه‌جایی $d=۸۰m$ سرعت آن به $v=۲۰m/s$ رسیده است بنابراین می‌توانیم به کمک رابطهٔ مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت، شتاب را حساب کنیم.

$v^۲-v_0^۲=۲ad\Rightarrow ۲۰^۲-۰=۲a(۸۰)\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$



۲ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را مساوی ma قرار می‌دهیم.



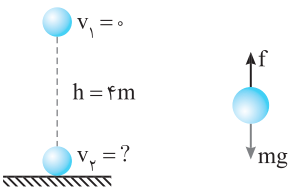
$f_{net}=ma\xrightarrow{m=۲kg}mg-f_D=ma\Rightarrow ۲۰-f_D=۲\times۲/۵$

$\Rightarrow f_D=۱۵N$

بازی با سؤال جسمی به جرم $۲kg$ از ارتفاع $۴m$ سطح زمین رها می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم ثابت و برابر $f_D=۱۲N$ فرض شود، سرعت جسم هنگام رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ ابتدا با توجه به نیروهای وارد بر جسم شتاب جسم را محاسبه می‌کنیم: $mg-f=ma\Rightarrow ۲۰-۱۲=۲a\Rightarrow a=۴m/s^۲$



جسم با شتاب $۴m/s^۲$ از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت کرده و در جابه‌جایی $d=۴m$ سرعت آن خواهد شد:

$v^۲-v_0^۲=۲ad\Rightarrow v^۲-۰=۲\times۴\times۴\Rightarrow v=۴\sqrt{۲}\ m/s$

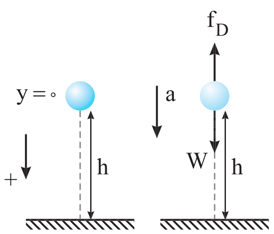
گزینهٔ ۳

B ۷۰۳ ۲

خط فکری به گزینه‌ها این گونه با تعجب نگاه نکنید مسئله ساده‌تر از این حرف‌هاست. شکل ساده‌ای رسم کنید، نیروهای وارد بر جسم را روی آن نشان دهید. نیروی خالص را به دست بیاورید تا بتوانید شتاب را حساب کنید. در مسئله از شما زمان خواسته شده بنابراین باید به سراغ حرکت‌شناسی بروید و زمان را حساب کنید.

۱ ابتدا با توجه به نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-f_D=ma\Rightarrow a=g-\frac{f_D}{m}$



۲ با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان حرکت با شتاب ثابت، زمان را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_0t\Rightarrow -h=\frac{۱}{۲}(-(g-\frac{f_D}{m}))t^۲\Rightarrow h=\frac{۱}{۲}(g-\frac{f_D}{m})t^۲$$

$$\Rightarrow t^۲=\frac{۲hm}{mg-f_D}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲hm}{mg-f_D}}$$

B ۷۰۴ ۲

۱ نیروهای وارد بر جسم نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا هستند، نیروها را روی یک شکل ساده نمایش می‌دهیم. در نمودار جهت مثبت رو به بالا اختیار شده بنابراین f_D مثبت و W منفی شده و نیروی خالص وارد بر جسم $F_{net}=-mg+f_D$ خواهد شد.

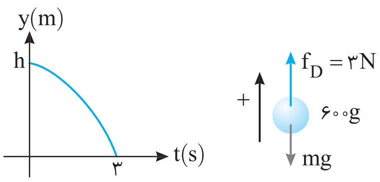
با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg+f_D=ma\Rightarrow -6+3=0/6a\Rightarrow -3=0/6a$$

$$\Rightarrow a=-5m/s^2$$

۲ حال با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

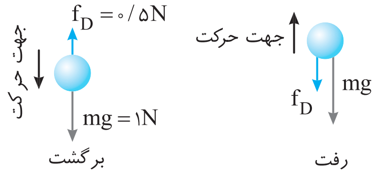
$$\Delta y=-\frac{1}{2}at^2\Rightarrow -h=-\frac{1}{2}\times5\times9\Rightarrow h=22/5m$$



B ۷۰۵ ۳

هم در مسیر رفت و هم در مسیر برگشت با توجه به ثابت بودن نیروها (نیروی وزن و مقاومت هوا) شتاب حرکت ثابت است. به کمک قانون دوم نیوتون در مسیر رفت که نیروی وزن و مقاومت هوا هم‌جهت‌اند f_D را حساب می‌کنیم. (جهت مثبت رو به بالا انتخاب شده است.)

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg-f_D=ma\Rightarrow -1-f_D=-1/5\Rightarrow f_D=0/5N$$



اکنون در مسیر برگشت با توجه به این‌که نیروی وزن و نیروی f_D خلاف جهت هستند، شتاب را به دست می‌آوریم.

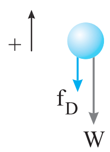
$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg+f_D=ma'\Rightarrow -1+0/5=0/1a'\Rightarrow a'=-5m/s^2$$

B ۷۰۶ ۳

در ابتدا نمودار (۲) و (۴) را کنار می‌گذاریم زیرا در صورت مسئله جهت رو به بالا مثبت در نظر گرفته شده بنابراین سرعت اولیه در لحظهٔ پرتاب رو به بالا باید مثبت باشد که در نمودار گزینه‌های (۲) و (۴) منفی است.

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است.

۱ در مسیر رفت نیروهای وارد بر جسم یعنی نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا رو به پایین است و با هم جمع می‌شوند و اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم از جمع W و f_D به دست می‌آید و شتاب حرکت خواهد شد:



$$|F_{net}|=ma\Rightarrow f_D+W=ma\Rightarrow a_{\text{رفت}}=\frac{W+f_D}{m}$$

۲ در مسیر برگشت نیروی وزن رو به پایین و نیروی مقاومت هوا رو به بالا و شتاب حرکت خواهد شد:

$$|F_{net}|=ma'\Rightarrow W-f_D=ma'\Rightarrow a'=\frac{W-f_D}{m}$$

شیب a و a' هر دو رو به پایین هستند پس منفی هستند، بنابراین شیب نمودار v-t باید منفی باشد از طرفی بزرگی شتاب در مسیر رفت از بزرگی شتاب در مسیر برگشت بزرگتر و اندازهٔ شیب در مسیر رفت از اندازهٔ شیب در مسیر برگشت بیشتر بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

B ۷۰۷ ۱

خط فکری برای هر جسم نیروها را رسم کرده و برایند نیروها را مشخص کرده، سپس شتاب حرکت هر جسم را به دست بیاورید و سرانجام به کمک رابطهٔ مستقل از زمان نسبت تندی دو متحرک را در برخورد به زمین حساب کنید.

۱ شتاب حرکت هر جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{جسم A}: m_Ag-f_{D_A}=m_Aa_A\xrightarrow{f_{D_A}=\frac{1}{3}m_Ag}$$

$$m_Ag-\frac{1}{3}m_Ag=m_Aa_A\Rightarrow a_A=\frac{2}{3}g$$

$$\text{جسم B}: m_Bg-f_{D_B}=m_Ba_B\xrightarrow{f_{D_B}=\frac{1}{6}m_Bg}$$

$$m_Bg-\frac{1}{6}m_Bg=m_Ba_B\Rightarrow a_B=\frac{5}{6}g$$

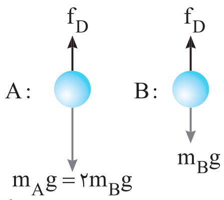
۲ باتوجه به رابطهٔ مستقل از زمان:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta y\Rightarrow\begin{cases}v_A^2=2a_Ah\\ v_B^2=2a_Bh\end{cases}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{a_A}{a_B}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{3}g}{\frac{5}{6}g}}=\sqrt{\frac{12}{15}}=\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

B ۷۰۸ ۱

۱ شکل ساده‌ای رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر گوی‌ها را روی آن نمایش می‌دهیم و نیروی خالص وارد بر هر جسم را به دست می‌آوریم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت دو گوی را با هم مقایسه می‌کنیم:



$$\begin{cases}F_{net}=m_Aa\Rightarrow 2m_Bg-f=2m_Ba_A\Rightarrow a_A=g-\frac{f_D}{2m_B}\\ F_{net}=m_Ba\Rightarrow m_Bg-f=m_Ba_B\Rightarrow a_B=g-\frac{f_D}{m_B}\end{cases}\Rightarrow a_A>a_B$$

۲ با توجه به رابطهٔ $v^2-v_0^2=2a\Delta y$ و اینکه $v_0=0$ است:

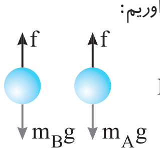
$$v^2-0^2=2a\Delta y$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{2a\Delta y}\begin{cases}\xrightarrow{A:} v_A=\sqrt{2a_Ah}\\ \xrightarrow{B:} v_B=\sqrt{2a_Bh}\end{cases}\xrightarrow{a_A>a_B} v_A>v_B$$

بنابراین تندی گوی A هنگام رسیدن به زمین از تندی گوی B بیشتر است.

B ۷۰۹ ۳

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow\begin{cases}m_Bg-f=m_Ba_B\Rightarrow a_B=g-\frac{f}{m_B}\\ m_Ag-f=m_Aa_A\Rightarrow a_A=g-\frac{f}{m_A}\end{cases}$$

۲ جرم دو جسم یکسان بوده $(m_A=m_B)$ بنابراین شتاب a_A و a_B با هم برابر است.

۳ به کمک رابطهٔ شتاب ثابت $\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ زمان سقوط هر گوی را حساب می‌کنیم:

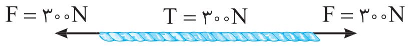
$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2\begin{cases}\xrightarrow{A:} h_A=\frac{1}{2}a_At_A^2\Rightarrow t_A=\sqrt{\frac{2h_A}{a_A}}\\ \xrightarrow{B:} h_B=\frac{1}{2}a_Bt_B^2\Rightarrow t_B=\sqrt{\frac{2h_B}{a_B}}\end{cases}$$

اکنون نسبت زمان‌ها را به دست می‌آوریم.

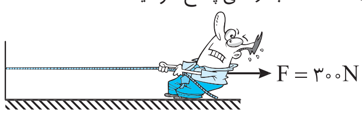
$$\frac{t_A}{t_B}=\sqrt{\frac{h_Aa_B}{h_Ba_A}}\xrightarrow[a_A=a_B]{h_A=2h_B}\frac{t_A}{t_B}=\sqrt{\frac{2h_B}{h_B}}=\sqrt{2}$$

A ۷۱۰ | ۳

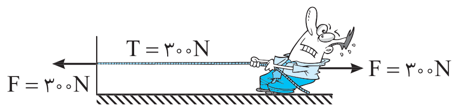
نکته هرگاه دو سر طناب سبکی را با نیروهای یکسان F در خلاف جهت هم بکشیم نیروی کشش طناب برابر F خواهد بود.



برای توجیه نکتهٔ بالا به جای دو نفر، یک نفر را در نظر بگیرید که با نیروی $F=300N$ طناب متصل به دیواری را می‌کشد. اگر در این حالت از شما پرسیده شود نیروی کشش طناب چند نیوتون است شما به راحتی پاسخ خواهید داد «۳۰۰N»



اما به شکل دقت کنید طناب ساکن است بنابراین باید نیروهای وارد بر آن متوازن باشند یعنی دیوار نیروی ۳۰۰N به سمت چپ به طناب وارد می‌کند و این حالت با حالتی که دو نفر دو سر طناب را با ۳۰۰N می‌کشند فرقی نمی‌کند.

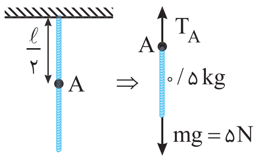


در این مسئلهٔ نیروی کشش نخ ۳۰۰N است که از بیشینهٔ نیروی قابل تحمل طناب (۴۰۰N) کمتر است و طناب پاره نمی‌شود.

B ۷۱۱ | ۱

نکته هرگاه یک طناب سنگین از سقف آویزان شود، هر نقطه از طناب وزن قسمت پایینی طناب را تحمل می‌کند.

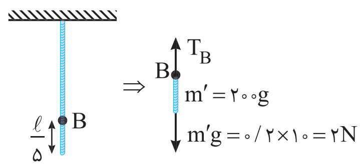
۱ در نقطهٔ A، کشش نخ برابر وزن قسمت پایین طناب یعنی برابر وزن یک نیمهٔ طناب است.



$$T_A=\frac{W}{2}=\frac{mg}{2}\xrightarrow{m=1kg}T_A=5N$$

۲ در نقطهٔ B، کشش نخ وزن $\frac{1}{5}$ طناب یعنی $\frac{W}{5}$ را تحمل می‌کند، از این‌رو:

$$T_B=\frac{1}{5}W\Rightarrow T_B=\frac{1}{5}\times10\Rightarrow T_B=2N$$



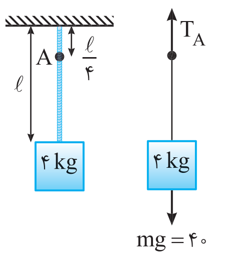
۳ تفاضل دو نیروی کشش خواهد شد: $T_A-T_B=5-2\Rightarrow T_A-T_B=3N$

A ۷۱۲ | ۴

نکته هرگاه جرم ریسمان ناچیز باشد، نیروی کشش در تمام طول آن یکسان است.

فواصل داده شده روی شکل مهم نیست و کشش در نقطهٔ A یا هر نقطه از ریسمان برابر وزن جسم متصل به ریسمان است.

$$T_A=mg\Rightarrow T_A=40N$$

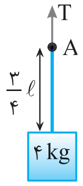


A ۷۱۳ | ۲

خط فکری هرگاه طناب دارای جرم باشد و در امتداد قائم به سقف آویزان شود، کشش از نقاط بالا به پایین کاهش می‌یابد و هر نقطه از طناب وزن قسمت زیرین خود را تحمل می‌کند.

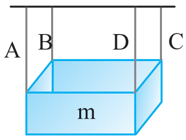
کشش در نقطهٔ A برابر وزن قسمت زیر نقطه A است.

$$T_A=m_{\text{جسم}}g+\frac{3}{4}m_{\text{طناب}}g\Rightarrow T_A=40+3/75=43/75N$$

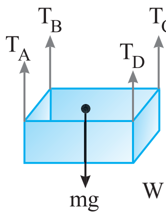


B ۷۱۴ | ۱

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. نیروی وزن به‌طور یکنواخت بین چهار ریسمان تقسیم شده است و هر ریسمان $\frac{1}{4}$ وزن جسم را تحمل می‌کند. برای آنکه هیچ‌یک از ریسمان پاره نشود نیروی کشش هریک از آن‌ها باید برابر کمینهٔ نیروی کشش ریسمان‌ها یعنی ۱۰N باشد. در این صورت:



$$T_A=T_B=T_C=T_D=10N$$



جسم در تعادل است بنابراین:

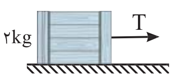
$$W=T_A+T_B+T_C+T_D=10+10+10+10\Rightarrow W=40N$$

جرم جسم خواهد شد: $W=mg\Rightarrow 40=m\times10\Rightarrow m=4kg$

A ۷۱۵ | ۱

نکته در یک طناب سبک و همگن با جرم ناچیز کشش در تمام نقاط طناب یکسان است.

به جای نیروی کشش در محل M، نیروی کشش در محل اتصال طناب به جعبه را حساب می‌کنیم، سطح بدون اصطکاک است بنابراین نیروی خالص وارد بر جعبه همان نیروی کشش طناب است.



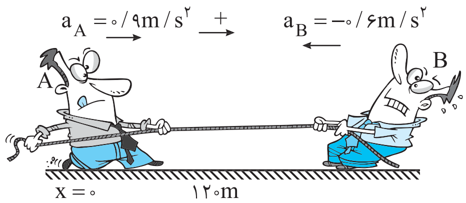
$$F_{net}=ma\Rightarrow T=2\times2=4N$$

B ۷۱۶ | ۲

۱ اندازهٔ نیروی وارد بر شخص A و شخص B برابر نیروی کشش طناب است. $F_A=F_B=36N$ شتاب هر یک را به دست می‌آوریم:

$$A:F=ma\Rightarrow 36=40a_A\Rightarrow a_A=0/9m/s^2$$

$$B:F=ma\Rightarrow 36=60a_B\Rightarrow a_B=0/6m/s^2$$



۲ از این جا به بعد باید به سراغ مسائل حرکت‌شناسی بروید. یعنی معادلهٔ حرکت هریک از آن‌ها را بنویسید و با هم برابر قرار دهید تا لحظهٔ رسیدن A و B به هم را بیابید. مکان اولیهٔ A را مبدأ می‌گیریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\begin{cases}\xrightarrow{A:}x_A=\frac{1}{2}a_At^2+0+0\Rightarrow x_A=\frac{1}{2}(0/9)t^2\\ \xrightarrow{B:}x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+0+120\\ \Rightarrow x_B=\frac{1}{2}(-0/6)t^2+120\end{cases}$$

۳ مکان‌ها را مساوی قرار می‌دهیم:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}(0/9)t^2=\frac{1}{2}(-0/6)t^2+120\Rightarrow\frac{1/5}{2}t^2=120\Rightarrow t^2=160$$

$$\Rightarrow t=4\sqrt{10}\,s$$

۴ سرعت A و B را به کمک معادلهٔ سرعت–زمان حرکت با شتاب ثابت به دست می‌آوریم.

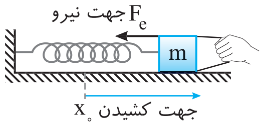
$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_A=0/9\times4\sqrt{10}=3/6\sqrt{10}m/s\\ v_B=0/6\times4\sqrt{10}=2/4\sqrt{10}m/s\end{cases}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{3/6\sqrt{10}}{2/4\sqrt{10}}=\frac{3}{2}$$

A ۷۱۷ ۳

یادآوری نیروی کشسانی فنر از رابطهٔ $(F=k\Delta\ell)F=kx$ به دست می‌آید که در آن x تغییر طول فنر از حالت طبیعی آن است و k ثابت فنر بوده و به ویژگی‌های ساختمانی فنر بستگی دارد.

نکته نیروی کشسانی فنر همواره به سمت حالت طبیعی فنر است.

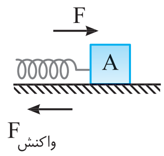
نیروی کشسانی فنر با تغییر طول فنر رابطهٔ خطی دارد نه با طول فنر مثلاً اگر طول اولیه فنری ۱۵cm باشد یک‌بار طول آن را ۱۷cm و بار دیگر ۳۴cm کنیم، با اینکه طول فنر دو برابر شده (از ۱۷cm به ۳۴cm) رسیده اما نیروی کشسانی دو برابر نمی‌شود $(F_2=k\times\frac{34-15}{100}, F_1=k\times\frac{17-15}{100})$، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. ثابت فنر از ویژگی‌های ساختمانی فنر است و به جرم متصل آن بستگی ندارد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. جهت نیروی فنر همواره خلاف جهت تغییر طول فنر است. به شکل روبه‌رو دقت کنید:



بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۷۱۸ ۳

به شکل باید دقت کنید. نیرویی که وزنهٔ A را هُل می‌دهد و به سمت راست می‌راند نیروی کشسانی فنر است. بنا به قانون سوم نیوتون جسم A همان نیرو را به فنر رو به چپ وارد می‌کند. وقتی با نیروی F جسم B را به سمت راست هُل می‌دهیم، فنر به وزنهٔ B به سمت چپ نیرو وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون توسط وزنهٔ B نیرویی به سمت راست به فنر وارد می‌شود. بنابراین نیروهای وارد بر فنر به شکل روبه‌رو هستند.



A ۷۱۹ ۳

نکته هرگاه فنری را از دو طرف با نیروی یکسان F بکشیم و یا فشرده کنیم نیروی کشسانی برابر F خواهد بود.

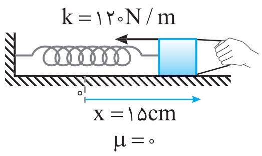
نیرویی که فنر بر هر یک از دست‌های ورزشکار وارد می‌کنند برابر نیروی کشسانی فنر است بنابراین می‌توان نوشت:

$$F=F_e=kx\xrightarrow{k=250N/m,x=0/4m}F_e=250\times0/4\Rightarrow F=100N$$

A ۷۲۰ ۴

نکته نیروی کشسانی فنر همواره در خلاف جهت تغییر طول فنر از طول طبیعی است.

در لحظهٔ رها شدن جسم تنها نیروی مؤثر وارد بر آن نیروی کشسانی فنر است.



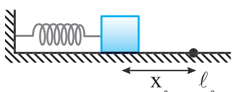
$$F_e=kx\Rightarrow F_e=120\times\frac{15}{100}\Rightarrow F_e=18N$$

فنر از طول طبیعی به سمت راست کشیده شده بنابراین نیروی کشسانی فنر به سمت چپ و در خلاف جهت محور xها است.

نیروی کشسانی فنر در لحظهٔ رها شدن خواهد شد: $\vec{F}_e=-18\vec{i}$

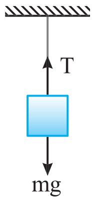
باتوجه‌به‌قانون‌دوم‌نیوتون‌شتاب‌راحساب‌می‌کنیم: $\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow-18\vec{i}=2\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=-9\vec{i}$

B ۷۲۱ ۲



از لحظهٔ رها شدن جعبه $(v_\circ=0)$ تا لحظهٔ گذر از طول طبیعی نیروی کشسانی فنر به سمت راست بر جسم وارد می‌شود و سبب می‌گردد تندی جسم همواره در حال افزایش باشد یعنی حرکت پیوسته تندشونده است و گزارهٔ (الف) نادرست است. هرچه جعبه به $\ell_\circ$ نزدیک می‌شود طول طبیعی فنر به حالت طبیعی خود نزدیک شده و نیروی کشسانی فنر کاهش می‌یابد، از این‌رو بزرگی شتاب آن نیز کاهش می‌یابد و گزارهٔ (ب) درست است. تا لحظهٔ گذر از طول طبیعی حرکت پیوسته تندشونده است یعنی در لحظهٔ گذر از طول طبیعی تندی بیشینه است و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۷۲۲ ۲

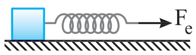


در حالت اول جسم ساکن است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند، بنابراین نیروی وزن جسم با نیروی کششی طناب برابر است. $W=T=30N$

در حالت دوم اگر به جای طناب، فنر هم قرار دهیم باید فنر وزن جسم را تحمل کند یعنی نیروی وارد بر فنر نیز ۳۰N است.

$$F_e=kx\Rightarrow30=750x\Rightarrow x=\frac{1}{25}m=4cm$$

A ۷۲۳ ۳



نیروی خالص وارد بر جسم نیروی کشسانی فنر است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F=ma\Rightarrow kx=ma\Rightarrow350x=2\times1/75\Rightarrow350x=3/5\Rightarrow x=\frac{1}{100}m=1cm$$

B ۷۲۴ ۴

۱ طول فنر در حالت دوم $\frac{4}{3}$ برابر طول فنر در حالت اول است یعنی طول اولیه که با وزنهٔ ۱۰۰ گرمی، ۱۵cm بوده است با وزنهٔ ۵۰۰g خواهد شد: $x'_2=\frac{4}{3}\times15=20cm$

۲ در هر دو حالت نیروی وزن برابر نیروی کشسانی فنر است، از این‌رو خواهیم داشت:

$$F_e=k\Delta x\begin{cases}x_2=15cm, F=mg\xrightarrow{m=0/1kg}k(\frac{15}{100}-x_\circ)=0/1\times10\\ \Rightarrow k(\frac{15}{100}-x_\circ)=1\Rightarrow1=\frac{15}{100}k-kx_\circ \quad (1)\\ x'_2=20cm, F=m'g\xrightarrow{m_2=0/5kg}k(\frac{20}{100}-x_\circ)=0/5\times10\\ \Rightarrow5=\frac{20}{100}k-kx_\circ \quad (2)\end{cases}$$

۳ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم و ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$5-1=\frac{20}{100}k-kx_\circ-\frac{15}{100}k+kx_\circ\Rightarrow4=\frac{5k}{100}\Rightarrow k=80N/m$$

میانبر به ازای افزایش $500-100=400g$ بر جرم وزنه طول فنر به اندازهٔ $x=\frac{1}{3}\times15=5cm$ افزایش یافته از این‌رو:

$$F_e=k\Delta\ell\Rightarrow0/4\times10=k(0/05)\Rightarrow k=80\ N/m$$

بازی با سؤال اگر به انتهای فنر قائم با جرم ناچیز، وزنهٔ ۲۰ نیوتونی آویزان کنیم، طول آن به ۱۰cm می‌رسد. اگر وزنه را دو برابر کنیم، طول آن به ۱۱cm می‌رسد، ضریب ثابت این فنر در SI کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰

پاسخ با استفاده از میانبر:

$$k=\frac{W_2-W_1}{\ell_2-\ell_1}\xrightarrow{W_2=2W_1}k=\frac{40-20}{0/11-0/10}\Rightarrow k=\frac{20}{0/01}$$
$$\Rightarrow k=2000N/m$$

گزینهٔ ۳

A ۷۲۵ ۴

خط فکری دقت کنید که کفه دارای جرم است و وقتی روی کفه وزنه قرار می‌دهیم جرم متصل به فنر مجموع جرم وزنه و کفه است. در دو حالت مسئله نیروی کشسانی فنر را با نیروی وزن برابر قرار دهید و یک دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست بیاورید و با حل آن جرم کفه را معین کنید.

۱ حالت اول: $F_{net}=0\Rightarrow(m+m_1)g=k(\Delta\ell)\Rightarrow(m+0/1)\times g=k(\frac{6}{100})$

۲ حالت‌دوم: $F_{net}=0\Rightarrow(m+m_2)g=k(\Delta\ell')\Rightarrow(m+0/2)\times g=k(\frac{10}{100})$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

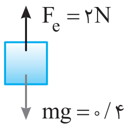
$$\frac{m+0/1}{m+0/2}=\frac{6}{10}\Rightarrow10m+1=6m+1/2\Rightarrow4m=0/2\Rightarrow m=\frac{0/2}{4}kg=\frac{200}{4}g$$
$$\Rightarrow m=50g$$

A ۷۲۶ ۳

۱ نیروی وزن وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$W=mg\xrightarrow{m=۰/۴kg}W=۰/۴\times۱۰=۴N$

۲ نیروی کشسانی فنر وقتی که طول آن ۱cm افزایش می‌یابد را به دست می‌آوریم.



$F_e=kx\xrightarrow{k=۲N/cm=۲۰۰N/m}F_e=۲۰۰\times\frac{۱}{۱۰۰}=۲N$

۳ نیروی خالص وارد بر وزنه را برابر ma قرار داده، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم.

$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_e=ma\Rightarrow ۴-۲=۰/۴a\Rightarrow a=۵m/s^۲$

۴ شتاب در جهت نیروی برایند است و در این سؤال چون در لحظهٔ مورد نظر $mg>F_e$ پس شتاب در جهت mg به سمت پایین است.

C ۷۲۷ ۲

در حالت اول دو نیروی وزن و کشسانی فنر بر جسم وارد می‌شود که چون جسم ساکن است این نیروها متوازن هستند. $W=F_{e_۱}\Rightarrow W=k(\ell_۱-\ell_۰)$ (I)

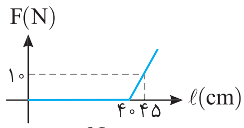
در حالت دوم سه نیرو بر جسم وارد می‌شوند. نیروی وزن، نیروی کشسانی فنر و نیروی شناوری توسط مایع و این نیرو نیز متوازن هستند. $W=F_{e_۲}+F_b=k(\ell_۲-\ell_۰)+F_b$ (II)

دو رابطهٔ (I) و (II) را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$k(\ell_۱-\ell_۰)=k(\ell_۲-\ell_۰)+F_b\Rightarrow k\ell_۱=k\ell_۲+F_b\Rightarrow F_b=k(\ell_۱-\ell_۲)$

با توجه به صورت مسئله، فاصلهٔ جسم تا کف ظرف از ۴cm به ۶cm افزایش یافته یعنی تغییر طول فنر $|\ell_۱-\ell_۲|=۲cm$ است، بنابراین: $F_b=۱۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}=۲N$

A ۷۲۸ ۳

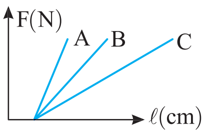


۱ وقتی طول فنر ۴۰cm است نیروی کشسانی آن صفر است بنابراین طول طبیعی فنر $\ell_۰=۴۰cm$ است.

۲ با توجه به نمودار با تغییر طول از ۴۰cm به ۴۵cm نیروی فنر ۱۰N می‌شود، بنابراین:

$F_e=kx\Rightarrow ۱۰=k\times\frac{۵}{۱۰۰}\Rightarrow k=۲۰۰N/m$

A ۷۲۹ ۱



نمودار $F-\ell$ خطی هستند، شیب این خط‌ها با توجه به رابطهٔ $F=k\Delta\ell=k\ell-k\ell_۰$ برابر ثابت فنر است. $k_A>k_B>k_C$

B ۷۳۰ ۴

با توجه به شکل نسبت ثابت فنرها را به‌دست می‌آوریم:

فنر (۱): $F=k_۱(۳x)\Rightarrow k_۱=\frac{F}{۳x}$ فنر (۲): $۳F=k_۲(۴x)\Rightarrow k_۲=\frac{۳F}{۴x}$

فنر (۳): $۴F=k_۳(۴x)\Rightarrow k_۳=\frac{F}{x}$

بنابراین $\frac{k_۱}{k_۲}=\frac{\frac{F}{۳x}}{\frac{۳F}{۴x}}=\frac{۴}{۹}$ ، $\frac{k_۳}{k_۲}=\frac{\frac{F}{x}}{\frac{۳F}{۴x}}=\frac{۴}{۳}$ است. در سؤال گفته شده نیروی ۳۰N طول فنر $S_۲$ را ۴cm تغییر داده.

$$F_e=k\Delta x\Rightarrow\begin{cases}۳۰=k_۲\times\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow k_۲=۷۵۰\frac{N}{m}\\ ۳۰=k_۱\times\Delta x_۱\xrightarrow{k_۱=\frac{۴}{۹}k_۲=\frac{۱۰۰۰}{۳}\frac{N}{m}}\\ ۳۰=\frac{۱۰۰۰}{۳}\times\Delta x_۱\Rightarrow\Delta x_۱=۰/۰۹m=۹cm\\ ۳۰=k_۳\times\Delta x_۳\xrightarrow{k_۳=\frac{۴}{۳}k_۲=۱۰۰۰\frac{N}{m}}\\ ۳۰=۱۰۰۰\times\Delta x_۳\Rightarrow\Delta x_۳=۰/۰۳m=۳cm\end{cases}$$

B ۷۳۱ ۲

تابع نیرو برحسب طول فنر به صورت $F_e=۱۰۰x-۲۰$ است. وقتی فنر دارای طول طبیعی است نیروی کشسانی فنر صفر است بنابراین اگر به جای F_e صفر قرار دهیم باید به جای x، $\ell_۰$ را قرار داده و طول طبیعی فنر را به دست بیاوریم. $۰=۱۰۰\ell_۰-۲۰\Rightarrow\ell_۰=۰/۲m$

با توجه به رابطهٔ $F=k(x-x_۰)$ ضریب x همان ثابت است بنابراین $k=۱۰۰N/m$ است.

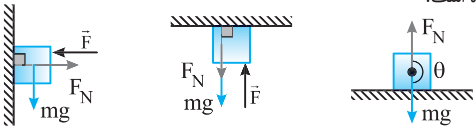
A ۷۳۲ ۴

خط فکری نیرویی که یک سطح بدون اصطکاک بر جسمی که به آن تکیه داده وارد می‌کند بر سطح عمود است که به آن نیروی عمودی تکیه‌گاه (سطح) گویند.

گزینهٔ (۴) نیروهایی که دو سطح بر چوب وارد می‌کنند را درست نمایش می‌دهد.

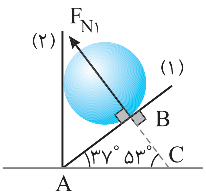
A ۷۳۳ ۴

نیروی عمودی سطح و نیروی وزن را در هر سه شکل رسم می‌کنیم (دقت کنید که نیروی عمودی سطح همواره بر تکیه‌گاه عمود می‌باشد). بنابراین در هر سه شکل θ به درستی بیان شده است.



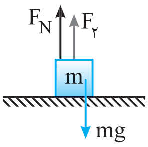
(الف) $\theta=۱۸۰^\circ$ (ب) $\theta=۰$ (پ) $\theta=۹۰^\circ$

A ۷۳۴ ۲



نیروی عمودی سطح همواره بر دیواری که جسم بر آن تکیه دارد عمود می‌باشد. نیرویی که سطح (۱) بر گوی وارد می‌کند را رسم کرده امتداد می‌دهیم تا سطح افق را قطع کند، در این صورت در مثلث ABC زاویهٔ بین امتداد افق AC با امتداد نیروی F_N، یعنی ضلع BC برابر ۵۳° است.

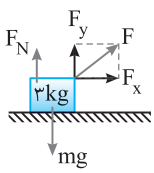
A ۷۳۵ ۱



نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم عبارتند از نیروی وزن، $F_۲$ و نیروی عمودی تکیه‌گاه. هر سه نیرو را رسم می‌کنیم.

نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم متوازن هستند بنابراین: $F_۲+F_N=mg\Rightarrow F_N=mg-F_۲$

A ۷۳۶ ۳

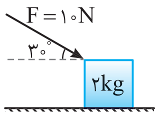


با توجه به نیروی F، به جسم در راستای y علاوه بر نیروی وزن و نیروی عمودی سطح، نیرویی دیگر به سمت بالا وارد می‌شود. بنابراین:

$F_N+F_y=mg\Rightarrow F_N+F_y=۳۰\Rightarrow F_N<۳۰N$

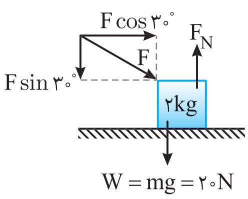
در واقع مؤلفهٔ قائم نیروی F سبب کاهش نیروی عمودی سطح شده است.

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح چند نیوتون است؟*



۱) ۲۰ ۲) ۲۵
۳) ۱۵ ۴) ۳۵

پاسخ به کمک تجزیه نیروها که در فیزیک (۱) در سال دهم خوانده‌اید مسئله را حل می‌کنیم. ابتدا تمام نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی F را تجزیه می‌کنیم.



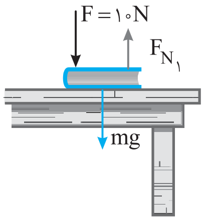
$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_N=F\sin ۳۰^\circ+W\Rightarrow F_N=۱۰\times\frac{۱}{۲}+۲۰=۲۵N$ گزینهٔ ۲

* این نوع مسائل در برنامه رسمی کتاب درسی نیست اما یادگیری این مسئله ساده برای شما که به دانشگاه می‌روید بسیار مفید است.

A ۷۳۷ ۳

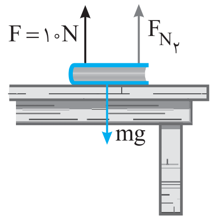
نیروهای وارد بر کتاب را در دو حالت رسم می‌کنیم و نیروی خالص در امتداد قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم و نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

حالت اول:



$$F_{net}=۰\Rightarrow F+mg=F_{N_1}$$
$$\Rightarrow F_{N_1}=۱۰+۲\times۱۰\Rightarrow F_{N_1}=۳۰N$$

حالت دوم:

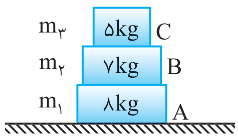


$$F_{net}=۰\Rightarrow F+F_{N_2}=mg$$
$$\Rightarrow F_{N_2}=mg-F=۲۰-۱۰\Rightarrow F_{N_2}=۱۰N$$

بنابراین:
$$\frac{F_{N_1}}{F_{N_2}}=\frac{۳۰}{۱۰}=۳$$

A ۷۳۸ ۳

نکته هرگاه چند جسم روی سطح افقی روی هم قرار داشته باشند، نیرویی که بین سطح مشترک هر دو جسم است هم‌اندازهٔ مجموع نیروی وزن تمام اجسام بالای آن سطح است.



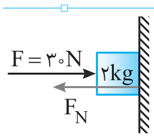
نیرویی که سطح افقی تحمل می‌کند برابر وزن سه جسم است:
$$F_{N_A}=W_1+W_2+W_3$$
$$=۸۰+۷۰+۵۰=۲۰۰N$$

نیرویی که سطح مشترک B تحمل می‌کند (نیروی عمودی سطح B) برابر مجموع وزن m_2 و m_3 است.
$$F_{N_B}=W_2+W_3=۷۰+۵۰=۱۲۰N$$

نیرویی که سطح C تحمل می‌کند (نیروی عمودی سطح C) برابر وزن وزنهٔ m_3 است.
$$F_{N_C}=W_3=۵۰N$$

A ۷۳۹ ۲

جسم بر دیوار تکیه داده شده است پس برایند نیروها در راستای افقی صفر است و نیروهای خلاف جهت با هم برابر هستند.

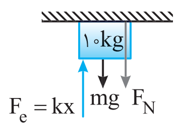


$$F_N=F=۳۰N$$

A ۷۴۰ ۳

خط فکری بایـد تمـام نیروهای وارد بـر وزنه را رسـم کنید (نیـروی وزن، نیروی عمودی سقف و نیروی کشسانی فنر) نیروهای W و F_N رو به پایین است بنابراین F_e رو به بالا بوده و باید اندازهٔ آن با مجموع نیروی W و F_N برابر باشد تا جسم ساکن بماند. بنابراین کافی است F_e را با $W+F_N$ برابر قرار داده و مسئله را حل کنید.

جسم در حال تعادل است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشد:



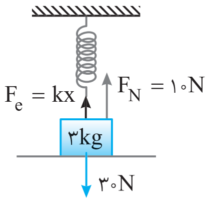
$$mg+F_N=F_e\Rightarrow ۱۰۰+۵۰=۳۰۰x\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}m$$
$$\Rightarrow x=۵۰cm$$

B ۷۴۱ ۱

۱ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم: $W=mg\Rightarrow W=۳\times۱۰=۳۰N$

۲ نیـروی عمـودی سـطح رو به بـالا و برابر ۱۰N اسـت و نیـروی وزن ۳۰N رو به پایین. از طرفی جسـم روی سـطح سـاکن اسـت بنابراین باید نیروی کشسانی فنر رو به بالا باشد.

۳ اندازهٔ تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم.

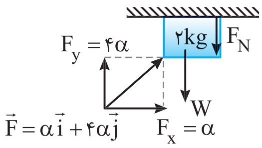


$$F_e+F_N=mg\Rightarrow F_e=۳۰-۱۰=۲۰N$$
$$\Rightarrow kx=۲۰N\Rightarrow ۲۰۰\times x=۲۰\Rightarrow x=۰/۱m$$

۴ نیروی کشسانی فنر همواره به سمت طول طبیعی فنر است، از طرفی F_e رو به بالاست یعنی باید فنر کشیده شده و از حالت طبیعی طولش بیشتر شده باشد.

B ۷۴۲ ۱

۱ نیروهـای وارد بر جسـم در امتداد قائم را رسم کرده و بررسی می‌کنیم.



۲ در امتـداد افقی جسـم تحـت تأثیر F_x شـتاب $۴m/s^2$ دارد بنابرایـن بـه کمک قانون دوم نیوتون می‌توان F_x را به دست آورد (سقف بدون اصطکاک است.)

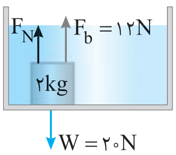
$$F_{net_x}=ma_x\xrightarrow{F_x=\alpha}\alpha=۲\times۴\Rightarrow\alpha=۸N$$

۳ مؤلفهٔ قائم نیروی F خواهد شد: $F_y=۴\alpha=۴\times۸=۳۲N$

۴ در امتداد قائم جسم حرکتی ندارد و نیروها در این امتداد متوازن هستند از این‌رو خواهیم داشت: $F_{net_y}=۰\Rightarrow F_N+W=F_y\Rightarrow F_N+۲۰=۳۲\Rightarrow F_N=۱۲N$

A ۷۴۳ ۳

نیروهای وارد بر جسم عبارتند از:



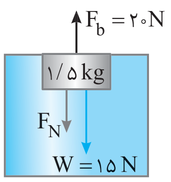
نیـروی وزن رو بـه پایین، نیروی عمـودی تکیه‌گاه رو به بالا، نیروی شناوری رو به بالا

جسـم ساکن است نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی خالص را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_N+F_b=W\Rightarrow F_N+۱۲=۲۰\Rightarrow F_N=۸N$$

A ۷۴۴ ۲

هرگاه جسم در شـاره‌ای قرار گیرد به اندازهٔ وزن شـارهٔ جابه‌جاشـده به آن نیرویی رو به بالا وارد می‌شود که به آن نیروی شـناوری (F_b) می‌گوینـد. نیروهای وارد بر جسم مطابق شکل روبه‌رو است:



۱ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم:
$$W=mg\xrightarrow{m=۱/۵kg}W=۱/۵\times۱۰=۱۵N$$

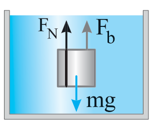
۲ نیـروی شـناوری رو بـه بالا بر جسـم وارد می‌شـود. این نیرو بنا به فرض مسـئله $F_b=۲۰N$ است. بنابراین خواهیم داشت:
$$F_N+W=F_b\Rightarrow F_N+۱۵=۲۰\Rightarrow F_N=۵N$$

۳ نیرویی که دیواره به جسـم وارد می‌کند $F_N=۵N$ اسـت که برابر نیرویی است که جسم به دیواره رو به بالا وارد می‌کند.

بازی با سؤال مطابق شـکل جسـمی به جرم ۲kg درون ظرف حـاوی آب روی کفه‌ای قرار گرفته اسـت. اگر از طرف آب به جسم نیروی شناوری ۱۰N وارد شـود نیروی عمودی سـطح از طـرف کفه که به جسم وارد می‌شود چند نیوتون است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

پاسخ نیروهای وارد بر جسم عبارت است از:



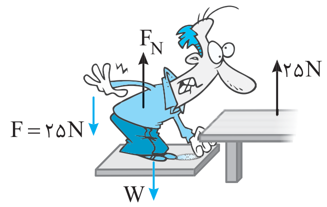
$$F_N+F_b=mg\Rightarrow F_N=۲۰-۱۰=۱۰N$$

گزینهٔ ۱

B | ۷۴۵ | ۳

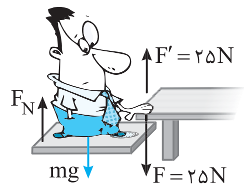
شخصی به میز نیروی $۲۵N$ رو به بالا وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون میز نیز نیرویی برابر $۲۵N$ رو به پایین بر شخص وارد می‌کند. برای آنکه شخص ساکن بماند نیروسنج باید به شخص مجموع نیروی وزن شخص و نیروی $۲۵N$ را نشان دهد.

$$F_N=mg+F\Rightarrow F_N=۷۵۰+۲۵\Rightarrow F_N=۷۷۵N$$



B | ۷۴۶ | ۲

شخص نیروی $۲۵N$ به سمت پایین به میز وارد کرده پس میز نیروی ۲۵ نیوتونی به سمت بالا به شخص وارد خواهد کرد و سبب می‌گردد که ترازوی فنری عدد کمتری را نشان دهد. نیروهای وارد بر شخص عبارتند از: F_N، W و F'

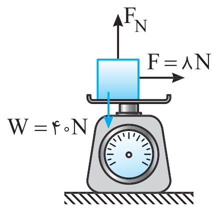


بنابراین می‌توان نوشت: $mg=F'+F_N\Rightarrow ۷۵۰=۲۵+F_N\Rightarrow F_N=۷۲۵N$

A | ۷۴۷ | ۱

نیروها در راستای قائم متوازن است و ترازوی فنری مقدار F_N را نشان می‌دهد که برابر وزن جسم است.

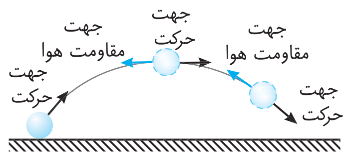
$$F_N=mg\Rightarrow F_N=۴۰N$$



A | ۷۴۸ | ۲

نکته مقاومت شاره (هوا) به تندی جسم بستگی دارد و با افزایش تندی جسم افزایش می‌یابد و با کاهش تندی، مقاومت هوا کاهش می‌یابد.

با گذشت زمان تا رسیدن به نقطهٔ اوج تندی جسم در حال کاهش و پس از اوج تندی در حال افزایش است پس اندازهٔ مقاومت هوا نیز ابتدا در حال کاهش و سپس در حال افزایش است و گزارهٔ (الف) نادرست است. در هر لحظه مقاومت هوا خلاف جهت حرکت است و چون جهت حرکت در حال تغییر است پس جهت مقاومت هوا نیز تغییر می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است. اندازهٔ نیروی وزن همواره برابر mg و جهت آن همواره در امتداد قائم به سمت پایین است در نزدیکی سطح زمین مقدار آن ثابت است. پس گزارهٔ (پ) درست است.



B | ۷۴۹ | ۴

چترباز بلافاصله بعد از پرش آزاد چتر خود را باز کرده پس حرکت چترباز ابتدا تندشونده است تا به تندی حدی برسد و سپس ادامهٔ حرکت را با همین تندی طی می‌کند. در تندی حدی، نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا باهم برابر می‌شوند:

$$f_D=mg\xrightarrow{m=۷۰kg}f_D=۷۰۰N\xrightarrow{f_D=۱۴۰v}۷۰۰=۱۴۰v$$

$$\Rightarrow v=۵m/s$$

بنابراین در این حرکت بیشینهٔ تندی چترباز همان $۵m/s$ می‌باشد و تندی نمی‌تواند از $۵\,m/s$ بیشتر شود.

یادآوری با افزایش تندی سقوط چترباز لحظه‌ای فرا می‌رسد که نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا برابر شده و سرعت چترباز ثابت می‌ماند که به آن تندی حدی گویند.

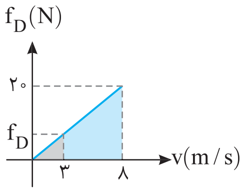
B | ۷۵۰ | ۲

۱ آخرین سرعتی که جسم در طول مسیر به آن رسیده $۸m/s$ است یعنی تندی حدی این جسم $۸m/s$ است و در این تندی نیروی وزن و مقاومت هوا با هم برابر است، بنابراین:

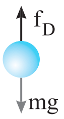
$$f=mg\Rightarrow ۲۰=m\times ۱۰\Rightarrow m=۲kg$$

۲ برای به‌دست آوردن شتاب در تندی $۳m/s$ ابتدا نیروی مقاومت هوا را به کمک شیب نمودار در این لحظه به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۲۰-۰}{۸-۰}=\frac{f_D-۰}{۳-۰}\Rightarrow f_D=۷/۵N$$



۳ به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب را در این لحظه حساب می‌کنیم.



$$f_{net}=ma\Rightarrow mg-f_D=ma\Rightarrow ۲۰-۷/۵=۲a\Rightarrow a=\frac{۱۲/۵}{۲}$$

$$\Rightarrow a=۶/۲۵m/s^۲$$

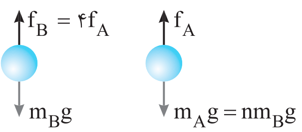
B | ۷۵۱ | ۴

خط فکری نیروی مقاومت هوا ثابت فرض شده، نیروی وزن هم ثابت است. بنابراین نیروی خالص وارد بر گوی A و گوی B ثابت است و نوع حرکت آن‌ها حرکت با شتاب ثابت است و می‌توان از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد. برای هر گوی یک شکل ساده شامل نیروهای وارد بر آن را رسم کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب آن‌ها را به دست بیاوریم.

۱ دو گوی از ارتفاع یکسان $(h_A=h_B)$ رها شده $(v_۰=۰)$ و با تندی یکسان $(v_A=v_B)$ به زمین برخورد کرده‌اند. با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow\begin{cases}v_A^۲=۲a_Ah_A\\ v_B^۲=۲a_Bh_B\end{cases}\xrightarrow[h_A=h_B]{v_A=v_B}a_A=a_B$$

۲ شتاب‌ها را به کمک قانون دوم به دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم:



$$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow\begin{cases}m_Bg-۴f_A=m_Ba_B\Rightarrow a_B=g-\dfrac{۴f_A}{m_B}\\ nm_Bg-f_A=nm_Ba_A\Rightarrow a_A=g-\dfrac{f_A}{nm_B}\end{cases}$$

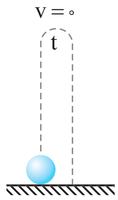
$$a_B=a_A\Rightarrow g-\frac{۴f_A}{m_B}=g-\frac{f_A}{nm_B}\Rightarrow n=\frac{۱}{۴}$$

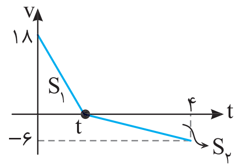
C | ۷۵۲ | ۲

خط فکری طول مسیر رفت و برگشت جسم برابر است. از طرفی سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی جسم است. از این‌رو سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا t و t تا ۴s باید برابر باشند. $S_۱$ و $S_۲$ را با هم برابر قرار دهید و t را حساب کنید سپس به کمک t، شتاب در مسیر رفت و یا برگشت را به دست آورده تا بتوانید f_D را حساب کنید.

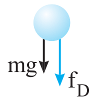
۱ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در مسیر رفت و برگشت با هم برابر است و می‌دانیم جابه‌جایی برابر است با مساحت زیر نمودار $v-t$ بنابراین:

$$S_۱=S_۲\Rightarrow \frac{۱۸\times t}{۲}=\frac{۶(۴-t)}{۲}\Rightarrow ۳t=۴-t\Rightarrow ۴t=۴\Rightarrow t=۱s$$





۲ شیب خط در نمودار $v-t$ برابر شتاب است. شتاب در مسیر رفت خواهد شد:



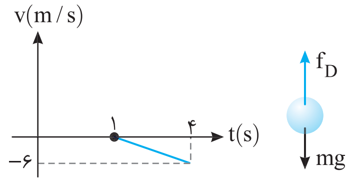
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{۱۸}{۱}=-۱۸\frac{m}{s^۲}$$

۳ نیروهای وارد بر جسم در مسیر رفت را در یک شکل ساده نمایش داده و به کمک قانون دوم f_D را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg-f_D=m(-۱۸)\Rightarrow -۲-f_D=-۳/۶\Rightarrow f_D=۱/۶N$$

البته می‌توان در مسیر برگشت نیز f_D را با توجه به معادلات مسیر برگشت به دست آورد:

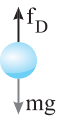
$$a=-\frac{۶}{۳}=-۲m/s^۲$$
$$-mg+f_D=ma$$
$$\Rightarrow -۲+f_D=-۰/۴$$
$$\Rightarrow f_D=۱/۶N$$



C ۷۵۳ ۴

خط فکری وقتی چترباز، چتر خود را باز می‌کند، تندی‌اش $۴۰m/s$ است و قرار است با باز کردن چتر تندی آن به $۵m/s$ برسد. با توجه به فرض مسئله مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا $۱۰۰۰N$ است بنابراین شما می‌توانید شتاب کند شدن حرکت را بیابید سپس به کمک رابطهٔ مستقل از زمان حداقل ارتفاعی که باید چتر باز شود را حساب کنید.

۱ ابتدا شتاب حرکت چترباز پس از بازشدن چتر را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید که مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا در بازهٔ تغییر سرعت $۱۰۰۰N$ فرض شده است.



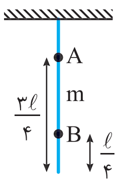
$$mg-f_D=ma\Rightarrow ۸۰۰-۱۰۰۰=۸۰a\Rightarrow a=-\frac{۲۰۰}{۸۰}=-۲/۵m/s^۲$$

۲ اکنون جابه‌جایی برای رسیدن سرعت از $۴۰m/s$ تا $۵m/s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\Rightarrow ۲۵-۱۶۰۰=۲(-۲/۵)h\Rightarrow h=\frac{۱۵۷۵}{۵}=۳۱۵m$$

B ۷۵۴ ۳

نکته هرگاه یک طناب دارای جرم از سقف آویزان کنیم، هر نقطه از طناب باید وزن قسمت زیرین خود را تحمل کند و در نقطهٔ آویز کشش بیشترین و در انتهای طناب کشش صفر است.



با فاصله گرفتن از انتهای آزاد، هر نقطه از طناب باید وزن بیشتری را تحمل کند. به طور مثال در نقاط A و B کشش طناب برابر است با:

$$T_B=\frac{mg}{۴},\ T_A=\frac{۳mg}{۴}$$

یعنی کشش طناب با فاصله از انتهای آزاد رابطهٔ مستقیم و خطی دارد و نمودار آن خط راست مایل با شیب ثابت است و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۷۵۵ ۱

نکته در یک طناب سبک (با جرم ناچیز) کشش در تمام نقاط یکسان است.

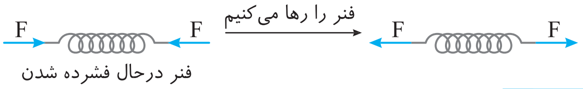
در این مسئله طناب سبک بوده بنابراین T ثابت است و گزینهٔ (۱) نمودار درست است.

A ۷۵۶ ۳

خط فکری سؤال زیبایی است، اگر خاطرتان باشد یک فنر نیرویی که به اجسام دو طرف خود وارد می‌کند یکسان است. با رها کردن فنر نیروی وارد بر گلولهٔ A و B یکسان بوده و این مطلب، نکتهٔ حل مسئله است.

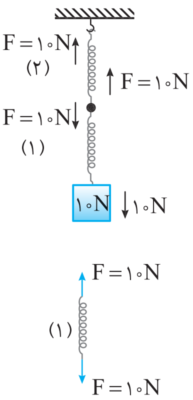
هنگام باز شدن فنر نیرویی که فنر به دو طرف خود وارد می‌کند با هم برابر است، بنابراین نیروی وارد بر هر دو گوی یکسان می‌باشد.

$$F=m_Aa_A\Rightarrow F=۲a_A$$
$$F=m_Ba_B\Rightarrow F=m_Ba_B \xrightarrow{a_A=\frac{۱}{۳}a_B} ۲\times\frac{a_B}{۳}=m_Ba_B$$
$$\Rightarrow m_B=\frac{۲}{۳}kg\approx ۶۶۶g$$



A ۷۵۷ ۲

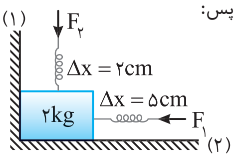
هنگامی که نیروسنج بدون جرم فرض شود، نیروی کشسانی در طول فنر هر دو نیروسنج یکسان و برابر ۱۰N است، پس هر نیروسنج ۱۰N را نشان می‌دهد. اما برای توضیح بیشتر به فنر (۱) نگاه کنید که ساکن است و چه نیروهایی به آن وارد می‌شود: نیروی ۱۰N توسط وزنه اما چرا فنر ثابت مانده است؟ قطعاً در محل اتصال دو فنر، فنر (۲) به فنر (۱) نیروی ۱۰N وارد کرده تا نیروها متوازن شده و فنر ثابت بماند یعنی فنری داریم که بر دو سرش نیروی یکسان ۱۰N وارد می‌شود. بنابراین کشش آن نیز ۱۰N است. همین مطلب در مورد فنر (۲)، نیز صدق می‌کند.



B ۷۵۸ ۳

۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل می‌کنیم.

۲ نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ از طرف فنر وارد می‌شود، پس:



$$F_۱=k\Delta x_۱\Rightarrow F_۱=۲\frac{N}{cm}\times ۵cm\Rightarrow F_۱=۱۰N$$
$$F_۲=k\Delta x_۲\Rightarrow F_۲=۲\frac{N}{cm}\times ۲cm\Rightarrow F_۲=۴N$$

۳ نیروهای وارد بر جسم متوازن است، پس اندازه نیروهای در خلاف جهت باید با هم برابر باشند.

$$F_{x_{net}}=۰\Rightarrow F_۱=F_{N_۱}\Rightarrow F_{N_۱}=۱۰N$$
$$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_۲+mg=F_{N_۲}\Rightarrow F_{N_۲}=۲۴N$$

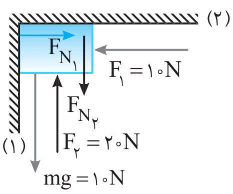
نیروی خالصی که دیوارهها بر جسم وارد می‌کنند را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم.

$$F_{N_{net}}=\sqrt{F_{N_۱}^۲+F_{N_۲}^۲}=\sqrt{۱۰^۲+۲۴^۲}$$
$$=۲\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۲\sqrt{۲۵+۱۴۴}=۲\sqrt{۱۶۹}=۲۶N$$

A ۷۵۹ ۱

۱ در حل مسائل دینامیک گام اول رسم تمام نیروهای وارد بر جسم است تا بتوانیم به راحتی مسئله را حل کنیم. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ جسم ساکن است بنابراین نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده از این‌رو در امتداد افقی و قائم می‌توان نوشت:



$$F_{x_{net}}=۰\Rightarrow F_۱=F_{N_۱}\Rightarrow F_{N_۱}=۱۰N$$
$$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_{N_۲}+mg=F_۲\Rightarrow F_{N_۲}+۱۰=۲۰$$
$$\Rightarrow F_{N_۲}=۱۰N$$

۳ نسبت نیروهای دو دیواره وارد بر جسم خواهد شد:

$$\frac{F_{N_۲}}{F_{N_۱}}=\frac{۱۰}{۱۰}=۱$$

A ۷۶۰ ۱

اگر شـما روی یک نیروسـنج بایسـتید، نیروسنج وزن شما را نشـان می‌دهد حال اگر یک قطعه سـنگ را در دسـت بگیرید و روی نیروسـنج بایستید، نیروسـنج مجموع وزن شما و قطعه سـنگ را نشـان می دهد. به طور کلی یک نیروسنج، همواره مجموع وزن اجسام سـاکن که روی نیروسـنج قرار دارند را نشـان می‌دهد و به نحوهٔ قرار گرفتن آن‌ها بستگی نـدارد. بنابراین هر دو ترازوی فنری یک عدد را نشـان خواهنـد داد و اختلاف عددهای نشان داده شده صفر است.

پنجره ۱ روبه‌روی ۲

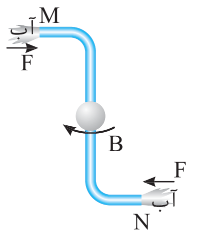
A ۷۶۰ ۲

۱ وقتی مقوا را به آرامی می کشـیم، نیروی اصطکاک بین سـکه و مقوا باعث حرکت سکه به همراه مقوا می‌شود. اما اگر مقوا را خیلی سریع بکشیم به دلیل لختی سکه، سکه جا مانده و در لیوان می‌افتد.

نمای ۲

A ۷۶۰ ۴

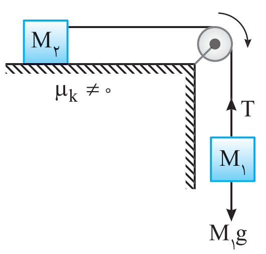
۲ فواره به آب رو به خارج نیرو وارد می کند و بنا به قانون سـوم نیوتون واکنش نیروی وارد بـر آب به فواره وارد می‌شـود یعنی در دهانهٔ M مطابق شکل به آب نیرو به جهت چپ برای خروج آب وارد می‌شـود پس آب نیز نیرویی به سمت راست به فواره وارد می کند. هم‌چنین در دهانهٔ N به آب به سـمت راسـت نیرو وارد می‌شود پس آب نیز به سمت چپ به فواره نیرو وارد می‌کند. مطابق شکل جهت نیروهای وارد به فواره و جهت چرخش آن نشان داده شده است.



نمای ۳

B ۷۶۰ ۱

۳ دستگاه در حال حرکت است و وزنهٔ M_1 رو بـه پاییـن حرکـت می کنـد. بـر وزنهٔ M_1 نیروی وزن M_1g و نیروی کشـش T وارد می‌شود و برایند نیروهای وارد بر M_1 رو به پاییـن اسـت یعنی نیـروی کشـش وارد بر M_1 از نیـروی وزن آن کمتـر اسـت. $(T<M_1g)$. نیروی کشش نخ (T) توسط نخ بر وزنهٔ M_1 وارد می‌شود بنا بر قانون سـوم نیوتون M_1 نیز نیرویی هم‌اندازهٔ T بر نخ رو به پایین وارد می کند. نیروی کشـش T از وزن M_1g کمتر اسـت بنابراین واکنش آن که توسـط M_1 بر نخ وارد می‌شـود از M_1g کوچک‌تر است و گزینهٔ (۱) درست است.



گزینه‌های (۲) و (۳) نیز با استدلال بالا نادرست هستند.

دقت کنید وزنهٔ M_1 بر وزنهٔ M_2 نیرو وارد نمی کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

نمای ۳

B ۷۶۰ ۲

۴ **۱** در $0/5s$ اول که راننده هنوز ترمز نگرفته اسـت، تقریباً سرعت خودرو ثابت بوده و نیروی خالص وارد بر خودرو صفر است. $F_{net}=0$

۲ برای به‌دست آوردن نیروی خالص وارد بر خودرو که در تمام مدت توقف بر جسم وارد می‌شود باید شتاب حرکت در این قسمت را حساب کنیم.

ابتدا پیشروی خودرو در مدت زمان واکنش را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_1 = vt \Rightarrow \Delta x_1 = 20\times 0/5 = 10m$$

جابه‌جایی خودرو در بازهٔ ترمز گرفتن $50-10=40m$ است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان شتاب را حساب می کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 20^2 = 2a(40) \Rightarrow a = -5m/s^2$$

نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net} = ma \Rightarrow |F_{net}| = |1500\times(-5)| \Rightarrow F_{net} = 7500N$$

نمای ۴

B ۷۶۰ ۱

۵ **۱** بنا به قانون سوم نیوتون:

نیرویی که شخص A بر شخص B وارد می کند، هم‌اندازه و در خلاف جهت نیرویی است که شخص B بر شخص A وارد می کند. بنابراین:

$$F_A = -F_B \Rightarrow m_a a_a = -m_B a_B \xrightarrow[a_A = 2m/s^2]{m_A=50kg,\ m_B=80kg}$$

$$50\times 2 = -80\times a_B \Rightarrow a_B = -1/25 m/s^2$$

۲ سرعت A و سرعت B را بعد از $0/5s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \begin{cases} \xrightarrow{A:} v_A = 2\times 0/5 = 1m/s \\ \xrightarrow{B:} v_B = -1/25\times 0/5 = -0/625m/s \end{cases}$$

۳ اختلاف بزرگی سرعت‌ها برابر است با:

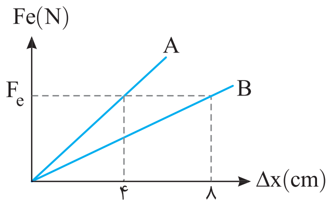
$$|v_A| - |v_B| = 1 - 0/625 = 0/375m/s$$

نمای ۶

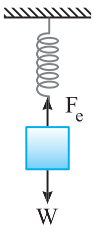
B ۷۶۰ ۴

۶ **نکته** شـیب نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی بر حسب تغییر طول فنر برابر ثابت فنر است. با توجه به نمودارها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_{e_A} = k_A\Delta x_A = 4k_A \\ F_{e_B} = k_B\Delta x_B = 8k_B \end{cases} \xrightarrow{F_{e_A}=F_{e_B}} 4k_A = 8k_B \Rightarrow k_A = 2k_B \quad (I)$$



وقتی وزنه را به فنر آویزان می‌کنیم، نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر متوازن شده و وزنه ساکن می‌ماند.



$$F_{net} = 0 \Rightarrow$$

$$F_e = W \begin{cases} \xrightarrow{A} k_A\Delta x_A = 40 \\ \xrightarrow{B} k_B\Delta x_B = 40 \end{cases} \Rightarrow k_A\Delta x_A = k_B\Delta x_B$$

با توجه به رابطهٔ (I) خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{k_A=2k_B} 2k_B\Delta x_A = k_B\Delta x_B \Rightarrow \Delta x_B = 2\Delta x_A$$

با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\Delta x_B - \Delta x_A = 4 \Rightarrow 2\Delta x_A - \Delta x_A = 4cm \Rightarrow \Delta x_A = 4cm$$

ثابت فنر A خواهد شد:

$$F_{e_A} = k_A\Delta x_A \Rightarrow 40 = k_A\times\frac{4}{100} \Rightarrow k_A = 1000N/m$$

میانبر البته از همان ابتدا با توجه به نمودار مشخص است که برای یک نیروی ثابت تغییر طول فنر A نصف تغییر طول فنر B است. $\Delta x_B = 2\Delta x_A$

از طرفی بنا به فرض مسئله:

$$\Delta x_B - \Delta x_A = 4 \Rightarrow 2\Delta x_A - \Delta x_A = 4 \Rightarrow \Delta x_A = 4cm$$

به فنر A وزنهٔ $4kg$ آویزان کرده‌ایم، بنابراین:

$$F_{e_A} = k_A\Delta x_A \xrightarrow{F_{e_A}=W} k_A\Delta x_A = 40 \Rightarrow k_A = \frac{40}{0/04}$$

$$\Rightarrow k_A = 1000N/m$$

نمای ۱۱

B ۷۶۰ | ۱

۷ [۱] هنگام سقوط در شرایط خلأ تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی وزن است و شتاب حرکت جسم در این مدت برابر شتاب گرانش است.

$$F_{net}=ma\Rightarrow W=ma\Rightarrow mg=ma\Rightarrow a=10\,m/s^2$$

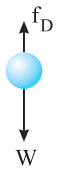
[۲] ارتفاع h خواهد شد:

$$h=\frac{1}{2}at^2\xrightarrow{t=2s}h=\frac{1}{2}\times10\times(2)^2\Rightarrow h=20\,m$$

[۳] گلوله در هوا از ارتفاع $h'=h-5=15m$ رها شده است. شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$h'=\frac{1}{2}a't^2\Rightarrow15=\frac{1}{2}a'(2)^2\Rightarrow a'=7/5\,m/s^2$$

[۴] بنا به قانون دوم نیوتون نیروی مقاومت هوا خواهد شد:



$$F_{net}=ma'\Rightarrow w-f_D=ma'\xrightarrow{m=0/3kg}$$

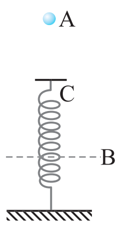
$$0/3\times10-f_D=0/3\times7/5\Rightarrow$$

$$f_D=0/3\times2/5\Rightarrow f_D=0/75N$$

نمای ۹

B ۷۶۰ | ۲

۸ از A تا C جسم تحت تأثیر نیروی وزن دارای حرکت تندشونده است. در لحظهٔ برخورد به C، شتاب حرکت کم می‌شود زیرا بر جسم نیروی کشسانی فنر وارد می‌شود اما تا لحظه‌ای که نیروی کشسانی از نیروی وزن کمتر است، حرکت همچنان تندشونده است. بعد از آن‌که F_e بزرگ‌تر از W می‌شود، حرکت کندشونده شده تا لحظه‌ای که در B متوقف می‌شود، بنابراین در مسیر C تا B نوع حرکت از تندشونده به کندشونده تغییر می‌کند.



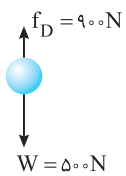
نمای ۱۱

B ۷۶۰ | ۲

۹ [۱] در لحظهٔ باز شدن چتر نیروی مقاومت هوا f_D بنا به رابطهٔ مسئله خواهد شد:

$$f_D=4v^2\Rightarrow f_D=4\times15^2\Rightarrow f_D=4\times225\Rightarrow f_D=900N$$

[۲] شتاب در لحظهٔ باز شدن چتر را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net}=ma\Rightarrow W-f_D=ma\xrightarrow{m=50kg}$$

$$500-900=50a\Rightarrow-400=50a$$

$$\Rightarrow a=-8\,m/s^2\Rightarrow|a|=8\,m/s^2$$

[۳] تندی حدی وقتی اتفاق می‌افتد که نیروی مقاومت هوا برابر نیروی وزن می‌شود.

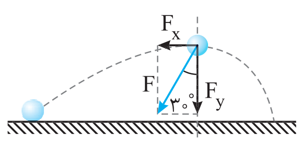
$$f_D=W\Rightarrow4v^2=mg\Rightarrow4v^2=500\Rightarrow v^2=\frac{500}{4}\Rightarrow v=5\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$$

نمای ۹

B ۷۶۰ | ۱

۱۰ نیروی خالص وارد بر جسم از دو مؤلفهٔ F_y و F_x تشکیل شده که به جسم دو شتاب یکی در راستای قائم (a_y) و دیگری در راستای افقی (a_x) می‌دهد. با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$\cot30=\frac{F_y}{F_x}\xrightarrow{F=ma}\cot30=\frac{ma_y}{ma_x}\Rightarrow\frac{a_y}{a_x}=\sqrt{3}$$



نمای ۸

پنجره ۳

A ۷۶۱ | ۴

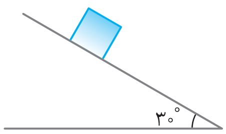
هنگامی که ما راه می‌رویم، عامل حرکت رو به جلوی ما، اصطکاک بین کف کفش ما و سطح زمین است یعنی ما زمین را رو به عقب هل می‌دهیم و زمین همان نیرو را رو به جلو به ما وارد می‌کند. همچنین هنگام به راه افتادن و حرکت اتومبیل، اصطکاک بین لاستیک و جاده سبب حرکت اتومبیل می‌شود.

هنگامی که بین لاستیک و جاده اصطکاک وجود نداشته باشد، اتومبیل تغییر مکان نمی‌دهد. به‌طور مثال روی یخ، چرخ خودرو بُکس‌باد می‌کند (یعنی درجا می‌چرخد) و خودرو جلو نمی‌رود.

A ۷۶۲ | ۱

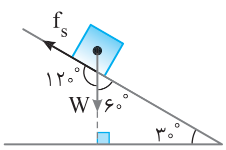
نیروهای وارد بر جسم به ترتیب: ۱) نیروی وزن در امتداد قائم رو به پایین، ۲) نیروی عمودی سطح در امتداد عمود بر سطح، ۳) نیروی اصطکاک که با حرکت جسم رو به پایین مخالف است.

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو جسم در حال سکون است. زاویه‌ای که نیروی اصطکاک با نیروی وزن می‌سازد چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۶۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۵۰

پاسخ نیروی اصطکاک همواره مماس بر مسیر حرکت بوده و در خلاف جهت لغزش است، همچنین نیروی وزن نیز همواره در امتداد قائم به سمت پایین است. از این‌رو مطابق شکل زاویهٔ بین نیروی اصطکاک ایستایی و نیروی وزن °۱۲۰ می‌شود.



گزینهٔ ۳

A ۷۶۳ | ۴

تمام داده‌های مسئله بیهوده است. چرا؟ چون جسم ساکن است و در راستای افقی به آن نیرویی وارد نمی‌شود، پس نیروی اصطکاکی بین جسم و سطح ایجاد نمی‌شود و اصطکاک صفر است.

B ۷۶۴ | ۳

خط فکری در حل مسائل اصطکاک، که در آن جسم ساکنی تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد، در گام اول باید با به‌دست آوردن نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ مشخص کنید که جسم شروع به حرکت می‌کند یا نه؟ اگر $F<f_{s\,max}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و اصطکاک بین جسم و سطح اصطکاک ایستایی است که همواره با نیرویی که می‌خواهد جسم را در امتداد اصطکاک حرکت دهد برابر است.

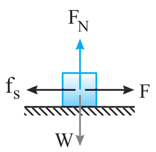
[۱] ابتدا اصطکاک ایستایی جسم در آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s\,max}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s\,max}=0/4\times5\times10=20N$$

[۲] چون نیروی افقی $F=15N$ از اصطکاک ایستایی بیشینه، کمتر است، جسم روی سطح افقی ساکن می‌ماند.

[۳] برایند نیروهای وارد بر جسم در این حالت صفر است و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی F برابر است.

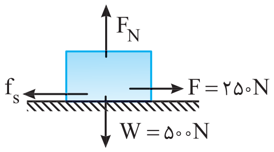
$$F_{net}=0\Rightarrow f_s=F=15N$$



A ۷۶۵ | ۱

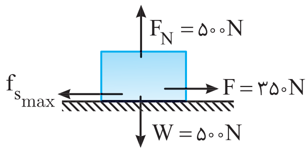
خط فکری هر گاه در صورت مسئله با اعمال نیرو، جسم همچنان ساکن باشد شما باید بالای کلمه ساکن بنویسید $(F_{net}=۰)$. از طرفی در آستانهٔ حرکت همچنان نیروی خالص وارد بر جسم صفر است $(F_{net}=۰)$ شما باید نیروهای وارد بر جسم را در هر دو حالت رسم کنید و برایند نیروها را مساوی صفر قرار دهید.

در حالت اول، جسم ساکن است بنابراین اصطکاک ایستایی جسم با نیروی افقی وارد بر آن برابر می‌شود.
$$F_{net}=۰\Rightarrow F-f_s=۰\Rightarrow F=f_s\Rightarrow f_s=۲۵۰N$$



حالت دوم در آستانهٔ حرکت نیروی اصطکاک وارد بر جسم بیشینه است اما چون جسم همچنان ساکن است خواهیم داشت: $F_{net}=۰\Rightarrow F-f_{s\,max}=۰\Rightarrow f_{s\,max}=۳۵۰N$

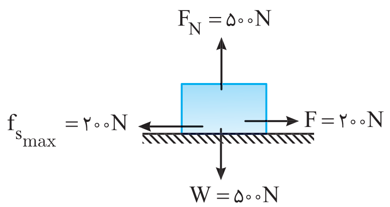
اکنون ضریب اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:
$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=W=۵۰۰N} ۳۵۰=\mu_s\times ۵۰۰\Rightarrow \mu_s=۰/۷$$



بازی با سؤال جسمی به جرم $۵۰kg$ روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_s=۰/۴$ و $\mu_k=۰/۲$ ساکن است، یکبار با نیروی افقی $F=۲۰۰N$ و بار دیگر با نیروی افقی $F=۴۰۰N$ جسم را هُل می‌دهیم، شتاب حرکت جسم در هر حالت به ترتیب از راست به چپ چند $m/s^۲$ است؟

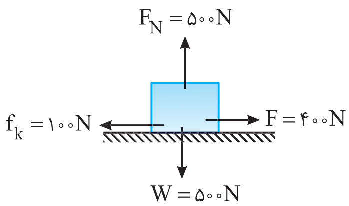
۱) ۶، ۲   ۲) صفر، ۶   ۳) صفر، ۴   ۴) ۲، ۴

پاسخ ابتدا باید نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را به‌دست بیاورید.
$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=W=۵۰۰N} f_{s\,max}=۰/۴\times ۵۰۰=۲۰۰N$$



ابتدا نیروی افقی $F=۲۰۰N$ بر جسم وارد شده است که این نیرو با اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند و شتاب آن صفر است.

در حالت دوم بر جسم نیروی افقی $F=۴۰۰N$ وارد شده است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است از این‌رو می‌توان نوشت: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times ۵۰۰\Rightarrow f_k=۱۰۰N$

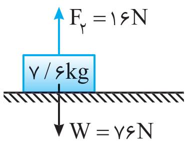


به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۴۰۰-۱۰۰=۵۰a\Rightarrow a=۶m/s^۲$$

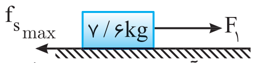
گزینهٔ ۲

B ۷۶۶ | ۴

با توجه به نیروی $F_۲$، نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم.
$$mg-F_۲=F_N\Rightarrow ۷۶-۱۶=F_N$$
$$\Rightarrow F_N=۶۰N$$



وقتی نیروی $F_۱$ برابر ۱۲N شده است با ضربهٔ کوچکی جسم به حرکت درآمده است یعنی در حالتی که $F_۱=۱۲N$ می‌شود جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد.



بنابراین:
$$F_۱=f_{s\,max}=\mu_s F_N\Rightarrow ۱۲=\mu_s\times ۶۰\Rightarrow \mu_s=\frac{۱}{۵}$$

A ۷۶۷ | ۳

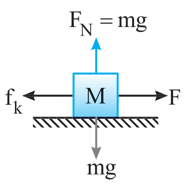
نکته اصطکاک بین دو جسم، به چگونگی سطوح تماس و نیروی عمودی بستگی دارد و به ابعاد ظاهری سطح تماس دو جسم بستگی ندارد.

در دو حالت، جسم به حرکت درآمده است و اصطکاک بین جسم و سطح $f_k=\mu_k mg$ است، بنابراین اصطکاک در دو حالت یکسان بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

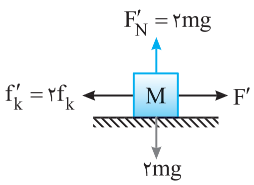
B ۷۶۸ | ۳

نکته ضریب اصطکاک بین دو سطح به چگونگی و ویژگی‌های دو سطح بستگی دارد و اگر سطح‌ها تغییر نکنند ضریب اصطکاک ثابت می‌ماند.

۴ جنس قطعه چوب و سطح تغییر نکرده بنابراین ضریب اصطکاک تغییر نمی‌کند $(\mu'_k=\mu_k)$ جسم M با سرعت ثابت در حرکت و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند بنابراین نیروی F با نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح برابر است. $(F=f_k)$

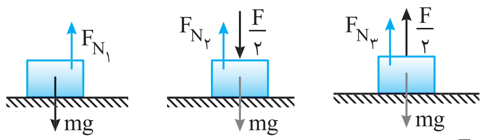


۵ وقتی جرم قطعه چوب دو برابر می‌شود، $(M'=۲M)$ نیروی عمودی تکیه‌گاه $F'_N=۲mg$ می‌شود بنابراین نیروی اصطکاک $f'_k=\mu_k F'_N$ نیز دو برابر می‌شود و اگر بخواهیم جسم با سرعت ثابت حرکت کند باید $F'=۲F$ شود.



B ۷۶۹ | ۲

خط فکری جسم‌ها در حال حرکت هستند، بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر آن‌ها برابر $f_k=\mu_k N$ می‌باشد و با توجه به صورت مسأله μ_k در تمام سطوح مقایسه یکسان است پس نیروی اصطکاک جسمی بیشتر است که نیروی عمودی سطح بیشتری بر آن وارد شود. بنابراین نیروی عمودی هر سطح را حساب می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم، نیروی عمودی سطح‌ها خواهد شد:



$F_{N_۱}=mg$ گزینهٔ (۱)

$F_{N_۲}=mg+\frac{F}{۲}$ گزینهٔ (۲)

$F_{N_۳}=mg-\frac{F}{۲}$ گزینهٔ (۳)

بنابراین $F_{N_۲}$ از همه بیشتر بوده و نیروی اصطکاک جنبشی در گزینهٔ (۲) از سایر گزینه‌ها بیشتر می‌باشد.

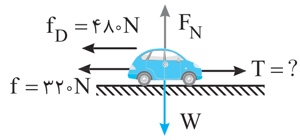
A ۷۷۰ ۳

خط فکری در حل مسائل دینامیک، باید نیروهای وارد بر جسمی که در مسئله از آن سؤال شده را رسم کرده سپس به سراغ قانون دوم نیوتون برویم.

به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی کشش طناب را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-(f_D+f)=ma\xrightarrow{m=۱۵۰۰kg,a=۲m/s^۲}$$

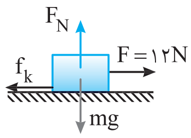
$$T-(۴۸۰+۳۲۰)=۱۵۰۰\times۲\Rightarrow T-۸۰۰=۳۰۰۰\Rightarrow T=۳۸۰۰N$$

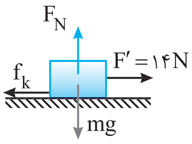


B ۷۷۱ ۳

خط فکری ابتدا برای هر حالتی نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم سپس برای هر حالت قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم تا یک دستگاه دو معادله با دو مجهول m و f_k به‌دست بیاوریم. با حل این دستگاه و یافتن نیروی اصطکاک، ضریب اصطکاک قابل محاسبه است.

در هر دو حالت با توجه به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:





$$\begin{cases}F-f_k=ma_۱\Rightarrow ۱۲-f_k=۰/۴m\\ F'-f_k=ma_۲\Rightarrow ۱۴-f_k=۰/۸m\end{cases}$$

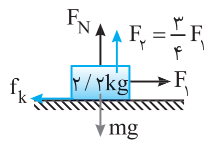
$$\Rightarrow\begin{cases}(۱۲-f_k=۰/۴m)\times-۲\\ ۱۴-f_k=۰/۸m\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_k=۱۰N\quad,\quad m=۵kg$$

نیروی اصطکاک $f_k=\mu_kF_N$ می‌باشد:

$$f_k=\mu_kF_N=\mu_kmg=۱۰\Rightarrow\mu_k(۵۰)=۱۰\Rightarrow\mu_k=۰/۲$$

B ۷۷۲ ۳



۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_N+F_۲=W\Rightarrow F_N=mg-F_۲$$

$$\Rightarrow F_N=۲۲-F_۲$$

۳ نیروی اصطکاک بین جسم و سطح را حساب می‌کنیم.

$$f_k=\mu_kF_N=\mu_k(۲۲-F_۲)\quad(I)$$

۴ جسم دارای تندی ثابت است و نیروهای وارد بر آن متوازن است از این‌رو باید نیروی $F_۱$ و f_k هم‌اندازه باشند بنابراین:

$$F_۱=f_k\xrightarrow{(I)}F_۱=\mu_k(۲۲-F_۲)\xrightarrow[\mu_k=۰/۵]{F_۲=\frac{۳}{۴}F_۱}$$

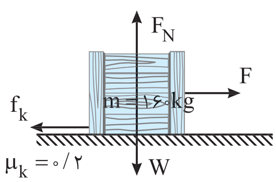
$$F_۱=۰/۵(۲۲-\frac{۳}{۴}F_۱)\Rightarrow F_۱=۱۱-\frac{۳}{۸}F_۱\Rightarrow\frac{۱۱}{۸}F_۱=۱۱\Rightarrow F_۱=۸N$$

۵ با توجه به $F_۲=\frac{۳}{۴}F_۱$ اندازهٔ $F_۲$ برابر $\frac{۳}{۴}\times۸=۶N$ است.

$$F=\sqrt{F_۱^۲+F_۲^۲}=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰N$$

A ۷۷۳ ۲

شکل مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم و نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم.



۱ جسم در امتداد قائم حرکتی ندارد، بنابراین نیروهای F_N و W متوازن هستند.

$$F_N=W\xrightarrow{W=mg}F_N=۱۶۰\times۱۰\Rightarrow F_N=۱۶۰۰N$$

۲ اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی را در این حالت به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_kF_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times۱۶۰۰\Rightarrow f_k=۳۲۰N$$

۳ به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی F را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\xrightarrow{a=۰/۲۵m/s^۲}$$

$$F-۳۲۰=۱۶۰\times۰/۲۵\Rightarrow F-۳۲۰=۴۰\Rightarrow F=۳۶۰N$$

۴ قرار است که با برداشتن مقداری از محتویات صندوق شتاب حرکت دو برابر یعنی $۲\times۰/۲۵=۰/۵m/s^۲$ شود. البته باید دقت کنید که با کاهش محتویات صندوق، نیروی اصطکاک نیز تغییر می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

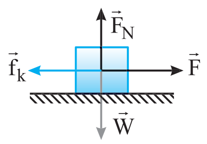
$$F'_{net}=m'a'\Rightarrow F-f'_k=m'a'\xrightarrow{f'_k=\mu_km'g}$$

$$۳۲۰-۰/۲m'\times۱۰=m'\times۰/۵\Rightarrow۳۲۰=۲/۵m'\Rightarrow m'=۱۲۸kg$$

۵ جرم محتویات خارج شده از صندوق برابر است با:

$$\Delta m=۱۶۰-۱۲۸=۳۲kg$$

B ۷۷۴ ۳



۱ به کمک قانون دوم نیوتون در هر حالت شکل ساده‌ای از مسئله رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می‌دهیم.

۲ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت جعبه را در دو حالت به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}F-f_k=ma\Rightarrow a=\dfrac{F-f_k}{m}\\ ۲F-f_k=ma'\Rightarrow a'=\dfrac{۲F-f_k}{m}\end{cases}$$

۳ برای مقایسه a و a' به‌صورت کسر a' مقدار f_k را اضافه و کم می‌کنیم.

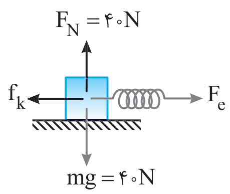
$$a'=\frac{۲F-f_k-f_k+f_k}{m}=\frac{۲F-۲f_k}{m}+\frac{f_k}{m}\Rightarrow a'=۲(\overbrace{\frac{F-f_k}{m}}^{a})+\frac{f_k}{m}$$

$$\Rightarrow a'=۲a+\frac{f_k}{m}\Rightarrow a'>۲a$$

برای سادگی یک مثال عددی می‌زنیم. فرض کنید $F=۵N$، $f_k=۲N$ و جرم m برابر ۱kg است، در این صورت:

$$a=\frac{۵-۲}{۱}=۳m/s^۲\quad,\quad a'=\frac{۲\times۵-۲}{۱}=۸m/s^۲\Rightarrow۸>۲\times۳$$

A ۷۷۵ ۲



۱ شکل مسئله را با رسم نیروهای وارد بر جسم کامل می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی وزن جسم است.

$$F_N=W\Rightarrow F_N=۴۰N$$

۳ اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح خواهد شد:

$$f_k=\mu_kF_N\xrightarrow{\mu_k=۰/۲۵}f_k=۰/۲۵\times۴۰=۱۰N$$

۴ قانون دوم را می‌نویسیم و نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم.

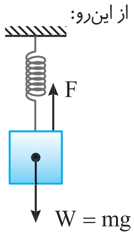
$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-f_k=ma\xrightarrow{a=۱/۵m/s^۲}F_e-۱۰=۴\times۱/۵\Rightarrow F_e=۱۶N$$

۵ افزایش طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=kx\xrightarrow{k=۸۰N/m}۱۶=۸۰x\Rightarrow x=۰/۲m=۲۰cm$$

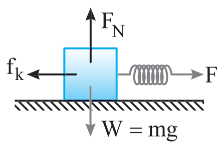
A ۷۷۶ | ۲

در حالت اول جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند از این‌رو:
در حالت اول خواهیم داشت:



$$F=W\Rightarrow k\Delta l=mg\Rightarrow k(\frac{۴}{۱۰۰})=mg \quad (۱)$$

در حالت دوم جسم با سرعت ثابت در حرکت بوده و مجدداً نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و خواهیم داشت:



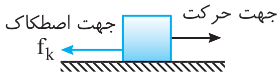
$$F_{net}=۰\Rightarrow F=f_k\Rightarrow k\Delta x=\mu_k W$$

$$\Rightarrow k(\frac{۲}{۱۰۰})=۰/۲Mg \quad (۲)$$

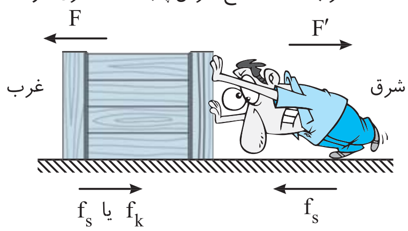
از تقسیم رابطهٔ (۱) بر رابطهٔ (۲) نسبت جرم‌ها را حساب می‌کنیم: $۲=\frac{m}{۰/۲M}\Rightarrow\frac{M}{m}=۲/۵$

B ۷۷۷ | ۱

یادآوری هر گاه دو جسم که باهم در تماس هستند بخواهند نسبت به هم حرکت کنند بین آن‌ها یک نیروی تماسی به وجود می‌آید که می‌خواهد مانع لغزش این دو جسم نسبت به هم شود که به آن نیروی اصطکاک گویند بنابراین نیروی اصطکاک در خلاف جهت لغزش جسم است.



به شکل زیر به دقت نگاه کنید. شخصی جعبه را با نیروی F به سمت غرب هُل می‌دهد و جعبه روی سطح افقی به سمت غرب می‌خواهد بلغزد بنابراین نیروی اصطکاکی که زمین به جعبه وارد می‌کند به سمت شرق بوده تا مانع لغزش شود.
اما بنا به قانون سوم نیوتون وقتی که شخص بر جعبه نیروی F را وارد می‌کند جعبه نیز نیروی F' هم‌اندازهٔ F را بر شخص به سوی شرق وارد می‌کند که این نیرو می‌خواهد شخص را به سوی شرق براند. بنابراین اصطکاک ایستایی که سطح زمین بر پای شخص وارد می‌کند، به سمت غرب است تا مانع لغزش پا به سمت شرق شود.



B ۷۷۸ | ۲

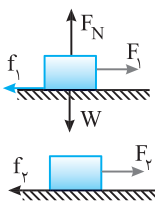
خط فکری ابتدا نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت $(f_{s\max})$ را به‌دست می‌آوریم. اگر نیروی F از این اصطکاک کمتر باشد جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F است و اگر نیروی F از نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت بیشتر باشد نیروی اصطکاک برابر نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k=\mu_k F_N)$ می‌شود.

۱ اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است با:

$$f_{s\max}=\mu_s F_N\xrightarrow{F_N=mg}f_{s\max}=\mu_s mg\xrightarrow{\mu_s=۰/۲۵,m=۴kg}$$

$$f_{s\max}=۰/۲۵\times۴۰=۱۰N$$

۲ اکنون نیروهای $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$ با $f_{s\max}$ مقایسه می‌کنیم:



$F_۱, F_۲ < f_{s\max}$

$$F_۱=۴N \longrightarrow f_۱=F_۱=۴N$$

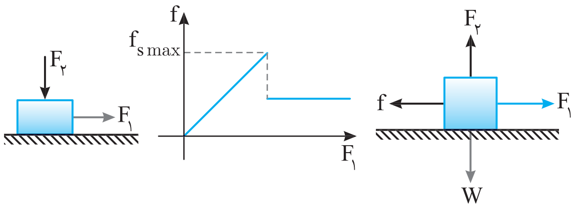
$$F_۲=۸N \longrightarrow f_۲=F_۲=۸N$$

۳ نیروی $F_۳=۱۲N$ از $f_{s\max}=۱۰$ بزرگ‌تر است بنابراین اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است. $f_۳=f_k=F_N\mu_k=mg\mu_k=۴۰\times۰/۲=۸N$

۴ در نتیجه: $f_۱<f_۲=f_۳$

A ۷۷۹ | ۴

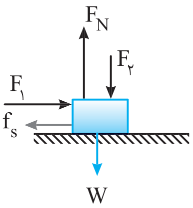
جسم ساکن است، نیروی $F_۱$ بر جسم وارد می‌شود و تا لحظه‌ای که جسم ساکن است نیروها متوازن هستند و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی $F_۱$ برابر است $(F_۱=f_s)$ با افزایش $F_۱$، نیروی اصطکاک F_s افزایش می‌یابد تا به مقدار پیشینهٔ آستانهٔ حرکت $f_{s\max}$ برسد. از لحظه‌ای که نیروی $F_۱$ از نیروی اصطکاک $f_{s\max}$ بیشتر شده، جسم به حرکت درمی‌آید اصطکاک ناگهان کاهش می‌یابد و برابر اصطکاک جنبشی $f_k=\mu_k F_N$ می‌شود. (معمولاً اصطکاک جنبشی از اصطکاک آستانهٔ حرکت کم‌تر است.) بنابراین ابتدا اصطکاک افزایش و سپس کاهش می‌یابد.



B ۷۸۰ | ۲

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. دقت کنید که جسم ساکن است.
با افزایش $F_۲$ نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد

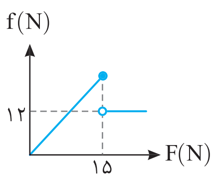
$$F_{net_y}=۰\Rightarrow\uparrow F_N=F_۲\uparrow+W$$



و (الف) درست است.
جسم ساکن است و با افزایش نیروی $F_۲$ تغییری در نیروی جلوبر $F_۱$ ایجاد نمی‌شود و جسم هم‌چنان ساکن می‌ماند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر می‌ماند و گزاره (ت) نادرست است. نیروهای وارد بر جسم ساکن متوازن هستند و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح با نیروی $F_۱$ برابر است. $f_s=F_۱=۱۰N$
و هرچه $F_۲$ را افزایش دهیم f_s همچنان $۱۰N$ باقی می‌ماند و عبارت (ب) نادرست است.
با افزایش نیروی عمودی سطح، نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت یعنی نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $\uparrow f_{s\max}=\mu_s F_N\uparrow$ افزایش می‌یابد. بنابراین، گزارهٔ (پ) درست است.

B ۷۸۱ | ۱

خط فکری به شکل با دقت نگاه کنید، نیروی اصطکاک جنبشی مقدار ثابت $f_k=۱۲N$ است. وقتی نیروی افقی $F=۱۵N$ است، اصطکاک بیشینه مقدار را دارد یعنی جسم در این لحظه در آستانهٔ حرکت بوده و اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}=۱۵N$ است. اکنون می‌توانید مسئله را حل کنید.



۱ ضریب اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم. $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow\mu_k=\frac{۱۲}{F_N}$

۲ ضریب اصطکاک ایستایی خواهد شد: $f_{s\max}=\mu_s F_N\Rightarrow\mu_s=\frac{۱۵}{F_N}$

۳ نسبت ضریب اصطکاک‌ها خواهد شد: $\frac{\mu_k}{\mu_s}=\frac{\frac{۱۲}{F_N}}{\frac{۱۵}{F_N}}=\frac{۴}{۵}$

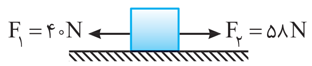
B ۷۸۲ ۳

خط فکری: گام اول، یافتن اصطکاک آستانهٔ حرکت جسم $f_{s\,max}$ است. گام بعدی، یافتن برایند دو نیروی F_1 و F_2 و مقایسهٔ آن با $f_{s\,max}$ است تا بتوانیم تشخیص بدهیم که جسم ساکن می‌ماند یا به حرکت درمی‌آید. آنگاه اصطکاک قابل محاسبه می‌شود.

۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N=\mu_s mg \Rightarrow f_{s\,max}=۰/۴\times ۵\times ۱۰=۲۰N$$

۲ برایند دو نیروی $F_1=۴۰N$ و $F_2=۵۸N$ برابر $۵۸-۴۰=۱۸N$ است.



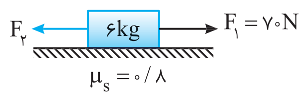
۳ برایند F_1 و F_2 از $f_{s\,max}$ کمتر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند.

۴ وقتی جسم ساکن می‌ماند نیروی اصطکاک ایستایی با نیرویی که می‌خواهد جسم را به حرکت درآورد برابر است: $f_s=۱۸N$

B ۷۸۳ ۴

خط فکری: می‌خواهیم جسم در آستانهٔ حرکت قرار گیرد. بنابراین دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد. اگر $F_1>F_2$ باشد و برایند آن‌ها برابر $f_{s\,max}=F_1-F_2$ شود جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست قرار می‌گیرد و اگر $F_1<F_2$ و برایند آن‌ها $(F_2-F_1=f_{s\,max})$ باشد، جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ قرار می‌گیرد بنابراین باید دو حالت را بررسی کنید.

اگر $F_1>F_2$ باشد جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست قرار خواهد داشت:



نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت خواهد شد:

$$f_{s\,max}=\mu_s N=۰/۸\times ۶۰=۴۸N$$

بنابراین:

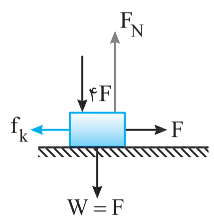
$$F_1-F_2-f_{s\,max}=0\Rightarrow ۷۰-F_2-۴۸=0\Rightarrow F_2=۲۲N$$

اگر $F_1<F_2$ باشد جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ قرار خواهد داشت بنابراین:

$$F_2-F_1-f_{s\,max}=0\Rightarrow F_2-۷۰-۴۸=0\Rightarrow F_2=۱۱۸N$$

B ۷۸۴ ۴

۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل رسم می‌کنیم.



۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_N=۴F+W \xrightarrow{W=F} F_N=۵F$$

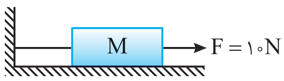
۳ نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s\,max})$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=۰/۱۸} f_{s\,max}=۰/۱۸\times ۵F \Rightarrow f_{s\,max}=۰/۹F$$

۴ نیروی افقی جلوبر F و اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\,max}=۰/۹F$ بوده یعنی $F>f_{s\,max}$ است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت جسم دارای اصطکاک جنبشی است که معمولاً از اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\,max}=۰/۹F$ کوچک‌تر است و تنها گزینه‌ای که چنین است گزینهٔ (۴) درست است.

B ۷۸۵ ۱

خط فکری: دقت کنید که در ابتدا نخ کشیدگی ندارد و نیروی کشش نخ صفر است و اگر نیروی F نتواند سبب حرکت جسم شود، نیروی کشش نخ همچنان صفر است.

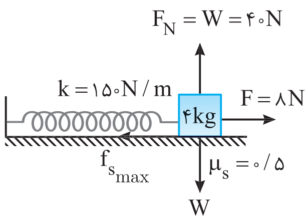


نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح ۱۵N است، بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت از ۱۵N نیز بیشتر است و نیروی افقی $F=۱۰N$ نمی‌تواند این جسم ساکن را به حرکت درآورد و باعث کشیدگی نخ شود، به همین علت نیروی کشش نخ صفر است.

B ۷۸۶ ۲

۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=mg=۴۰N} f_{s\,max}=۰/۵\times ۴۰ \Rightarrow f_{s\,max}=۲۰N$$



۲ جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست است یعنی نیروی اصطکاک $f_{s\,max}=۲۰N$ به سمت چپ است.

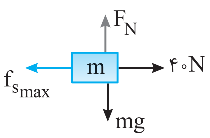
۳ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و برای آن‌که جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست باشد باید نیروی کشسانی فنر برابر $F_e=۲۰-۸=۱۲N$ به سوی راست باشد، بنابراین باید فنر فشرده شده باشد تا نیروی کشسانی آن رو به راست باشد.

۴ اندازهٔ تغییر طول فنر برابر است با:

$$F_e=kx\Rightarrow ۱۲=۱۵۰x\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۱۵۰}=\frac{۴}{۵۰}=۰/۰۸\Rightarrow x=۸cm$$

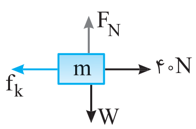
C ۷۸۷ ۳

۱ جسم در آستانهٔ حرکت است بنابراین نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و می‌توان از این مطلب استفاده کرد و جرم جسم را به‌دست آورد.



$$F_{net}=0\Rightarrow ۴۰-f_{s\,max}=0$$
$$\Rightarrow f_{s\,max}=۴۰\Rightarrow \mu_s mg=۴۰$$
$$\Rightarrow ۰/۴\times m\times ۱۰=۴۰\Rightarrow m=۱۰kg$$

۲ جسم در حال حرکت است و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k=\mu_k F_N)$ است. قانون دوم نیوتون را نوشته شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net}=ma\Rightarrow ۴۰-f_k=۱۰\times a\Rightarrow ۴۰-\mu_k mg=۱۰a$$
$$\Rightarrow ۴۰-(۰/۲\times ۱۰\times ۱۰)=۱۰a\Rightarrow a=۲m/s^2$$

B ۷۸۸ ۱

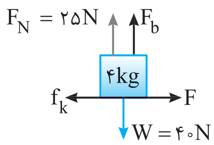
خط فکری: با یک مسئلهٔ زیبا مربوط به قانون دوم و قانون سوم سروکار دارید. نیرویی که شخص را به جلو می‌راند نیروی اصطکاک ایستایی بین پای شخص و سطح پیست است، در واقع شخص سطح را به عقب می‌راند و بنا به قانون سوم نیوتون، واکنش آن نیرو توسط سطح به شخص وارد می‌شود و شخص را به جلو می‌راند. بیشینه شتاب وقتی است که نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s\,max})$ باشد.

برای یافتن شتاب حرکت کافی است از قانون دوم نیوتون استفاده کنیم و به جای نیروی خالص وارد بر شخص نیروی $f_{s\,max}$ را قرار دهیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow \mu_s mg=ma\Rightarrow a=\mu_s g=۰/۹۵\times ۱۰=۹/۵\,m/s^2$$

A ۷۸۹ ۲

۱ شکل ساده‌ای از نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

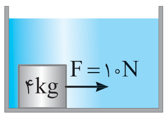


۲ جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است بنابراین:

$$F_{net}=۰\Rightarrow F=f_k\Rightarrow ۱۰=\mu_k F_N\Rightarrow ۱۰=۰/۴F_N\Rightarrow F_N=۲۵N$$

۳ جسم در امتداد قائم حرکتی ندارد و نیروهای رو به بالا با نیروهای رو به پایین برابر هستند. بر جسم نیروی F_N و نیروی شناوری F_b رو به بالا و نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود بنابراین خواهیم داشت: $F_N+F_b=W\Rightarrow F_b=۴۰-۲۵\Rightarrow F_b=۱۵N$

بازی با سؤال مطابق شکل جسمی به جرم ۴kg در کف ظرف حاوی مایعی با نیروی $F=۱۰N$ شروع به حرکت می‌کند، نیروی شناوری وارد بر جسم چند نیوتون می‌تواند باشد؟ $(\mu_k=۰/۲,\mu_s=۰/۴,g=۱۰N/kg)$

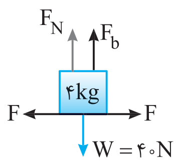


۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ برای آنکه جسم شروع به حرکت کند، $F>f_{s_{max}}$ باشد.

$$F>f_{s_{max}}\Rightarrow ۱۰>\mu_s F_N\Rightarrow ۱۰>۰/۴F_N\Rightarrow F_N<۲۵N$$

نیروهای در راستای قائم جسم را می‌نویسیم:

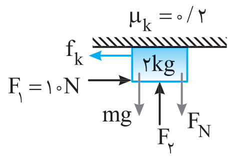


$$F_N+F_b=W\Rightarrow F_N=W-F_b$$
$$F_N<۲۵\Rightarrow W-F_b<۲۵$$
$$\Rightarrow ۴۰-F_b<۲۵\Rightarrow F_b>۱۵N$$

گزینهٔ ۴

B ۷۹۰ ۳

۱ تمام نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



۲ جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشند و می‌توانیم بنویسیم:

در راستای افقی: $F_۱=f_k\Rightarrow F_۱=\mu_k F_N \quad (۱)$

در راستای قائم: $F_N+mg=F_۲\Rightarrow F_N=F_۲-mg \quad (۲)$

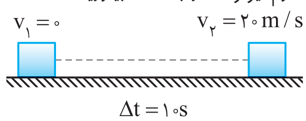
۳ اکنون رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$(۱)و(۲)\Rightarrow F_۱=\mu_k(F_۲-mg)\Rightarrow ۱۰=۰/۲(F_۲-۲۰)\Rightarrow F_۲=۷۰N$$

نمونهٔ واقعی این حرکت کشیدن ماله توسط گچ‌کار روی سقف است.

B ۷۹۱ ۴

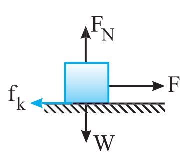
خط فکری حضور زمان در مسئله یعنی رفتن به سراغ روابط حرکت‌شناسی، ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، شتاب را بیابید، سپس نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون F را به‌دست بیاورید.



۱ در مدت ۱۰s سرعت اتومبیل از صفر به $\frac{۷۲}{۳/۶}=۲۰m/s$ رسیده است، بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$v_۲=at+v_۱\Rightarrow ۲۰=۱۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۲ حال با توجه به قانون دوم نیوتون:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma$$
$$\xrightarrow{f_k=\mu_k mg} F-\mu_k mg=ma$$
$$\xrightarrow{m=۱۵۰۰kg,\ \mu_k=۰/۰۲}$$
$$F-۰/۰۲\times ۱۵۰۰۰=۱۵۰۰\times ۲\Rightarrow F=۳۳۰۰N$$

A ۷۹۲ ۱

۱ سرعت خودرو را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم:

$$v=۵۴km/h=۵۴\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}=۱۵m/s$$

۲ نیرویی که باعث توقف جسم می‌شود نیروی اصطکاک است و مقدار آن را حساب می‌کنیم: $f_k=\mu_k mg=۰/۲\times m\times ۱۰=۲m$

۳ شتاب حرکت جسم را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

$$-f_k=ma\Rightarrow -۲m=ma\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۴ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی تا لحظهٔ توقف را حساب می‌کنیم: $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۱۵^۲=۲\times(-۲)\Delta x\Rightarrow \Delta x\approx ۵۶m$

میانبر اندازهٔ شتاب توقف جسم روی سطح افقی در اثر نیروی اصطکاک برابر است با: $a=\mu_k g$

A ۷۹۳ ۳

یادآوری در مدت‌زمان تأخیر واکنش راننده یعنی در بازهٔ زمانی دیدن مانع و ترمز گرفتن، اتومبیل دارای سرعت ثابت است.

۱ سرعت اتومبیل را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم. $۷۲\frac{km}{h}=\frac{۷۲}{۳/۶}=۲۰m/s$

۲ جابه‌جایی اتومبیل در ۰/۵s زمان واکنش را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x_۱=۲۰\times ۰/۵=۱۰m$$

در این ۱۰m نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.

۳ اتومبیل مماس بر مانع متوقف شده یعنی فاصلهٔ ۲۰m اتومبیل تا مانع کاملاً طی شده است. البته ۱۰m اول آن در زمان واکنش و ۱۰m باقی‌مانده با حرکت کندشونده انجام شده. به کمک رابطهٔ مستقل از زمان شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴۰۰=۲\times a\times(۱۰)\Rightarrow a=-۲۰m/s^۲$$

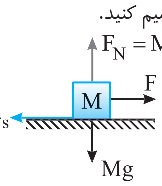
۴ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر اتومبیل خواهد شد:

$$|F_{net}|=m|a|\xrightarrow{m=۱۵۰۰kg}F_{net}=۱۵۰۰\times ۲۰\Rightarrow F_{net}=۳۰۰۰۰N$$

B ۷۹۴ ۲

خط فکری اول باید بدانیم منظور از حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآوردن جسم چیست؟ منظور این است که جسم با نیروی F در آستانهٔ حرکت قرار گیرد و با یک ضربهٔ کوچک به راه بیافتد. بنابراین اصطکاک آستانهٔ حرکت را در دو حالت به‌دست بیاورید و برهم تقسیم کنید.

حالت اول : $f_{s_{max}}=Mg\mu_s$



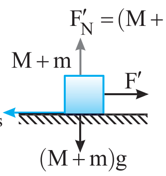
نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر $f_{s_{max}}=\mu_s N$ می‌باشد و دقت کنید که μ_s به جرم جسم بستگی ندارد.

$$F=f_{s\,max}\Rightarrow F=\mu_s Mg \quad , \quad F'=f'_{s\,max}\Rightarrow F'=\mu_s(M+m)g$$

بنابراین:

$$\frac{F'}{F}=\frac{\mu_s(M+m)g}{\mu_s Mg}=\frac{M+m}{M}$$

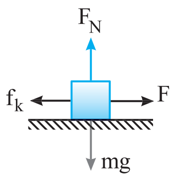
حالت دوم: $f'_{s_{max}}=(M+m)g\mu_s$



بدون حل نیز مشخص است که وقتی جرم از M به M+m افزایش یابد F′ به همان نسبت باید زیاد شود.

A ۷۹۵ ۴

خط فکری با دیدن گزینه‌ها نگران نشوید کافی است شکل مسئله را رسم کنید نیروهای وارد بر جسم را روی آن نمایش دهید. به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را پارامتری به‌دست بیاورید و با روابط حرکت‌شناسی سرعت جسم را بعد از طی مسافت d حساب کنید و تمام.



۱ ابتدا شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

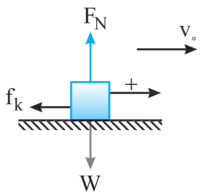
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow F-\mu_k mg=ma\Rightarrow a=\frac{F-\mu_k mg}{m}$$

۲ اکنون به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، v را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2-0=2\frac{F-\mu_k mg}{m}d\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2(F-\mu_k mg)d}{m}}$$

B ۷۹۶ ۱

نکته هرگاه در مسئله بیان شود که جسم را با سرعت اولیه پرتاب کرده (یا به حرکت درآورده‌ایم) یعنی نیروی جلوبر صفر است و جسم چون دارای سرعت اولیه است بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه می‌دهد تا در اثر اصطکاک بایستد.



شکل مسئله را رسم می‌کنیم. تمام نیروهای وارد بر جسم را روی جسم نمایش می‌دهیم. نیرویی که مانع حرکت جسم می‌شود نیروی اصطکاک است. شتاب حرکت را حساب می‌کنیم. بنابراین شتاب حرکت به جرم جسم بستگی ندارد. از طرفی:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان، جابه‌جایی تا توقف خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2(-a)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{v_0^2}{2a}$$

بنابراین مسافت طی شده در دو حالت یکی است و جرم در آن بی‌تأثیر است.

میانبر هر گاه تنها نیروی وارد بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی باشد، شتاب حرکت جسم برابر $a=\mu_k g$ خواهد بود.

بازی با سؤال **جسمی به جرم ۵kg با سرعت اولیهٔ v_0 روی سطح افقی پرتاب می‌شود و پس از طی مسافت ۲۰m می‌ایستد. اگر جسمی به جرم ۱۵kg را با همان سرعت اولیه روی همان سطح با همان μ_k پرتاب کنیم، پس از طی چند متر می‌ایستد؟ $(g=10N/kg)$**

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵

پاسخ **شتاب حرکت در دو حالت برابر $a=-\mu_k g$ است و بنا به رابطهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در دو حالت یکسان و برابر است با:**

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v_0^2=2(-\mu_k g)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

یعنی جابه‌جایی همان ۲۰m خواهد بود. گزینهٔ ۱

B ۷۹۷ ۲

خط فکری تا زمانی که نیروی F، بزرگ‌تر یا مساوی اصطکاک آستانهٔ حرکت نشود جسم شروع به حرکت نمی‌کند. البته اگر $F=f_{s\,max}$ باشد با یک ضربهٔ کوچک جسم به راه می‌افتد. بنابراین لحظهٔ شروع حرکت یعنی شما باید نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست آورده و آن را به جای F قرار داده لحظهٔ حرکت را حساب کنید.

۱ جسم هنگامی شروع به حرکت می‌کند که حداقل مقدار F برابر نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ باشد:

$$F=f_{s\,max}=\mu_s F_N=\mu_s mg=0/4\times 20=8N$$

۲ در معادله $F(t)=t^2+t-4$ می‌توان به جای F، ۸N قرار داد.

$$F(t)=8\Rightarrow t^2+t-4=8\Rightarrow t^2+t-12=0\Rightarrow (t+4)(t-3)=0$$

$\Rightarrow t=3, t=-4$ غقق

A ۷۹۸ ۲

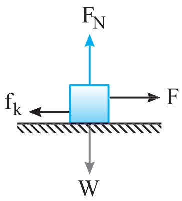
با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت زمان داده شده در مسئله با معادلهٔ سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را مشخص می‌کنیم.

$$v=4t+3\ ,\ v=at+v_0\Rightarrow a=4m/s^2$$

نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده، به کمک قانون دوم نیوتون اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow 18-f_k=4\times 4$$

$$\Rightarrow f_k=2N$$



A ۷۹۹ ۱

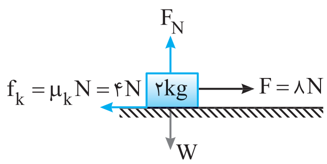
نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. نیروی اصطکاک خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow f_k=0/2\times 2\times 10\Rightarrow f_k=4N$$

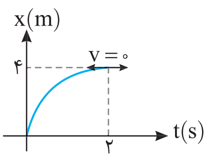
شتاب حرکت جسم را با توجه به نیروهای وارد بر جسم به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow 8-4=2a\Rightarrow a=2m/s^2$$

شتاب حرکت ثابت و برابر $2m/s^2$ است. معادلهٔ حرکت مسئله $(x=bt^2+4t)$ را با معادله مکان زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم: $b=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=\frac{1}{2}\times 2=1$



B ۸۰۰ ۲



۱ در پرتاب جسم روی سطح افقی، نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$-f_k=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

۲ حال با توجه به ثابت بودن شتاب از رابطهٔ مستقل از شتاب، $\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t$، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم دقت کنید که در لحظهٔ $t=2s$ در مکان $x=4m$ سرعت صفر است.

$$4=\frac{0+v_0}{2}\times 2\Rightarrow v_0=4m/s$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد:

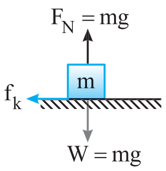
$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-4}{2}=-2m/s^2$$

۴ ضریب اصطکاک را به‌دست می‌آوریم:

$$a=-\mu_k g\Rightarrow -2=-\mu_k(10)\Rightarrow \mu_k=0/2$$

A ۸۰۱ ۱

هرگاه جسمی را روی سطحی با سرعت اولیه پرتاب کنیم (سُر دهیم) نیروی جلوبر آن صفر بوده و روی سطح افقی نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:



$$F_{net}=ma\Rightarrow 0-f_k=ma$$

$$\xrightarrow{f_k=\mu_k mg} -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

این شتاب به جرم جسم و تندی اولیه جسم بستگی ندارد. بنابراین شتاب حرکت دو جسم یکی است. $a_A=a_B$

B ۸۰۲ ۴

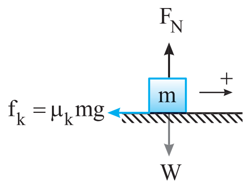
دو جسم روی سطح افقی مماس بر سطح پرتاب شده‌اند، بنابراین نیروی جلوبر صفر است و نیروی خالص وارد بر دو وزنه، نیروی اصطکاک بین وزنه و سطح افقی است. به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت وزنه‌ها در اثر اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow f_k=ma\Rightarrow\begin{cases}-\mu_{k_A}m_Ag=m_Aa_A\Rightarrow a_A=-\mu_{k_A}g\\ -\mu_{k_B}m_Bg=m_Ba_B\Rightarrow a_B=-\mu_{k_B}g\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mu_{k_A}=۲\mu_{k_B}}\frac{a_A}{a_B}=۲$$

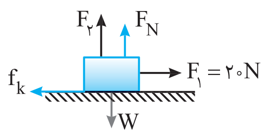
سرعت اولیهٔ هر دو یکسان است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسأله را حل می‌کنیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{v=۰}\Delta x=\frac{v_۰^۲}{-۲a}\Rightarrow\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}=\frac{a_B}{a_A}=\frac{۱}{۲}$$



B ۸۰۳ ۲

نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می‌دهیم.



۱ نیروی عمودی سطح در حالت اول برابر است با:

$$F_N+F_۲=W\Rightarrow F_N=W-F_۲$$

$$\xrightarrow{W=۴۰N}F_N=۴۰-F_۲$$

۲ نیروی اصطکاک در حالت اول را به‌دست می‌آوریم.

$$f_k=\mu_kF_N\xrightarrow{\mu_k=۰/۲}f_k=۰/۲(۴۰-F_۲)$$

۳ نیروی عمودی سطح در حالت دوم برابر است با:

$$F'_N+۲F_۲=W\Rightarrow F'_N=W-۲F_۲\Rightarrow F'_N=۴۰-۲F_۲$$

۴ نیروی اصطکاک در حالت دوم را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_k(۴۰-۲F_۲)\Rightarrow f'_k=۰/۲(۴۰-۲F_۲)$$

در دو حالت طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_۱-f_k=ma\Rightarrow ۲۰-\mu_k(۴۰-F_۲)=ma\Rightarrow ۲۰-۰/۲(۴۰-F_۲)=ma\quad(۱)$$

$$F_۱-f'_k=ma'\Rightarrow ۲۰-\mu_k(۴۰-۲F_۲)=m(\frac{۵}{۴}a)$$

$$\Rightarrow ۲۰-۰/۲(۴۰-۲F_۲)=m(\frac{۵}{۴}a)\quad(۲)$$

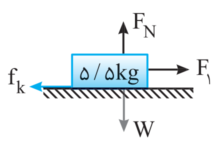
دو رابطهٔ بالا را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۲۰-۸+۰/۲F_۲}{۲۰-۸+۰/۴F_۲}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۱۲+۰/۲F_۲}{۱۲+۰/۴F_۲}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۶۰+F_۲=۴۸+۱/۶F_۲$$

$$\Rightarrow ۱۲=۰/۶F_۲\Rightarrow F_۲=۲۰N$$

B ۸۰۴ ۲

۱ در حالت اول سرعت ثابت است و نیروهای وارد بر جسم متوازن است بنابراین:



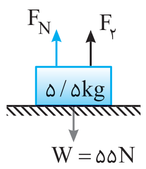
$$F_{net}=۰\Rightarrow F_۱=f_k\xrightarrow{f_k=\mu_kF_N}$$

$$۰/۸F=\mu_kF_N\quad(I)$$

۲ نیروی عمودی سطح در حالت اول را حساب می‌کنیم:

$$F_N+F_۲=W\Rightarrow F_N=W-F_۲\Rightarrow F_N=mg-F_۲\Rightarrow F_N=۵۵-۰/۶F$$

۳ در رابطهٔ (I)، F_N را قرار می‌دهیم و F را به‌دست می‌آوریم.



$$۰/۸F=\mu_kF_N=۰/۵\times(۵۵-۰/۶F)=۲۷/۵-۰/۳F$$

$$\Rightarrow ۱/۱F=۲۷/۵\Rightarrow F=۲۵N$$

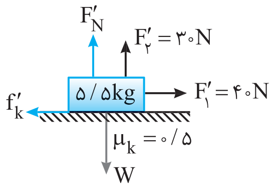
۴ نیروی $F_۱$ و $F_۲$ برابر است با:

$F_۲=۰/۶F=۱۵N$ و $F_۱=۰/۸F=۲۰N$

۵ نیروی اصطکاک در حالت اول خواهد شد:

$$f_k=\mu_kF_N\Rightarrow f_k=۰/۵(۵۵-۱۵)\Rightarrow f_k=۲۰N$$

۶ نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ دو برابر شده‌اند یعنی $F'_۱=۲F_۱=۴۰$ و $F'_۲=۲F_۲=۳۰N$ است.



۷ نیروی عمودی سطح در حالت دوم خواهد شد:

$$F'_N=W-F'_۲\Rightarrow F'_N=۵۵-۳۰=۲۵N$$

۸ نیروی اصطکاک در حالت دوم را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_kF'_N=۰/۵\times۲۵=۱۲/۵N$$

۹ نسبت نیروی اصطکاک در دو حالت برابر است با:

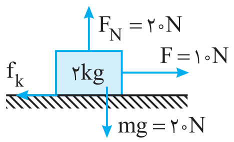
$$\frac{f'_k}{f_k}=\frac{۱۲/۵}{۲۰}=\frac{۱۲۵}{۲۰۰}\Rightarrow\frac{f'_k}{f_k}=\frac{۵}{۸}$$

B ۸۰۵ ۴

ابتدا نیروی اصطکاک بیشینه ($f_{s_{max}}$) را حساب می‌کنیم. اگر نیروی افقی وارد بر جسم (F=۴۰N) بزرگ‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد جسم به حرکت در می‌آید:

$$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۶\times۲۰=۱۲N<F$$

بنابراین جسم به حرکت در می‌آید و پس از ۵s سرعتش به v می‌رسد. حال F از ۳۰N کم شده و مقدار آن به ۱۰N می‌رسد. جسم درحال حرکت بوده پس همچنان به جسم نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود.



$$f_k=\mu_kF_N\Rightarrow f_k=۰/۵\times۲۰=۱۰N$$

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۰-۱۰=۲\times a\Rightarrow a=۰$$

بنابراین جسم با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

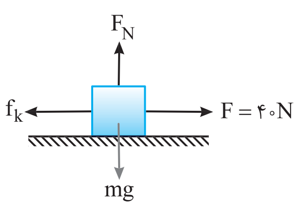
C ۸۰۶ ۴

خط فکری تا لحظه‌ای که نیروی $F\geq f_k$ است بر سرعت جسم افزوده می‌شود. بنابراین باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنید. اگر نیروی F=۴۰N را کاهش دهیم تا لحظه‌ای که با نیروی اصطکاک برابر شود از تندی جسم کاسته نخواهد شد.

نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_kmg\xrightarrow{m=۴kg}f_k=\frac{۱}{۴}\times۴۰=۱۰N$$

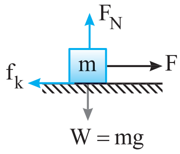
اگر نیروی F را از ۴۰N تا $f_k=۱۰N$ یعنی ۴۰−۱۰=۳۰N کاهش دهیم، تندی جسم کاهش نمی‌یابد.



A ۸۰۷ ۳

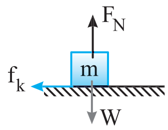
۱ در حالت اول نیروهای F و f_k در امتداد افقی بر جسم وارد می‌شوند و بنا به قانون دوم خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma \quad (1)$$



۲ بنا به فرض مسئله پس از حذف F شتاب ۵۰٪ کاهش یافته است.

$$a'=a-\frac{50}{100}a=\frac{a}{2}$$



۳ پس از حذف نیروی F، تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی اصطکاک است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$|f_k|=\frac{m|a|}{2} \quad (2)$$

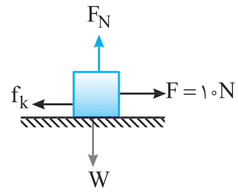
۴ با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت: $F-\frac{m|a|}{2}=ma\Rightarrow F=\frac{3}{2}ma$

۵ بنابراین:

$$\frac{f_k}{F}=\frac{\frac{ma}{2}}{\frac{3}{2}ma}=\frac{1}{3}\Rightarrow f_k=\frac{F}{3}$$

C ۸۰۸ ۱

خط فکری ابتدا چون جسم در اثر اعمال نیروی F در راستای افقی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، طبق قانون دوم نیوتون برایند نیروها در راستای افقی صفر است. بنابراین نیروی F برابر نیروی اصطکاک (f_k) است. بعد از حذف نیروی F تنها نیروی وارد شده به جسم نیروی اصطکاک (f_k) است و جسم در اثر این نیرو حرکت کندشونده‌ای را انجام می‌دهد.



قبل از حذف F:

$$F_{net}=0\Rightarrow f_k=F=10N$$

بعد از حذف F تنها نیروی مؤثر اصطکاک است، ازاین‌رو خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow -10=5a\Rightarrow a=-2m/s^2$$

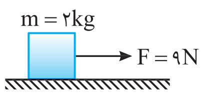
به کمک رابطهٔ مستقل از زمان سرعت در لحظهٔ حذف F را حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=9m}0-v_0^2=2(-2)\times(9)\Rightarrow v=6m/s$$

لحظه‌ای که سرعت 5m/s است را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow 5=-2t+6\Rightarrow t=0/5s$$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، جسم در اثر اعمال نیروی افقی F=9N با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. اگر در یک لحظه نیروی F حذف شود، بعد از آن جسم پس از طی مسافت 9m متوقف می‌شود. v چند متر بر ثانیه است و در کدام لحظه برحسب ثانیه پس از قطع F سرعت آن به ۵ متر بر ثانیه می‌رسد؟

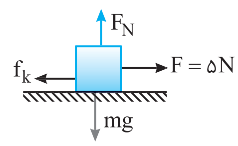


۱) ۰/۵ ، ۶ ۲) ۱۰ ، ۳ ۳) ۴ ، ۱ ۴) ۹ ، $\frac{8}{9}$

پاسخ سرعت جسم ثابت است بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است.

$$F_{net}=0\Rightarrow F=f_k\Rightarrow f_k=9N$$

شتاب توقف را به دست می‌آوریم، نیروی موثر اصطکاک جنبشی است.



$$-f_k=ma\Rightarrow -9=2a\Rightarrow a=-\frac{9}{2}m/s^2$$

سرعت v را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v^2=2(-\frac{9}{2})(9)\Rightarrow v^2=81\Rightarrow v=9m/s$$

بنابراین داریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow 5=\frac{-9}{2}t+9\Rightarrow t=\frac{8}{9}s$$

گزینهٔ ۴

B ۸۰۹ ۴

روش اول:

خط فکری در حل مسائل دینامیک اولین گام رسم نیروهای وارد بر جسم روی شکل است و سپس به کار بردن قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$.

مطابق شکل نیروهای وارد بر جسم شامل نیروی افقی $F=550N$، نیروی وزن، نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است، اندازهٔ نیروی عمودی سطح برابر است با:

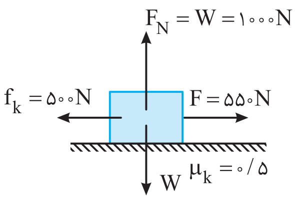
$$F_N=W=mg\Rightarrow F_N=1000N$$

نیروی اصطکاک جنبشی خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=0/5\times1000=500N$$

اکنون به سراغ حساب کردن شتاب می‌رویم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow 550-500=100a\Rightarrow a=0/5m/s^2$$



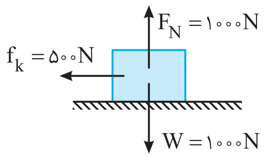
جابه‌جایی و سرعت را تا لحظهٔ پاره شدن طناب حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\xrightarrow{t=4s}\Delta x=\frac{1}{2}\times0/5\times16\Rightarrow\Delta x=4m$$

$$v_1=at+v_0\Rightarrow v_1=0/5\times4=2m/s$$

اشتباه نکنید پس از پاره شدن طناب جعبه نمی‌ایستد بلکه به دلیل آنکه سرعتش 2m/s است بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه می‌دهد اما تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف می‌شود. بنابراین باید شتاب توقف در اثر اصطکاک را حساب کنیم.

$$f_{net}=ma\xrightarrow{f_{net}=f_k}-500=100a\Rightarrow a=-5m/s^2$$



اکنون جابه‌جایی از لحظهٔ پاره شدن طناب تا توقف جعبه خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-4=2(-5)\Delta x\Rightarrow\Delta x=0/4m$$

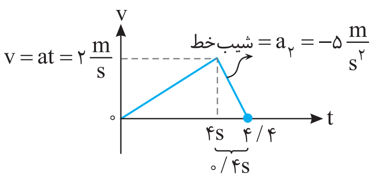
بنابراین کل جابه‌جایی برابر است با: $4+0/4=4/4m$

روش دوم: ابتدا با توجه به دینامیک، شتاب حالت اول و حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{(1)}F-f_k=ma\Rightarrow 550-(1000)(0/5)=100a\\ \Rightarrow a_1=0/5m/s^2\\ \xrightarrow{(2)}-f_k=ma\Rightarrow -500=100a_2\Rightarrow a_2=-5m/s^2\end{cases}$$

حال نمودار $v-t$ را کشیده و سطح زیر نمودار را که برابر مسافت است، به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{4/4\times2}{2}=4/4m$$



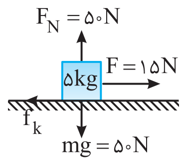
B ۸۱۰ ۴

خط فکری حرکت مکعبی چوبی شامل یک قسمت تندشونده قبل از پاره‌شدن نخ و یک قسمت کندشونده بعد از پاره شدن نخ است. در نتیجه شتاب هر قسمت را به‌دست آورده و مسافت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۱ ابتدا برایند نیروها در ۲s اول را حساب کرده و شتاب حرکت در این بازه را به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=۰/۲\times۵۰=۱۰N$$

$$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma \Rightarrow ۱۵-۱۰=۵a \Rightarrow a=۱m/s^۲$$

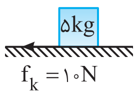


۲ با استفاده از رابطهٔ سرعت - زمان و جابه‌جایی - زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ و مسافت طی‌شده در این ۲s را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v_۰=۰]{a=۱,\,t=۲s} v=۲m/s$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}\times۱\times۴=۲m$$

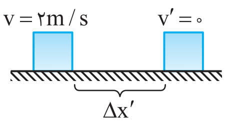
۳ بعد از پاره شدن نخ به جسم تنها نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود:



$$F'_{net}=ma' \Rightarrow -۱۰=۵a' \Rightarrow a'=-۲m/s^۲$$

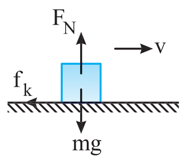
۴ با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$v'^۲-v^۲=۲a'\Delta x' \Rightarrow ۰-۴=-۴\Delta x' \Rightarrow \Delta x'=۱m$$



۵ جابه‌جایی کل برابر است با: $\Delta x_{کل}=\Delta x+\Delta x' \Rightarrow \Delta x_{کل}=۲+۱=۳m$

میانبر اگر جسمی روی سطحی پرتاب شود و در راستای حرکت تنها نیروی اصطکاک جنبشی به آن وارد شود، خواهیم داشت:



$$F_{net}=ma \Rightarrow -f_k=ma \Rightarrow -\mu_k F_N=ma$$

نیروی عمودی سطح برابر mg است: $-\mu_k mg=ma \Rightarrow a=-\mu_k g$

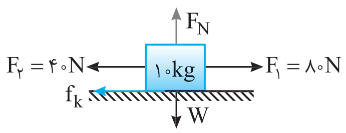
C ۸۱۱ ۳

حالت اول: ۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم و آن را با برایند $F_۱-F_۲$ مقایسه می‌کنیم تا مشخص شود که جسم به حرکت درمی‌آید یا نه؟

$$F_N=W \Rightarrow F_N=۱۰\times۱۰=۱۰۰N$$

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s\,max}=۰/۳\times۱۰۰=۳۰N$$

$$F_۱-F_۲=۸۰-۴۰=۴۰N>۳۰N$$



بنابراین جسم به‌حرکت درمی‌آید و اصطکاک بین جسم و سطح اصطکاک جنبشی است.

۲ اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم. $f_k=\mu_k F_N=۰/۲\times۱۰۰ \Rightarrow f_k=۲۰N$

۳ با استفاده از قانون دوم نیوتون شتاب حرکت خواهد شد:

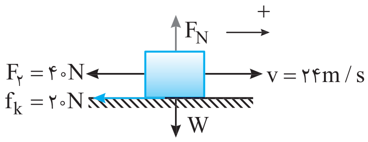
$$F_{net}=ma \Rightarrow F_۱-(F_۲+f_k)=ma \Rightarrow ۸۰-(۴۰+۲۰)=۱۰a \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۴ سرعت جسم پس از ۱۲s را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۲\times۱۲+۰ \Rightarrow v=۲۴m/s$$

حالت حذف $F_۱$:

۵ وقتی نیروی $F_۱$ حذف می‌شود جسم بلافاصله متوقف نخواهد شد بلکه نیروی $F_۲$ و f_k باعث کندشدن حرکت جسم خواهد شد. شتاب حرکت را در این حالت به‌دست می‌آوریم. $F_{net}=ma \Rightarrow -۴۰-۲۰=۱۰a' \Rightarrow a'=-۶m/s^۲$



۶ تندی حرکت جسم بعد از ۵s خواهد شد:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v'=-۶\times۵+۲۴=-۶m/s$$

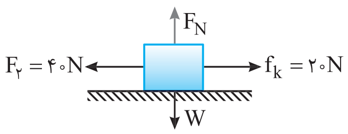
جالب است عدد منفی به‌دست آمد اما مفهوم آن چیست؟ مفهوم آن این است که جسم قبل از ۵s متوقف شده است. چون نیروی $F_۲=۴۰N$ از بیشینه نیروی اصطکاک $f_{s\,max}=۳۰N$ بزرگ‌تر است، جسم برمی‌گردد.

حالت برگشت:

۷ زمان توقف جسم را حساب می‌کنیم. $v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=-۶t+۲۴ \Rightarrow t=۴s$

۸ شتاب برگشت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma'' \Rightarrow ۴۰-۲۰=۱۰a'' \Rightarrow a''=۲m/s^۲$$



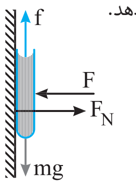
۹ تندی جسم در بازهٔ ۴s تا ۵s یعنی در مدت ۱s خواهد شد:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۲\times۱=۲m/s$$

آخیش بالاخره تموم شد.

A ۸۱۲ ۲

خط فکری جسم ساکن است و تا لحظه‌ای که جسم ساکن است، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح نیروی اصطکاک ایستایی است و نیروی اصطکاک ایستایی برابر نیرویی است که در راستای اصطکاک بخواهد جسم را حرکت دهد.

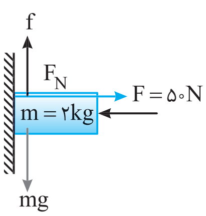


در تمام مدتی که کتاب روی سطح دیوار ساکن است نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و نیروی اصطکاک بین کتاب و سطح دیوار نیروی اصطکاک ایستایی است که با نیروی وزن جسم برابر است. $f=mg$

B ۸۱۳ ۲

خط فکری مشخص نیست که جسم در حال حرکت است یا سکون؟ بنابراین شما باید ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ را به‌دست بیاورید و آن را با نیروی وزن جسم $W=۲۰N$ مقایسه کنید. اگر جسم ساکن بماند نیروی اصطکاک برابر نیروی وزن جسم است و اگر به حرکت درآید باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنید. $F-F_N=۰ \Rightarrow F=F_N=۵۰N$:دراستای افقی

نیروی عمود سطح را حساب می‌کنیم.



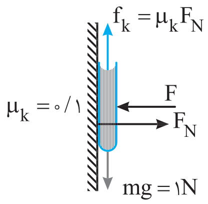
نیروی اصطکاک آستانه حرکت را به‌دست می‌آوریم: $f_{s\,max}=\mu_s F_N=۰/۵\times۵۰=۲۵N$

عامل حرکت به سمت پایین جسم نیروی وزن $mg=۲۰N$ است که از $f_{s\,max}$ کمتر می‌باشد

پس جسم در جای خود ساکن باقی می‌ماند و با توجه به متوازن بودن نیروها نیروی اصطکاک برابر وزن جسم است: $f_s=mg=۲۰N$

C ۸۱۴ ۱

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



جسم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و نیروی عمودی سطح خواهد شد: $F_N = F = 4N$

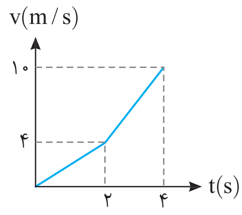
نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم.

$f_k = \mu_k F_N = 0/1\times 4 = 0/4N$

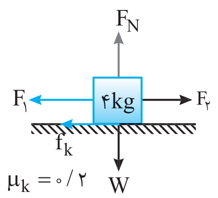
شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$F_{خالص} = ma \Rightarrow mg - f_k = ma \Rightarrow 1 - 0/4 = 0/1a \Rightarrow a = 6m/s^2$

C ۸۱۵ ۴



به نمودار دقت کنید. در لحظهٔ $t = 2s$ نیروی F_1 حذف شده و با حذف F_1، شیب نمودار $v-t$ افزایش یافته یعنی شتاب افزایش یافته است. چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ نیروهای F_1 و F_2 هم‌امتداد هستند. و باید F_1 در خلاف جهت F_2 باشد، که با حذف F_1 نیروی خالص زیاد شده و شتاب حرکت افزایش یافته است.



نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک در دو حالت یکسان و برابر است با:

$F_N = W \Rightarrow F_N = 4\times 10 \Rightarrow F_N = 40N$

$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow f_k = 0/2\times 40 \Rightarrow f_k = 8N$

حالت اول از لحظهٔ ۰ تا 2s :

شتاب را حساب می‌کنیم. $a_1 = \frac{4-0}{2-0} \Rightarrow a = 2m/s^2$

قانون دوم نیوتون را در این حالت می‌نویسیم:

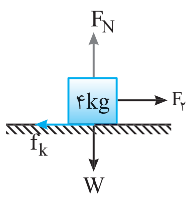
$F_{net} = ma \Rightarrow F_2 - F_1 - f_k = ma_1 \Rightarrow F_2 - F_1 - 8 = 4\times 2$

$\Rightarrow F_2 - F_1 = 16N \quad (I)$

حالت دوم از لحظهٔ 2s تا 4s :

شتاب در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$a_2 = \frac{10-4}{4-2} \Rightarrow a_2 = 3m/s^2$



بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

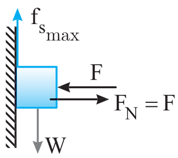
$F_{net} = ma \Rightarrow F_2 - f_k = ma_2 \Rightarrow F_2 - 8 = 4\times 3 \Rightarrow F_2 = 20N$

با توجه به رابطهٔ (I) خواهیم داشت:

$F_2 - F_1 = 16 \Rightarrow 20 - F_1 = 16 \Rightarrow F_1 = 4N$

B ۸۱۶ ۱

خط فکری شکل سادهٔ مسئله به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم جسم به سمت پایین نلغزد. بنابراین نیروهای وارد بر جسم باید متوازن باشد و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح دیوار باید با وزن جسم برابر باشد $(f_s = W)$ اما یک مطلب مهم این است که می‌خواهیم نیروی افقی F کمترین مقدار باشد، یعنی اگر F از آن کمتر شد جسم به پایین بلغزد بنابراین کمترین مقدار F وقتی است که جسم در آستانهٔ لغزیدن به سمت پایین باشد و در این حالت نیروی اصطکاک برابر $f_{s_{max}}$ است. با برابر قرار دادن وزن با نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت مسئله را حل می‌کنیم.



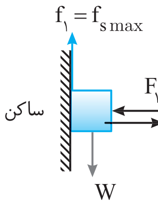
$W = f_{s_{max}} \Rightarrow W = \mu_s F_N$

$\Rightarrow W = \mu_s F \Rightarrow F = \frac{W}{\mu_s}$

B ۸۱۷ ۳

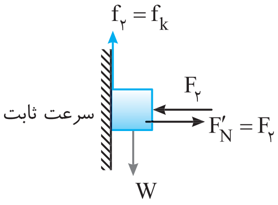
خط فکری مسئلهٔ زیبایی است. زیرا وقتی که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد و همچنین وقتی که با سرعت ثابت در حرکت است نیروهای وارد بر آن متوازن هستند یعنی در هر دو حالت نیروی اصطکاک با نیروی وزن برابر است. البته یک‌بار با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(W = f_{s_{max}})$ و بار دیگر نیروی اصطکاک جنبشی $(W = f_k)$ یعنی اصطکاک در حالت اول (f_1) با اصطکاک در حالت دوم یعنی (f_2) برابر است. F_1 و F_2 را شما باید تعیین کنید.

حالت اول:



$W = f_1 = f_{s_{max}}$

حالت دوم:



$W = f_2 = f_k$

بنابراین می‌توان نوشت:

$f_1 = f_2 \Rightarrow f_{s_{max}} = f_k \Rightarrow \mu_s F_1 = \mu_k F_2$

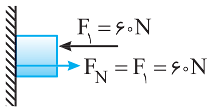
$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\mu_k}{\mu_s} \xrightarrow{\mu_s > \mu_k} \frac{F_1}{F_2} < 1 \Rightarrow F_1 < F_2$

C ۸۱۸ ۱

خط فکری در حل این مسائل گام اول یافتن نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s_{max}})$ است. بعد از یافتن $f_{s_{max}}$ آن را با نیروهایی که در امتداد اصطکاک هستند مقایسه می‌کنیم تا بتوانیم تشخیص دهیم جسم به حرکت در می‌آید یا نه. اگر جسم ساکن بماند، اصطکاک برابر برایند نیروهایی است که در امتداد اصطکاک هستند.

۱ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$f_{s_{max}} = \mu_s F_N \Rightarrow f_{s_{max}} = 0/5\times 60 = 30N$



۲ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم:

$W = mg = 7\times 10 = 70N$

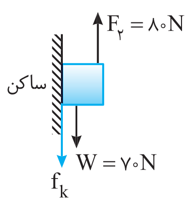
نیروی $F_2 = 80N$ رو به بالا وارد می‌شود. برایند F_2 و W برابر است با:

$80 - 70 = 10N$

۳ جسم باید با نیروی 10N به بالا برود اما نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s_{max}} = 30N$ است و نیروی 10N نمی‌تواند بر آن غلبه کند و جسم ساکن می‌ماند.

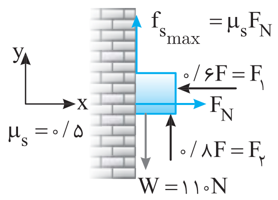
۴ جسم ساکن است بنابراین اصطکاک رو به پایین بوده و با نیروی 10N برابر است.

$F_{y_{net}} = 0 \Rightarrow F_2 - W - f_s = 0 \Rightarrow 80 - 70 = f_s \Rightarrow f_s = 10N$



B ۸۱۹ ۴

خط فکری وقتی کمینه مقدار F را می‌خواهیم یعنی $۰/۸F$ نیز حداقل باشد، یعنی نیرو به سمت بالا آنقدر کم باشد تا جسم روی دیوار در آستانهٔ لغزیدن به سمت پایین باشد. جسم در آستانهٔ لغزیدن به پایین است بنابراین اصطکاک بین جسم و سطح رو به بالا بوده و برابر $f_{s_{max}}$ است.



۱ شکل ساده‌ای از مسئله را رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را روی آن نمایش می‌دهیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F_۱\Rightarrow F_N=۰/۶F$$

۳ بیشینهٔ نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

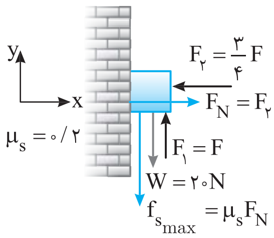
$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵(۰/۶F)\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۳F$$

۴ بر جسم در امتداد قائم سه نیروی وزن، رو به پایین و $F_۲$ و $f_{s_{max}}$ رو به بالا وارد می‌شود. جسم ساکن است بنابراین:

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_۲+f_{s_{max}}=W\Rightarrow ۰/۸F+۰/۳F=۱۱۰\Rightarrow F=۱۰۰N$$

B ۸۲۰ ۳

خط فکری وقتی در مسئله بیان می‌کند که بیشترین نیروی F چه مقدار باشد تا جسم ساکن باشد یعنی اگر نیروی F کمی بیشتر شود جسم به حرکت در آید. نیروی F رو به بالا است در این صورت بیشترین مقدار F برای حالتی است که جسم رو به بالا در آستانهٔ حرکت قرار گیرد. در این حالت نیروی اصطکاک رو به پایین بوده و به کمک وزن می‌آید تا F نتواند جسم را به بالا حرکت دهد.



۱ نیروهای وارد بر جسم را به‌طور کامل رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F_۲\Rightarrow F_N=\frac{۳}{۴}F$$

۳ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۲\times\frac{۳}{۴}F\Rightarrow f_{s_{max}}=\frac{۳}{۲۰}F$$

۴ نیروهای در امتداد قائم را بررسی می‌کنیم. نیروی وزن و نیروی اصطکاک رو به پایین و $F_۱=F$ رو به بالا. جسم ساکن است بنابراین باید برایند این سه نیرو صفر شود.

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_۱-f_{s_{max}}-W=۰\Rightarrow F=\frac{۳}{۲۰}F+۲۰$$

$$\Rightarrow\frac{۱۷}{۲۰}F=۲۰\Rightarrow F=\frac{۴۰۰}{۱۷}N$$

B ۸۲۱ ۳

خط فکری کمینه اندازهٔ نیروی افقی F یعنی اگر این نیروی افقی از F کمتر شود جسم رو به پایین شروع به لغزیدن می‌کند. بنابراین کمینه نیروی F زمانی است که وزنه‌ها در آستانهٔ حرکت رو به پایین باشند، در این حالت نیروی اصطکاک $f_{s_{max}}$ رو به بالا نیروی وزن وزنه‌ها را خنثی کرده، جسم ساکن می‌ماند. بنابراین شما باید $f_{s_{max}}$ را حساب کرده آن را برابر نیروی وزن قرار دهید.

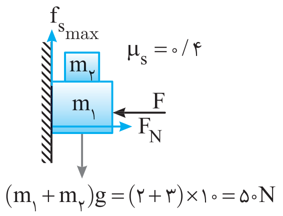
۱ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم؛ در راستای افقی جسم ساکن می‌ماند، پس:

$$F_N=F$$

۲ جسم ساکن بوده و نیروی خالص وارد بر آن صفر است از این‌رو:

$$\text{در راستای قائم جسم ساکن می‌ماند}\Rightarrow f_{s_{max}}=(m_۱+m_۲)g$$

$$\Rightarrow\mu_s F_N=(m_۱+m_۲)g\Rightarrow ۰/۴F=۵۰\Rightarrow F=\frac{۵۰۰}{۴}=۱۲۵N$$



C ۸۲۲ ۴

۱ در حالت اول جسم با تندی ثابت در حال حرکت است. پس نیروهای وارد بر آن متوازن است.

$$(m_A+m_B)g=f_k\Rightarrow f_k=\frac{۳m}{۲}g\Rightarrow f_k=\frac{۳mg}{۲}$$

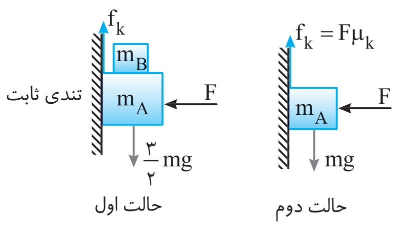
۲ اگر جسم m_B را برداریم نیروی وزن که عامل حرکت به سمت پایین است برابر $m_A g=mg$ می‌شود. در حالی که نیروی اصطکاک جنبشی همچنان $f_k=\frac{۳}{۲}mg$ است.

۳ نیروی رو به پایین mg پس از حذف m_B، $f_k=\frac{۳}{۲}mg$ رو به بالا خواهد و بنابر قانون دوم نیوتون شتاب خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-\frac{۳}{۲}mg=ma\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

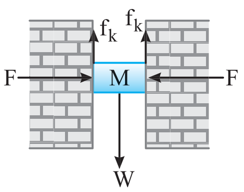
۴ پس با شتاب $۵\,m/s^۲$ از تندی جسم کاسته می‌شود:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۵t+۴\Rightarrow t=۰/۸s$$



B ۸۲۳ ۱

خط فکری جسم M وقتی به پایین می‌لغزد با سطح دو دیواره اصطکاک دارد و از هر دیواره بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی رو به بالا وارد می‌شود و می‌خواهد مانع لغزیدن جسم به پایین شود.



۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی وارد بر هر سطح جسم برابر $F_N=F=۲۰N$ است.

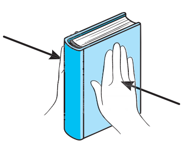
۳ بر جسم نیروی وزن رو به پایین و دو نیروی اصطکاک رو به بالا وارد می‌شود و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{net}=Ma\Rightarrow Mg-۲f_k=Ma\xrightarrow{M=۳kg}۳۰-۲f_k=۳\times۲\Rightarrow f_k=۱۲N$$

۴ ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم.

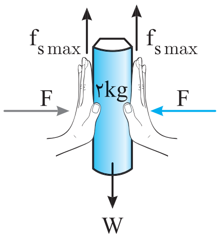
$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=F}۱۲=\mu_k\times۲۰\Rightarrow\mu_k=۰/۶$$

بازی با سؤال **مطابق شکل، دانش‌آموزی کتابی به جرم $۲kg$ را بین دو دست خود، قرار داده است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین کف هر دست او و کتاب ۰/۴ باشد، حداقل نیروی افقی که کف هر دست به کتاب وارد می‌کند، چند نیوتون باشد تا کتاب در حال تعادل قرار گیرد؟** $(g=۹/۸N/kg)$



۱) ۱۵/۶ ۲) ۱۲/۷۵ ۳) ۲۴/۵ ۴) ۱۷/۵

پاسخ ۱ کتاب ساکن است و نیروی خالص وارد بر کتاب صفر است. بنابراین دو نیروی افقی F که از دو طرف بر کتاب وارد می‌شوند باید باهم برابر باشند.



۲ حداقل نیروی افقی یعنی اگر نیروی دستان شخص کمتر شود کتاب رو به پایین شروع به لغزیدن کند. یعنی کتاب در آستانهٔ حرکت باشد و اصطکاک بین هر دست و کتاب $f_{s_{max}}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

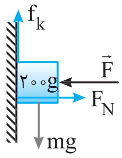
۳ $W=۲f_{s_{max}}\xrightarrow[m=۲kg\,,\mu_s=۰/۴]{f_{s_{max}}=\mu_sF\,,\,g=۹/۸N/kg}۲\times۹/۸=۲\times۰/۴F$

$\Rightarrow F=\frac{۹۸}{۴}\Rightarrow F=۲۴/۵N$

گزینهٔ ۳

C ۸۲۴ ۳

نکته اگر نیروی عمودی سطح دو برابر شود، نیروی اصطکاک جنبشی دو برابر می‌شود.



۱ در حالت اول جسم با تندی ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن است. $f_k=W=۰/۲\times۱۰=۲N$

۲ نیروی F، ۱/۵ برابر شده، پس نیروی عمودی سطح هم ۱/۵ برابر می‌شود و نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح نیز ۱/۵ برابر می‌شود. $f'_k=۱/۵f_k\Rightarrow f'_k=۱/۵mg\Rightarrow f'_k=۱/۵\times۲=۳N$

۳ در این حالت نیروی وزن رو به پایین ۲N و اصطکاک بین جسم و دیوار $f'_k=۳N$ است که سبب می‌گردد حرکت جسم کندشونده شود. شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم.

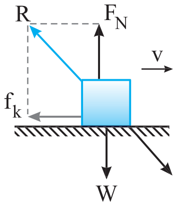
$f_{net_y}=ma\Rightarrow mg-f'_k=ma\Rightarrow ۲-۳=۰/۲a\Rightarrow a=-۵m/s^۲$

۴ در مسئله زمان داده شده است یعنی باید به سراغ روابط حرکت‌شناسی برویم به کمک معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی را حساب می‌کنیم، البته چون حرکت در امتداد قائم است به جای Δx، Δy می‌نویسیم:

$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\xrightarrow[t=۳s]{v_۰=۳۰m/s}\Delta y=\frac{۱}{۲}(-۵)\times(۳)^۲+۳۰\times۳$

$\Delta y=-۲۲/۵+۹۰\Rightarrow\Delta y=۶۷/۵m$

B ۸۲۵ ۱



۱ وقتی به جسم ضربه می‌زنیم تا به حرکت در آید نیروی جلوبر صفر خواهد بود و جسم بنا به قانون اول نیوتون به حرکتش ادامه می‌دهد اما اصطکاک (f_k) سبب می‌گردد که جسم متوقف شود.

۲ نیرویی که جسم به سطح (R') وارد می‌کند بنا به قانون سوم واکنش نیرویی است که سطح بر جسم (R) وارد می‌کند.

۳ نیروی R در واقع حاصل برایند F_N و f_k است بنابراین مطابق شکل جهت R' رو به پایین و به سمت راست است.

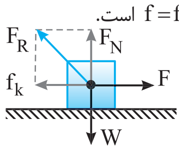
۴ در طول مسیر R تغییر نمی‌کند البته وقتی جسم متوقف می‌شود f_k وجود ندارد و R به صورت قائم و برابر F_N است. در سؤال در مورد R در طول حرکت سؤال شده است.

A ۸۲۶ ۳

یادآوری نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند دارای دو مؤلفه است، یک مؤلفه نیروی اصطکاک است که سطح بر جسم وارد می‌کند و دیگری نیروی عمودی سطح است. بنابراین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد: $F_R=\sqrt{F_N^۲+f^۲}$

اگر جسم ساکن باشد $f=f_s$ و اگر در حال حرکت باشد $f=f_k$ است.

شکل ساده‌ای از مسئله رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را نمایش می‌دهیم.



۱ سرعت ثابت است. بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است. از این‌رو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$F_{net,x}=۰\Rightarrow f_k=F=۶۰N\ ,\ F_{net,y}=۰\Rightarrow F_N=W=۸۰N$

۲ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را حساب می‌کنیم:

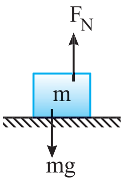
$F_R=\sqrt{F^۲+W^۲}=\sqrt{۶۰^۲+۸۰^۲}=\sqrt{۱۰۰^۲}=۱۰۰N$

B ۸۲۷ ۴

خط فکری جسم در ابتدا ساکن بوده و باید بررسی کنیم توسط نیروی $F=۲۵۰N$ جسم حرکت کرده یا ساکن می‌ماند. برای این منظور باید F و $f_{s_{max}}$ را با هم مقایسه می‌کنیم.

اگر نیروی F بزرگ‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد، متحرک حرکت کرده و نیروی اصطکاک برابر $f_k=\mu_kF_N$ می‌شود و اگر نیروی F کوچک‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد متحرک ساکن مانده و نیروی اصطکاک برابر نیروی F است.

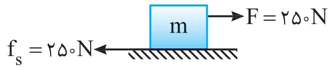
۱ در گام اول $f_{s_{max}}$ را حساب می‌کنیم:



$F_N=mg\Rightarrow F_N=۵۰۰N$

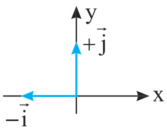
$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۶\times۵۰۰=۳۰۰N$

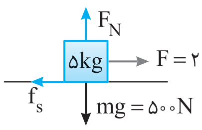
۲ $f_{s_{max}}$ بزرگ‌تر از F بوده پس متحرک ساکن باقی مانده و نیروی اصطکاک برابر نیروی F، ۲۵۰N است.



۳ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک، نیرویی است که سطح به جسم وارد می‌کند:

$R=-f_s\vec i+F_N\vec j\Rightarrow R=-۲۵۰\vec i+۵۰۰\vec j$





۴ نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند واکنش نیرویی است که سطح به جسم وارد کرده بنابراین:

$R'=۲۵۰\vec i-۵۰۰\vec j$

B ۸۲۸ ۴

خط فکری در حل مسائل دینامیک اولین کار، پیدا کردن نیروهایی است که به جسم وارد می‌شود، سپس رسم این نیروهاست. در این مسئله مشخص نیست که جسم پس از اعمال نیروی ۱۰N در حال حرکت خواهد بود یا همچنان ساکن می‌ماند. بنابراین شما باید نیروها را بررسی کنید و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب کنید تا مشخص شود که جسم با نیروی ۱۰N شروع به حرکت می‌کند یا نه؟

۱ نیروی وزن جسم $W=mg=۲۰N$ است و نیروی $F'=۱۰N$ نیز رو به پایین به جسم وارد می‌شود، بنابراین جسم تحت تأثیر نیروی $۱۰+۲۰=۳۰N$ روبه پایین قرار دارد.

۲ نیروی افقی $F=۶۰N$ به جسم وارد می‌شود و نیروی عمودی سطح دیوار وارد بر جسم نیز برابر $F_N=F=۶۰N$ است.

۳ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$f_{s\,max}=\mu_sF_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۶}f_{s\,max}=۰/۶\times۶۰\Rightarrow f_{s\,max}=۳۶N>۳۰N$

۴ نیروی ۳۰N نمی‌تواند سبب حرکت جسم رو به پایین شود و جسم همچنان ساکن می‌ماند.

۵ نیروی خالص وارد بر جسم برابر صفر است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$F_{net}=۰\Rightarrow f_s=F'+W\Rightarrow f_s=۱۰+۲۰\Rightarrow f_s=۳۰N$

یادآوری نیرویی که جسم بر سطح یا سطح بر جسم وارد می‌کند برابر $R=\sqrt{f_s^۲+F_N^۲}$ است.

۶ نیروی که جسم به دیواره وارد می‌کند، خواهد شد: $R=\sqrt{۳۰^۲+۶۰^۲}\Rightarrow R=۳۰\sqrt{۵}N$

بازی با سؤال در این مسئله اگر نیروی $F'=۲۰N$ روبه پایین بر جسم وارد شود، نیرویی که جسم به دیواره وارد می‌کند چند نیوتون است؟ $(\mu_k=۰/۴)$

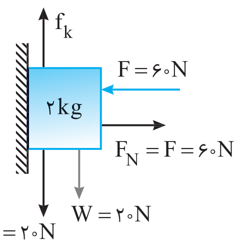
۱) $۱۲\sqrt{۲۹}$ ۲) $۵\sqrt{۲۹}$ ۳) ۱۰ ۴) $۱۵\sqrt{۳}$

پاسخ ۱ بیشینه اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N=۰/۶\times۶۰=۳۶N$$

۲ جمع نیروهای رو به پایین را حساب می‌کنیم.

$$F'+W=۲۰+۲۰=۴۰N>۳۶$$



۳ نیروی $۴۰N$ رو به پایین از اصطکاک آستانهٔ حرکت بیشتر است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک بین جسم و دیواره برابر f_k است. نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم.

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۴} f_k=۰/۴\times۶۰\Rightarrow f_k=۲۴N$$

۴ نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند خواهد شد:

$$R=\sqrt{f_k^۲+F_N^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۲۴^۲+۶۰^۲}=\sqrt{۱۲^۲(۲^۲+۵^۲)}$$

$$\Rightarrow R=۱۲\sqrt{۲۹}N$$

گزینه ۱

B ۸۲۹ ۲

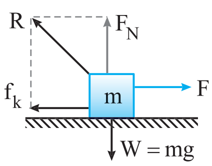
خط فکری هر گاه در مسائل دینامیک، در صورت مسئله، زمان داده شود یعنی شما باید سراغ حرکت‌شناسی بروید زیرا در روابط حرکت‌شناسی، زمان وجود دارد. یعنی به کمک حرکت‌شناسی، شتاب را حساب کنید سپس به کمک قانون دوم نیوتون (البته پس از رسم نیروهای وارد بر جسم) مجهول مسئله را به‌دست بیاورید.

۱ شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۳-۰}{۴}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}m/s^۲$$

۲ به کمک قانون دوم نیوتون نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را به‌دست می‌آوریم:

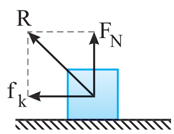
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۷۷-f_k=۳۶\times\frac{۳}{۴}\Rightarrow f_k=۱۵۰N$$



۳ جسم روی سطح افقی در حال حرکت است پس باید نیروهای قائم متوازن باشند:

$$F_N=W\Rightarrow F_N=mg\Rightarrow F_N=۳۶۰N$$

نکته نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک از طرف سطح به جسم وارد می‌شود بنابراین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است که برهم عمودند:



$$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}$$

۴ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک است:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}=\sqrt{۳۶۰^۲+۱۵۰^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۳۰^۲(۱۲^۲+۵^۲)}$$

$$\Rightarrow R=۳۰\sqrt{۱۶۹}\Rightarrow R=۳۰\times۱۳\Rightarrow R=۳۹۰N$$

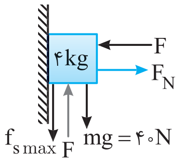
C ۸۳۰ ۲

خط فکری مسئله در دو حالت بیان شده است بنابراین شما باید هر حالت را جداگانه بررسی کنید و نیروهای وارد بر جسم را در هر حالت رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید.

حالت (۱): در حالت اول جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا است نیروی اصطکاک باید خلاف جهت لغزش باشد پس نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ رو به پایین است.

۱ جسم در راستای افقی ساکن است پس باید F_N و F متوازن باشد:

$$F_N=F$$



۲ اصطکاک در آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

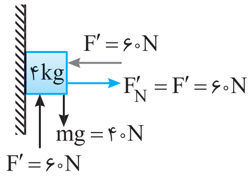
$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s=۰/۵]{F_N=F} f_{s\,max}=۰/۵F$$

۳ جسم ساکن است و نیروها در راستای قائم متوازن بوده بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow \overbrace{mg+f_{s\,max}}^{\text{نیروهای رو به پایین}}=F\Rightarrow ۴۰+۰/۵F=F$$

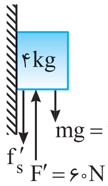
$$\Rightarrow ۴۰=F-۰/۵F\Rightarrow ۴۰=۰/۵F\Rightarrow F=۸۰N$$

حالت (۲): در این حالت نیروی F را $۲۰N$ کاهش داده‌ایم یعنی نیروی F' برابر $۶۰=۲۰-۸۰$ است، ابتدا $f'_{s\,max}$ را به‌دست می‌آوریم تا ببینیم جسم شروع به حرکت می‌کند یا نه؟



$$f'_{s\,max}=\mu_s F'\Rightarrow f'_{s\,max}=۰/۵\times۶۰=۳۰N$$

نیروی $mg=۴۰N$ می‌خواهد جسم را به سمت پایین بکشد و نیروی $F'=۶۰N$ می‌خواهد جسم را به سمت بالا هل دهد پس در واقع نیروی $۲۰=۴۰-۶۰$ نیوتون می‌خواهد جسم را بالا ببرد که این مقدار از $f'_{s\,max}$ کمتر است در نتیجه جسم در حال سکون باقی می‌ماند و به جسم ساکن نیروی اصطکاک ایستایی وارد می‌شود:



جسم ساکن است: $\underbrace{mg+f'_s}_{\text{نیروهای روبه‌پایین}}=F'$

$$\Rightarrow ۴۰+f'_s=۶۰\Rightarrow f'_s=۲۰N$$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت اول برابر شد با:

$$F_N=۸۰N\ ,\ f_{s\,max}=\mu_s F_N=۴۰N$$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت دوم برابر شد با:

$$F'_N=۶۰N\ ,\ f'_s=۲۰N$$

نکته برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح برابر نیرویی است که جسم بر سطح یا سطح بر جسم وارد می‌کند.

حالت (۲)

$$R'=\sqrt{f'^۲_s+F'^۲_N}$$

$$R'=\sqrt{۲۰^۲+۶۰^۲}=۲۰\sqrt{۱^۲+۳^۲}$$

$$R'=۲۰\sqrt{۱۰}$$

حالت (۱)

$$R=\sqrt{f^۲_{s\,max}+F^۲_N}$$

$$R=\sqrt{۴۰^۲+۸۰^۲}=۴۰\sqrt{۱^۲+۲^۲}$$

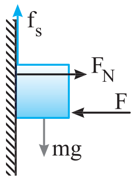
$$R=۴۰\sqrt{۵}N$$

حال نسبت $\frac{R'}{R}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{R'}{R}=\frac{۲۰\sqrt{۱۰}}{۴۰\sqrt{۵}}=\frac{۲۰\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}}{۴۰\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

B ۸۳۱ ۲

خط فکری: سطح بر جسم نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک وارد می‌کند، بنابراین واکنش این نیروها هم‌اندازهٔ آن‌ها و خلاف جهتشان توسط جسم بر سطح وارد خواهد شد. به جای نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را بررسی می‌کنیم.



۱ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.

$$f_s=W\ ,\ F_N=F$$

۲ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_s^۲}\Rightarrow R=\sqrt{F^۲+W^۲}$$

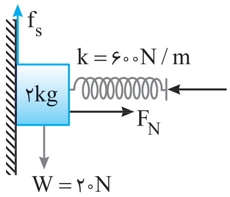
۳ اگر نیروی F دو برابر شود جسم همچنان ساکن می‌ماند. یعنی نیروی اصطکاک f_s همچنان با نیروی وزن (W) برابر است اما با دو برابر شدن F، نیروی F_N نیز دو برابر می‌شود و نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر است با:

$$R'=\sqrt{F_N'^۲+f_s^۲}\Rightarrow R'=\sqrt{(۲F)^۲+f_s^۲}$$

برای آن‌که R' دو برابر R باشد باید f_s نیز در دو ضرب شده باشد که چنین نیست و $R<R'<۲R$ است یعنی نیرویی که سطح به جسم (یا جسم به سطح) وارد می‌کند افزایش می‌یابد اما دو برابر نمی‌شود.

C ۸۳۲ ۲

شکل ساده‌ای از موضوع مسئله به همراه نیروهای وارد بر آن رسم می‌کنیم. یادمان باشد نخ پاره شده است و کشش نخی وجود ندارد.



۱ نیروی کشسانی فنر را حساب می‌کنیم:

$$F=kx\xrightarrow{x=۰/۱m}F=۶۰۰\times۰/۱$$
$$\Rightarrow F=۶۰N$$

۲ نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F\Rightarrow F_N=۶۰N$$

۳ نیروی وزن را به‌دست می‌آوریم: $W=mg\Rightarrow W=۲\times۱۰=۲۰N$

۴ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

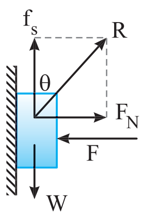
$$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۴}f_{s_{max}}=۰/۴\times۶۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۲۴N$$

۵ با مقایسه نیروی وزن با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت مشخص است که جسم همچنان ساکن می‌ماند و اصطکاک بین جسم و سطح $f_s=W=۲۰N$ است.

۶ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$$R=\sqrt{W^۲+f_s^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۲۰^۲+۲۰^۲}=۲۰\sqrt{۲}N$$

B ۸۳۳ ۳



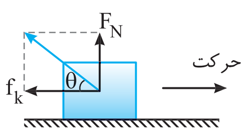
۱ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند بنابراین هر چقدر بر نیروی F بیافزاییم نیروی اصطکاک همچنان برابر نیروی وزن است $f_s=W$ و نیروی اصطکاک تغییر نمی‌کند.

۲ با افزایش F نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد. با توجه به شکل می‌توان نوشت: $\tan\theta\uparrow=\frac{F_N\uparrow}{f_s}$

بنابراین با افزایش F_N، θ افزایش می‌یابد.

B ۸۳۴ ۱

خط فکری: ابتدا باید دقت کنید منظور از نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند $R=\sqrt{f_k^۲+F_N^۲}$ است. یعنی شما ابتدا باید در هر حالت نیروی عمودی سطح F_N و نیروی اصطکاک را حساب کنید سپس به کمک $\tan\theta$، زاویهٔ θ را بررسی کنید.



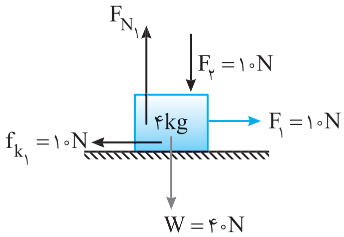
حالت اول: سرعت جسم ثابت است یعنی نیروی اصطکاک $f_{k_۱}$ با نیروی $F_۱=۱۰N$ برابر است. سرعت ثابت $F_{net}=۰\Rightarrow f_{k_۱}=F_۱=۱۰N$

نیروی عمودی تکیه‌گاه در این حالت خواهد شد:

$$F_{N_۱}=F_۲+W=۱۰+۴۰\Rightarrow F_{N_۱}=۵۰N$$

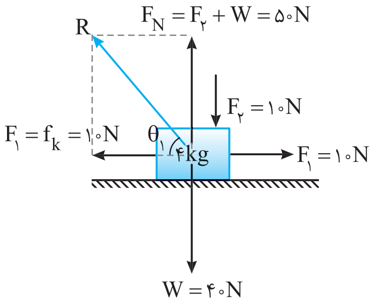
ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$f_{k_۱}=\mu_kF_{N_۱}\Rightarrow ۱۰=\mu_k(۵۰)\Rightarrow\mu_k=۰/۲$$



تانژانت زاویهٔ $\theta_۱$ خواهد شد:

$$\tan\theta_۱=\frac{۵۰}{۱۰}=۵$$



حالت دوم: نیروی عمودی سطح مطابق شکل زیر خواهد شد:

$$F'_N=W-F_۲\Rightarrow F'_N=۴۰-۱۰=۳۰N$$

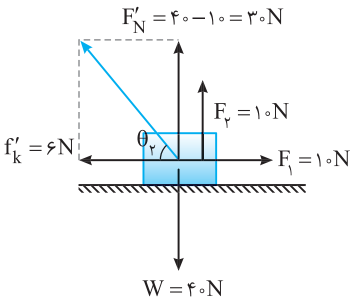
نیروی اصطکاک جدید را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_kF'_N=۰/۲\times۳۰=۶N$$

تانژانت زاویهٔ $\theta_۲$ خواهد شد:

$$\tan\theta_۲=\frac{۳۰}{۶}=۵$$

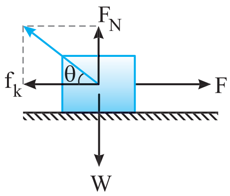
بنابراین $\theta_۱=\theta_۲<۹۰^\circ$ است.



میانبر: به این همه حل نیازی نداریم. با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$\tan\theta=\frac{F_N}{f_k}=\frac{F_N}{\mu_kF_N}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۱}{\mu_k}$$

یعنی θ تنها به μ_k بستگی دارد که μ_k تغییر نکرده و $\theta_۱=\theta_۲$ است.

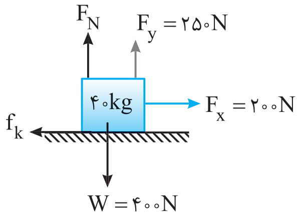


B ۸۳۵ ۲

خط فکری جسم دارای سرعت ثابت است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و برایند نیروهای در امتداد محور x و برایند نیروهـا در امتداد محور y را برابر صفر قرار می‌دهیم و نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم. نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند $(R=\sqrt{f_k^2+F_N^2})$ را حساب می‌کنیم سپس زاویهٔ بین نیروی R و راستای افق را به کمک مثلثات معین می‌کنیم.

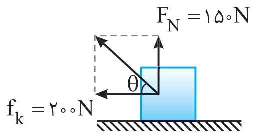
۱ مطابق شکل می‌توان نوشت:

$$F_{net_x}=0\Rightarrow f_k=F_x$$
$$\Rightarrow f_k=200N$$
$$F_{net_y}=0\Rightarrow F_n+F_y=W$$
$$\Rightarrow F_N=W-F_y=400-250$$
$$\Rightarrow F_N=150N$$



۲ نیروی وارد بر جسم برابر خواهد شد با: $R=\sqrt{200^2+150^2}\Rightarrow R=250N$

۳ زاویه‌ای که نیرو با راستای حرکت می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:



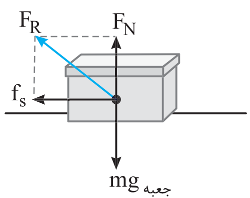
$$\tan\theta=\frac{F_N}{f_k}=\frac{150}{200}\Rightarrow\theta=37^\circ$$

C ۸۳۶ ۳

خط فکری بایدابتدا با هم فکر کنیم. وقتی تریلی ترمز می‌کند، عاملی که سبب توقف جعبه به همراه کامیون می‌شود نیروی اصطکاک بین کف تریلی و جعبه است. از خود می‌پرسیم که حداکثر نیروی اصطکاک چند نیوتون است و بیشترین شتاب جعبه در اثر نیروی اصطکاک چند m/s^2 است؟

$$f_{s_{max}}=\mu_s mg=0.5\times2\times10\Rightarrow f_{s_{max}}=10N$$
$$f_{s_{max}}=m_{\text{جعبه}}a\Rightarrow10=2a_{max}\Rightarrow a_{max}=5m/s^2$$

بنابراین حداکثر شتاب توقف این جعبه $5m/s^2$ یعنی اگر شتاب کامیون از $5m/s^2$ کمتر باشد، جعبه و کامیون باهم متوقف می‌شوند و اگر شتاب ترمز گرفتن کامیون از $5m/s^2$ بیشتر باشد، جعبه بر کف تریلی رو به جلو می‌لغزد. در این مسئله خوشبختانه شتاب توقف تریلی $4m/s^2$ است و هر دو باهم متوقف می‌شوند. اکنون می‌توان مسئله را حل کرد. تریلی در حال حرکت است اما جعبه نسبت به تریلی ساکن است، هنگام ترمز نیرویی که جعبه را از حرکت باز می‌دارد نیروی اصطکاک بین کف تریلی و جعبه است. با رسم نیروهای وارد بر جعبه و با توجه به این‌که تریلی با شتاب $4m/s^2$ ترمز می‌کند، داریم:



نیروی عمودی سطح وارد بر جعبه را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net,y}=0\Rightarrow F_N-mg_{\text{جعبه}}=0$$
$$\Rightarrow F_N=2\times10=20N$$

نیروی اصطکاک به جعبه شتاب $4m/s^2$ داده است بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر جعبه برابر است با:

$$F_{net,x}=ma_{\text{جعبه}}\Rightarrow-f_s=2\times(-4)=-8\Rightarrow f_s=8N$$

با توجه به این‌که کف تریلی، دو نیروی F_N و f_s را بر جعبه وارد می‌کند، برایند این دو نیرو را محاسبه می‌کنیم:

نیرویی که کف تریلی بر جعبه وارد می کند: $F_R=\sqrt{F_N^2+f_s^2}$

$$\Rightarrow R=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{5^2+2^2}=4\sqrt{29}N$$

B ۸۳۷ ۴

خط فکری وقتی کامیون ترمز می‌کند، عاملی که سبب متوقف کردن صندوق به همراه کامیون می‌شود اصطکاک بین صندوق و کامیون است و اگر اصطکاک نبود، صندوق بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خودش بر کف کامیون ادامه می‌داد تا به دیوارهٔ اتاقک کامیون برخورد کند.

برای آنکه کامیون در کوتاه‌ترین فاصله متوقف شود باید شتاب حرکت کندشونده آن بیشینه باشد و برای آنکه صندوق نیز با این شتاب متوقف شود باید نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر صندوق بیشینه $(f_{s\,max})$ باشد. بنابراین شما باید شتاب بیشینهٔ صندوق حاصل از نیروی اصطکاک را حساب کنید. سپس با نوشتن معادلهٔ مستقل از زمان مقدار جابه‌جایی را به‌دست بیاورید.

۱ عامل توقف صندوق، اصطکاک بین کف کامیون و صندوق است که به صندوق شتاب توقف می‌دهد. $f_{s\,max}=ma\Rightarrow\mu_s mg=ma\Rightarrow a=\mu_s g=0.25\times10=2.5m/s^2$

۲ شتاب توقف کامیون حداکثر باید $2.5m/s^2$ باشد تا صندوق بر کف کامیون نلغزد

از این‌رو: $v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-225=2(-2.5)\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{225}{5}=45m$

بازی با سؤال **یک محمولهٔ ۱۰۰۰ کیلوگرمی درون کامیونی که با سرعت $72km/h$ روی سطح افقی در حرکت است قرار دارد. فقط نیروی اصطکاک از لغزیدن محموله به جلو و عقب جلوگیری می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین محموله و کامیون ۰/۴ باشد، کمترین فاصله‌ای که کامیون می‌تواند بایستد بدون اینکه محموله در اتاقک به جلو بلغزد، چند متر است؟ $(g=10m/s^2)$**

۱) ۵۰
۲) ۲۵
۳) ۱۰۰
۴) باید جرم کامیون مشخص باشد.

پاسخ **محمولهٔ کامیون در اثر اصطکاک بین کف کامیون و محموله متوقف می‌شود و حداکثر شتابی که اصطکاک می‌تواند ایجاد کند خواهد شد:**

$$f_{s_{max}}=ma\Rightarrow-\mu_s mg=ma\Rightarrow a_{max}=-\mu_s g$$
$$\Rightarrow a_{max}=-0.4\times10\Rightarrow a_{max}=-4m/s^2$$

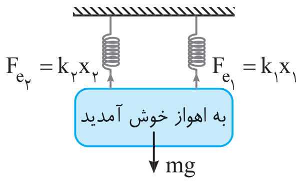
بنابراین حداکثر اندازهٔ شتاب کامیون نیز باید $4m/s^2$ باشد تا محموله کف کامیون نلغزد. به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، کمترین جابه‌جایی کامیون را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a_{max}\Delta x_{min}\xrightarrow{v=0,\,v_0=72km/h=20m/s}$$
$$0-400=2(-4)\Delta x_{min}\Rightarrow\Delta x_{min}=50m$$

گزینهٔ ۱

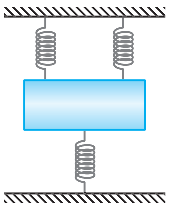
A ۸۳۸ ۲

جسم در حال سکون است. پس نیروهای وارد بر آن متوازن می‌باشد. چون فنرها مشابه‌اند پس کشش آن‌ها با هم برابر است، بنابراین:



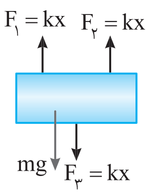
$$F_{net}=0\Rightarrow k_1x_1+k_2x_2=mg\Rightarrow2000x_1+2000x_2=1200$$
$$\xrightarrow[x_1=x_2=x]{\text{فنرها مشابه}}4000x=1200\Rightarrow x=0.3m=30cm$$

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو هر سه فنر با ثابت $3000N/m$ به اندازهٔ $10cm$ کشیده شده‌اند. جرم تابلو چند کیلوگرم است؟ $(g=10N/kg)$**



۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

پاسخ **هر سه فنر بنا به فرض مسئله کشیده شده‌اند و می‌خواهند به حالت اول باز گردند بنابراین نیروی کشسانی دو فنر بالایی رو به بالا و نیروی کشسانی فنر پایین رو به پایین و در جهت نیروی وزن است. تابلو ساکن است و نیروهای وارد بر تابلو متوازن هستند. بنابراین:**

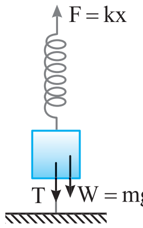


$$F_{net}=0\Rightarrow F_1+F_2=F_3+W\Rightarrow kx+kx=kx+W$$
$$\Rightarrow kx=W\xrightarrow[x=0.1m]{k=3000N/m}3000\times0.1=m\times10\Rightarrow m=30kg$$

گزینهٔ ۴

B ۸۳۹ ۴

خط فکری نیروی وزن و نیروی کشش نخ هر دو رو به پایین و نیروی کشسانی فنر رو به بالاست و چون جسم در تعادل است باید نیروها متوازن باشند. نیروها را رسم کنید و مسئله را حل کنید.



۱ ثابت فنر $4N/cm$ یعنی $400N/m$ است.

۲ نیروی F باید با مجموع نیروی وزن و نیروی کشش نخ برابر باشد.

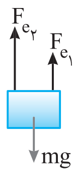
$$F_{net}=0\Rightarrow F=T+W\xrightarrow[W=1\times10=10N]{T=8N}kx=8+10\Rightarrow400x=18$$

$$\Rightarrow x=\frac{4/5}{100}\Rightarrow x=4/5\,cm$$

۳ طول فنر در این حالت برابر است با: $\ell=24+4/5\Rightarrow\ell=28/5cm$

B ۸۴۰ ۳

نکته نیروی کشسانی فنر همواره در خلاف جهت تغییر طول آن است.



فنر k_1 کشیده شده و نیروی آن خلاف جهت جابه‌جایی یعنی روبه بالا به جسم وارد می‌شود. همچنین k_2 نیز فشرده شده پس نیروی آن خلاف جهت جابه‌جایی یعنی روبه بالا به جسم وارد می‌شود. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و نیروی کشسانی هر فنر را حساب می‌کنیم:

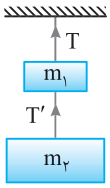
$$F_{e_1}=k_1\Delta x_1=5\times4=20N\quad,\quad F_{e_2}=k_2\Delta x_2=2000\times\frac{2}{100}=40N$$

نیروی خالص وارد بر جسم صفر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=0\Rightarrow mg=F_{e_1}+F_{e_2}\Rightarrow mg=60N\Rightarrow m=6kg$$

A ۸۴۱ ۲

خط فکری دقت کنید نخ بالایی وزن هر دو وزنهٔ $m_1=2kg$ و $m_2=3kg$ را تحمل می‌کند اما نخ بین دو وزنه تنها نیروی وزن m_2 را تحمل می‌کند. حال کشش هر نخ را حساب کرده از هم کم کنید.



۱ نیروی کشش نخ متصل به سقف خواهد شد:

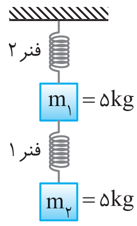
$$T=(m_1+m_2)g\Rightarrow T=(2+3)\times10=50N$$

۲ نیروی کشش نخ بین دو وزنه برابر است با: $T'=m_2g\Rightarrow T'=3\times10=30N$

۳ تفاوت T و T' را به‌دست می‌آوریم: $T-T'=50-30=20N$

میانبر از همان ابتدا مشخص است که اختلاف این دو نیروی کشش برابر وزن، وزنهٔ m_1 یعنی $W_1=20N$ است. زیرا T، به همین اندازه وزن بیشتری را تحمل می‌کند.

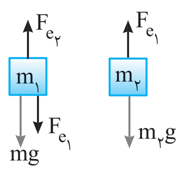
بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو مجموعه در حال تعادل می‌باشد و دو فنر مشابه‌اند. تغییر طول فنر (۲) چند برابر تغییر طول فنر (۱) است؟ (جرم فنرها ناچیز و $g=10N/kg$ است)** خارج ریاضی - ۸۸



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ **جسم m_2 توسط کشش فنر (۱) در حال تعادل است.** $F_{e_1}=m_2g\Rightarrow k\Delta x_1=50N$



بـه جسـم m_1 نیـروی وزن و همچنیـن F_{e_1} به سمت پایین وارد می‌شود:

$$F_{e_2}=mg+F_{e_1}=50+50\Rightarrow F_{e_2}=100N\Rightarrow k\Delta x_2=100N$$

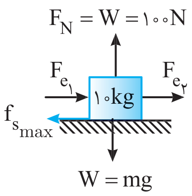
$$\frac{k\Delta x_2}{k\Delta x_1}=\frac{100}{50}\Rightarrow\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=2$$

البتـه می‌تـوان به راحتی گفـت که فنر (۲) دو وزنه و فنـر (۱) یک وزنه را تحمل می‌کند بنابراین افزایش طول فنر (۲) دو برابر افزایش طول فنر (۱) است.

گزینهٔ ۲

B ۸۴۲ ۳

نکته نیروی وارد از طرف فنر همواره خلاف جهت تغییر طول می‌باشد.



فنر k_1 فشرده شده بنابراین نیروی کشسانی آن (F_{e_1}) به سمت راست است. فنر k_2 کشیده شده بنابراین نیروی کشسانی آن (F_{e_2}) به سمت راست است.

بنابراین جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست بوده و نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s_{max}}$ به سمت چپ است. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده برایند آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=0\Rightarrow F_{e_1}+F_{e_2}=f_{s_{max}}\Rightarrow k_1\Delta x_1+k_2\Delta x_2=f_{s_{max}}$$

$$200\times\frac{2}{100}+400\times\frac{4}{100}=\mu_sF_N\xrightarrow{F_N=mg}20=\mu_s\times100\Rightarrow\mu_s=0/2$$

B ۸۴۳ ۲

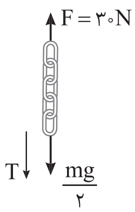
خط فکری اگر زنجیر و جسم بر کف نیروسنج قرار داده شوند، نیروسنج جمع وزن آن‌ها را نشان خواهد داد $(40+10=50N)$ حال اگر شما زنجیر را گرفته و به آن نیرویی رو به بالا وارد کنید، نیروسنج عدد کمتری را نشان می‌دهد که این کاهش برابر نیرویی است که شما رو به بالا به مجموعه وارد کرده‌اید.

۱ نیروسنج به جای $50N$ عدد $20N$ را نشان می‌دهد بنابراین نیروی F برابر است با:

$$F=50-20\Rightarrow F=30N$$

۲ نیروی کشش در وسط زنجیر را باید این‌گونه در نظر گرفت که اگر وزنه را با نصف زنجیر $(5N)$ روی ترازو قرار دهیم، ترازو عدد $40+5=45N$ را نشان می‌دهد. اما نیروسنج $20N$ را نشان می‌دهد یعنی در وسط زنجیر نیروی $45-20=25N$ وارد می‌شود.

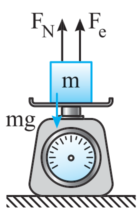
روش دیگر: نیروهای وارد بر نیمهٔ بالای زنجیر را رسم می‌کنیم، این نیروها متوازن هستند.



$$F=T+\frac{mg}{2}\Rightarrow30=T+\frac{10}{2}\Rightarrow T=25N$$

B ۸۴۴ ۳

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است.



۱ ابتدا نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$F_e=k\Delta l\Rightarrow F_e=200\times\frac{2}{100}=4N$$

۲ فنر کشیده شـده است و نیروی کشسانی فنر رو به بالا است بنابراین با توجه به ساکن بودن جسم می توان نوشت:

$$F_T=0\Rightarrow F_N+F_e=W\ (1)$$

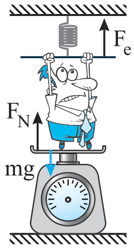
نکته عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر نیروی عمودی است که کف نیروسنج بر جسم وارد می‌کند. (F_N)

۳ ترازو عدد $4N$ را نشان می‌دهد، ترازوی فنری نیروی عمودی سطح را نشان می‌دهد پس $F_N=4N$ است، از این‌رو داریم:

$$(1)\Rightarrow4+4=W\Rightarrow W=8N\Rightarrow mg=8\Rightarrow m=0/8kg$$

B ۸۴۵ | ۱

خط فکری شخص فنر را رو به پایین می‌کشد، بنابراین نیرویی که فنر بر شخص وارد می‌کند رو به بالاست و سبب می‌گردد که نیروسنج عدد کمتری نشان دهد. در واقع عددی که نیروسنج نشان خواهد داد تفاضل نیروی وزن شخص و نیروی کشسانی فنر است. نیروها را رسم کنید و نیروی کشسانی فنر را به‌دست آورید و از وزن کم کنید.



۱ شخص فنر را رو به پایین کشیده است بنابراین نیروی کشسانی فنر رو به بالا است.

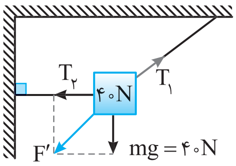
$F_e = k\Delta x \Rightarrow F_e = ۱۵۰ \times ۰/۱ = ۱۵N$

۲ وزن شخص برابر است با: $W = mg \Rightarrow W = ۶۰۰N$

ترازوی فنری نیروی عمودی سطح را نمایش می‌دهد از این‌رو:

$F_N = W - F_e \Rightarrow$ عدد نیروسنج $= ۶۰۰ - ۱۵ = ۵۸۵N$

B ۸۴۶ | ۴

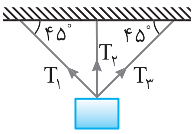


بـر وزنـه سـه نیـروی T_1 و T_2 و W وارد می‌شـود. جسـم در تعادل است و سـه نیروی T_1 و T_2 و وزن متوازن‌انـد بنابرایـن برایند T_2 و W کـه عمود بـر هم‌اند باید هم‌اندازه و خلاف جهت T_1 باشد. از این رو به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$F' = T_1 \Rightarrow \sqrt{T_2^۲ + (mg)^۲} = T_1 \Rightarrow T_2^۲ + (mg)^۲ = T_1^۲$

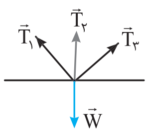
$\Rightarrow T_2^۲ + ۱۶۰۰ = ۲۵۰۰ \Rightarrow T_2^۲ = ۹۰۰ \Rightarrow T_2 = ۳۰N$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، وزنهٔ ۲۶ کیلوگرمی توسـط سه طناب T_1، T_2 و T_3 از سـقف آویخته شده و ساکن اسـت. اگر کشش طناب قائم T_2 برابر ۹۰N باشـد، اندازهٔ برایند نیروی کشش دو طناب T_1 و T_3 چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰N/kg)$



۱) ۳۳۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۸۰

پاسخ چون جسم در تعادل است، بنابراین:



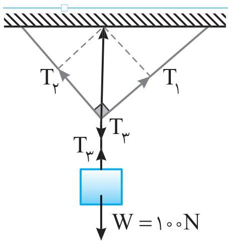
$F_{net} = ۰ \Rightarrow \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} + \vec{W} = ۰$

$\Rightarrow |\vec{T_1} + \vec{T_3}| = |\vec{T_2} + \vec{W}|$

$\Rightarrow |\vec{T_1} + \vec{T_3}| = |۲۶۰ - ۹۰| = ۱۷۰N$

گزینهٔ ۲

B ۸۴۷ | ۲



۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. به نخ قائم متصل به وزنه دقت کنید نیروی کشش این نخ برابر وزن جسم است.

$T_3 = W \Rightarrow T_3 = ۱۰۰N$

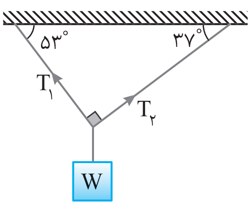
۲ اکنون به نیروهای وارد بر محل اتصال سه نخ دقت کنید. $(T_3 ، T_2 ، T_1)$

این سه نیرو متوازن هستند و باید اندازهٔ T_3 با اندازهٔ برایند T_1 و T_2 برابر شود.

۳ T_1 و T_2 بر هم عمودند و بنا به رابطهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

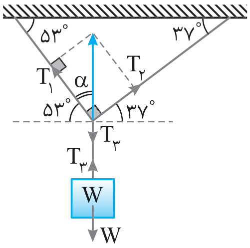
$\sqrt{T_1^۲ + T_2^۲} = T_3 \xrightarrow{T_1 = \sqrt{۳}T_2} \sqrt{۳T_2^۲ + T_2^۲} = T_3 \Rightarrow ۲T_2 = T_3 \Rightarrow T_2 = ۵۰N$

بازی با سؤال در شـکل روبه‌رو وزنهٔ W در حال تعادل اسـت. $\frac{T_2}{T_1}$ برابر کدام گزینه اسـت؟ (جرم ریسمان ناچیز است.)



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ با توجه به اینکه جسـم در حال تعادل اسـت پس کشـش T_3 برابر W می‌باشـد و باید برایند T_1 و T_2 هم‌اندازهٔ T_3 و خلاف جهت آن باشـد. زاویه‌ای که T_1 و T_2 با راسـتای افقی می‌سـازند با توجـه به خطوط مـوازی و مورب به ترتیب ۵۳° و ۳۷° است:



$\tan\alpha = \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow[\alpha = ۳۷°]{\text{با توجه به شکل}} \tan ۳۷° = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{۳}{۴}$

گزینهٔ ۱

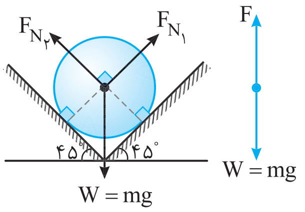
B ۸۴۸ | ۳

خط فکری نیرویی که جسم بر دیواره‌ها وارد می‌کند همان نیروی عمودی سطح F_N است که توسط دیواره‌ها بر جسم وارد می‌شود، بنابراین باید F_N را حساب کنیم.

همچنین چون زاویهٔ دیواره‌ها با سطح یکسان و ۴۵° است پس با توجه به تقارن، نیرویی که هریک از دیواره‌ها وارد می‌کنند، یکسان است.

زاویهٔ دیواره‌ها با سطح یکسان است پس نیروی عمودی سطح دو دیواره یکسان است:

$F = \sqrt{F_{N_1}^۲ + F_{N_2}^۲} \xrightarrow{F_{N_1} = F_{N_2}} F = F_{N_1}\sqrt{۲}$

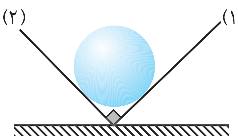


جسم در حال تعادل است پس نیروی وزن و نیروی F هم‌اندازه و خلاف جهت هم‌اند:

$F_{N_1}\sqrt{۲} = mg \Rightarrow F_{N_1}\sqrt{۲} = ۵۰$

$\Rightarrow F_{N_1} = \frac{۵۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵۰\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow F_{N_1} = ۲۵\sqrt{۲}N$

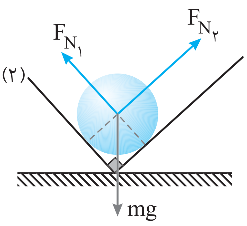
بازی با سؤال یک کـرهٔ فلزی به وزن ۴۰N درون نـاوه‌ای بـا دیواره‌های صیقلی قرار دارد. اگـر نیرویی که دیوارهٔ (۱) به کـره وارد می‌کند $\frac{۴}{۳}$ برابر نیرویی باشد که دیوارهٔ (۲) بر کره وارد کرده، نیروی وارد بر کره از طرف دیوار (۲) چند نیوتون است؟



کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۳۶

پاسخ ابتـدا نیروهـای وارد بر جسم را مطابق شـکل رسم می‌کنیم. F_{N_1} و F_{N_2} بر دیواره‌ها عمودند. با توجه به شکل زاویهٔ بین F_{N_1} و F_{N_2} مانند زاویهٔ بین دو دیوار ۹۰° است. با توجـه به اینکه جسـم در حال تعادل می‌باشـد و سه نیروی F_{N_1}، F_{N_2} و mg متوازن هستند و برایند دو نیروی عمود بر هم F_{N_1} و F_{N_2} باید هم‌اندازه و در خلاف جهت mg باشد:



$$\begin{cases} \sqrt{F_{N_1}^۲ + F_{N_2}^۲} = mg \\ F_{N_2} = F \text{ و } F_{N_1} = \frac{۴}{۳}F_{N_2} = \frac{۴}{۳}F \end{cases} \Rightarrow \sqrt{F^۲ + \frac{۱۶}{۹}F^۲} = ۴۰ \Rightarrow \frac{۵}{۳}F = ۴۰ \Rightarrow F = ۲۴N$$

گزینهٔ ۱

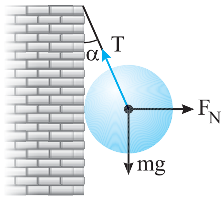
A ۸۴۹ ۳

بر جسم سه نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی وزن

۲ نیروی کشش

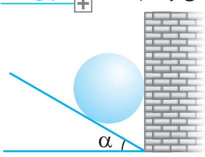
۳ نیروی عمود بر سطح



ابتدا نیروهایی که به جسم وارد می‌شوند را رسم می‌کنیم، جسم در حال تعادل است پس نیروهای متوازن می‌باشند و باید برایند نیروهای F_N و mg با T برابر و خلاف جهت آن می‌باشد.

$$T=\sqrt{F_N^۲+(mg)^۲}\Rightarrow T=\sqrt{۹۰۰+۱۶۰۰}=۵۰N$$

بازی با سؤال در شکل زیر نیروی عمودی سطح شیب‌دار وارد بر جسم کروی برابر $۵۰۰N$ است. نیروی عمودی سطح از طرف دیوار قائم بر جسم کروی و نیروی وزن کره به ترتیب از راست به چپ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ تجربی - ۹۴



۱) ۴۰۰ و ۳۰۰

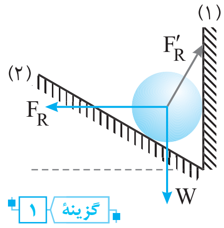
۲) صفر و ۳۰۰

۳) صفر و ۴۰۰

۴) ۳۰۰ و ۶۰۰

پاسخ نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشد بنابراین باید برایند دو نیروی عمود بر هم F_R و W برابر F'_R و در خلاف جهت آن باشد.

$$\sqrt{F_R^۲+W^۲}=F'_R$$

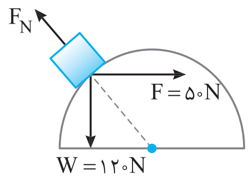


با توجه به معادلهٔ بالا تنها گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.

گزینهٔ ۱

B ۸۵۰ ۱

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



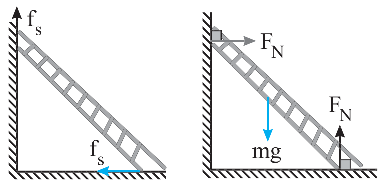
۱ نیروی F_N عمود بر سطح و در امتداد شعاع نیمکره است.

۲ جسم ساکن و در حالت تعادل است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند. از این‌رو اندازهٔ برایند نیروی افقی $F=۵۰N$ و نیروی وزن $W=۱۲۰N$ باید هم‌اندازهٔ نیروی F_N باشد. به کمک رابطهٔ فیثاغورس F_N را به‌دست می‌آوریم.

$$F_N=\sqrt{F^۲+W^۲}\Rightarrow F_N=\sqrt{۵۰^۲+۱۲۰^۲}\Rightarrow F_N=۱۳۰N$$

A ۸۵۱ ۲

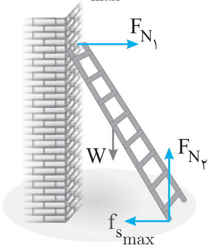
دیوار و کف بر نردبان نیروی عمودی F_N وارد می‌کنند در شکل (۱) و (۴) نیروی F_N بر سطح عمود نبوده و این شکل‌ها نادرست هستند. اما در مورد شکل (۲) و (۳)، نیروی اصطکاک خلاف جهت لغزش به نردبان وارد می‌شود. اگر نردبان بخواهد بلغزد به سمت پایین خواهد لغزید پس روی دیوار قائم روبه پایین می‌لغزد و باید اصطکاک به سمت بالا به آن وارد شود و روی سطح افقی نیز به سمت راست می‌لغزد پس نیروی اصطکاک به سمت چپ به آن وارد می‌شود و گزینهٔ (۲) درست است.



B ۸۵۲ ۲

خط فکری نردبان ساکن است. باید نیروهای وارد بر آن را رسم کنیم اما جالبی مسئله این است که این نیروها بر خلاف همهٔ مسائل قبلی بر نقاط مختلف جسم باید رسم شوند.

نیروهای وارد بر نردبان عبارتند از نیروی عمودی سطح دیوار بر نردبان $(F_{N_۱})$ که به‌طور افقی بر نردبان وارد می‌شود. نیروی وزن (W) رو به پایین، نیروی عمودی سطح زمین $(F_{N_۲})$ رو به بالا و در آخر نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر نردبان که مانع لیز خوردن آن می‌شود. نردبان در آستانهٔ سر خوردن بوده و نیروی اصطکاک بیشینه مقدار $(f_{s_{max}})$ را دارد.



۱ با توجه به شکل روبه‌رو برایند نیروها در امتداد قائم را برابر صفر قرار داده و نیروی $F_{N_۲}$ را حساب می‌کنیم.

$$F_{net,y}=۰\Rightarrow F_{N_۲}=W\Rightarrow F_{N_۲}=۲۰۰N$$

۲ اکنون نیروی اصطکاکی که توسط سطح زمین بر نردبان وارد می‌شود را به دست می‌آوریم:

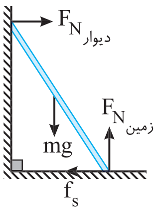
$$f_{s_{max}}=\mu_s F_{N_۲}=۰/۵\times۲۰۰=۱۰۰N$$

۳ در این صورت نیرویی که سطح زمین به نردبان وارد می‌کند برابر است با:

$$\vec{F}_{R,\text{سطح زمین}}=-۱۰۰\vec{i}+۲۰۰\vec{j}$$

B ۸۵۳ ۲

نکته برایند نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود را نیروی سطح گویند: $R=\sqrt{F_N^۲+f^۲}$



توسط دیوار قائم تنها نیروی عمودی سطح و توسط سطح زمین دو نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک به نردبان وارد می‌شود. نیروی اصطکاک مانع لیزخوردن نردبان به سمت راست می‌شود بنابراین جهت f_s به سمت چپ است. نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم و نیروهای افقی را برابر هم و نیروهای قائم را نیز برابر هم قرار می‌دهیم:

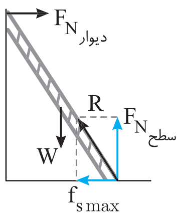
$$\text{نردبان در حال تعادل:}\begin{cases} f_s=F_{N_{\text{دیوار}}}=۳۰۰N\\ F_{N_{\text{زمین}}}=mg=۴۰۰N\end{cases}$$

هر دو نیروی $F_{N_{\text{زمین}}}$ و f_s از زمین به نردبان وارد شده و نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند برابر است با:

$$R=\sqrt{۳۰۰^۲+۴۰۰^۲}=۵۰۰N$$

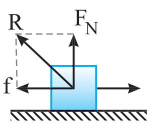
B ۸۵۴ ۱

نکته هر گاه بر جسمی نیرو وارد شود و جسم در آستانهٔ سُر خوردن باشد، یعنی اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح بیشینه $(f_{s_{max}}=\mu_s F_N)$ است.



باید شکل مسئله را رسم کنید و نیروهای وارد بر نردبان را بکشید.

یادآوری نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است. $R=\sqrt{F_N^۲+f^۲}$



۱ نردبان ساکن است، از این‌رو نیروهایی که در امتداد قائم هستند، یعنی نیروی وزن (W) و نیروی عمودی سطح (F_N) متوازن بوده بنابراین:

$$F_N=W=mg\xrightarrow{m=۱۶kg}F_N=۱۶\times۱۰=۱۶۰N$$

۲ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_{s_{max}}^۲}\Rightarrow ۲۰۰^۲=۱۶۰^۲+f_{s_{max}}^۲$$

$$\Rightarrow f_{s_{max}}^۲=۲۰۰^۲-۱۶۰^۲=(۲۰۰+۱۶۰)(۲۰۰-۱۶۰)=۳۶۰\times۴۰$$

$$f_{s_{max}}^۲=۳۶\times۴۰۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۶\times۲۰=۱۲۰N$$

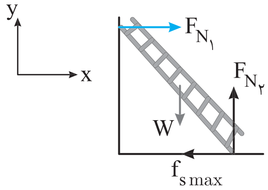
۳ ضریب اصطکاک ایستایی خواهد شد:

$$f_{s_{max}}=\mu_s mg\Rightarrow ۱۲۰=\mu_s\times۱۶\times۱۰\Rightarrow \mu_s=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

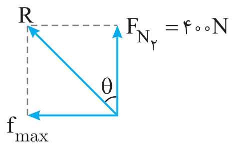
B ۸۵۵ ۱

۱ نیروهـای وارد بر نردبان را رسـم می‌کنیم.

۲ نردبان در آسـتانهٔ لغزیدن اسـت بنابراین نیـروی اصطکاک بین نردبان و سطح برابر $f_{s_{max}}$ است.



۳ با توجه به شکل نیروهای وارد بر نردبان توسط سطح زمین را می‌توان نوشت:



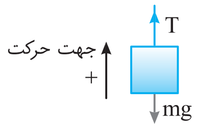
$$\tan\theta=\frac{f_{s_{max}}}{F_{N_2}}=\frac{\mu_s F_{N_2}}{F_{N_2}}=\mu_s$$

$$\tan\theta=\mu_s \xrightarrow{\mu_s=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\theta=30^\circ$$

A ۸۵۶ ۴

حرکت کندشـونده اسـت، اگر جهت حرکت را رو به بالا مثبت بگیریم شـتاب منفی و برابر $-2m/s^2$ می‌شود. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را برابر ma قرار می‌دهیم.



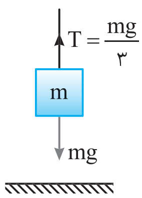
$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-50=5\times(-2)\Rightarrow T=40N$$

روش دیگر: جسـم دارای حرکت کندشـونده رو به بالا اسـت، بنابرایـن نیروی وزن که رو به پایین اسـت از نیروی کشـش نخ که رو به بالاسـت بزرگ‌تر بوده و سبب کندشدن حرکت می‌شـود. بنابراین نیروی کشـش نـخ را از وزن کم می‌کنیم و شـتاب قطعاً مثبت اختیار می‌شود.

$$mg>T\Rightarrow mg-T=ma\Rightarrow 50-T=5\times 2\Rightarrow T=40N$$

A ۸۵۷ ۳

خط فکری نیروهای وزن بر جسـم (کشـش نـخ T و نیـروی وزن W) را رسـم می‌کنیـم. برای سـادگی برای به‌دسـت آوردن نیروی خالص نیروی بزرگ‌تر را منهای نیروی کوچک‌تر می‌کنیم و سپس به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل می‌کنیم.



در صورت مسئله دقیقاً بیان شده که $T=\frac{1}{3}W$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-T=ma\xrightarrow{T=\frac{mg}{3}}\frac{2mg}{3}=ma\Rightarrow a=\frac{2g}{3}$$

A ۸۵۸ ۱

خط فکری جسم در راستای قائم جابه‌جا می‌شود اما معلوم نیست که بالا می‌رود و یا پایین می‌آید همچنین نوع حرکت مشخص نیست. البته مسئله از ما خواسته است که حالتی که کشش نخ بیشترین مقدار است را مشخص کنیم. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): حرکت تندشـونده رو به بالا: در این حالت باید نیروی کشـش طناب از وزن شخص بیشتر باشد.

$$T>mg\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T=mg+ma$$

گزینهٔ (۲): حرکت کندشونده رو به بالا: برای آنکه حرکت رو به بالا کندشونده باشد باید نیروی وزن رو به پایین از نیروی کشش طناب رو به بالا بزرگ‌تر باشد.

$$T'<mg\Rightarrow mg-T'=ma\Rightarrow T'=mg-ma$$

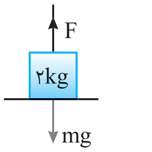
گزینهٔ (۳): حرکت تندشـونده رو به پایین: در این حرکت نیز $T'<mg$ اسـت و نیروی وزن جسم را به پایین می‌آورد و بر سرعت آن می‌افزاید.

گزینـهٔ (۴): حرکت با سـرعت ثابـت: در این حالت نیروها متـوازن بوده و $T''=mg$ است. در نتیجه در حالت اول T از همهٔ حالات بیشتر است.

در این تست قدیمی فرض شده در گزینه‌ها بزرگی شتاب یکسان است.

B ۸۵۹ ۲

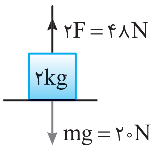
در حالـت اول نیرویی که در راسـتای قائم به طناب وارد می‌شود را F در نظر می‌گیریم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-mg=ma_1$$

$$\Rightarrow F-20=4\Rightarrow F=24N$$

در حالـت دوم نیـروی F دو برابر شـده پـس نیروی روبه بالای وارد بر جعبه $2\times 24=48N$ است.



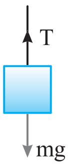
$$F_{net}=ma_2\Rightarrow 2F-mg=ma$$

$$\Rightarrow 48-20=2a_2\Rightarrow a_2=14m/s^2$$

بنابراین شتاب حرکت از $2m/s^2$ به $14m/s^2$ رسیده و $\frac{a_2}{a_1}=\frac{14}{2}=7$ برابر شده است.

بازی با سؤال **وزنهٔ m را به‌وسـیلهٔ طنابی با شـتاب $2m/s^2$ به طور قائم با حرکت تندشونده رو به بالا می‌کشیم. اگر نیروی کشش طناب را دو برابر کنیم، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه افزایش می‌یابد؟ $(g=10N/kg)$** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲



پاسخ **ابتدا شتاب حرکت $2m/s^2$ است بنابراین:**

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T=10m+2m=12m$$

اگر نیروی کشـش طناب دو برابر شود $T'=2T=24m$ خواهد شد و داریم:

$$F_{net}=ma'\Rightarrow T'-mg=ma'\Rightarrow 24m-10m=ma'\Rightarrow a'=14m/s^2$$

بنابراین شتاب از $a=2m/s^2$ به $a'=14m/s^2$ رسیده و افزایش یافته است:

$$(a'-a)=12m/s^2$$

گزینه ۴

C ۸۶۰ ۴

خط فکری ابتدا باید نیروی شـناوری (F_b) وارد بر بالون را حسـاب کنید. برای ایـن کار بایـد نیروهای وارد بر بالـون را هنگامی که بالون تندشـونده در حال پایین آمدن است را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون F_b را حساب کنید. سپس جهت حرکت بالون را رو به بالا در نظر گرفته و نیروی وزن جدید بالون را به‌دست بیاورید.

۱ نیروی شناوری خواهد شد:

$$mg-F_b=ma\xrightarrow{m=200kg}2000-F_b=200\times 2\Rightarrow F_b=1600N$$

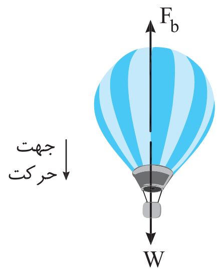
۲ در حالت دوم بالون با همین شتاب $2m/s^2$ با نیروی $F_b=1600N$ تندشونده رو به بالا می‌رود، بنابراین می‌نویسیم:

$$F_b-m'g=m'a\Rightarrow 1600-m'\times 10=m'\times 2$$

$$1600=12m'\Rightarrow m'=\frac{1600}{12}\Rightarrow m'=\frac{400}{3}kg$$

۳ کسری از جرم که باید از جرم بالون کاسته شود را حساب می‌کنیم:

$$\frac{m'-m}{m}=\frac{\frac{400}{3}-200}{200}=\frac{-\frac{200}{3}}{200}=-\frac{1}{3}$$



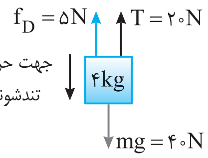
B ۸۶۱ ۴

خط فکری جهت حرکت جسم و نوع حرکت مشخص نشده است.

اگر جسم رو به پایین در حرکت باشد، نیروی مقاومت هوا رو به بالا بوده و هم‌جهت T است و اگر جسم رو به بالا در حرکت باشد، نیروی مقاومت هوا رو به پایین و هم‌جهت W خواهد بود. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده، یک‌بار جسم را با حرکت تندشونده رو به پایین و بار دیگر با حرکت کندشونده رو به بالا مسئله را حل کنید.

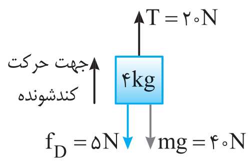
نیروهای در جهت حرکت را منهای نیروهای خلاف جهت حرکت کنید در این صورت اگر حرکت تندشونده باشد شتاب مثبت و اگر حرکت کندشونده باشد، شتاب منفی به‌دست می‌آید.

اگر جسم در حال حرکت رو به پایین باشد مقاومت هوا رو به بالا بر جسم وارد می‌شود بنابراین:



$$F_{net}=ma \Rightarrow mg-T-f_D=ma$$
$$\Rightarrow 40-20-5=4a \Rightarrow 4a=15$$
$$\Rightarrow a=3/75 m/s^2$$

همچنین اگر جسم در حال حرکت کندشونده رو به بالا باشد مقاومت هوا رو به پایین به جسم وارد می‌شود بنابراین:



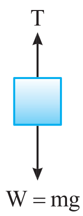
$$F_{net}=ma \Rightarrow T-mg-f_D=ma$$
$$\Rightarrow 20-40-5=4a$$
$$\Rightarrow a=-6/25 m/s^2$$
$$\Rightarrow |a|=6/25 m/s^2$$

B ۸۶۲ ۴

نکته تا لحظه‌ای که نیروی جلوبر وارد بر یک جسم از نیروهای مقاوم در مقابل حرکت بزرگ‌تر یا مساوی آن باشد، از تندی جسم کاسته نمی‌شود.

تا زمانی که نیروی T از نیروی وزن W بیشتر است تندی در حال افزایش است. با کاهش T نیروی برایند کاهش می‌یابد و تا زمانی که $T=mg=40N$ شود، سرعت در حال افزایش است و در لحظه $T=mg$ سرعت ثابت می‌ماند از این رو اگر نیروی T را از $80N$ به $40N$ کاهش دهیم تندی جسم کاهش نمی‌یابد: $\Delta T=80-40=40N$

A ۸۶۳ ۱



در حالت اول که به کمک طناب وزنهٔ $90kg$ را بالا می‌بریم، نیروی کشش طناب خواهد شد:

$$T>mg \Rightarrow T_{max}-mg=ma \Rightarrow T_{max}-900=90a \quad (I)$$

در حالت دوم می‌خواهیم وزنهٔ $110kg$ را پایین ببریم در این حالت حداکثر نیروی کشش طناب با حالت اول برابر است. اما نیروی وزن جسم جدید از نیروی کشش طناب بزرگ‌تر است از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$m'g>T \Rightarrow m'g-T_{max}=m'a$$
$$\xrightarrow{m'=110kg} 1100-T_{max}=110a \quad (II)$$

رابطهٔ (I) و (II) را برهم تقسیم کرده، بیشینه کشش قابل تحمل طناب را حساب می‌کنیم:

$$\frac{T_{max}-900}{1100-T_{max}}=\frac{9}{11} \Rightarrow 11T_{max}-9900=9900-9T_{max}$$
$$\Rightarrow 20T_{max}=2\times 9900 \Rightarrow T_{max}=990N$$

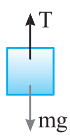
در حالت سوم با این طناب، بار را یکنواخت بالا می‌بریم بنابراین جرم بار خواهد شد:

$$F_{net}=ma \Rightarrow T_{max}=m''g \Rightarrow 990=m''\times 10 \Rightarrow m''=99kg$$

A ۸۶۴ ۱

۱ زمان داده شده بنابراین باید به کمک روابط حرکت‌شناسی شتاب حرکت جسم را حساب کنیم:

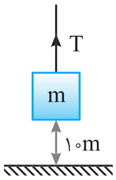
$$a=\frac{v-v_0}{t} \xrightarrow[v_0=0]{t=4s,\ v=10m/s} a=\frac{10-0}{4} \Rightarrow a=2/5 m/s^2$$



۲ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده سپس به کمک قانون دوم نیوتون نیروی کششی را به‌دست می‌آوریم:

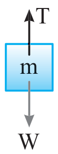
$$F_{net}=ma \Rightarrow T-mg=ma \Rightarrow T-20=5 \Rightarrow T=25N$$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو در لحظهٔ نشان داده شده جسم ساکن است، نیروی کشش T را کاهش می‌دهیم تا برابر نصف نیروی وزن شود. تندی جسم هنگام رسیدن به زمین چند m/s است؟ $(g=10N/kg)$



۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

پاسخ خط فکری در ابتدا جسم ساکن و نیروی کشش نخ برابر نیروی وزن است $T=mg$ وقتی کشش را کاهش دهیم تا $T'=\frac{mg}{2}$ جسم شروع به حرکت رو به پایین می‌کند.



ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma \Rightarrow T'-mg=ma \Rightarrow \frac{mg}{2}-mg=ma \Rightarrow a=-\frac{g}{2}=-5 m/s^2$$

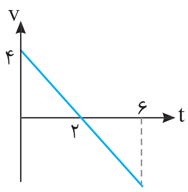
تندی جسم را هنگام رسیدن به زمین از رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta y \Rightarrow v^2=2\times(5)(10) \Rightarrow v^2=100 \Rightarrow v=10 m/s$$

گزینهٔ ۲

B ۸۶۵ ۲

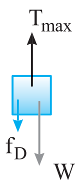
دقت کنید که در تمام مدت حرکت شتاب حرکت ثابت است بنابراین در تمام مدت حرکت نیروی خالص وارد بر جسم ثابت بوده و با توجه به ثابت بودن نیروی وزن، باید نیروی کشش طناب نیز ثابت باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



A ۸۶۶ ۳

خط فکری حداقل زمان وقتی است که شتاب بالا بردن جسم بیشینه مقدار باشد در این صورت باید نیروی کشش نخ بیشترین مقدار یعنی برابر $10N$ باشد. با توجه به این موضوع شتاب حرکت جسم را به دست آورده سپس به کمک روابط حرکت‌شناسی حداقل زمان را حساب کنید.

نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم:



۱ جرم جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$W=mg \Rightarrow 5=m\times 10 \Rightarrow m=0/5kg$$

۲ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

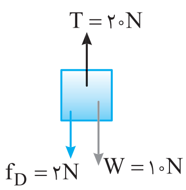
$$F_{net}=ma \Rightarrow T_{max}-W-f_D=ma$$
$$\Rightarrow 10-5-1=0/5a \Rightarrow a=8 m/s^2$$

۳
$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 16=\frac{1}{2}\times 8t^2 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow t=2s$$

بازی با سؤال به نخی که می‌تواند حداکثر نیروی کشش $20N$ را تحمل کند، وزنهٔ $10N$ آویزان است. مقاومت هوا در مقابل حرکت وزنه به طور متوسط ۲ نیوتون است. حداکثر ارتفاعی که در مدت $1s$ آغازین حرکت می‌توان وزنه را بالا برد، چند متر است؟ $(g=10N/kg)$

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۱/۵

پاسخ ۱ شکل ساده‌ای از مسئله به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



۲ ابتدا جرم وزنه را حساب می‌کنیم:

$$W=mg \Rightarrow 10=m\times 10 \Rightarrow m=1kg$$

۳ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت وزنه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma \Rightarrow T-(f_D+W)=ma \Rightarrow 20-(10+2)=1a \Rightarrow a=8 m/s^2$$

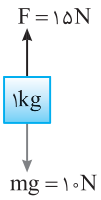
۴ در مسئله زمان داده شده بنابراین به سراغ روابط حرکت‌شناسی می‌رویم.

$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow h=\frac{1}{2}\times 8\times 1 \Rightarrow h=4m$$

گزینهٔ ۲

C — ۸۶۷ — ۳

خط فکری جسم را با نیروی $F=15N$ رو به بالا برده‌ایم، سپس این نیرو را حذف کرده‌ایم. مشکل خیلی از دانش‌آموزان از اینجا شروع می‌شود. زیرا تصور می‌کنند که با حذف نیروی F جسم دیگر بالا نمی‌رود در حالی که جسم در مدت $3s$ سرعت پیدا کرده و وقتی F حذف می‌شود، به دلیل قانون اول نیوتون جسم تمایل دارد وضع موجود خود یعنی حرکت رو به بالا را ادامه دهد. به همین دلیل به بالا رفتن ادامه می‌دهد اما تحت تأثیر نیروی وزن از سرعتش کاسته شده و سرانجام متوقف می‌گردد و به سوی زمین بر می‌گردد. شما یک بار جابه‌جایی در حرکت تندشونده اول مسیر و بار دیگر جابه‌جایی پس از حذف F تا لحظهٔ توقف را باید حساب کرده باهم جمع کنید.



۱ شتاب حرکت جسم با حضور نیروی $F=15N$ را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-mg=ma\Rightarrow 15-10=a\Rightarrow a=5m/s^2$$

۲ جابه‌جایی جسم در مدت $3s$ خواهد شد:

$$\Delta y_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta y_1=\frac{1}{2}\times5\times9=22/5m$$

۳ تندی جسم در پایان این $3s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=3\times5\Rightarrow v=15m/s$$

۴ با حذف نیروی F تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی وزن است بنابراین شتاب قسمت کندشونده خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow 0-mg=ma\Rightarrow a=-10m/s^2$$

۵ در ابتدای حذف F، سرعت جسم $15m/s$ است بنابراین به کمک رابطهٔ مستقل از زمان مقدار بالا رفتن جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta y\Rightarrow 0-15^2=2(-10)\Delta y_2\Rightarrow \Delta y_2=11/25m$$

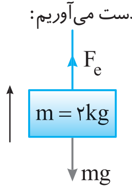
۶ حداکثر ارتفاع بالا رفتن جسم برابر است با:

$$\Delta y_{کل}=\Delta y_1+\Delta y_2=22/5+11/25=33/75m$$

A — ۸۶۸ — ۳

بر جسم نیروهای وزن $W=mg$ و نیروی کشسانی فنر $F_e=k\Delta x$ وارد می‌شود.

با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:

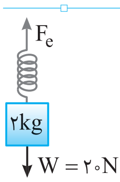


$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_e-20=4\Rightarrow F_e=24N$$

تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=k\Delta x\xrightarrow{k=400N/m}24=400\Delta x$$
$$\Rightarrow \Delta x=0/06m\Rightarrow \Delta x=6cm$$

B — ۸۶۹ — ۲



۱ دوباره حضور حرکت‌شناسی در مسئله را می‌بینید. باید ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت زمان مسئله $v=4t+2$ با معادلهٔ سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت شتاب حرکت را به‌دست بیاورید. $v=at+v_0\ ,\ v=4t+2\Rightarrow a=4m/s^2$

۲ شکل ساده‌ای به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۳ قانون دوم نیوتون را نوشته و نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-W=ma\xrightarrow{m=2kg}F_e-2\times10=2\times4\Rightarrow F_e=28N$$

۴ تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=kx\xrightarrow{k=2N/cm=200N/m}28=200x\Rightarrow x=0/14m\Rightarrow x=14cm$$

بازی با سؤال **جسمی به جرم $2kg$ تحت تأثیر نیروی T رو به بالا در حرکت است و معادلهٔ سرعت - زمان آن $v=4t+10$ است. نیروی T چند نیوتون می‌باشد؟ $(g=10N/kg)$**

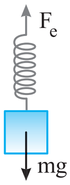
۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۱۵ ۴) ۳۵

پاسخ **معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت برابر $v=at+v_0$ است، بنابراین شتاب این حرکت $4m/s^2$ می‌باشد.**

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-20=8\Rightarrow T=28N$$ گزینهٔ ۲

B — ۸۷۰ — ۳

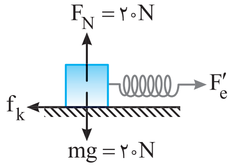
خط فکری ابتدا با نوشتن تعادل در راستای قائم ضریب سختی فنر را به‌دست می‌آوریم. سپس با نوشتن معادلهٔ تعادل افقی مقدار نیروی اصطکاک و درنهایت ضریب اصطکاک جنبشی به دست می‌آید. در مراحل زیر محاسبات لازم را انجام می‌دهیم.



۱ در حالت اول به جسم نیروی کشش فنر به سمت بالا و نیروی وزن به سمت پایین وارد می‌شود:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma\Rightarrow k\Delta x-mg=ma$$
$$\Rightarrow k(\frac{42}{100}-\frac{30}{100})-20=2\times2\Rightarrow k=200N/m$$

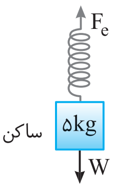
۲ در حالت دوم نیروی کشش فنر در جهت حرکت و نیروی اصطکاک خلاف جهت به جسم وارد می‌شود:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F'_e-f_k=ma'$$
$$\Rightarrow k\Delta x'-f_k=ma'$$
$$\Rightarrow 200\times(\frac{6}{100})-f_k=2\times2\Rightarrow f_k=8N$$

۳ نیروی اصطکاک برابر است با: $f_k=\mu_kF_N\Rightarrow 8=\mu_k(20)\Rightarrow \mu_k=0/4$

B — ۸۷۱ — ۳



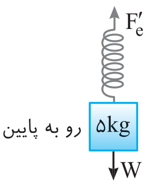
۱ در حالت اول جسم در حال تعادل است، بنابراین نیروی کشسانی فنر و نیروی وزن وارد بر وزنه متوازن هستند.

$$F_e=W\Rightarrow F_e=5\times10\Rightarrow F_e=50N$$

۲ ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

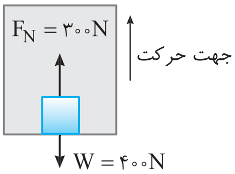
$$F_e=kx\xrightarrow{x=0/05m}50=k(0/05)$$
$$\Rightarrow k=1000N/m$$

۳ در حالت دوم وزنه را با شتاب $3m/s^2$ پایین می‌آوریم، در این حالت $mg>F_e$ است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



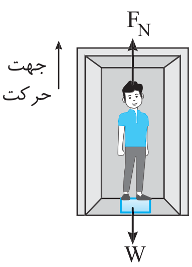
$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F'_e=ma$$
$$\Rightarrow 50-kx'=5\times3$$
$$50-1000x'=15\Rightarrow 1000x'=35$$
$$\Rightarrow x'=\frac{35}{1000}m\Rightarrow x'=3/5cm$$

A — ۸۷۲ — ۳



دقت کنید وزن جسم $400N$ است اما نیرویی که جسم به کف آسانسور وارد می‌کند $400N$ نیست. با توجه به اینکه سطح کف آسانسور بر جسم نیروی $300N$ وارد کرده است بنا به قانون سوم نیوتون جسم نیز نیرویی برابر آن و در خلاف جهت به کف آسانسور یعنی نیروی $300N$ را وارد می‌کند. اما چگونه این حالت ممکن است؟ جسم در حال حرکت رو به بالاست و اگر حرکت آسانسور کندشونده باشد، نیروی رو به بالا (F_N) از نیروی رو به پایین (W) کوچک‌تر است.

B — ۸۷۳ — ۴



بر شخص درون آسانسور دو نیروی وزن W و عمودی سطح F_N وارد می‌شود. نیروی F_N توسط کف آسانسور بر شخص وارد می‌شود، پس بنابر قانون سوم نیوتون، شخص نیز بر کف نیرویی برابر F_N و رو به پایین وارد می‌کند. F_N را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم. اگر سرعت آسانسور ثابت باشد، $F_N=W$ است. اگر با حرکت تندشونده بالا برود، $F_N>W$ است و اگر با حرکت کندشونده بالا رود، $F_N<W$ است. بنابراین نیرویی که شخص بر کف وارد می‌کند می‌تواند برابر، کمتر یا بیشتر از وزن مشخص باشد.

بازی با سؤال شخصی به جرم m درون آسانسوری که حرکت شتابدار دارد ایستاده است و آسانسور به طرف بالا حرکت می‌کند، نیرویی که کف آسانسور به شخصی وارد می‌کند را F می‌نامیم. کدام گزینه درست است؟

۱) الزاماً $F=۰$

۲) الزاماً $F<mg$

۳) الزاماً $F>mg$

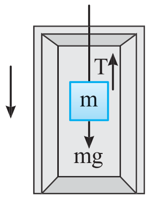
۴) بسته به حرکت آسانسور، هر سه گزینه می‌تواند باشد.

پاسخ جهت حرکت جسم رو به بالا است. اما نوع حرکت مشخص نیست اگر حرکت تندشونده باشد $F>W$ است، اگر حرکت کندشونده باشد $F<W$ است و اگر جسم با حرکت کندشونده با شتاب g رو به بالا حرکت کند، نیروی $F=۰$ خواهد بود.

گزینهٔ ۴

B ۸۷۴ ۳

خط فکری در حرکت آسانسور، قانون دوم نیوتون به صورت زیر نوشته می‌شود:

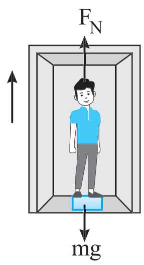


$$m(\pm a)=\begin{bmatrix}\text{نیروی خلاف}\\\text{جهت حرکت}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{نیروی در}\\\text{جهت حرکت}\end{bmatrix}$$

(حرکت تندشونده ↗، حرکت کندشونده ↘)

به طور مثال اگر آسانسور پایین بیاید: $mg-T=m(\pm a)$

نکته عددی که باسکول نشان می‌دهد برابر نیروی عمودی سطحی است که به شخص وارد می‌شود.

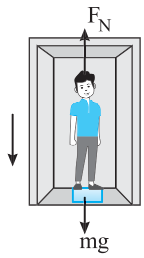


۱ اگر آسانسور به سمت بالا در حال حرکت باشد، نیروی در جهت حرکت F_N و نیرو خلاف جهت حرکت mg است.

$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=m(\pm a)$

$\Rightarrow F_N=mg+m(\pm a)$

برای آن‌که $F_N>mg$ باشد باید a مثبت باشد تا با mg جمع شود پس طبق خط فکری در حرکت به سمت بالا، حرکت تندشونده است.



۲ اگر آسانسور به سمت پایین در حال حرکت باشد، نیرو در خلاف جهت حرکت F_N و نیروی در جهت حرکت mg است:

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=m(\pm a)$

$\Rightarrow F_N=mg-m(\pm a)$

برای آن‌که $F_N>mg$ باشد باید a منفی باشد تا mg از یک عدد منفی کم شود:

$$F_N=mg-m(-a)\xrightarrow{\text{منفی در منفی، مثبت می‌شود}}F_N=mg+ma$$

پس در حرکت به سمت پایین باید حرکت کندشونده $(a<۰)$ باشد.

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

میانبر اگر در آسانسور دو نیرو، یکی در جهت حرکت و دیگری خلاف جهت حرکت به جسم وارد شود:

- حرکت تندشونده روبه بالا یا کندشونده رو به پایین:

نیرو خلاف جهت حرکت > نیرو در جهت حرکت

- حرکت تندشونده روبه پایین یا کندشونده رو به بالا:

نیرو خلاف جهت حرکت < نیرو در جهت حرکت

B ۸۷۵ ۴

یادآوری در حرکت شتابدار آسانسور با شتاب ثابت چهار حالت وجود دارد که دو حالت آن‌ها معادل هم هستند.

۱ حرکت تندشونده رو به بالا، با حرکت کندشونده رو به پایین با همان شتاب معادل است. زیرا در این دو حالت نیروی بالابر وارد بر جسم (F_N) از نیروی وزن جسم (W) بزرگتر است و در هر دو حالت می‌توان نوشت:

$F_N-W=ma\Rightarrow F_N=mg+ma$

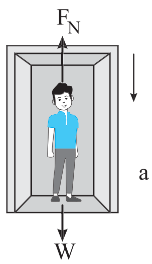
۲ حرکت تندشونده رو به پایین با حرکت کندشونده رو به بالا با همان شتاب معادل است. در این دو حالت یکسان، نیروی F_N از W کوچکتر است و در دو حالت خواهیم داشت:

$W-F_N=ma\Rightarrow F_N=mg-ma$

بنابراین حرکت تندشونده رو به بالا با شتاب $۳m/s^۲$ با حرکت کندشونده رو به پایین با شتاب $۳m/s^۲$ معادل است و در هر دو حالت نیروی وارد بر جسم توسط کف آسانسور یکسان است و بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که جسم بر تکیه‌گاه وارد می‌کند نیز برابر (F) است.

A ۸۷۶ ۴

خط فکری به جای نیروی شخص وارد بر آسانسور ابتدا نیرویی که آسانسور رو به بالا به شخص وارد می‌کند را حساب کنید.



$a=۲m/s^۲$

حرکت تندشونده رو به پایین است از این‌رو $F_N<W$ خواهد بود، نیروهای وارد بر شخص را رسم کرده به کمک قانون دوم نیوتون نیرویی که کف آسانسور بر شخص وارد می‌کند (F_N) را حساب می‌کنیم.

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma$

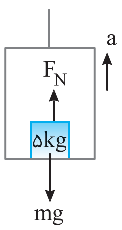
$\Rightarrow ۸۰۰-F_N=۸۰\times۲\Rightarrow F_N=۶۴۰N$

آسانسور بر شخص نیروی $۶۴۰N$ را رو به بالا وارد می‌کند. بنا به قانون سوم نیوتون شخص نیز بر کف آسانسور نیروی $۶۴۰N$ را رو به پایین وارد می‌کند.

B ۸۷۷ ۳

خط فکری در حرکت آسانسور که به جسم دو نیروی عمودی سطح F_N و نیروی وزن mg وارد می‌شود برای محاسبهٔ برایند نیروها (F_{net}) باید نیروی در جهت حرکت را از نیروی خلاف جهت حرکت کم کرد:

$$\underset{\substack{\downarrow\\\text{نیروی خلاف جهت حرکت - نیروی در جهت حرکت}}}{F_{net}}=ma\Rightarrow\begin{cases}a>۰\ \text{حرکت تندشونده}\\a<۰\ \text{حرکت کندشونده}\end{cases}$$



در حالت اول داریم:

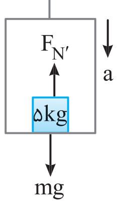
$$F_{net}=ma\xrightarrow{\text{جسم رو به بالا حرکت می‌کند}}$$

$F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-۵۰=۱۰\Rightarrow F_N=۶۰N$

در حالت دوم داریم:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{\text{جسم رو به پایین حرکت می‌کند}}$$

$mg-F_{N'}=ma\Rightarrow ۵۰-F_{N'}=۱۰\Rightarrow F_{N'}=۴۰N$

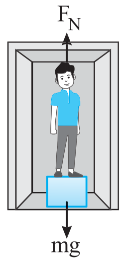


اختلاف نیروی عمودی سطح برابر است با:

$F_N-F_{N'}=۶۰-۴۰=۲۰N$

میانبر هرگاه آسانسور یکبار با شتاب a رو به بالا و بار دیگر با همان شتاب رو به پایین حرکت کند اختلاف نیروی عمودی سطح برابر $۲mg$ است (البته باید نوع حرکت (تندشونده یا کندشونده) در دو حالت یکسان باشد).

B ۸۷۸ ۱



نیرویی که ترازو نشـان می‌دهد همان نیروی عمودی سطح است که توسط ترازو بر شخص وارد می‌شود. شتاب حرکت را با قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

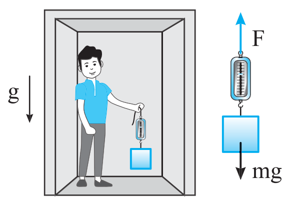
$F_{net}=ma \Rightarrow mg-F_N=ma \Rightarrow ۶۰۰-۴۸۰=۶۰a$

$\Rightarrow a=۲m/s^۲$

بنابرایـن گزینهٔ (۳) و (۴) که در آن‌ها شـتاب $\frac{۱}{۲}m/s^۲$ اسـت نادرست هستند. اما بین گزینهٔ (۱) و (۲) چون نیروی وزن رو به پایین $(۶۰۰N)$ از نیروی عمودی سـطح $(۴۸۰N)$ بزرگتـر بوده بنابراین نیروی خالص وارد بر شخص رو به پایین است. بنا به قانون دوم نیوتون همواره جهت شتاب در جهت نیروی خالص است از این‌رو جهت شتاب نیرو رو به پایین است.

A ۸۷۹ ۴

خط فکری سـؤال زیبایی اسـت. ابتدا فرض کنید که بر جسم دو نیرو یکی وزن و دیگری نیرو کشسانی نیروسنج وارد می‌شود. سپس با توجه به شتاب رو به پایین حرکت آسانسور نیروی نیروسنج را حساب کنید.



با توجه به نیروهای وارد بر جسم:

$F_{net}=ma \xrightarrow{a=g}$

$mg-F=m(g) \Rightarrow F=۰$

بنابراین نیروسـنج صفر را نشـان می‌دهد. این وضعیت را حالت بی‌وزنی گویند. در حالت بی‌وزنی تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی وزن بوده و شتاب جسم برابر شتاب گرانش g است. البته به آن حالت بی وزنی می گویند زیرا وزن جسم صفر نیست و جسم، شخص و آسانسور تحت تأثیر نیروی وزن در حال حرکت رو به پایین هستند.

B ۸۸۰ ۳

در حالت اول آسانسـور با تندی ثابت در حال حرکت اسـت پس نیروهای وارد بر جسـم متوازن است و نیروی کشش کابل با مجموع نیروی وزن آسانسور و شخص برابر است.

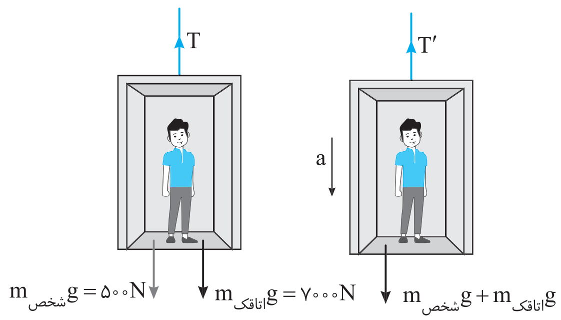
$T=m_{شخص}g+m_{اتاقک}g=۷۵۰۰N$

در حالت دوم می‌خواهیم آسانسور با شتاب $۲m/s^۲$ کندشونده رو به پایین حرکت کند در این حالت:

$F_{net}=ma \xrightarrow{T'>W} T'-(m_{شخص}g+m_{اتاقک}g)=m_{کل}a$

$T'-۷۵۰۰=۷۵۰\times۲ \Rightarrow T'=۹۰۰۰N$

بنابراین کشش کابل باید به اندازهٔ $T'-T=۹۰۰۰-۷۵۰۰=۱۵۰۰N$ افزایش یابد.



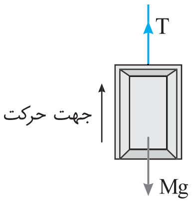
(حالت اول) (حالت دوم)

در حل مسـائل آسانسور می‌توان این‌گونه عمل کرد که با توجه به جهت حرکت آسانسور و نوع حرکت آن نیروی بزرگتر را تشخیص داده و نیروی بزرگتر را منهای نیروی کوچکتر کرده و شتاب را به‌دست آورد. در این حالت همواره شتاب مثبت خواهد بود.

روش دیگر این‌گونه اسـت که نیروهـای در جهت حرکت را منهای نیروهای خلاف جهت حرکت می‌کنیم. اگر حرکت تندشونده باشد شتاب را مثبت و اگر حرکت کندشونده باشد شتاب را منفی قرار می‌دهیم. به‌طور مثال در حل این مسئله آسانسور رو به پایین در حرکت است نیرویی در جهت حرکت وزن و خلاف آن کشش کابل است و چون حرکت کندشونده است شتاب نیز منفی است

بنابراین می‌توان نوشت: $mg-T'=ma \Rightarrow ۷۵۰۰-T'=۷۵۰(-۲) \Rightarrow T'=۹۰۰۰N$

B ۸۸۱ ۴



۱ در حالت اول آسانسور در حال بالا رفتن است بنابراین:

$F_{net}=Ma \Rightarrow T-Mg=Ma$

$\Rightarrow T=M(a+g)$

۲ در حالـت دوم آسانسـور در حـال پایین آمدن است بنابراین:

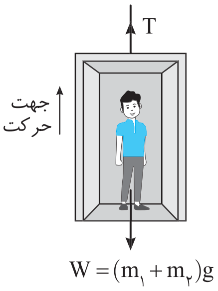
$F_{net}=ma \Rightarrow Mg-T'=Ma \Rightarrow T'=M(g-a)$

۳ با توجه به صورت سؤال $\frac{T}{T'}=۱/۵$ است:

$\frac{T}{T'}=\frac{M(a+g)}{M(g-a)}=۱/۵ \Rightarrow \frac{a+g}{g-a}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲a+۲g=۳g-۳a \Rightarrow ۵a=g \Rightarrow a=\frac{g}{۵}$

B ۸۸۲ ۱

خط فکری ابتدا کل آسانسـور را یک جسـم فرض می‌کنیم که توسط نیروی کشش کابل به حرکت درآمده است و شتاب حرکت را حساب می‌کنیم سپس نیروهای وارد بر شخص را رسم کرده و نیروی F_N که از کف آسانسور به شخص وارد می‌شود را به‌دست می‌آوریم:



۱ شتاب حرکت آسانسور را حساب می‌کنیم:

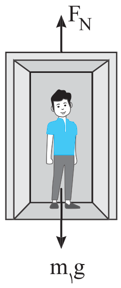
$F_{net}=ma$

$\Rightarrow T-(m_۱+m_۲)g=(m_۱+m_۲)a$

$\xrightarrow[T=۲۲۰۰N]{m_۱=۶۰kg, m_۲=۱۴۰kg}$

$۲۲۰۰-(۶۰+۱۴۰)\times۱۰=(۶۰+۱۴۰)\times a$

$\Rightarrow a=۱m/s^۲$



۲ نیرویی که کف آسانسـور بر شـخص وارد می کند را به‌دست می‌آوریم:

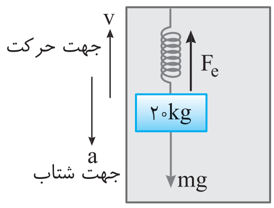
$F_{net}=ma \Rightarrow F_N-m_۱g=m_۱a$

$\Rightarrow F_N-۴۰۰=۴۰\times۱ \Rightarrow F_N=۴۴۰N$

۳ بنا به قانون سوم نیوتون، نیرویی که شخص بر کف آسانسور وارد می‌کند، هم‌اندازه و هم‌جهت با F_N است یعنی $۴۴۰N$ و رو به پایین و خلاف جهت محور yها است:

$\vec{F}=-۴۴۰\vec{j}$

A ۸۸۳ ۲



جسم رو به بالا دارای حرکت کندشونده اسـت بنابراین نیروی کشسانی فنر وارد بر وزنه از نیروی وزن جسم کمتر است.

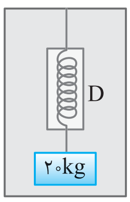
$F_e<W \Rightarrow mg-F_e=ma$

$\Rightarrow ۲۰۰-F_e=۲۰\times۲/۵ \Rightarrow F_e=۱۵۰N$

روش دیگـر: نیروی در جهت حرکت را منهای نیروی خلاف جهت حرکت کرده، نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم:

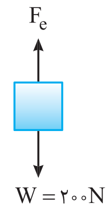
$F-mg=ma \xrightarrow[a=-۲/۵m/s^۲]{حرکت\ کندشونده} F-۲۰\times۱۰=۲۰\times(-۲/۵) \Rightarrow F=۱۵۰N$

بازی با سؤال **شکل روبه‌رو اتاقک آسانسوری را نشـان می‌دهـد که در یـک فاصلهٔ زمانـی کوتاه، تندشـونده با شـتاب $۲/۵m/s^۲$ رو به بـالا در حال حرکت است. نیروسنج D در این حالت چند نیوتون را نشان می‌دهد؟** $(g=۱۰N/kg)$



۱) ۵۰ ۲) ۱۵۰
۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

پاسخ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون عددی که نیروسنج نشان می‌دهد را به دست می‌آوریم:

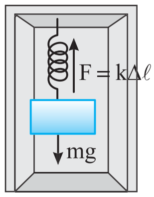


$F_e-mg=ma\Rightarrow F_e-۲۰۰=۲۰\times۲/۵\Rightarrow F_e=۲۵۰N$

گزینهٔ ۴

A ۸۸۴ ۲

خط فکری نیروهای وارد بر وزنه را رسم کنید. (نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر) سپس نیروی خالص وارد بر وزنه را با بنا به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ حساب کنید.



۱ هنگام بالا رفتن آسانسور با شتاب تندشونده نیروی کشسانی فنر F_1 از نیروی وزن (mg) بزرگ‌تر است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$F_1>mg\Rightarrow F_1-mg=ma\Rightarrow F_1-mg=m\times۲\Rightarrow F_1=۱۲m \quad (۱)$

۲ هنگام پایین آمدن آسانسور با شتاب تندشونده نیروی وزن (mg) از نیروی کشسانی فنر F_2 بزرگ‌تر است بنابراین می‌توان نوشت:

$F_2<mg\Rightarrow mg-F_2=ma\Rightarrow mg-F_2=m\times۲\Rightarrow F_2=۸m \quad (۲)$

اکنون نسبت $\frac{F_2}{F_1}$ را به‌دست می‌آوریم: $\frac{F_2}{F_1}=\frac{۸m}{۱۲m}=\frac{۲}{۳}$

میانبر تغییر البته بدون حل با توجه به اینکه $F_1>mg$ و $F_2<mg$ است قطعاً $F_1>F_2$ بوده و تنها نسبت کوچک‌تر از ۱، گزینهٔ (۲) است و می‌توان گزینهٔ درست را انتخاب کرد.

بازی با سؤال جسمی به انتهای نیروسنجی درون یک آسانسور آویزان است. تفاوت نیروی کشسانی فنر وقتی آسانسور با شتاب $۰/۴m/s^۲$ به حرکت تندشونده بالا می‌رود و هنگامی که با سرعت ثابت $۲m/s$ پایین می‌آید، برابر $۱N$ است. جرم این جسم چند کیلوگرم است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۰/۸

پاسخ عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر نیروی کشسانی فنر نیروسنج است.

۱ هنگامی که آسانسور تندشونده بالا می‌رود:

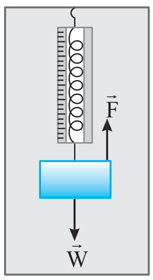
$F>W\Rightarrow F-mg=ma\Rightarrow F=mg+ma \quad (۱)$

۲ هنگامی که آسانسور با سرعت ثابت پایین می‌آید:

$F_{net}=۰\Rightarrow F'=mg \quad (۲)$

۳ با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲):

$F-F'=۱\Rightarrow mg+ma-mg=۱\Rightarrow m(۰/۴)=۱\Rightarrow m=۲/۵kg$

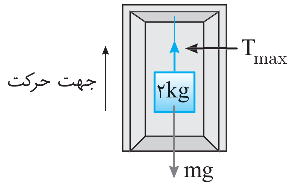


گزینهٔ ۲

A ۸۸۵ ۴

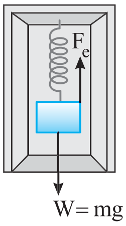
بیشینهٔ شتاب زمانی اتفاق می‌افتد که کشش طناب بیشینه باشد. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم.

$T_{max}-mg=ma_{max}\Rightarrow ۲۵-۲۰=۲a_{max}\Rightarrow a_{max}=۲/۵m/s^۲$



B ۸۸۶ ۴

۱ مطابق شکل روبه‌رو، در یک شکل ساده نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

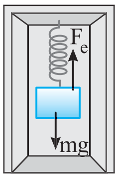


نکته در استفاده از قانون دوم نیوتون به نکات زیر دقت کنید:

$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}a>۰:\text{حرکت تندشونده}\\ a<۰:\text{حرکت کندشونده}\end{cases}$

$F_{net}=$ نیرو در جهت حرکت − نیرو خلاف جهت حرکت

۲ آسانسور در حال حرکت به سمت بالا و در حال ترمز بوده $(a=-۲m/s^۲)$ است، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$F_{net}=ma\xrightarrow[a=-۲m/s^۲]{F_{net}=\text{نیرو در جهت حرکت}-\text{نیرو خلاف جهت حرکت}}$

$F_e-mg=ma\xrightarrow[m=۰/۸kg]{mg=۸N}$

$F_e-۸=۰/۸\times(-۲)\Rightarrow F_e-۸=-۱/۶\Rightarrow F_e=۶/۴N$

یادآوری نیروی فنر برابر $F_e=k\Delta x$ است: $F_e=k\Delta x$

نکته در رابطهٔ $F_e=k\Delta x$ اگر یکای ثابت فنر N/m باشد، تغییر طول فنر نیز برحسب m قرار می‌گیرد و اگر ثابت فنر برحسب N/cm داده شد می‌توان یکای تغییر طول فنر را نیز cm قرار داد. $۶/۴=۲\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=۳/۲cm$

نیروی وزن (mg) فنر را به سمت پایین می‌کشد و بزرگی شتاب حرکت $۲m/s^۲$ بوده و از $g=۱۰m/s^۲$ کمتر است پس فنر کشیده خواهد شد:

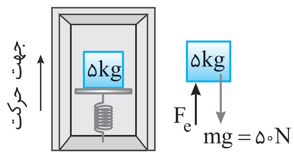
$x_2-x_1=۳/۲\xrightarrow{x_1=۲۰cm}x_2-۲۰=۳/۲\Rightarrow x_2=۲۳/۲cm$

B ۸۸۷ ۴

آسانسور در حال حرکت کندشونده رو به بالا است، بنابراین نیروهای رو به پایین یعنی وزن از نیروی رو به بالا یعنی F_e بیشتر است.

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_e=ma\Rightarrow ۵۰-F_e=۱۰\Rightarrow F_e=۴۰N$

$F_e=k\Delta x\Rightarrow ۴۰=۲۰۰\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۵}m=۲۰cm$



روش دیگر: نیروی کشسانی فنر وارد بر جسم (F_e) در جهت حرکت جسم و نیروی وزن (W) در خلاف جهت حرکت جسم است.

نیروهای در جهت حرکت − نیروهای خلاف جهت حرکت $=ma$

$F_e-W=ma\xrightarrow[\text{شتاب منفی}]{\text{حرکت کندشونده}}$

$F_e-۵۰=۵\times(-۲)\Rightarrow F_e=۴۰N$

بقیه حل شبیه روش اول است.

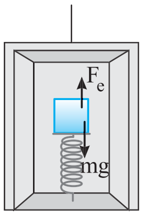
B ۸۸۸ ۲

خط فکری ابتدا با توجه به اینکه آسانسور در ابتدا ساکن بوده، با استفاده از متوازن بودن نیروها، طول طبیعی فنر را حساب می‌کنیم و در گام بعدی به کمک قانون دوم نیوتون تغییر طول فنر در حرکت با شتاب $۲m/s^۲$ را به‌دست می‌آوریم. با داشتن طول طبیعی و تغییر طول در حالت دوم می‌توان طول ثانویه را به‌دست آورد.

نکته در رابطهٔ نیروی فنر $F_e=k\Delta x$:

- اگر k برحسب N/m باشد، تغییر طول فنر را برحسب متر قرار می‌دهیم.
- اگر k برحسب N/cm باشد، می‌توان تغییر طول فنر را برحسب سانتی‌متر قرار داد.

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم کنیم، در ابتدا آسانسور ساکن است:

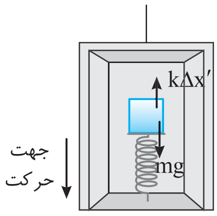


$F_{net}=۰\Rightarrow F_e=mg\Rightarrow k\Delta x=mg$: جسم در حال تعادل

$\Rightarrow ۱۰\times\Delta x=۱۰۰\Rightarrow\Delta x=۱۰cm$

طول ثانویه نیز در این حالت $۶۰cm$ باشد و می‌دانیم فنر $۱۰cm$ فشرده شده چون جسم روی آن قرار گرفته پس طول اولیه باید $۷۰cm$ باشد.

۲ در حالت دوم آسانسور با شتاب $۲m/s^۲$ به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند، نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را با توجه به اینکه نیروها در جهت حرکت از نیروهای خلاف جهت حرکت کم می‌شود به‌دست آورد. در این حالت چون آسانسور شروع به حرکت کرده و حرکت تندشونده است، در معادله، شتاب را مثبت در نظر می‌گیریم:



$F_{net}=ma\Rightarrow mg-k\Delta x'=ma\Rightarrow ۱۰۰-۱۰\Delta x'=۲۰\Rightarrow ۱۰\Delta x'=۸۰$

$\Rightarrow\Delta x'=۸cm$

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است. در این مسئله نیروی کشسانی فنر رو به بالا بوده بنابراین تغییر طول فنر از حالت طبیعی رو به پایین است یعنی فنر فشرده شده و طول آن خواهد شد: $۷۰-۸=۶۲cm$

میانبر تغییر طول فنر هرگاه حرکت آسانسور تندشوندهٔ روبه بالا و یا کندشوندهٔ رو به پایین باشد از تغییر طول فنر از حالتی که آسانسور ساکن است بیشتر است. تغییر طول فنر هرگاه حرکت آسانسور کندشوندهٔ رو به بالا و یا تندشوندهٔ رو به پایین باشد از تغییر طول فنر از حالتی که آسانسور ساکن است کمتر است.

در این سوال در حالت دوم تغییر طول مجدد فنر به دلیل شتاب حرکت است:

$k\Delta x=ma\Rightarrow ۱۰\times\Delta x=۲۰\Rightarrow\Delta x=۲cm$

در حالت اول نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن است.

در حالت دوم نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن کمتر است.

با کاهش نیروی کشسانی، تغییر طول فنر $۲cm$ کاهش یافته یعنی $۲cm$ فشردگی کمتر شده بنابراین طول آن از $۶۰cm$ به $۶۲cm$ افزایش می‌یابد.

B ۸۸۹ ۲

خط فکری در سؤالاتی مانند مسائل آسانسور که نیروهای وارد بر جسم هم‌راستای هستند، می‌توان قانون دوم نیوتون را به صورت زیر نوشت:

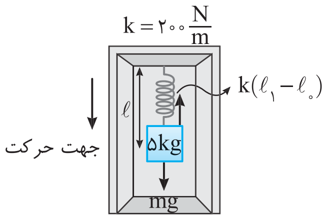
$F_{net}=ma$

$$\Rightarrow \text{نیرو در جهت حرکت} - \text{نیرو در خلاف جهت حرکت} = ma\begin{cases}a>۰:\text{تندشونده}\\ a<۰:\text{کندشونده}\end{cases}$$

حالت اول: آسانسور در حال پایین رفتن بوده و mg نیرو در جهت حرکت است. حرکت تندشونده بوده و شتاب $+۲m/s^۲$ گرفته می‌شود.

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-k(\ell_۱-\ell_۰)=ma\Rightarrow ۵۰-۲۰۰(\ell_۱-\ell_۰)=۵\times۲$

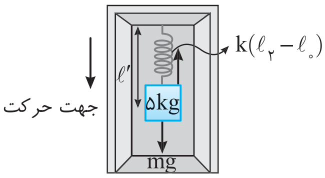
$\Rightarrow ۲۰۰(\ell_۱-\ell_۰)=۴۰\Rightarrow\ell_۱-\ell_۰=۰/۲m=۲۰cm\quad(I)$



حالت دوم: آسانسور به سمت پایین در حال حرکت بوده و mg نیرو در جهت است. حرکت کندشونده بوده و شتاب را $-۱m/s^۲$ در نظر می‌گیریم.

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-k(\ell_۲-\ell_۰)=ma\Rightarrow ۵۰-۲۰۰(\ell_۲-\ell_۰)=۵\times(-۱)$

$\Rightarrow ۲۰۰(\ell_۲-\ell_۰)=۵۵\Rightarrow\ell_۲-\ell_۰=\frac{۵۵}{۲۰۰}m=۲۷/۵cm\quad(II)$



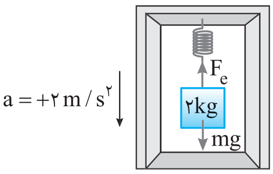
با استفاده از دو معادله (I) و (II) اختلاف $\ell_۱$ و $\ell_۲$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\ell_۱-\ell_۰=۲۰cm\\ \ell_۲-\ell_۰=۲۷/۵cm\end{cases}\Rightarrow\ell_۲-\ell_۱=۷/۵cm$$

بازی با سؤال **درون آسانسوری ساکن، جسمی به جرم $۲kg$ که به فنری قائم آویزان است در حال تعادل قرار دارد. وقتی آسانسور از حال سکون با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند، طول فنر برابر $۱۴cm$ و وقتی از حال سکون با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند طول فنر $۱۶cm$ می‌شود. ثابت این فنر چند واحد SI است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۴ ۳) ۲۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ **در هر دو حالت آسانسور از حال سکون شروع به حرکت کرده پس حرکت جسم در هر دو حالت تندشونده و در حالت اول $W>F_e$ است.**

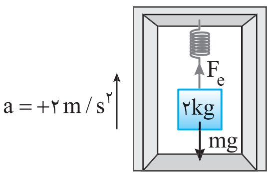


$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_e=ma$

$\Rightarrow F_e=۲۰-۴\Rightarrow k\Delta x_۱=۱۶N$

$k(\frac{۱۴}{۱۰۰}-x_۰)=۱۶\quad(۱)$

در حالت دوم $W<F_e$ است از این‌رو:



$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma$

$\Rightarrow F_e=۲۰+۴\Rightarrow k\Delta x_۲=۲۴N$

$k(\frac{۱۶}{۱۰۰}-x_۰)=۲۴N\quad(۲)$

با تقسیم رابطهٔ (۲) بر رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{\frac{۱۶}{۱۰۰}-x_۰}{\frac{۱۴}{۱۰۰}-x_۰}=\frac{۲۴}{۱۶}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۳۲}{۱۰۰}-۲x_۰=\frac{۴۲}{۱۰۰}-۳x_۰\Rightarrow x_۰=\frac{۱۰}{۱۰۰}m=۱۰cm$$

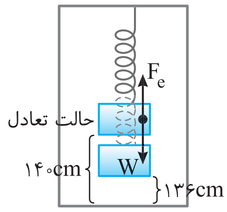
حال با جای‌گذاری $x_۰=۱۰cm$ در رابطهٔ (۱) داریم:

$$k(\frac{۱۴}{۱۰۰}-\frac{۱۰}{۱۰۰})=۱۶\Rightarrow k\times\frac{۴}{۱۰۰}=۱۶\Rightarrow k=۴۰۰N/m$$

گزینه ٤

B ۸۹۰ ۲

خط فکری در مرحلهٔ اول وقتی آسانسور ساکن است و وزنه به فنر آویزان می‌شود، نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است $(F_{net}=0)$ و نیروی کشسانی فنر برابر وزن وزنه است $(W=F_e)$. وقتی آسانسور با شتاب ثابت شروع به حرکت رو به بالا می‌کند دیگر نیروی خالص وارد بر وزنه صفر نیست و شما باید نیروی خالص (برایند F_e و W) را بنا به قانون دوم نیوتون مساوی ma قرار دهید و مسئله را حل کنید.



۱ در حالت تعادل نیروی کشسانی فنر برابر نیروی گرانش وزنه است. $W=F_e$

۲ در حالتی که آسانسور با شتاب $2m/s^2$ رو به بالا شروع به حرکت می‌کند نیروی کشسانی فنر از نیروی گرانشی بیشتر است و بنا بر قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F'_e-W=ma\xrightarrow{W=F_e}F'_e-F_e=ma$$

$$\xrightarrow{F_e=kx}k(x')-kx=ma\Rightarrow k(x'-x)=ma$$

۳ با حرکت آسانسور رو به بالا فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور که ۱۴۰cm بوده به ۱۳۶cm می‌رسد یعنی طول فنر ۴cm=۱۳۶−۱۴۰ افزایش می‌یابد. $(x'-x=4cm)$

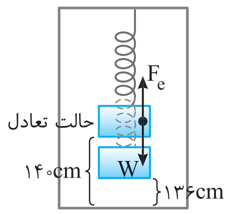
۴ اکنون ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$k(\frac{4}{100})=2\times2\Rightarrow k=100N/m=1N/cm$$

بازی با سؤال **وزنه‌ای به جرم 2kg را به فنر سبکی به طول ۴۰cm که از سقف آسانسور ساکنی آویزان است وصل می‌کنیم. اگر آسانسور با سرعت ثابت رو به پایین در حرکت باشد، فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور ۱۴۰cm است. اگر آسانسور با شتاب ثابت $2m/s^2$ شروع به توقف کند، فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور ۱۳۶cm می‌شود. ثابت فنر چند N/m است؟ $(g=10N/kg)$**

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۷۵

پاسخ **جالب است بدانید، تست شبیه‌سازی شده از نظر دینامیکی هیچ تفاوتی با مسئلهٔ اصلی ندارد.**



۱ **سرعت ثابت یعنی نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است.**

$$F_{net}=0\Rightarrow F_e=W\quad(I)$$

۲ **وقتی سرعت آسانسور در حال حرکت رو به پایین است، کاهش می‌یابد، حرکتش کندشونده می‌شود. در این حالت نیروی خالص وارد بر وزنه صفر نیست و نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن وزنه بزرگ‌تر است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:**

$$F_{net}=ma\Rightarrow F'_e-W=ma\quad(II)$$

از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری می‌کنیم.

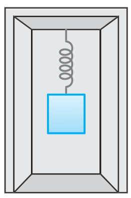
$$F'_e-F_e=ma\Rightarrow kx'-kx=ma\Rightarrow k(x'-x)=ma$$

$$\xrightarrow{x'-x=4cm}k(\frac{4}{100})=2\times2\Rightarrow k=100N/m$$

گزینهٔ ۱

B ۸۹۱ ۱

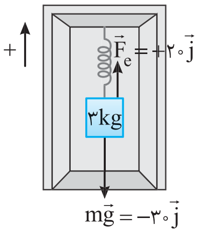
خط فکری هر گاه در صورت مسئله کلمه ساکن و یا سرعت ثابت مشاهده کردید بلافاصله بالای آن عبارت $F_{net}=0$ را قرار دهید. در این مسئله با این کار می‌توانید جرم m را حساب کنید.



۱ وقتی آسانسور ساکن است نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن جسم است.

$$W=F_e\Rightarrow mg=k\Delta x$$

$$\Rightarrow m\times10=200\times(\frac{65-50}{100})\Rightarrow m=3kg$$



۲ می‌خواهیم طول فنر ۶۰cm شود یعنی نیروی کشسانی فنر برابر شود با:

$$F_e=k\Delta L\Rightarrow F_e=200\times(\frac{60-50}{100})$$

$$\Rightarrow F_e=20N$$

۳ جهت مثبت محور yها را رو به بالا اختیار می‌کنیم.

در صورت تست بیان نشده که جهت مثبت را باید رو به بالا و یا رو به پایین اختیار کنیم اما چون همواره در ریاضی جهت مثبت محور yها رو به بالاست ما نیز این مطلب را رعایت می‌کنیم. در این حالت نیروی کشسانی فنر برابر $\vec F_e=+20\vec j$ و نیروی وزن برابر $\vec W=m\vec g=-30\vec j$ می‌شود و بنا به قانون دوم نیوتون شتاب برابر است با:

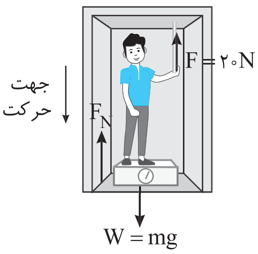
$$\vec F_{net}=m\vec a\Rightarrow\vec F_e+\vec W=m\vec a\Rightarrow 20\vec j+(-30\vec j)=3\vec a\Rightarrow\vec a=\frac{-10}{3}\vec j$$

B ۸۹۲ ۱

آسانسور با شتاب $3m/s^2$ شروع به حرکت کرده است، کافی است تمام نیروهای وارد بر شخص را رسم کنیم، این نیروها عبارتند از:

۱ نیروی وزن به شخص رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیروی عمودی سطح توسط کف باسکول بر شخص رو به بالا وارد می‌شود.



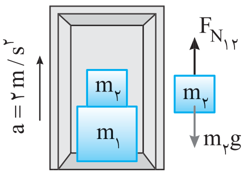
۳ شخص با نیروی ۲۰N بر میله رو به پایین نیرو وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون توسط میله نیرویی برابر ۲۰N بر شخص وارد می‌شود. بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$W-F-F_N=ma\xrightarrow{m=80kg}$$

$$800-20-F_N=80\times3\Rightarrow F_N=540N$$

نیرویی که باسکول نشان می‌دهد همان نیروی F_N یعنی ۵۴۰N است.

C ۸۹۳ ۳



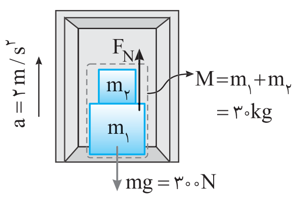
۱ m_1 و m_2 درون آسانسور قرار دارند. پس شتاب m_1 و m_2 نیز برابر $2m/s^2$ رو به بالا می‌باشد.

۲ نیرویی که m_1 بر m_2 وارد می‌کند همان نیروی عمودی تکیه‌گاه بین m_1 و m_2 و رو به بالاست. نیروهای وارد بر m_2 را رسم کرده و نیروی $F_{N_{12}}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{N_{12}}-m_2g=m_2a\Rightarrow F_{N_{12}}=m_2a+m_2g\Rightarrow F_{N_{12}}=120N$$

۳ حال دو جسم را یک جسم در نظر می‌گیریم تا نیرویی که از طرف سطح به مجموعه وارد می‌شود را حساب کنیم:

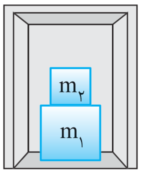
$$F_N-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a\Rightarrow F_N-300=60\Rightarrow F_N=360N$$



۴ نسبت $F_{N_{12}}/F_N$ خواهد شد:

$$\frac{F_{N_{12}}}{F_N}=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$$

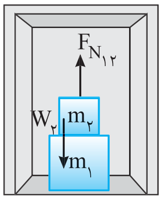
بازی با سؤال درون یک آسانسور دو جسم به جرم‌های $m_1=5kg$ و $m_2=3kg$ قرار دارند و آسانسور با سرعت ثابت $6m/s$ رو به پایین در حرکت است. آسانسور ترمز کرده و پس از جابه‌جایی $5m$ با شتاب ثابت متوقف می‌شود. در این جابه‌جایی نیرویی که m_2 بر m_1 وارد می‌کند چند نیوتون است؟ $(g=10N/kg)$



۱) ۴۰/۸ ۲) ۱۸/۲ ۳) ۳۰ ۴) ۸۰

پاسخ ابتدا شتاب توقف را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-36=2a(5)\Rightarrow a=-3/6m/s^2$$



نیروهای وارد بر m_2 را بررسی می‌کنیم. آسانسور حرکت کندشونده رو به پایین دارد، بنابراین $F_{N_{12}}>m_2g$ است از این رو:

$$F_{N_{12}}-m_2g=m_2a\Rightarrow F_{N_{12}}=30+(3\times3/6)\Rightarrow F_{N_{12}}=30+10/8=40/8N$$

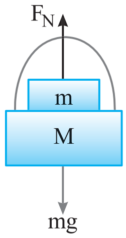
دقت کنید نیروی بزرگ‌تر را منهای نیروی کوچک‌تر کرده‌ایم از این رو شتاب را با علامت مثبت در رابطه قرار داده‌ایم.

نیرویی که m_1 بر m_2 وارد کرده برابر $40/8N$ رو به بالاست و بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که m_2 بر m_1 وارد می‌کند نیز هم‌اندازهٔ $40/8N$ اما رو به پایین است.

گزینهٔ ۱

B ۸۹۴ ۳

خط فکری دقت کنید که در صورت مسئله نیرویی که M بر m وارد می‌کند را از شما خواسته است بنابراین شما نیروهای وارد بر m را باید بررسی کنید.



نیروهای وارد بر جسم m را رسم می‌کنیم. دو نیرو بر جسم m وارد می‌شود، یکی نیروی وزن توسط کرهٔ زمین، دیگری نیروی عمودی تکیه‌گاه که توسط M بر جسم m رو به بالا وارد می‌شود.

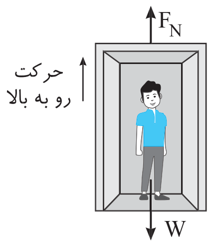
$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma\Rightarrow F_N=m(g-a)$$

$$F_N=0/05(10-2)\Rightarrow F_N=0/4N$$

در واقع جرم m مانند جسمی است که در آسانسور قرار دارد.

A ۸۹۵ ۳

ابتدا شتاب حرکت را به کمک رابطهٔ سرعت-مکان (مستقل از زمان) به دست می‌آوریم:



$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-(4)^2=2(a)(5)$$

$$\Rightarrow a=-1/6m/s^2$$

حرکت آسانسور کندشونده رو به بالا است. بنابراین خواهیم داشت:

نیروهای خلاف جهت حرکت−نیروهای در جهت حرکت=ma

حرکت کندشونده است بنابراین شتاب را در رابطه منفی قرار می‌دهیم.

$$F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-60\times10=60\times(-1/6)\Rightarrow F_N=504N$$

B ۸۹۶ ۳

خط فکری مسئله چند مرحله‌ای است، در هر مرحله نیروهای وارد بر آسانسور را بررسی کرده و کشش کابل متصل به آسانسور را به دست آورده باهم مقایسه می‌کنیم. جهت مثبت را رو به بالا اختیار می‌کنیم.

۱ در قسمت اول حرکت، شتاب برابر است با: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4}{8}=0/5m/s^2$

۲ نیروی کشش کابل را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T_1-7000=350\Rightarrow T_1=7350N$$

۳ در قسمت دوم حرکت با سرعت ثابت است و شتاب $a=0$ بوده و نیروها متوازن هستند بنابراین:

$$F_{net}=0\Rightarrow T_2=mg\Rightarrow T_2=7000N$$

۴ در قسمت سوم حرکت شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-4}{4}=-1m/s^2$$

۵ نیروی کشش کابل در این مرحله خواهد شد:

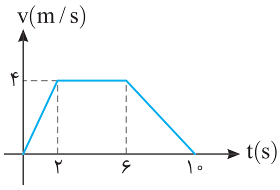
$$F_{net}=0\Rightarrow T_3-mg=ma\Rightarrow T_3-7000=-700\Rightarrow T_3=6300N$$

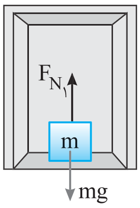
۶ بنابراین اختلاف بیشینه و کمینه کشش کابل برابر است با:

$$T_1-T_3=7350-6300=1050N$$

B ۸۹۷ ۴

نکته عددی که ترازوی فنری نشان می‌دهد اندازهٔ نیروی عمودی سطح است.





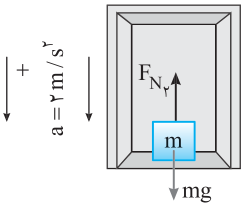
۱ هنگامی که آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند نیروی عمودی سطح و نیروی وزن باهم برابرند پس در بازهٔ 2s تا 6s داریم:

$$F_{net}=ma_1\xrightarrow{a_1=0}F_{N_1}=mg=600N$$

۲ اما کمترین مقدار F_N وقتی است که جسم تندشونده رو به پایین به حرکت درمی‌آید.

در بازهٔ صفر تا 2s آسانسور با شتاب تندشونده رو به پایین در حال حرکت است و می‌دانیم در نمودار $v-t$ شیب نمودار برابر شتاب است:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4-0}{2-0}=2m/s^2$$



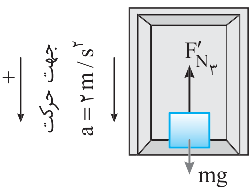
۳ در این بازه، نیروی F_{N_2} را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_{N_2}=ma_2\Rightarrow 600-F_{N_2}=120\Rightarrow F_{N_2}=480N$$

۴ بیشترین مقدار F_N وقتی است که آسانسور در حال متوقف شدن است.

در بازهٔ 6s تا 10s شتاب حرکت برابر $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-4}{10-6}=-1m/s^2$ است، بنابراین:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_{N_3}=ma_3\Rightarrow 600-F_{N_3}=-60\Rightarrow F_{N_3}=660N$$



۵ بنابراین اختلاف بیشینه و کمینه نیرو از طرف سطح برابر است با:

$$F_{N_3}-F_{N_2}=660-480=180N$$

B ۸۹۸ ۱

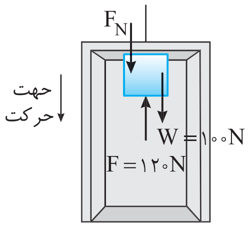
خط فکری در تمام مسائل دینامیک مراحل زیر باید طی شود.

۱ رسم شکل ساده ۲ رسم نیروهای وارد بر جسم

۳ به‌دست آوردن نیروی خالص ۴ برابر قرار دادن نیروی خالص با ma

۱ نیروهای وارد بر جسم ۱۰ کیلوگرمی را رسم می‌کنیم.

۲ شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-8}{8}\Rightarrow a=-1\,m/s^2$



۳ نیروهای در جهت حرکت − نیروهای مخالف حرکت = ma

$(W+F_N)-F=ma\xrightarrow{m=10kg}(100+F_N)-120=10\times(-1)$

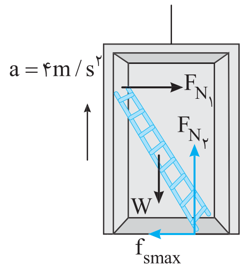
$\Rightarrow F_N=10N$

B ۸۹۹ ۲

۱ نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.

۲ نردبان در امتداد افقی حرکتی ندارد و نیروها در این امتداد متوازن هستند. بنابراین نیـروی F_{N_1} که دیواره بـر نردبان وارد می‌کند با اصطکاک آسـتانهٔ حرکت $(f_{s_{max}})$ برابر است:

$f_{s_{max}}=F_{N_1}\xrightarrow{F_{N_1}=20N}f_{s_{max}}=20N$



۳ نیروهای عمودی سطح کف آسانسور وارد بر نردبان را حساب می‌کنیم:

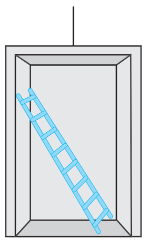
$f_{s_{max}}=\mu_s F_{N_2}\xrightarrow{\mu_s=0/5}20=0/5F_{N_2}\Rightarrow F_{N_2}=40N$

۴ نیروهـای وارد بـر نردبـان در امتداد قائم بـه نردبان شـتاب $4m/s^2$ رو به بالا می‌دهد. بنابراین نیروی F_{N_2} از W بزرگ‌تر است و خواهیم داشت:

$F_{net_y}=ma\Rightarrow F_{N_2}-W=ma\Rightarrow 40-mg=ma$

$40-m\times10=m\times4\Rightarrow m=\frac{40}{14}=\frac{20}{7}kg$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو نردبانی به جرم 4kg درون آسانسور قرار دارد و در آستانهٔ سر خوردن است. اگر ضریـب اصطکاک ایسـتایی تمام سـطوح یکسـان و برابر ۰/۴ باشد، با پاره شدن کابل آسانسور نیـروی خالـص وارد بر نردبـان چند نیوتون می‌شـود؟ $(g=10N/kg)$



۱) ۴۰ ۲) صفر ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ وقتی کابل آسانسـور پاره می‌شـود مجموعه با شتاب $a=g$ رو به پایین سقوط می‌کند. در این حالت تنها نیروی مؤثر وارد بر نردبان نیروی وزن بوده که برابر $W=4\times10=40N$ است.

گزینهٔ ۱

C ۹۰۰ ۱

خط فکری ابتدا آسانسور ساکن است و جسم با تندی ثابت بر کف آسانسور در حرکت است. یعنی نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده و شما باید با استفاده از این موضوع ضریب اصطکاک بین جسم و کف آسانسور را حساب کنید. با حرکت آسانسور رو به بالا نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد و سبب افزایش نیروی اصطکاک جنبشی $(\uparrow f_k=\mu_k F_N\uparrow)$ می‌شود. نیروی $F=10N$ ثابت است بنابراین نیروی اصطکاک سبب کندشدن حرکت و توقف جسم می‌شود.

۱ در حالت اول جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن است:

$F_{خالص}=ma\Rightarrow F-f_k=0\Rightarrow f_k=10N$

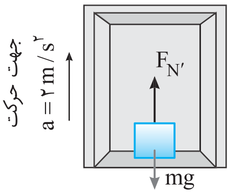
۲ ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow 10=\mu_k mg\Rightarrow 10=\mu_k 40\Rightarrow \mu_k=0/25$

۳ در حالت دوم آسانسور با شتاب $2m/s^2$ به سمت بالا حرکت می‌کند. نیروی عمودی سطح را در این حالت به دست می‌آوریم:

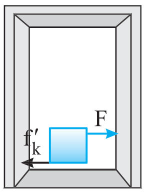
$F'_N-mg=ma\Rightarrow F'_N-40=4\times2$

$\Rightarrow F'_N=48N$



۴ در این حالت نیروی اصطکاک برابر خواهد شد با:

$f_k=\mu_k F'_N=12N>10N$



۵ نیروی اصطکاک از نیروی F بزرگ‌تر شـده بنا به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

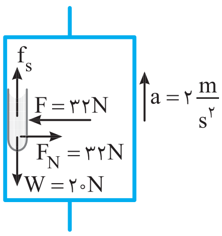
$F-f_k=ma\Rightarrow 10-12=4a\Rightarrow a=-0/5m/s^2$

۶ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، جابه‌جایی جسم تا توقف را به دست می‌آوریم:

$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-4=2(-0/5)\Delta x\Rightarrow \Delta x=4m$

B ۹۰۱ ۴

خط فکری در متن تسـت بیان شـده که کتاب نسـبت به آسانسور ساکن است و ممکن اسـت شما بلافاصله بنویسـید برای جسم ساکن $F_{net}=0$ و نیروی وزن کتاب با نیروی اصطکاک بین دیوارهٔ آسانسور و کتاب برابر است و $f_s=W=20N$ پاسخ است اما این‌گونه نیسـت. شـما باید ایـن نکته مهم را بدانیـد که برای کاربـرد قوانین نیوتون همواره حرکت جسم مورد نظر را از دید شـاهدی بررسـی می‌کنیم که روی زمین سـاکن است یعنی شما باید خود را خارج آسانسور فرض کنید که به این آسانسور نگاه می‌کنید. در این حالت برای شـما مشخص می‌شـود که تمام اجسام درون آسانسور با همان شتاب آسانسور $(2m/s^2)$ در حال حرکت روبه بالا هستند. اکنون باید از خود بپرسید، عامل حرکت کتاب روبه بالا به همراه آسانسـور چیسـت؟ که پاسخ مشـخص است، عامل آن اصطکاک بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور است، بنابراین نیروهای وارد بر کتاب را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید.



عامل حرکت کتاب به همراه آسانسـور رو به بالا نیـروی اصطکاک ایسـتایی بین کتـاب و دیوارهٔ آسانسـور اسـت. نیروهای وارد بر کتاب را رسم می‌کنیم و چون کتاب و آسانسور هر دو با شتاب $a=2m/s^2$ به سـمت بالا در حال حرکت‌اند، برایند آن‌ها را مساوی ma قرار می‌دهیم:

$f_s-W=ma\Rightarrow f_s-20=2\times2\Rightarrow f_s=24N$

اکنون نیرویی که کتاب به دیواره یا دیواره به کتاب وارد می‌کند برابر است با:

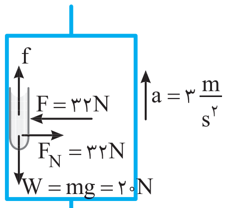
$R=\sqrt{f_s^2+F_N^2}=\sqrt{24^2+32^2}=8\sqrt{3^2+4^2}=40N$

بازی با سؤال شخصی درون آسانسور ساکنی با نیروی افقی $F=۳۲N$ کتابی به جرم $۲kg$ را روی دیوارهٔ آسانسور ساکن نگاه داشته است. ضریب اصطکاک بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور $\mu_s=۰/۸$ و $\mu_k=۰/۵$ است. اگر آسانسور با شتاب ثابت $۳m/s^۲$ رو به بالا شروع به حرکت کند، کتاب نسبت به آسانسور ....

۱) ساکن می‌ماند. ۲) به پایین می‌لغزد

۳) به سمت بالا می‌رود. ۴) هر سه حالت ممکن است.

پاسخ آسانسور با شتاب $۳m/s^۲$ رو به بالا شروع به حرکت کرده است. عامل حرکت کتاب به همراه آسانسور رو به بالا، نیروی اصطکاک بین دیوارهٔ آسانسور و کتاب است. باید بررسی کنیم بیشینه شتابی که کتاب می‌تواند داشته باشد چند $m/s^۲$ است. پس بنابر قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:



$$F_{net}=ma \Rightarrow f_{s\,max}-mg=ma_{\text{کتاب}} \Rightarrow \mu_s F_N - mg = ma_{\text{کتاب}}$$

$$\xrightarrow{\mu_s=۰/۸,\,m=۲kg} ۰/۸\times ۳۲-۲\times ۱۰=۲a_{\text{کتاب}}$$

$$\Rightarrow ۲۵/۶-۲۰=۲a_{\text{کتاب}} \Rightarrow a_{\text{کتاب}}=\frac{۵/۶}{۲} \Rightarrow a_{\text{کتاب}}=۲/۸m/s^۲$$

دقت کنید بیشینه شتاب رو به بالای کتاب در اثر اصطکاک $۲/۸m/s^۲$ است اما شتاب حرکت آسانسور رو به بالا $۳m/s^۲$ است، بنابراین کتاب نسبت به آسانسور عقب می‌ماند و به پایین می‌لغزد. گزینهٔ ۲

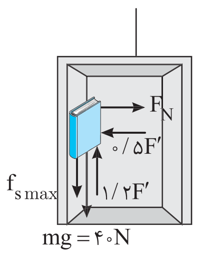
B ۹۰۲ ۲

خط فکری نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. دقت کنید که جسم در آستانهٔ حرکت رو به بالا و نیروی اصطکاک جسم بیشینه و به سمت پایین است. جسم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و نیروهای افقی متوازن است. $(F_{net}=۰)$ اما در راستای قائم آسانسور در حال حرکت به سمت پایین بوده و باید به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید:

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

۲ نیروها در راستای افقی متوازن‌اند: $F_N=۰/۵F'$

۳ در راستای قائم آسانسور با شتاب $۴m/s^۲$ تندشونده پایین می‌آید، نیروی برایند را حساب می‌کنیم و نیروهای در جهت حرکت به سمت پایین را از نیروی خلاف جهت به سمت بالا کم کرده و در قانون دوم نیوتون چون حرکت تندشونده بوده شتاب $+۴m/s^۲$ قرار می‌دهیم:



$$F_{net}=ma \Rightarrow ۱/۲F'-mg-f_{s_{max}}=ma \Rightarrow ۱/۲F'-۴۰-\mu_s F_N=۴\times ۴$$

$$\xrightarrow{F_N=۰/۵F'} ۱/۲F'-۴۰-۰/۲F'=۱۶ \Rightarrow F'=۵۶N$$

بزرگی بردار نیرویی که با i و j تعریف شده برابر است با:

$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j} \Rightarrow |R|=\sqrt{R_x^۲+R_y^۲}$$

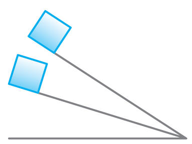
۴ حال بزرگی نیروی F را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}=-۰/۵\times ۵۶\vec{i}+۱/۲\times ۵۶\vec{j} \Rightarrow |F|=\sqrt{(۰/۵\times ۵۶)^۲+(۱/۲\times ۵۶)^۲}$$

$$\xrightarrow[\text{و از زیر رادیکال خارج می کنیم}]{\text{از } ۵۶^۲ \text{ فاکتور گرفته}} |F|=۵۶\sqrt{۰/۲۵+۱/۴۴}\ |F|=۵۶\sqrt{۱/۶۹}$$

$$\Rightarrow |F|=۵۶\times ۱/۳=۷۲/۸N$$

B ۹۰۳ ۱



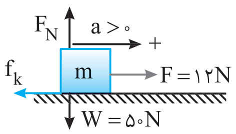
یک پاک‌کن را در کف دستتان قرار دهید و زاویه کف دست را از حالت افقی به طور آهسته زیاد کنید. تمایل جسم به حرکت بیشتر می‌شود، بنابراین نیروی وارد بر جسم که می‌خواهد جسم را به حرکت در آورد با افزایش زاویهٔ کف دست بیشتر می‌شود و چون پاک‌کن حرکت نکرده، پس نیروی اصطکاک وارد بر آن افزایش می‌یابد.

تا لحظه‌ای که جسم در آستانهٔ حرکت قرار گیرد اصطکاک در حال افزایش است. البته بعد از آن جسم به حرکت درمی‌آید و اصطکاک از ایستایی به جنبشی تبدیل می‌شود که مورد پرسش نیست و گزینهٔ (۱) درست است.

C ۹۰۴ ۴

خط فکری آخه چطور ممکنه؟ جعبه با شتاب $۰/۴m/s^۲$ در حال حرکت به سمت راست است. در جعبهٔ یک وزنه قرار می‌دهیم، اصطکاک افزایش می‌یابد بنابراین باید شتاب کم شود اما اندازهٔ شتاب همچنان $۰/۴m/s^۲$ است، یعنی ممکن است؟ بله این بار نیروی اصطکاک به خوبی افزایش یافته که نیروی خالص (برآیند اصطکاک و نیروی F) به سمت چپ است و شتاب جعبه $۰/۴m/s^۲$ به سمت چپ است. در نتیجه در حالت اول حرکت تندشونده با شتاب $۰/۴m/s^۲$ و در حالت دوم حرکت کندشونده با شتاب $(-۰/۴m/s^۲)$ است.

حالت اول: نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و جهت به سمت راست را مثبت در نظر می‌گیریم و نیروی خالص وارد بر جسم را برابر ma قرار می‌دهیم و ضریب اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم.

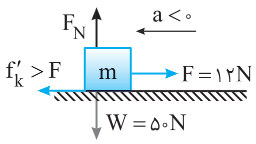


$$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma \Rightarrow ۱۲-\mu_k mg=۰/۴m$$

$$\Rightarrow ۱۲-۵۰\mu_k=۲ \Rightarrow \mu_k=۰/۲$$

حالت دوم:

$$F_{net}=m'a'$$



$$F-f'_k=(m+m')a'$$

$$\Rightarrow ۱۲-\mu_k(m+m')g=-۰/۴(m+m')$$

$$\Rightarrow ۱۲-(۵+m')\times ۱۰\times ۰/۲=-۰/۴(۵+m')$$

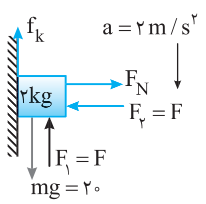
$$\Rightarrow ۱۲-۱۰-۲m'=-۲-۰/۴m'$$

$$۴=۱/۶m' \Rightarrow m'=\frac{۴}{۱/۶}=۲/۵kg$$

B ۹۰۵ ۳

خط فکری در حالت اول شتاب $۲m/s^۲$ روبه پایین است. اگر با دو برابر شدن $F_۱$ باز اندازهٔ شتاب $۲m/s^۲$ باشد باید جهت شتاب تغییر کرده باشد، یعنی در حالت دوم شتاب $۲m/s^۲$ روبه بالا است. همچنین چون $F_۲$ تغییر نکرده پس اندازهٔ نیروی اصطکاک جسم با سطح ثابت می‌ماند.

نیروهای وارد بر جسم را در دو حالت رسم کرده و نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم، البته برای راحتی در هر حالت نیروی بزرگ‌تر در جهت حرکت را منهای نیروی کوچک‌تر می‌کنیم.

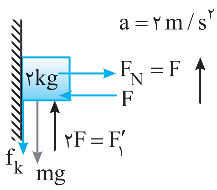


حالت اول

حالت اول: جسم از حال سکون رو به پایین حرکت کرده، بنابراین اصطکاک رو به بالاست. نیروی وزن جسم را به پایین می‌آورد و نیروی f_k و $F_۱$ مانع حرکت است. از این‌رو:

$$f_{net}=ma \Rightarrow W-F_۱-f_k=ma \Rightarrow ۲۰-F-f_k=۲\times ۲ \Rightarrow F+f_k=۱۶ \quad (I)$$

حالت دوم: نیروی $F_۱$ را دو برابر کرده‌ایم و جسم این بار باید از حال سکون رو به بالا حرکت کرده بنابراین اصطکاک رو به پایین است. نیروی $۲F_۱$ جسم را بالا می‌برد. نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:



حالت دوم

$$F_{net}=ma \Rightarrow ۲F-W-f_k=ma$$

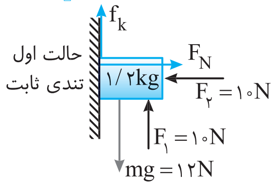
$$\Rightarrow ۲F-۲۰-f_k=۲\times ۲ \Rightarrow ۲F-f_k=۲۴ \quad (II)$$

دقت کنید در دو حالت اندازهٔ نیروی اصطکاک برابر است. $f_k=\mu_k F_۲$ است. رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم و F را به‌دست می‌آوریم.

$$F+f_k+۲F-f_k=۱۶+۲۴ \Rightarrow F=\frac{۴۰}{۳}N$$

C ۹۰۶ ۳

۱ در حالت اول تندی جسم ثابت است و جسم در حال حرکت رو به پایین است بنابراین نیروی اصطکاک جنبشی رو به بالاست. نیروی خالص وارد بر جسم صفر است:

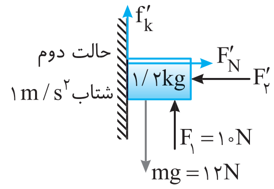


در راستای افقی: $F_۲=F_N \Rightarrow F_N=۱۰N$

در راستای قائم: $F_{net}=ma \Rightarrow mg-F_۱-f_k=۰ \Rightarrow f_k=۱۲-۱۰=۲$

$\Rightarrow \mu_k N=۲ \Rightarrow ۱۰\mu_k=۲ \Rightarrow \mu_k=۰/۲$

۲ در حالت دوم، اگر جسم با شتاب $۱m/s^۲$ بخواهد به سمت پایین حرکت کند باید نیروی $F_۲$ کاهش یابد تا از مقدار اصطکاک کاسته شود. در این حالت خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \text{در راستای افقی}: F'_N=F'_۲ \\ \text{در راستای قائم}: mg-F_۱-f'_k=ma \end{cases} \Rightarrow ۱۲-۱۰-f'_k=۱/۲\times(۱) \Rightarrow f'_k=۰/۸N$$

۳ نیروی عمودی سطح در حالت جدید F'_N را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_k F'_N=\mu_k F'_۲ \Rightarrow ۰/۸=۰/۲F'_N \Rightarrow F'_N=۴N \Rightarrow F'_۲=F'_N=۴N$$

۴ پس نیروی $F_۲$ از $۱۰N$ به $۴N$ رسیده و درصد تغییرات نیرو خواهد شد:

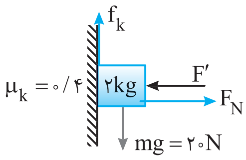
$$\frac{\Delta F}{F_۱}\times۱۰۰=\frac{-۶}{۱۰}\times۱۰۰=\underset{\text{کاهش}}{-۶۰\%}$$

C ۹۰۷ ۳

نکتهٔ مهم: تا لحظه‌ای که نیروی وزن رو به پایین (W) از نیروی اصطکاک (f_k) رو به بالا بزرگ‌تر یا با آن مساوی باشد $(W\ge f_k)$ از تندی جسم کاسته نمی‌شود.

خط فکری: بیشینه مقدار اصطکاک باید برابر نیروی وزن جسم باشد زیرا اگر اصطکاک از وزن بیشتر شود حرکت جسم کندشونده شده و از سرعت آن کاسته می‌شود. بنابراین باید معادلهٔ $W\ge f_k$ را حل کنیم.

۱ اصطکاک را با نیروی $F=۱۰N$ حساب می‌کنیم.



$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{F_N=F} f_k=۰/۴\times۱۰$$
$$\Rightarrow f_k=۴N<W$$

و جسم در حال حرکت تندشونده رو به پایین است.

۲ معادله $mg\ge f_k$ را حل می‌کنیم تا F_{max} را به‌دست بیاوریم:

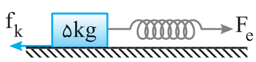
$$mg\ge f_k \Rightarrow ۲۰\ge\mu_k F_{max} \xrightarrow{\mu_k=۰/۴} ۲۰\ge۰/۴F_{max} \Rightarrow F_{max}\ge۵۰N$$

۳ پس نیروی F را می‌توان از $۱۰N$ به $۵۰N$ رساند، یعنی نیروی F را می‌توان حداکثر به اندازهٔ $۵۰-۱۰=۴۰N$ افزایش داد.

بازی با سؤال جسمی به جرم $۵kg$ روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k=۰/۲$ توسط فنری کشیده می‌شود. ضریب ثابت فنر $۸۰۰N/m$ و کشیدگی فنر از طول طبیعی خود ۵ سانتی‌متر است. این طول حداکثر چند سانتی‌متر می‌تواند کاهش یابد، بدون آنکه تندی جسم کاهش یابد؟ $(g=۱۰m/s^۲)$

۱) ۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۲۵

پاسخ نیروی کشسانی فنر برابر است با:



$$F_e=k\Delta\ell=۸۰۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=۴۰N$$

نیروی اصطکاک بین جسم و سطح:

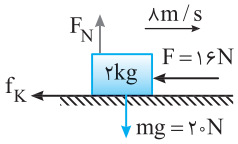
$$f_k=\mu_k F_N=۰/۲\times۵۰=۱۰N$$

تا زمانی که $F_e\ge f_k$ تندی جسم کاهش نمی‌یابد، بنابراین باید نیروی کشسانی از $۴۰N$ به $۱۰N$ برسد. یعنی: $F'_e=k\Delta\ell' \Rightarrow ۱۰=۸۰۰\Delta\ell' \Rightarrow \Delta\ell'=۱/۲۵cm$

بنابراین طول فنر می‌تواند از $۵cm$ کشیدگی به $۱/۲۵cm$ کشیدگی برسد یعنی طول فنر می‌تواند $۵-۱/۲۵=۳/۷۵cm$ کاهش یابد بدون آنکه تندی جسم کاهش یابد. گزینهٔ ۳

C ۹۰۸ ۱

مرحلهٔ اول: در ابتدا جسم به سمت راست در حال حرکت است پس نیروی اصطکاک نیز مانند نیروی F به سمت چپ به جسم وارد می‌شود:

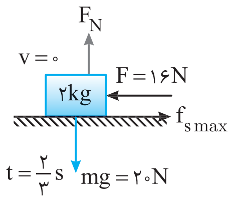


$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{F_N=۲۰N} f_k=۰/۴\times۲۰=۸N$$
$$F_{net}=ma \Rightarrow ۰-۱۶-f_k=ma \Rightarrow ۰-۲۴=۲a \Rightarrow a=-۱۲m/s^۲$$

این شتاب از سرعت $۸m/s$ به سمت راست کاسته تا سرعت صفر شود:

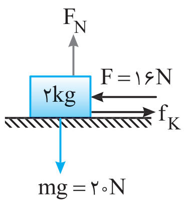
$$\begin{cases} v_۱=۸m/s \\ v_۲=۰ \\ a=-۱۲m/s^۲ \\ t=? \end{cases} \Rightarrow v_۲=at+v_۱ \Rightarrow ۰=-۱۲t+۸ \Rightarrow ۱۲t=۸ \Rightarrow t=\frac{۲}{۳}s$$

مرحلهٔ دوم: در این حالت باید بررسی کنیم که در $t=\frac{۲}{۳}s$ که جسم به‌طور لحظه‌ای متوقف شده آیا مجدداً جسم به حرکت درمی‌آید یا نه، برای این کار ابتدا $f_{s_{max}}$ را حساب می‌کنیم. اگر این نیرو، کمتر از $۱۶N$ باشد یعنی نیروی $۱۶N$ جسم را به حرکت درآورده است:



$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵\times۲۰ \Rightarrow f_{s_{max}}=۱۰N$$

مرحلهٔ سوم: بنابراین جسم پس از توقف با نیروی $F=۱۶N$ به سمت چپ حرکت کرده و نیروی اصطکاک جنبشی f_k خلاف جهت لغزش یعنی به سمت راست آن وارد می‌شود:



$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=۰/۴\times۲۰=۸N$$
$$F'_{net}=ma' \Rightarrow ۱۶-۸=۲a' \Rightarrow a'=۴m/s^۲$$

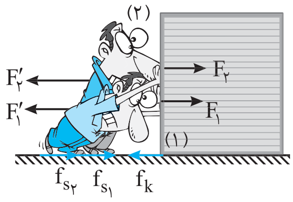
مدت زمان باقی‌مانده تا $t=۵s$ برابر $۵-\frac{۲}{۳}=\frac{۱۳}{۳}s$ است که متحرک از سرعت صفر با شتاب $۴m/s^۲$ طی می‌کند:

$$\begin{cases} v_۱=۰ \\ v_۲=? \\ a=۴ \\ t=\frac{۱۳}{۳}s \end{cases} \Rightarrow v_۲=at+v_۱ \Rightarrow v_۲=۴\times\frac{۱۳}{۳}=\frac{۵۲}{۳}m/s$$

بازی با سؤال **در سؤال قبل اگر جرم جسم $۳/۲kg$ باشد، تندی جسم در لحظهٔ $t=۵s$ چند متر بر ثانیه خواهد بود؟**

پاسخ **اگر جرم $m=۳/۲kg$ باشد پس نیروی عمودی سطح $F_N=mg=۳۲N$ شده و نیروی اصطکاک ایستایی در مرحلهٔ دوم برابر $f_{s_{max}}=\mu_s F_N=۱۶N$ شده یعنی در مرحلهٔ دوم جسم در آستانهٔ حرکت قرار گرفته و برنمی‌گردد در این صورت تندی آن بعد از $t=\frac{۲}{۳}s$ صفر خواهد شد و در $t=۵s$ نیز تندی صفر است.**

C ۹۰۹ ۲



خط فکری دو نفر به ترتیب با نیروی F_1 و F_2 بسته را هُل می‌دهند بنا به قانون سوم نیوتون نیروی F'_1 و F'_2 به ترتیب توسط بسته به هریک رو به عقب وارد می‌شود اما چرا این دو نفر رو به عقب لیز نمی‌خورند؟ زیرا بین پای آن‌ها و سطح زمین نیروی اصطکاک ایستایی f_{s_1} و f_{s_2} به سمت راست وجود دارد که مانع لیز خوردن این دو شخص می‌شود. اکنون نیروهای وارد بر بسته و هر شخص را رسم کرده و نیروی خالص وارد بر هریک را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید عبارت «حداقل ضریب اصطکاک ایستایی» یعنی دو نفر در آستانهٔ لیز خوردن قرار بگیرند، در ضمن بسته با تندی ثابت به جلو بلغزد.

۱ نیروهای وارد بر بسته:
$$\overbrace{F_1+F_2}^{\text{به سمت راست}} = \overbrace{f_k}^{\text{به سمت چپ}} \quad (I)$$

۲ نیروی وارد بر هر شخص:
$$\begin{cases} F'_1=f_{s_1} \xrightarrow{F'_1=F_1} F_1=f_{s_1} \\ F'_2=f_{s_2} \xrightarrow{F'_2=F_2} F_2=f_{s_2} \end{cases} \Rightarrow F_1+F_2=f_{s_1}+f_{s_2} \quad (II)$$

۳ رابطهٔ (I) و (II) را برابر قرار می‌دهیم.
$$f_{s_1}+f_{s_2}=f_k \Rightarrow \mu_s(m_1g+m_2g)=\mu_k Mg$$
$$\Rightarrow \mu_s(400+600)=0/2\times 2000 \Rightarrow \mu_s=0/4$$

B ۹۱۰ ۳

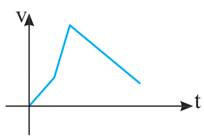
نکته شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب حرکت است.

خط فکری شما باید شتاب هر قسمت را با توجه به نیروی خالص وارد بر جسم به‌دست بیاورید و با هم مقایسه کنید تا بتوانید به کمک شیب نمودار $v-t$ نمودار درست را تشخیص دهید.

در قسمت اول مسیر نیروی اصطکاک کمتر از F می‌باشد بنابراین:
$$F-f_1=ma \xrightarrow{f_1<F} a_1>0$$

در قسمت دوم مسیر نیروی اصطکاک، صفر است و تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم F است: $F=ma \Rightarrow a_2>0$ و $a_2>a_1$

در قسمت سوم مسیر نیروی اصطکاک بیشتر از F می‌باشد، بنابراین:
$$F-f_3=ma \xrightarrow{f_3>F} a_3<0$$

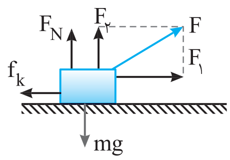


در قسمت (۱) و (۲) شتاب حرکت مثبت شده، البته $a_1>a_2$ بوده بنابراین نمودار $v-t$ باید در این دو قسمت دارای شیب مثبت باشد. البته در قسمت دوم که شتاب بزرگ‌تر است باید بیشینه باشد و در قسمت سوم که شتاب منفی است شیب نمودار باید منفی باشد. در نتیجه نمودار گزینهٔ (۳) درست است.

B ۹۱۱ ۳

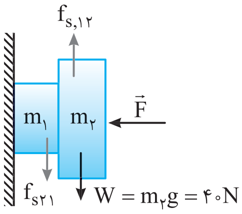
۱ به کمک آنچه که در ریاضی سال هشتم خوانده‌اید مؤلفه‌های نیروی F را در امتداد افقی و قائم رسم کنید.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.
$$F_{net_y}=0 \Rightarrow W=F_N+F_2 \Rightarrow F_N=mg-F_2$$



۳ نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.
$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=\mu_k(mg-F_2)$$
$$\Rightarrow f_k=\mu_k mg-\mu_k F_2 \Rightarrow f<\mu_k mg$$

B ۹۱۲ ۴



خط فکری عجب شکلی دارد این سؤاااال! دو جسم ساکن هستند و نیروهای وارد بر هر جسم متوازن هستند. در صورت سؤال نیروی اصطکاکی که وزنهٔ m_2 بر وزنهٔ m_1 وارد می‌کند مورد پرسش است. اما ما ابتدا نیروهای وارد بر وزنهٔ m_2 را بررسی می‌کنیم تا بتوانیم دربارهٔ نیروی اصطکاک بین m_1 و m_2 اظهارنظر کنیم.

به وزنهٔ m_2 در راستای قائم دو نیرو وارد می‌شود.

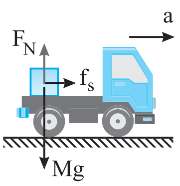
۱ نیروی وزن $W=m_2g=40N$ رو به پایین

۲ چرا m_2 به پایین نمی‌آید زیرا از طرف جسم m_1 نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s_{1,2}}$ بر آن رو به بالا وارد می‌شود که این نیرو با نیروی وزن m_2 برابر است. $f_{s_{1,2}}=W_2=40N$

۳ جسم m_1 بر جسم m_2 نیروی اصطکاک $40N$ را رو به بالا وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون، جسم m_2 نیز نیروی اصطکاکی به اندازهٔ $40N$ و رو به پایین $(f_{s_{2,1}}=40N)$ به m_1 وارد می‌کند.

C ۹۱۳ ۲

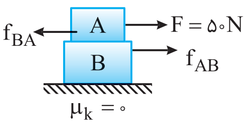
خط فکری سؤال مهم این است که عامل حرکت بار روی کف تریلیِ در حال حرکت چه نیرویی است؟ عامل حرکت بار نیروی اصطکاک بین کف تریلی و بار است که به بار شتاب می‌دهد. بیشترین شتاب بار وقتی است که نیروی اصطکاک بیشینه باشد $(f_{s_{max}})$ اگر شتاب حرکت تریلی از بیشینهٔ شتابی که می‌تواند اصطکاک به بار بدهد بیشتر باشد، بار از تریلی جا می‌ماند یعنی نسبت به تریلی رو به عقب لیز می‌خورد اما اگر $(a_{\text{تریلی}} \le a_{max})$ باشد بار و تریلی با یک شتاب حرکت می‌کنند.



۱ بیشینه شتاب حرکت بار در اثر اصطکاک را حساب می‌کنیم.
$$F_{net}=Ma \Rightarrow f_{s_{max}}=Ma_{max}$$
$$\Rightarrow \mu_s Mg=Ma_{max} \Rightarrow a_{max}=\mu_s g$$

۲ بنا به فرض مسئله، شتاب حرکت تریلی $a>\mu_s g$ است یعنی شتاب حرکت تریلی از بیشینه شتابی که بار می‌تواند به‌دست بیاورد بیشتر است. بنابراین بار در کف تریلی نسبت به تریلی به عقب لیز می‌خورد.

C ۹۱۴ ۱

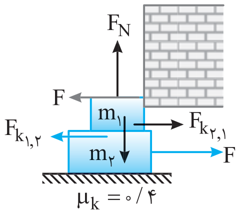


نکته هرگاه دو جسم که با هم در تماس هستند بخواهند نسبت به هم حرکت کنند، بین آن‌ها یک نیروی تماسی به نام اصطکاک ایجاد می‌شود که با حرکت دو جسم نسبت به هم مخالفت می‌کند.

خط فکری یک پارچه روی سطح اتاق بیاندازید و روی آن بنشینید و از شخصی بخواهید که دست شما را بگیرد و شما را بکشد خواهید دید که پارچه به همراه شما رو به جلو حرکت می‌کند. عامل حرکت پارچه به همراه شما، اصطکاک بین شما و پارچه است. در شکل مسئله وقتی A را با نیروی F می‌کشیم عامل حرکت B روی سطح بدون اصطکاک نیروی اصطکاک بین A و B است. اکنون این اصطکاک را باید با نیروی $F=50N$ مقایسه کنید.

نیروی F دو جسم A و B را به حرکت درمی‌آورد اما نیروی اصطکاک بین A و B تنها سبب حرکت جسم B با همان شتاب می‌شود بنابراین $F>f_1$ است. یعنی $f_1<50N$ است. به روابط زیر دقت کنید: $F=(m_A+m_B)a \;,\; f=m_Ba \Rightarrow f<F$

C | ۹۱۵ | ۳



دوباره شکل مسئله باعث نگرانی شما شد. m_1 به دیوار گیر کرده و ساکن است. اگر دیوار نبود، m_1 تحت تأثیر اصطکاک بین m_1 و m_2 به همراه m_2 حرکت می‌کرد.

۱ وقتی m_2 به سمت راست در حرکت است توسط سطح زمین و همچنین سطح m_1 نیروهای اصطکاک به سمت چپ وارد می‌شود. بنا به قانون سوم جسم m_2 نیروی اصطکاک ($f_{k_{2,1}}$) را بر m_1 وارد می‌کند. این نیرو را حساب می‌کنیم.

$$f_{k_{2,1}}=\mu_s F_N=\mu_k m_1 g\xrightarrow{\mu_k=۰/۴\,,\ m_1=۱۰kg} f_{k_{2,1}}=۰/۴\times۱۰۰$$

$$\Rightarrow f_{k_{2,1}}=۴۰N$$

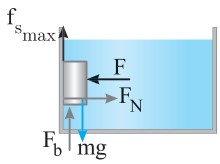
۲ جسم m_1 ساکن مانده است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. بنابراین دیوار نیروی F را بر m_1 وارد می‌کند.

$$F_{net}=۰\Rightarrow F=f_{k_{2,1}}\Rightarrow F=۴۰N$$

۳ دیوار به جسم m_1 نیروی ۴۰N وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون جسم m_1 نیز نیروی ۴۰N را به دیوار وارد می‌کند.

C | ۹۱۶ | ۱

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و با توجه به توازن نیروها داریم (دقت کنید حداقل نیرو یعنی F آن‌قدر کم باشد که جسم در آستانهٔ حرکت به سمت پایین باشد).



در راستای افقی: $F=F_N$

در راستای قائم: $F_b+f_{s_{max}}=mg$

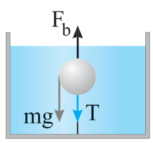
$$\xrightarrow{F_b=۱۰N\,,\ mg=۳۰N} ۱۰+\mu_s F_N=۳۰$$

$$\mu_s F=۲۰\Rightarrow ۰/۵\times F=۲۰\Rightarrow F=۴۰N$$

B | ۹۱۷ | ۲

نیروهای وارد بر جسم سه نیروی وزن، شناوری و کشش ریسمان است که چون جسم ساکن است این سه نیرو متوازن هستند. نیروی شناوری رو به بالا، نیروی وزن و کشش ریسمان رو به پایین است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_b=mg+T$$



بیشینه نیروی شناوری زمانی است که کشش نخ بیشینه باشد:

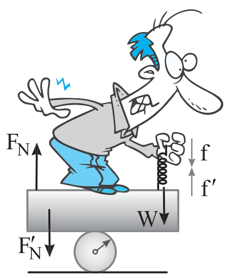
$$F_{b_{max}}=mg+T_{max}\Rightarrow F_{b_{max}}=۲۰+۴=۲۴N$$

B | ۹۱۸ | ۳

راه‌حل عادی: شخصی روی باسکول ایستاده و ساکن است. بنابراین باسکول وزن شخص را نشان می‌دهد.

$$F_N=W\Rightarrow F_N=۶۰۰N$$

راه‌حل پیچیده:



نیروهای وارد بر شخص:

۱ نیروی وزن که توسط کرهٔ زمین رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه که توسط کف باسکول رو به بالا وارد می‌شود.

۳ نیروی واکنش فنر که بر دست شخص رو به پایین وارد می‌شود.

شخص ساکن است. از این‌رو:

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_N=W+f \quad (۱)$$

نیروهای وارد بر باسکول:

۱ نیروی F'_N واکنش F_N توسط شخص رو به پایین بر کف باسکول وارد می‌شود.

۲ نیروی f' که برابر f بوده و توسط فنر رو به بالا بر کف باسکول وارد می‌شود.

نیرویی که باسکول تحمل می‌کند و توسط باسکول نمایش داده می‌شود.

$$F=F_N-f \quad (۲)$$

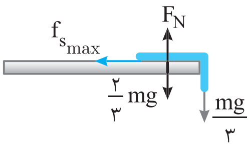
در این صورت:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} F=(W+f)-f\Rightarrow F=W$$

و باسکول F را که با W برابر است یعنی ۶۰۰N را نشان می‌دهد.

C | ۹۱۹ | ۱

خط فکری



طناب در آستانهٔ حرکت است و اصطکاک بین طناب و سطح میز $f_{s_{max}}$ است. طناب همگن است. کل طناب ۴/۵m است که ۱/۵m آن یعنی $\frac{۱}{۳}$ طناب آویزان و $\frac{۲}{۳}$ طناب روی سطح میز باقی مانده است. $\frac{۱}{۳}$ طناب آویزان است و وزن آن می‌خواهد طناب را پایین بیاورد اما نیروی اصطکاک ایستایی بین طناب روی میز با سطح میز مانع است. از این‌رو باید اندازهٔ نیروی اصطکاک که مانع حرکت است با اندازهٔ نیروی وزن قسمت آویزان طناب برابر باشد.

نیروی وزن قسمت آویزان طناب را با نیروی اصطکاک ایستایی بین قسمت روی میز و سطح میز برابر قرار می‌دهیم.

$$F_{net}=۰\Rightarrow f_{s_{max}}=W_{\text{قسمت آویزان}}\Rightarrow \mu_s F_N=\frac{۱}{۳}mg$$

$$\xrightarrow{F_N=\frac{۲}{۳}mg}\mu_s(\frac{۲}{۳}mg)=\frac{۱}{۳}mg\Rightarrow\mu_s=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

B | ۹۲۰ | ۱

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

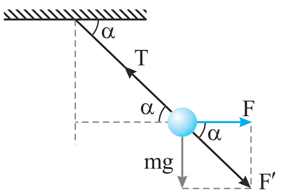
با توجه به اینکه جسم در حال تعادل است پس باید برایند F و W که با F′ نمایش داده‌ایم هم‌اندازه با T و در خلاف جهت آن باشد.

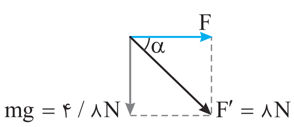
$$|F'|=۸N$$

همچنین با توجه به خطوط موازی و مورب زاویهٔ بین F′ و F نیز برابر α است. α را حساب می‌کنیم.

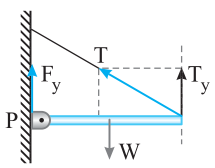
$$\sin\alpha=\frac{۴/۸}{۸}=۰/۶$$

بنابراین $\alpha=۳۷^\circ$ است.





B | ۹۲۱ | ۳



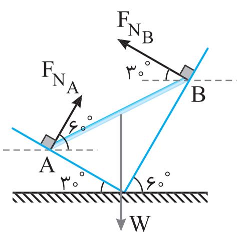
نیروهای وارد بر میله در راستای قائم را رسم می‌کنیم، ۱) نیروی وزن رو به پایین، ۲) مؤلفهٔ قائم نیروی کشش نخ T_y ۳) مؤلفهٔ نیروی قائم لولا رو به بالا

$$F_{net,y}=۰\Rightarrow F_y+T_y=W\Rightarrow F_y=W-T_y\Rightarrow F_{\text{لولا}}<W$$

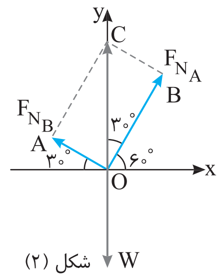
در واقع می‌توان این گونه استدلال کرد که نیروی وزن میله، توسط لولا و نخ تحمل می‌شود بنابراین نیرویی که لولا در نقطهٔ P بر میله وارد می‌کند قطعاً از W کمتر است.

B ۹۲۲ ۲

نیرویی که سطح بدون اصطکاک بر جسم وارد می‌کند همان نیروی عمودی سطح است. با توجه به شکل نیروها را رسم می‌کنیم (شکل (۱)). سپس هر سه نیرو را از یک نقطه رسم می‌کنیم (شکل (۲)).



شکل (۱)



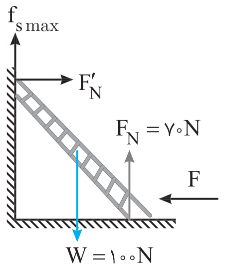
شکل (۲)

میله در تعادل است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و باید برآیند F_{N_A} و F_{N_B} هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی وزن باشد. با توجه به شکل زاویه‌ای که نیروی F_{N_A} با محور y می‌سازد ۳۰° است. در نتیجه در مثلث OBC می‌توان نوشت:

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{F_{N_B}}{F_{N_A}} \Rightarrow F_{N_A} = \sqrt{۳}F_{N_B}$$

B ۹۲۳ ۲

خط فکری جملهٔ «کمینه نیرویی که مانع لیز خوردن نردبان شود» یعنی اگر نیروی F از آن کمتر شود نردبان به پایین می‌لغزد. در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی بین نردبان و دیوار قائم باید رو به بالا باشد. نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم، نردبان در آستانهٔ حرکت رو به پایین بوده و نیروهای وارد بر آن متوازن است.



۱ برآیند نیروهای وارد بر نردبان در امتداد قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم و $f_{s_{max}}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}} + F_N = W \Rightarrow f_{s_{max}} + ۷۰ = ۱۰۰ \Rightarrow f_{s_{max}} = ۳۰N$$

۲ نیروی عمودی سطح که دیوار قائم بر نردبان وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.

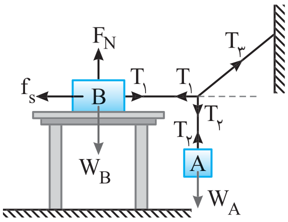
$$f_{s_{max}} = \mu_s F'_N \xrightarrow{\mu_s = ۰/۶} ۳۰ = ۰/۶F'_N \Rightarrow F'_N = ۵۰N$$

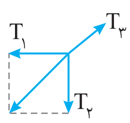
۳ برآیند نیروهای افقی وارد بر نردبان صفر است از این‌رو:

$$F = F'_N \Rightarrow F = ۵۰N$$

B ۹۲۴ ۲

خط فکری قرار است که وزن جسم A بیشینه باشد اما B ساکن بماند یعنی B در آستانهٔ حرکت قرار بگیرد بنابراین نیروی اصطکاک بین جسم B و سطح میز بیشینه $(f_{s_{max}})$ باشد. نیروهای وارد بر جسم B و جسم A را رسم کنید و برای هر جسم نیروی خالص را مساوی صفر قرار داده و کشش نخ متصل بر هریک از آن‌ها را حساب کنید و سرانجام کشش نخ متصل دیوار را به‌دست بیاورید. به مراحل حل مسئله دقت کنید.





۱ جسم B باید ساکن بماند، بنابراین اصطکاک وارد بر آن f_s است و چون وزن جسم A بیشینه است، اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s_{max}}$ می‌باشد.

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow T_1 = f_{s_{max}}$$
$$\Rightarrow T_1 = \mu_s F_{N_B}$$
$$\Rightarrow T_1 = ۰/۵ \times ۶۰۰ = ۳۰۰N$$

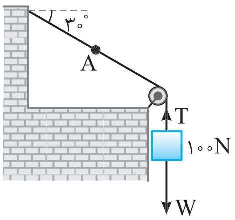
۲ جسم A ساکن است از این‌رو کشش نخ متصل به A (T_2) با نیروی وزن A برابر است.

$$T_2 = W_A \Rightarrow T_2 = ۲۲۵N$$

۳ نیروهای T_1، T_2 و T_3 باید با هم متوازن باشند و برایند T_1 و T_2 باید هم‌اندازهٔ T_3 و در خلاف جهت آن باشد. به کمک رابطهٔ فیثاغورس T_3 را حساب می‌کنیم.

$$T_3 = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \sqrt{۳۰۰^2 + ۲۲۵^2} = ۲۵\sqrt{۱۲^2 + ۹^2} \Rightarrow T_3 = ۲۵ \times ۱۵ = ۳۷۵N$$

B ۹۲۵ ۲



نکته در طول یک نخ همگن با جرم ناچیز نیروی کشش مقدار ثابتی است.

نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. این نیروها متوازن هستند.

$$T = W \Rightarrow T = ۱۰۰N$$

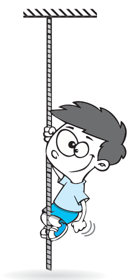
کشش در تمام نقاط این نخ از جمله نقطهٔ A یکسان و برابر ۱۰۰N است.

B ۹۲۶ ۳

بر فضانورد دو نیرو یکی وزن (W) رو به پایین و دیگری نیروی عمودی تکیه‌گاه رو به بالا وارد می‌شود. نیروی خالص وارد بر فضانورد را برابر ma قرار داده، F_N را به‌دست می‌آوریم.

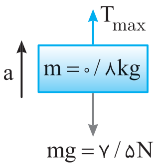
$$F_N - mg = ma \Rightarrow F_N - ۷۵ \times ۱۰ = ۷۵ \times ۸۰ \Rightarrow F_N = ۶۷۵۰N$$

B ۹۲۷ ۴



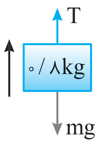
وقتی شخص شروع به بالا رفتن می‌کند، در لحظاتی، یک دست خود را رها کرده و با دست دیگر خود را بالا می‌کشد و سپس دست رها شدهٔ خود را به طناب می‌گیرد و دست دیگر خود را رها می‌کند و با تکرار این عمل بالا می‌رود. وقتی که شخص خود را به بالا می‌کشد ابتدا حرکت او تندشونده $(T > W)$ است اما وقتی که دست دوم خود را به طناب می‌رساند و لحظه‌ای متوقف می‌شود حرکت او کندشونده است $(T < W)$ حتی ممکن است هنگام بالا رفتن وقتی خود را به بالا می‌کشد برای لحظه‌ای هر دو دست او به طناب وصل نباشد و کشش به‌طور لحظه‌ای صفر شود $(T = ۰)$ بنابراین با قاطعیت نمی‌توان اظهارنظر کرد.

C ۹۲۸ ۲



کشش طناب زمانی بیشترین مقدار است که جسم تندشونده به سمت بالا بیاید یا کندشونده با همان شتاب به سمت پایین در حال حرکت باشد یعنی $T > mg$ باشد. از این‌رو می‌توان شتاب حرکت را در این حالت به‌دست آورد.

$$F_{net} = ma \Rightarrow T_{max} - mg = ma$$
$$\Rightarrow ۱۰ - ۸ = ۰/۸a \Rightarrow a = \frac{۲}{۰/۸} = \frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵m/s^2$$



یعنی شتاب حرکت تندشونده رو به بالا یا حرکت کندشونده رو به پایین نباید از $۲/۵m/s^2$ بیشتر باشد و گزینهٔ (۲) پاسخ است، یعنی جسم با شتاب $۳m/s^2$ با حرکت تندشونده نمی‌تواند رو به بالا حرکت کند. حال برای اطمینان گزینهٔ (۴) را نیز بررسی می‌کنیم. حرکت کندشونده رو به بالا یعنی $T < mg$ از این‌رو:

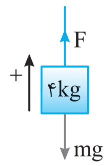
$$mg - T = ma$$
$$۸ - T = ۰/۸ \times ۳ \Rightarrow T = ۵/۶N < ۱۰N$$

بنابراین جسم می‌تواند با شتاب $۳m/s^2$ با حرکت تندشونده رو به پایین حرکت کند در این حالت نیروی کشش نخ $۵/۶N$ است که از بیشینهٔ نیروی کشش $T = ۱۰N$ کمتر است و نخ پاره نمی‌شود.

B ۹۲۹ ۳

خط فکری در دو حالت ممکن است اندازهٔ شتاب $۲m/s^۲$ باشد یک بار نیروی F رو به بالا بزرگ‌تر از وزن جسم $(F>mg)$ و بار دیگر نیروی F رو به بالا کوچک‌تر از وزن جسم $(F<mg)$ باشد در دو حالت قانون دوم نیوتون را نوشته، F را به‌دست بیاورید.

اندازهٔ شتاب $|a|=۲m/s^۲$ است، بنابراین:



$$F_{net}=m|a|\begin{cases}\xrightarrow{F>mg} F_۱-mg=ma\\ \xrightarrow{F<mg} mg-F_۲=ma\end{cases}$$

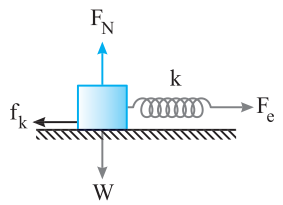
$$\Rightarrow\begin{cases}F_۱-۴۰=۴\times۲\Rightarrow F_۱=۴۸N\\ F_۲-۴۰=۴\times(-۲)\Rightarrow F_۲=۳۲N\end{cases}$$

$$|F_۱-F_۲|=۴۸-۳۲=۱۶N$$

اگر در حالت اول $F_۱=۴۸N$ و $F_۲=۳۲N$ باشد با ۱۶N، نیروی F کاهش یابد که گزینهٔ (۳) چنین است. اما حالت دیگر این است که ابتدا $F<mg$ و برابر ۳۲N و سپس $F>mg$ یعنی ۴۸N باشد. در این صورت باید F را افزایش داد که در گزینه‌ها نیست.

C ۹۳۰ ۲

خط فکری مسئله از شما ضریب اصطکاک را خواسته است یعنی سطح دارای اصطکاک است و نیروی خالص وارد بر جسم برآیند نیروی کشسانی فنر و نیروی اصطکاک جنبشی است.



با توجه به جدول اگر در حالت اول نیروی کشسانی فنر با تغییر طول به اندازهٔ ۲cm را F_e بنامیم در حالت دوم که تغییر طول ۳cm یعنی تغییر طول $\frac{۳}{۲}=۱/۵$ برابر حالت اول است نیروی کشسانی فنر $۱/۵F_e$ می‌شود و در حالت سوم تغییر طول ۶cm است یعنی تغییر طول فنر $\frac{۶}{۲}=۳$ برابر حالت اول نیروی کشسانی فنر $۳F_e$ می‌شود. اکنون باید برای هر حالت، قانون دوم نیوتون را نوشته و به کمک سه معادله سه مجهول مسئله را حل کنید.

حالت اول:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-f_k=m\times۲/۵\quad(I)$$

حالت دوم:

$$۱/۵F_e-f_k=m\times۵\quad(II)$$

حالت سوم:

$$۳F_e-f_k=m\times۱۲/۵\quad(III)$$

رابطهٔ II را بر رابطهٔ I تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱/۵F_e-f_k}{F_e-f_k}=۲\Rightarrow ۱/۵f_e-f_k=۲F_e-۲f_k\Rightarrow f_k=۰/۵F_e\quad(۱)$$

به جای f_k در رابطهٔ III مقدار $۰/۵F_e$ را قرار می‌دهیم.

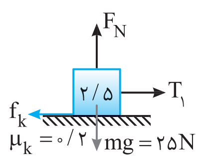
$$۳F_e-۰/۵F_e=۱۲/۵m\Rightarrow ۲/۵F_e=۱۲/۵m\Rightarrow F_e=۵m\quad(۲)$$

به جای F_e در رابطهٔ (۱) مقدار ۵m را قرار می‌دهیم.

$$f_k=۰/۵\times۵m\Rightarrow f_k=۲/۵m\xrightarrow{f_k=\mu_k mg}\mu_k mg=۲/۵m\Rightarrow\mu_k=۰/۲۵$$

C ۹۳۱ ۳

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

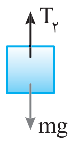


۱ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$f_k=\mu_kF_N=\mu_kmg\Rightarrow f_k=۵N$$

۲ بنابر قانون دوم نیوتون برایند نیروها را برابر ma قرار می‌دهیم، در حالت اول:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_۱-f_k=ma\Rightarrow T_۱-۵=۲/۵a\Rightarrow T_۱=۲/۵a+۵$$



۳ در حالت دوم نیروی $T_۲$ به سمت بالا و mg به سمت پایین است. قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_۲-mg=ma\Rightarrow T_۲=۲/۵a+۲۵$$

۴ $\frac{T_۲}{T_۱}$ خواهد شد: $\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{۲/۵a+۲۵}{۲/۵a+۵}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲/۵a+۵}$

۵ با توجه به فرض مسئله شتاب $a<۶m/s^۲$ است اگر $a=۶m/s^۲$ باشد نسبت $\frac{T_۲}{T_۱}$ خواهد شد: $\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲/۵\times۶+۵}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲۰}=۲$

بنابراین اگر شتاب کمتر از $۶\frac{m}{s^۲}$ باشد مقدار کسر از $\frac{۲۰}{۲/۵a+۵}>۱$ می‌شود و $\frac{T_۲}{T_۱}>۲$ خواهد بود.

B ۹۳۲ ۴

خط فکری مفهوم عبارت (مسافران از کف آسانسور جدا نشوند) این است که نیروی عمودی سطح F_N (نیرویی که سطح بر مسافران وارد می‌کند) در آن بازهٔ زمانی صفر شود. در این صورت تنها نیروی وزن بر آن‌ها وارد شده و شتاب آسانسور $a=g$ باشد.

$$F_N=۰\Rightarrow mg=ma\Rightarrow a=g$$

در واقع آسانسور در حال حرکت رو به بالا حداکثر با شتاب $(a=۱۰N/kg)$ ترمز می‌کند. بنابراین حداقل زمان توقف خواهد شد:

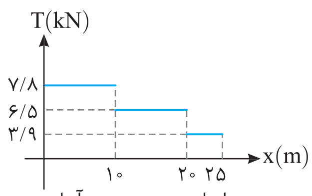
$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۱۰t+۸\Rightarrow t=۰/۸s$$

اگر ترمز توقف آسانسور از $g=۱۰N/kg$ بیشتر باشد، مسافران از کف آسانسور برای مدتی جدا می‌شوند زیرا دارای سرعت بوده و طبق قانون اول نیوتون تمایل دارند به حرکت خود ادامه دهند و نیرویی که مانع آن‌ها می‌شود وزن است بنابراین حداکثر شتاب برای توقف مسافران شتاب حاصل از وزن یعنی $a=g$ است و اگر شتاب آسانسور از این بیشتر شود، آسانسور سریع‌تر از مسافران متوقف شده و برای مدت کوتاهی افراد از کف آسانسور جدا می‌شوند.

C ۹۳۳ ۲

۱ در ۱۰m اول نیروی کشش کابل $T_۱=۷/۸kN=۷۸۰۰N$ است. قانون دوم نیوتون را برای آسانسور نوشته شتاب آن را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-W_{کل}=m_{کل}a\Rightarrow ۷۸۰۰-۶۵۰۰=۶۵۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$



۲ اکنون قانون دوم نیوتون را برای شخص درون آسانسور می‌نویسیم و F_N را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_{N_۱}-m_{شخص}g=m_{شخص}a_۱\Rightarrow F_{N_۱}-۵۰۰=۱۰۰\Rightarrow F_{N_۱}=۶۰۰N$$

۳ در بازهٔ ۲۰m تا ۲۵m نیروی کشش طناب $T_۳=۳/۹kN=۳۹۰۰N$ است. $T_۳<W$ بوده قانون دوم نیوتون را برای آسانسور می‌نویسیم:

$$F_{net}=ma_۳\Rightarrow W_{کل}-T_۳=m_{کل}a'\Rightarrow ۶۵۰۰-۳۹۰۰=۶۵۰a_۳\Rightarrow a_۳=۴m/s^۲$$

۴ با داشتن شتاب نیروی عمودی سطح وارد بر شخص را به‌دست می‌آوریم:

شخص: $F_{net}=ma\Rightarrow m_{شخص}g-F_{N_۳}=m_{شخص}a_۳\Rightarrow ۵۰۰-F_{N_۳}=۵۰\times۴$

$$\Rightarrow F_{N_۳}=۳۰۰N$$

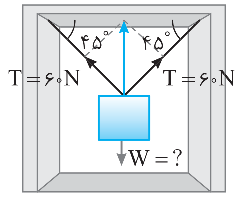
۵ نسبت $\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۲}}$ خواهد شد: $\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۳}}=\frac{۶۰۰}{۳۰۰}=۲$

B ۹۳۴ ۳

خط فکری مسئلهٔ خاصی نیست، یک وزنه درون آسانسور از دو ریسمان آویزان است و هر ریسمان نیروی کشش $۶۰N$ بر وزنه وارد می‌کند. چون دو نیروی کشش برابر هستند برآیند آن‌ها در امتداد قائم رو به بالاست. برآیند آن‌ها را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، جرم جسم را حساب می‌کنیم.

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. برایند دو نیروی کشش $۶۰N$ که با هم زاویهٔ ۹۰° می‌سازند، را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$T_{\text{کل}}=\sqrt{T^۲+T^۲}=\sqrt{۲}\,T \Rightarrow T_{\text{کل}}=۶۰\sqrt{۲}=۶۰\times ۱/۴ \Rightarrow T_{\text{کل}}=۸۴N$$



۲ قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم.

$$F_{net}=ma \Rightarrow T_{\text{کل}}-W=ma \Rightarrow ۸۴-m\times ۱۰=m\times ۲ \Rightarrow m=\frac{۸۴}{۱۲}=۷kg$$

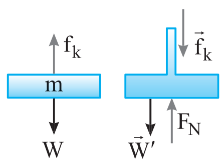
C ۹۳۵ ۲

خط فکری با یک مسئله جالب سروکار داریم. اگر مهره را رها کنید با شتاب گرانش $(g=۱۰N/kg)$ سقوط می‌کند اما این مهره وقتی از روی بدنهٔ میله به پایین می‌لغزد، شتابش $۲m/s^۲$ است. بنابراین حتماً نیرویی رو به بالا مخالف حرکت وجود دارد که قطعاً این نیرو اصطکاک بین مهره و بدنهٔ میله است که شما باید آن را حساب کنید. میله به مهره رو به بالا نیرو وارد می‌کند. بنا به قانون سوم نیوتون مهره هنگام لغزیدن به میله رو به پایین نیرو وارد می‌کند. در این حالت نیروسنج عددی که نشان می‌دهد مجموع وزن پایه و نیرویی است که مهره به میله رو به پایین وارد می‌کند که همان نیروی اصطکاک است.

۱ دو نیرو بر مهره وارد می‌شود اولی نیروی وزن و دومی نیروی اصطکاک است. بنا به قانون دوم خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow W-f_k=ma$$

$$\Rightarrow ۰/۵\times ۱۰-f_k=۰/۵\times ۲ \Rightarrow f_k=۴N$$



۲ میله بر مهره نیروی اصطکاک f_k را رو به بالا وارد می‌کند و بنابر قانون سوم نیوتون، مهره نیز بر میله نیروی f_k را رو به پایین وارد می‌کند. چون میله و پایه ساکن هستند، برایند نیروی وارد بر آن‌ها صفر است. نیروهای وارد بر پایه شامل سه نیرو است:

۱) نیروی وزن رو به پایین، ۲) نیروی اصطکاک مهره وارد بر میله رو به پایین، ۳) نیروی عمودی سطح نیروسنج که به پایه رو به بالا وارد می‌کند.

$$F_{net}=۰ \Rightarrow W'+f_k-F_N=۰ \Rightarrow F_N=W'+f_k=۱/۵\times ۱۰+۴=۱۹N$$

$$\Rightarrow F_N=۱۹N$$

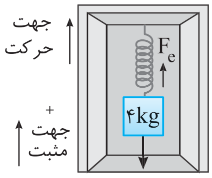
۳ F_N عددی است که ترازوی فنری نشان می‌دهد. یعنی ترازوی فنری $۱۹N$ را نشان می‌دهد.

C ۹۳۶ ۱

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. ۱) نیروی وزن ۲) نیروی کشسانی فنر احساس ما این است که باید نیروی کشسانی فنر رو به بالا و نیروی وزن رو به پایین باشد به احساس خود احترام می‌گذاریم و قانون دوم نیوتون را در این حالت می‌نویسیم و F_e را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_e-mg=ma$$

$$\xrightarrow[\text{شتاب کندشونده}]{a=-۱۲m/s^۲} F_e-۴۰=-۴۸ \Rightarrow F_e=-۸N$$



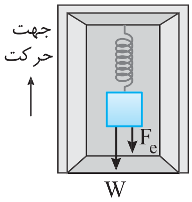
اندازهٔ نیروی F_e منفی شده چگونه چنین چیزی ممکن است؟ جهت مثبت را رو به بالا گرفته‌ایم. بنابراین مفهوم این منفی شدن یعنی F_e بار رو به پایین و در جهت نیروی وزن باشد تا به وزنه شتاب $۱۲m/s^۲$ رو به پایین بدهد. در نتیجه تغییر طول فنر خلاف جهت نیروی کشسانی یعنی رو به بالا بوده و فنر در این جابه‌جایی فشرده‌تر شده است. اکنون قانون دوم نیوتون را مجدداً می‌نویسیم و F_e را به‌دست می‌آوریم.

$$-(F_e+W)=ma \xrightarrow{\text{حرکت کندشونده}} -F_e-۴۰=۴\times(-۱۲) \Rightarrow F_e=۸N$$

تغییر طول فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$F_e=k\Delta x \Rightarrow ۸=۲۰۰\times \Delta x \Rightarrow \Delta x=\frac{۸}{۲۰۰}=\frac{۴}{۱۰۰}=۴cm$$

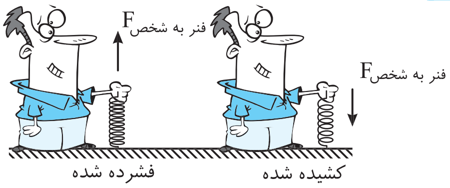
فنر فشرده شده : $x_۲=x_۱-\Delta x=۸۰-۴=۷۶cm$



C ۹۳۷ ۲

یادآوری ترازوی فنری و باسکول مقدار نیروی عمودی سطح F_N را نمایش می‌دهند.

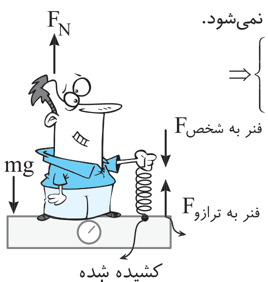
نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است.



فنر متصل به باسکول را بررسی می‌کنیم. هر نیرویی که رو به بالا به فنر وارد کنیم، فنر همان نیرو را رو به پایین به ما وارد می‌کند. یعنی فنر کف باسکول را بالا می‌کشد و ما آن را به پایین هُل می‌دهیم. بنابراین وقتی فنر متصل به باسکول را تغییر شکل می‌دهیم در عددی که باسکول نشان می‌دهد تغییری حاصل نمی‌شود.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_{\text{فنر به شخص}}=F_{\text{فنر به ترازو}} \\ \text{این دو نیرو خلاف جهت هم‌اند} \end{array}\right. \Rightarrow F_N=mg$$

بنابراین فنر متصل به آسانسور مهم است.

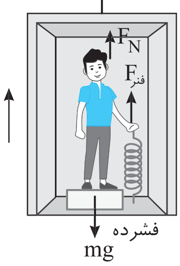


$$F_{net}=ma \Rightarrow F_N+F_{\text{فنر}}-mg=ma$$

$$\Rightarrow F_N+k\Delta x-mg=ma$$

$$\Rightarrow F_N+۳۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}-۶۰۰=۱۲۰$$

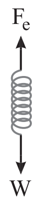
$$\Rightarrow F_N+۶-۶۰۰=۱۲۰ \Rightarrow F_N=۷۱۴N$$



پنجره ۲ روبه‌روی ۳

B ۹۳۷ ۲

۱ نیروهای وارد بر وزنه در دو حالت نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر هستند.



جسم ساکن است و نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند.

حالت اول: ($\ell_۱=۱۴cm$ و $m=۴kg$)

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_e=W\Rightarrow k(\ell_۱-\ell_۰)=mg\Rightarrow k(\frac{۱۴}{۱۰۰}-\ell_۰)=۴۰ \quad (I)$$

حالت دوم: ($\ell_۲=۱۵cm$ و $m=۵kg$)

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_e=W\Rightarrow k(\ell_۲-\ell_۰)=mg\Rightarrow k(\frac{۱۵}{۱۰۰}-\ell_۰)=۵۰ \quad (II)$$

دو رابطه را از هم کم کرده و k را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۱۵}{۱۰۰}k-k\ell_۰-\frac{۱۴}{۱۰۰}k+k\ell_۰=۵۰-۴۰\Rightarrow\frac{k}{۱۰۰}=۱۰\Rightarrow k=۱۰۰۰N/m$$

طول طبیعی خواهد شد:

$$۱۰۰۰(\frac{۱۴}{۱۰۰}-\ell_۰)=۴۰\Rightarrow\frac{۱۴}{۱۰۰}-\ell_۰=\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow\ell_۰=۰/۱m=۱۰cm$$

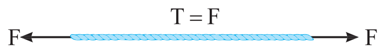
میانبر ثابت فنر را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$k=\frac{W_۲-W_۱}{\ell_۲-\ell_۱}$$

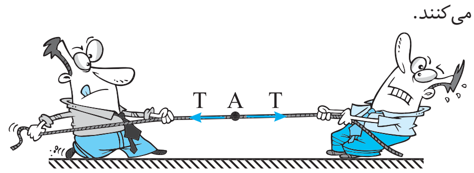
نمای ۱۱

A ۹۳۷ ۲

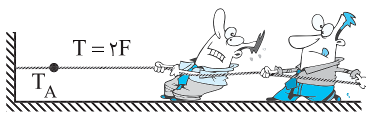
۲ **نکته** هرگاه مطابق شکل به دو سر طناب نیروهای یکسانی وارد کنیم، نیروی کشش طناب در هر نقطه هم‌اندازهٔ هر یک از نیروهای وارد بر طناب است.



اگر هر کدام یک سر آن طناب را بکشند نیروی کشش طناب برابر نیرویی است که هر یک وارد می‌کنند. $T=F$



اما اگر یک سر آن را به دیوار بسته و دو نفری از یک طرف بکشند نیروی کشش طناب برابر مجموع نیروی دو نفر است و احتمال پاره شدن طناب بیشتر است. $T=۲F$



نمای ۱۰

A ۹۳۷ ۳

۳ **۱** تندی حدی چترباز با چترِ باز حدود $۵m/s$ است.

چترباز از ارتفاع نسبتاً زیاد به بیرون پریده در همان ابتدا در مدت $۱s$ تندی آن تقریباً $v=at=۱۰\times۱=۱۰m/s$ می‌شود. یعنی در مدت کوتاهی تندی چترباز از تندی حدی بالاتر می‌رود و در این مدت حرکت چترباز تندشونده است.

۲ با باز شدن چتر، سطح مقابل هوا بزرگ می‌شود و مقاومت هوا به شدت بالا می‌رود و مقاومت شبیه ترمز عمل کرده از تندی چترباز می‌کاهد تا به تندی حدی برسد. در این بازهٔ زمانی حرکت کندشونده است.

۳ پس از آنکه چترباز به تندی حدی رسیده با تندی ثابت پایین می‌آید.

با توجه به گزینه‌ها حالتی که قبل از باز شدن چتر، تندی چترباز به تندی حدی بدون چتر برسد مورد نظر مسئله نیست.

نمای ۹

A ۹۳۷ ۱

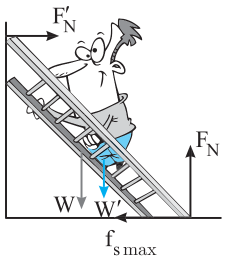
۴ دقت کنید که در صورت سؤال برایند نیروهای وارد بر شخص خواسته شده است و از شما نیروی عمودی سطح خواسته نشده است. بنا به قانون دوم نیوتون برایند نیروهای وارد بر شخص (نیروی خالص) برابر ma است.

$$F_{ma}=Ma\Rightarrow F_{max}=۵۰\times۲=۱۰۰N$$

نمای ۲۳

A ۹۳۷ ۳

۵ نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. نردبان در آستانهٔ سُر خوردن است بنابراین اصطکاک بین نردبان و سطح افقی بیشینه است $(f_{s\,max})$ و نیروهای وارد بر نردبان متوازن هستند.



۱ نیروهای وارد برابر نردبان در راستای قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_N=W+W'$$

۲ نیروهای وارد بر نردبان در راستای افقی را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F'_N=f_{s\,max}\Rightarrow F'_N=\mu_sF_N\Rightarrow F'_N=\mu_sF_N\Rightarrow F'_N=\mu_s(W+W')$$

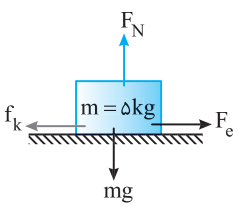
نمای ۲۱

A ۹۳۷ ۱

۶ **یادآوری** هرگاه جسمی را توسط یک فنر می‌کشیم، نیروی F وارد بر فنر برابر نیروی کشسانی فنر است $(F_e=F)$.

خط فکری سرعت ثابت یعنی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است $F_{net}=۰$، بنابراین شما باید نیروی کشسانی فنر را با نیروی اصطکاک جنبشی برابر قرار دهید و با جای‌گذاری داده‌های مسئله، مسئله را حل کنید.

بر جسم چهار نیرو وارد می‌شود. نیروی وزن، نیروی عمودی سطح، نیروی اصطکاک جنبشی و نیروی کشسانی فنر.



$$mg-F_N=۰\Rightarrow F_N=mg=۵۰N$$

$$F_e-f_k=۰\Rightarrow F_e=f_k$$

$$\Rightarrow k\Delta x=\mu_kF_N\xrightarrow[\Delta x=۵cm]{k=۲۰۰N/m}$$

$$۲۰۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=\mu_k(۵۰)\Rightarrow\mu_k=۰/۲$$

نمای ۱۶ و ۱۷

بازی با سؤال **جسمی به جرم $۲kg$ روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $۰/۲$، با یک فنر و با سرعت ثابت در حال حرکت است. فنر افقی و طول آن $۵cm$ افزایش یافته است. ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟ $(g=۱۰N/kg)$**

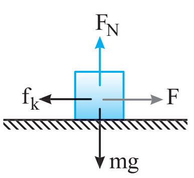
۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۸۰ ۴) ۴۰

پاسخ **جسم دارای سرعت ثابت است و برایند نیروهای وارد بر آن صفر است.**

$$F_{net,y}=۰\Rightarrow F_N=mg$$

$$F_{net,x}=۰\Rightarrow F=f_k\Rightarrow k\Delta\ell=\mu_kmg$$

$$k(\frac{۵}{۱۰۰})=۰/۲\times۲\times۱۰\Rightarrow k=۸۰\,N/m$$



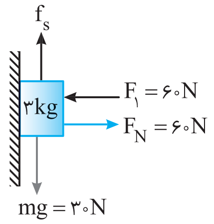
گزینهٔ ۳

A ۹۳۷ ۳

۷ **خط فکری** ابتدا با نیروی $F_۱$ جسم ساکن است، در این حالت به جسم نیروی $mg=۳۰N$ رو به پایین وارد می‌شود، اما جسم تکان نمی‌خورد یعنی برای نیروهای مساوی یا کوچک‌تر از $۳۰N$ جسم به حرکت در نمی‌آید.

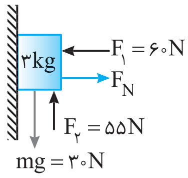
جسم ساکن است: $f_s=mg \Rightarrow f_s=۳۰N$

جسم در راستای افقی حرکت ندارد: $F_۱=F_N \Rightarrow F_N=۶۰N$



هم بر نیروی وزن و هم بر نیروی اصطکاک غلبه شده است.

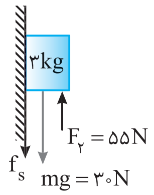
مطابق شکل به جسم دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ وارد می‌شود:



در راستای افقی جسم حرکت نمی کند:

$F_۱=F_N \Rightarrow F_N=۶۰N$

دو نیروی $F_۲=۵۵N$ به سمت بالا و $mg=۳۰N$ به سمت پایین به جسم وارد می‌شود. در واقع به جسم نیروی خالص $۵۵-۳۰=۲۵N$ به سمت بالا وارد می‌شود که چون از $۳۰N$ کمتر است با توجه به خط فکری جسم همچنان ساکن می‌ماند و به آن نیروی اصطکاک ایستایی به سمت پایین وارد می‌شود، چون نیروی $F_۲$ به سمت بالا بزرگ‌تر از نیروی mg به سمت پایین است:



جسم ساکن است: $f_s+mg=F_۲ \Rightarrow f_s+۳۰=۵۵ \Rightarrow f_s=۲۵N$

نکته از طرف سطح دو نیروی عمودی سطح و اصطکاک، عمود بر هم به جسم وارد می‌شود بنابراین نیرویی که سطح وارد می‌کند برایند این دو نیروی عمود برهم است:

$R=\sqrt{f^۲+F_N^۲}$

نیروی وارد از طرف سطح را حساب می‌کنیم:

$R=\sqrt{f_s^۲+F_N^۲} \xrightarrow[F_N=۶۰N]{f_s=۲۵N} R=\sqrt{(۲۵)^۲+(۶۰)^۲}=۵\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}$

$R=۵\sqrt{۲۵+۱۴۴} \Rightarrow R=۵\sqrt{۱۶۹} \xrightarrow{\sqrt{۱۶۹}=۱۳} R=۶۵N$

میانبر خوب است دو سری عدد فیثاغورسی را بلد باشیم:

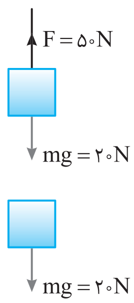
$(۳,۴,۵),(۵,۱۲,۱۳)$

دو نیروی عمود بر هم در این سؤال $۵\times۵=۲۵$ نیوتون و $۵\times۱۲=۶۰$ است پس برایند آن‌ها $۵\times۱۳=۶۵$ نیوتون است.

نمای ۱۸

A ۹۳۷ ۳

۸ قبل از پاره شدن به جسم نیروی $۵N$ به سمت بالا و $mg=۲۰N$ به سمت پایین وارد می‌شود.



$F_{net}=ma \Rightarrow F-mg=ma \Rightarrow ۲۰-۵=۲a$

$\Rightarrow a=۷/۵m/s^۲$

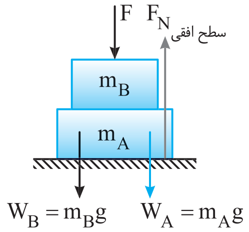
بعد از پاره شدن طناب، تنها به جسم نیروی وزن وارد می‌شود.

$F_{net}=ma \Rightarrow mg=ma \Rightarrow a=g \Rightarrow a=۱۰m/s^۲$

نمای ۲۲

B ۹۳۷ ۳

۹ نیروهای وارد بر جسم A را رسم می‌کنیم و نیرویی که سطح افقی بر جسم A وارد می‌کند برابر است با:



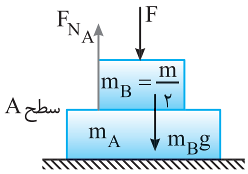
$F_{y\,خالص}=۰$

$\Rightarrow F_{N\,سطح\,افقی}=F+W_B+W_A$

$\Rightarrow F_{N\,سطح\,افقی}=F+\frac{m}{۲}g+mg$

$\Rightarrow F_{N\,سطح\,افقی}=F+\frac{۳}{۲}mg$

نیرویی که سطح A بر جسم B وارد می‌کند برابر است با:



$F_{y\,خالص}=۰$

$\Rightarrow F_{N_A}=m_Bg+F=\frac{۱}{۲}mg+F$

بنا به فرض مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$F_{N\,سطح\,افقی}=۲F_{N_A} \Rightarrow F+\frac{۳}{۲}mg=۲(\frac{۱}{۲}mg+F)$

$F+\frac{۳}{۲}mg=mg+۲F \Rightarrow F=\frac{mg}{۲}$

نمای ۱۲

B ۹۳۷ ۱

۱۰ **۱** ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت ـ زمان $v=۳t+۲$ با معادلهٔ سرعت ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$v=at+v_۰\,,\,v=۳t+۲ \Rightarrow a=۳m/s^۲$

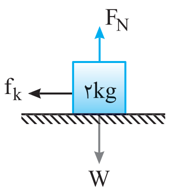
۲ در ادامه مسئله را از قسمت دوم حرکت حل می‌کنیم. سرعت در لحظهٔ حذف F را به دست می‌آوریم.

$v=۳t+۲ \xrightarrow{t=۴s} v=۳\times۴+۲=۱۴m/s$

۳ سرعت در انتهای قسمت اول، سرعت اولیه در قسمت دوم خواهد بود. شتاب حرکت در قسمت دوم را به دست می‌آوریم.

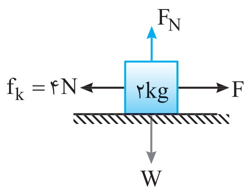
$v=at+v_۰ \xrightarrow{t=۷s} ۰=a'\times(۷)+۱۴ \Rightarrow a'=-۲m/s^۲$

۴ در قسمت دوم تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی اصطکاک است که سبب توقف آن می‌شود. به کمک قانون دوم نیوتون، f_k را حساب می‌کنیم.



$-f_k=ma' \Rightarrow -f_k=۲\times(-۲) \Rightarrow f_k=۴N$

۵ در قسمت اول بر جسم در امتداد افقی دو نیروی F و f_k وارد می‌شود، F را به دست می‌آوریم.



$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma$

$\Rightarrow F-۴=۲\times۳ \Rightarrow F=۱۰N$

نمای ۱۷

پنجره ۴

A ۹۳۸ ۱

یادآوری تکانه کمیت برداری است و برابر حاصل‌ضرب جرم در بردار سرعت جسم است. $\vec{P}=m\vec{v}$

تکانه در حالت اول و حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$P=mv \xrightarrow{m=۲kg} \begin{cases} \xrightarrow{\vec{v}_۱=۴\vec{i}} P_۱=۸\vec{i} \\ \xrightarrow{\vec{v}_۲=-۸\vec{i}} P_۲=۲\times(-۸)\vec{i}=-۱۶\vec{i} \end{cases}$$

تغییر تکانه خواهد شد:

$\Delta\vec{P}=\vec{P}_۲-\vec{P}_۱=-۱۶\vec{i}-۸\vec{i} \Rightarrow \Delta\vec{P}=-۲۴\vec{i}$

B ۹۳۹ ۲

۱ بردار تکانهٔ جسم را در $t=۲s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{P}=۶t\vec{i}+۴t^{۲}\vec{j}\xrightarrow{t=۲s}\vec{P}=۱۲\vec{i}+۱۶\vec{j}$$

۲ تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن است.

$$\vec{P}=m\vec{v}\xrightarrow{m=۰/۴kg}۱۲\vec{i}+۱۶\vec{j}=۰/۴\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=۳۰\vec{i}+۴۰\vec{j}$$

۳ اندازه سرعت جسم خواهد شد:

$$|\vec{v}|=\sqrt{۳۰^{۲}+۴۰^{۲}}=۵۰m/s$$

A ۹۴۰ ۴

خط فکری در صورت مسئله تندی جسم داده شده و جهت حرکت جسم مشخص نیست. بنابراین $v_۱$ می‌تواند $+۳m/s$ یا $-۳m/s$ باشد هم‌چنین $v_۲$ می‌تواند $+۴m/s$ یا $-۴m/s$ باشد، بنابراین باید حالت‌های مختلف را بررسی کنید.

۱ اندازه تغییر سرعت جسم می‌تواند برابر مقدارهای زیر باشد.

$$\begin{cases}v_۱=\pm۳m/s\\v_۲=\pm۴m/s\end{cases}\Rightarrow|\Delta v|=۱m/s \text{ یا } ۷m/s$$

۲ اندازهٔ تغییر تکانه خواهد شد.

$$|\Delta P|=m|\Delta v|\Rightarrow\begin{cases}|\Delta P|=۲\times۱=۲kgm/s\\|\Delta P|=۲\times۷=۱۴kgm/s\end{cases}$$

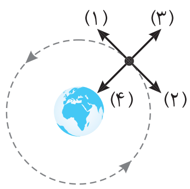
A ۹۴۱ ۲

دقت کنید تندی افزایش یافته بنابراین بزرگی تکانه نیز افزایش می‌یابد.

تکانه برابر جرم در سرعت جسم می‌باشد، تندی جسم در جهت سرعت $۴m/s$ افزایش یافته بنابراین تکانه نیز $۱۲\,kg.m/s$ افزایش می‌یابد.

$$P=mv\Rightarrow P+۱۲=m(v+۴)\Rightarrow P+۱۲=mv+۴m\Rightarrow۱۲=۴m\Rightarrow m=۳kg$$

A ۹۴۲ ۱

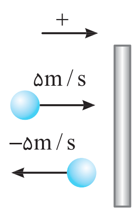


در هر لحظه بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است و جهت آن در سوی چرخش ماهواره است از طرفی تکانه $(\vec{P}=m\vec{v})$ برداری در جهت نیرو است بنابراین جهت درست نشان داده شده روی شکل جهت (۱) است.

A ۹۴۳ ۲

۱ انرژی جنبشی کمیت نرده‌ای است و با مجذور تندی متناسب است از این‌رو تغییر نمی‌کند.

$$\Delta K=K_۲-K_۱=\frac{۱}{۲}m(v_۲^{۲}-v_۱^{۲})=\frac{۱}{۲}\times۰/۵(۲۵-۲۵)=۰$$



۲ تکانه کمیتی برداری است و همواره در جهت بردار سرعت است و اگر جهت بردار سرعت عوض شود جهت بردار تکانه تغییر می‌کند.

اگر جهت حرکت به سوی دیوار را مثبت فرض کنیم سرعت برخورد به دیوار $+۵m/s$ است و وقتی توپ برمی‌گردد سرعت آن $-۵m/s$ خواهد بود. از این رو می‌توان نوشت:

$$|\Delta P|=|m\Delta v|=|۰/۵(-۵-۵)|=۵kgm/s$$

دقت کنید که هدف طراح یادآوری این نکته است که انرژی جنبشی به جهت حرکت جسم بستگی ندارد اما تکانه بردار بوده و جهت حرکت جسم در مورد تکانه مهم است.

A ۹۴۴ ۴

ابتدا تندی جسم پس از $۵s$ را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک تکانه جرم را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\xrightarrow{v_۰=۰}v=۰/۵\times۵\Rightarrow v=۲/۵m/s$$

$$P=Mv\xrightarrow{P=۱۰\,kgm/s}۱۰=M\times۲/۵\Rightarrow M=۴kg$$

A ۹۴۵ ۲

۱ سرعت جسم در $t_۱=۰$ و $t_۲=۰/۵s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=۲\sin۵\pi t\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۰\Rightarrow v_۱=۲\sin۵\pi(۰)\Rightarrow v_۱=۰\\t_۲=۰/۵s\Rightarrow v_۲=۲\sin۵\pi(\frac{۱}{۲})\\\Rightarrow v_۲=۲\sin\frac{۵\pi}{۲}\Rightarrow v_۲=۲m/s\end{cases}$$

۲ تغییر تکانه خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=m(v_۲-v_۱)\Rightarrow\Delta P=۲\times۲=۴kgm/s$$

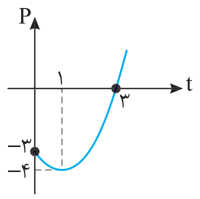
B ۹۴۶ ۴

نکته هرگاه بزرگی تکانه افزایش یابد یعنی تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است و هرگاه بزرگی تکانه کاهش یابد تندی کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است.

خط فکری برای حل مسئله بهترین روش استفاده از رسم نمودار تکانه - زمان است که یک تابع درجه ۲ است.

ابتدا نمودار $P-t$ را رسم می‌کنیم:

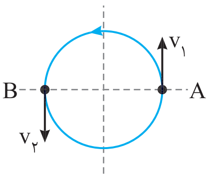
$$P=t^{۲}-۲t-۳\Rightarrow\begin{cases}t_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{۲}{۲}=۱s\Rightarrow P=۱-۲-۳=-۴kg.m/s\\t=۰\Rightarrow P=-۳kg.m/s\\P=۰\Rightarrow t=۳s\end{cases}$$



در بازهٔ صفر تا $۱s$ اندازهٔ تکانه از $۳kg.m/s$ تا $۴kg.m/s$ افزایش می‌یابد بنابراین سرعت در حال افزایش است و از $۱s$ تا $۳s$، اندازهٔ تکانه از $۴kg.m/s$ به صفر می‌رسد و سرعت در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

A ۹۴۷ ۲

نکته سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر مماس است.



وقتی متحرک مطابق شکل از نقطهٔ A می‌گذرد در مدتی که نصف محیط را طی می‌کند به نقطهٔ B می‌رسد. در این صورت بردار سرعت در نقطهٔ B رو به پایین است، اگر جهت $v_۱$ را مثبت بگیریم $(v_۱=v)$ سرعت در نقطهٔ B برابر $v_۲=-v$ است. بنابراین تغییر سرعت خواهد شد:

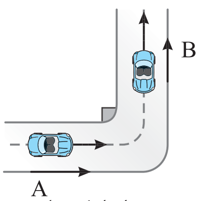
$$|\Delta v|=|v_۲-v_۱|=|-v-v|=۲v$$

تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=۲mv$$

B ۹۴۸ ۲

اندازهٔ تکانه در نقطهٔ A و B برابر است مقدار آن را به‌دست می‌آوریم.



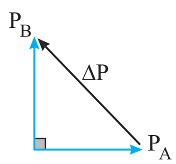
$$P=mv\xrightarrow[v=۴m/s]{m=۵۰۰kg}P=۵۰۰\times۴$$

$$\Rightarrow P=۲۰۰۰kgm/s\Rightarrow P_A=P_B=۲۰۰۰kgm/s$$

نکته اندازهٔ تفاضل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که بر هم عمودند از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{A^{۲}+B^{۲}}$$

بردار P_A و P_B بر هم عمودند و تغییر تکانه خواهد شد:

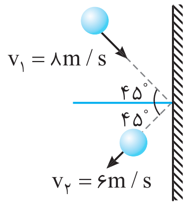


$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_B-\vec{P}_A\Rightarrow\Delta P=\sqrt{P_A^{۲}+P_B^{۲}}$$

$$\Rightarrow\Delta P=\sqrt{(۲۰۰۰)^{۲}+(۲۰۰۰)^{۲}}$$

$$\Rightarrow\Delta P=۲۰۰۰\sqrt{۲}kgm/s$$

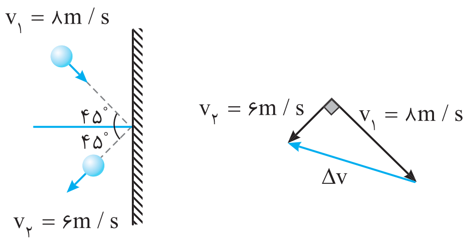
بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای به جرم ۲۰۰g به مانع برخورد کرده و از آن برمی‌گردد. تغییر تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۴ ۲) ۲

۳) ۰/۶ ۴) ۲/۸

پاسخ همسنگ دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم:



$$\Delta v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}\Rightarrow\Delta v=\sqrt{8^2+6^2}=10m/s$$

تغییر تکانهٔ جسم برابر است با:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=0/2\times10=2kgm/s$$

گزینهٔ ۲

A ۹۴۹ | ۳

۱ تکانهٔ جسم ۴۰kgm/s شده است، سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$P=mv\xrightarrow{m=5kg}40=5v\Rightarrow v_2=8m/s$$

۲ سرعت متحرک در جابه‌جایی ۱۰m از صفر به ۸m/s رسیده است به کمک معادله مستقل از شتاب، زمان طی شده را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow10=\frac{8+0}{2}\Delta t\Rightarrow\Delta t=2/5s$$

۳ نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{net}=\frac{40-0}{2/5}\Rightarrow F_{net}=16N$$

A ۹۵۰ | ۱

با توجه به رابطهٔ $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ نیروی وارد بر جسم A و B را حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}F_A=\frac{\Delta P_A}{\Delta t_A}\xrightarrow{\Delta P=12kgm/s,\ \Delta t=0/05s}F_A=\frac{12}{0/05}=240N\\ F_B=\frac{\Delta P_B}{\Delta t_B}\xrightarrow{\Delta P=60kgm/s,\ \Delta t=0/2s}F_B=\frac{60}{0/2}=300N\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{F_A}{F_B}=\frac{240}{300}\Rightarrow\frac{F_A}{F_B}=\frac{4}{5}$$

A ۹۵۱ | ۲

۱ تکانهٔ جسم ۴۰ درصد افزایش یافته پس $P_2=1/4P_1$ است، بنابراین با توجه به رابطهٔ نیرو، تغییر تکانه می‌توان نوشت:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow{F=10N,\ \Delta t=4s}10=\frac{P_2-P_1}{4}$$
$$\Rightarrow1/4P_1-P_1=(10\times4)\Rightarrow0/4P_1=40\Rightarrow P_1=100kg.m/s$$

۲ با توجه به تعریف تکانه، سرعت را حساب می‌کنیم:

$$P_1=mv_1=100kg.m/s\Rightarrow2\times v_1=100kg.m/s\Rightarrow v_1=50m/s$$

A ۹۵۲ | ۱

دو جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و تکانهٔ اولیهٔ آن‌ها صفر است. با توجه به رابطهٔ $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Delta P_1=Ft\xrightarrow[P_{01}=0]{\Delta P_1=P_1-P_{01}}P_1=Ft\\ \Delta P_2=\frac{F}{3}(2t)\xrightarrow[P_{02}=0]{\Delta P_2=P_2-P_{02}}P_2=\frac{2}{3}Ft\end{cases}$$

نسبت $\frac{P_2}{P_1}$ خواهد شد: $\frac{P_2}{P_1}=\frac{Ft}{\frac{2}{3}Ft}\Rightarrow\frac{P_2}{P_1}=\frac{3}{2}$

A ۹۵۳ | ۳

۱ با استفاده از رابطهٔ بین نیرو و تکانه، نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow[P_2=500kgm/s,\ \Delta t=20s]{P_1=300kgm/s}F=\frac{500-300}{20}\Rightarrow F=10N$$

۲ شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F=ma\xrightarrow{m=2kg}10=2a\Rightarrow a=5m/s^2$$

A ۹۵۴ | ۴

تکانهٔ اولیهٔ چکش برابر است با:

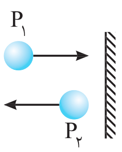
$$P_1=mv_1\xrightarrow{v_1=15m/s}P_1=0/8\times15\Rightarrow P_1=12kgm/s$$

تکانهٔ نهایی چکش صفر است $(v_2=0\Rightarrow P_2=0)$ بنابراین بزرگی نیروی متوسطی که بر چکش وارد می‌شود خواهد شد:

$$F_{net}=\frac{P_2-P_1}{\Delta t}\xrightarrow{t=3\times10^{-3}s}F_{net}=\frac{12}{3\times10^{-3}}\Rightarrow F_{net}=4000N$$

A ۹۵۵ | ۳

نیروی متوسط وارد بر متحرک در هنگام برخورد برابر آهنگ تغییر تکانه است. $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$



نکته مهم این است که اگر P_1 مثبت باشد، P_2 منفی است و تفاضل P_1 و P_2 خواهد شد.

$$|\Delta P|=|P_1-(-P_2)|\Rightarrow|\Delta P|=|P_1+P_2|\Rightarrow|\Delta P|=|P_1|+|P_2|$$

یعنی اندازهٔ تفاضل P_1 و P_2 از اندازهٔ هریک از تکانه‌های P_1 و P_2 بزرگ‌تر است، بنابراین:

$$|F_{av}|=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow|F_{av}|=\frac{|P_1|+|P_2|}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}|F_{av}|>\frac{|P_1|}{\Delta t}\\ |F_{av}|>\frac{|P_2|}{\Delta t}\end{cases}$$

B ۹۵۶ | ۳

۱ سرعت‌ها را برحسب m/s می‌نویسیم.

$$v_1=54km/h=\frac{54}{3/6}m/s\Rightarrow v_1=15m/s$$
$$v_2=18km/h=\frac{18}{3/6}m/s\Rightarrow v_2=5m/s$$

۲ سرعت برخورد $\vec{v}_1=15\vec{i}$ و سرعت بازگشت $\vec{v}_2=-5\vec{i}$ است.

۳ تکانهٔ قبل و بعد از برخورد را حساب می‌کنیم $(m=1200kg)$.

$$\vec{P}=m\vec{v}\Rightarrow\vec{P}_1=1200\times(15\vec{i})\ ,\ \vec{P}_2=1200\times(-5\vec{i})$$

۴ بردار تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1\Rightarrow\Delta\vec{P}=1200(-5\vec{i}-15\vec{i})\Rightarrow\Delta\vec{P}=-24000\vec{i}=-2/4\times10^4\vec{i}$$

۵ بردار نیروی متوسط وارد بر خودرو خواهد شد:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=0/15s}\vec{F}=\frac{-24000\vec{i}}{0/15}\Rightarrow\vec{F}=-1/6\times10^5\vec{i}$$

A ۹۵۷ | ۲

نیروی متوسطی که به جعبه در مدت $0/2s$ وارد می‌شود به راحتی قابل محاسبه است:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{m(\Delta v)}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{50(10-0)}{0/2}\Rightarrow F_{av}=2500N$$

A ۹۵۸ | ۲

سرعت اتومبیل را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v_1=54km/h\times\frac{10^3m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}\Rightarrow v_1=\frac{54}{3/6}=15m/s$$

سرعت شخص نیز $15m/s$ بوده و هنگام توقف اتومبیل سرعت شخص نیز صفر می‌شود بنابراین نیرویی که کمربند ایمنی باید به شخص در مدت $0/3s$ وارد کند برابر است با:

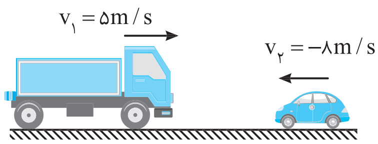
$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{m(\Delta v)}{\Delta t}\xrightarrow{m=60kg}F_{av}=\frac{60(15-0)}{0/3}$$

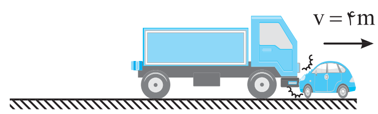
$$\Rightarrow F_{av}=\frac{60\times15}{0/3}=3000N$$

A ۹۵۹ | ۴

خط فکری بـا دقت زیاد به صورت مسـئله توجه کنید. این مسـئله نیرویی که بر کامیون و خودرو وارد می‌شـود را از شـما نمی‌خواهد بلکه نیروی وارد بر راننده‌ها از شـما خواسـته شـده است. شتاب توقف کامیون و خودرو را حساب می‌کنیم، زیرا شتاب توقف راننده‌ها و شتاب حرکت کامیون و خودرو یکی است.

۱ جهت حرکت کامیون را جهت مثبت فرض می‌کنیم.





۲ شتاب حرکت کامیون یا خودرو را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}$$

اتومبیل: $|a'_{av}|=|\frac{4+8}{0/2}|\Rightarrow|a'_{av}|=\frac{12}{0/2}=60m/s^2$

کامیون: $|a_{av}|=|\frac{4-5}{0/2}|\Rightarrow|\bar{a}|=+5m/s^2$

۳ نیروی وارد بر راننده کامیون برابر است با:

$$F_{av}=ma_{av}\Rightarrow F_{av}=100\times5=500N$$

۴ نیروی وارد بر راننده اتومبیل برابر است با:

$$F'_{av}=ma'_{av}\Rightarrow F'_{av}=100\times60=6000N$$

۵ نسبت دو نیرو خواهد شد:

$$\frac{F'}{F}=\frac{6000}{500}=12$$

A ۹۶۰ | ۳

۱ شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F=ma\xrightarrow{F=3N,\,m=2kg}3=2a\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

۲ سرعت جسم در $t=4s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\xrightarrow{v_0=5m/s}v=1/5\times4+5\Rightarrow v=11m/s$$

۳ تکانه جسم خواهد شد:

$$P=mv\Rightarrow P=2\times11\Rightarrow P=22kgm/s$$

A ۹۶۱ | ۲

یادآوری متحرکی که روی خط راست در حرکت است برای آنکه تغییر جهت بدهد ابتدا باید سرعت آن صفر شده و سرعت تغییر علامت دهد.

اگر جهت سـرعت جسـم را مثبت در نظر بگیریم $v_1=+10m/s$ و چون نیروی F در خلاف جهت حرکت به جسـم وارد می‌شود برابر $F=-5N$ می‌شود بنابراین بازه زمانی که سرعت از $+10m/s$ به صفر می‌رسد خواهد شد:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow-5=\frac{m(v_2-v_1)}{\Delta t}\xrightarrow{m=2kg}-5=\frac{2(0-10)}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=4s$$

بازی با سؤال **به جسـمی به جرم $3kg$ که با سرعت $5m/s$ در جهت مثبت محور حرکت می‌کند، نیروی $6N$ در خلاف جهت حرکت آن وارد می‌شود. پس از چند ثانیه بزرگی تکانه با بزرگی تکانهٔ اولیهٔ آن برابر می‌گردد؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **خط فکری** **بزرگـی تکانه با بزرگی تکانهٔ اولیه برابر شـود یعنی انـدازهٔ سـرعت با حالـت اولیـه برابر شـود، بنابراین اگر $v_1=5m/s$ باشـد، $v_2=-5m/s$ می‌شـود. با توجه به این مطلب مسـئله را حل می‌کنیم. البته نیرو خلاف جهت حرکت $(F=-6N)$ است.**

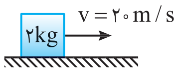
$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m(\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t})\xrightarrow{m=3kg}-6=3(\frac{-5-5}{\Delta t})\Rightarrow\Delta t=5s$$

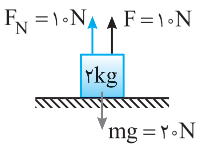
گزینهٔ ٤

A ۹۶۲ | ۱

تکانه در راستای افقی برابر است با: $P_x=mv_x=40kg.m/s$

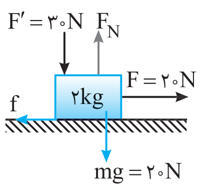
نیروی F عمود بر مسـیر حرکت (در راسـتای قائم) وارد شده اسـت و تأثیری روی تکانهٔ جسم ندارد و تکانه همچنان $40kgm/s$ خواهد بود.





A ۹۶۳ | ۱

نیروها به جسم ساکن وارد شده پس باید حرکت یا ساکن ماندن جسم بررسی شود. به این منظور لازم اسـت نیروی F را با نیروی اصطکاک بیشـینه مقایسه کنیم، اگر $F<f_{s_{max}}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و اگر $F>f_{s_{max}}$ باشد جسم شروع به حرکت می‌کند.



۱ جسم در راستای قائم ساکن است:

$$F_N=mg+F'\Rightarrow F_N=20+30\Rightarrow F_N=50N$$

۲ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:

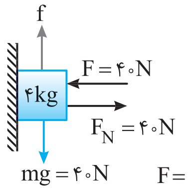
$$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s_{max}}=0/5\times50\Rightarrow f_{s_{max}}=25N$$

۳ چون نیروی F کوچک‌تر از $f_{s_{max}}$ اسـت پس جسـم حرکت نکرده و تغییر تکانه جسم صفر است.

A ۹۶۴ ۳

راه‌حل اول:

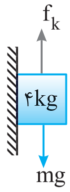
۱ ابتدا باید بررسی کرد که جسم حرکت می‌کند یا نه، برای این کار نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:



$F=F_N\Rightarrow F_N=۴۰N$

$f_{s\,max}=\mu_s F_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۵}f_{s\,max}=۰/۵\times۴۰=۲۰N$

۲ چون $mg>f_s$ بوده پس جسم رو به پایین شروع به حرکت کرده و به آن نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شوند. نیروی اصطکاک جنبشی خواهد شد:



$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{\mu_k=۰/۳}f_k=۰/۳\times۴۰=۱۲N$

نیروی خالص وارد بر جسم را برابر ma قرار می‌دهیم و شتاب را حساب می‌کنیم.

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-f_k=ma\Rightarrow ۴۰-۱۲=۴a\Rightarrow a=۷m/s^۲$

۳ سرعت جسم را پس از ۲s به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}v_۱=۰\\a=۷m/s^۲\\t=۲s\\v_۲=?\end{cases}\Rightarrow v_۲=at+v_۱\Rightarrow v_۲=۷\times۲+۰\Rightarrow v_۲=۱۴m/s$$

۴ تکانه را حساب می‌کنیم.　$P=mv\Rightarrow P=۴\times۱۴=۵۶kgm/s$

راه‌حل دوم: برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای حرکت برابر $F_{net}=mg-f_k=۲۸N$ است پس:

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow[P_۱=۰,\Delta t=۲s]{F_{net}=۲۸N}۲۸=\frac{P_۲-۰}{۲}\Rightarrow P_۲=۵۶kgm/s$$

A ۹۶۵ ۱

۱ با توجه به رابطهٔ $\vec F=\frac{\Delta\vec P}{\Delta t}$ تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta\vec P=\vec F\Delta t\Rightarrow\Delta\vec P=(۱۶\vec i+۱۲\vec j)۰/۵\Rightarrow\Delta\vec P=۸\vec i+۶\vec j$

۲ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده پس $P_۱=۰$ بنابراین $\vec P_۲$ خواهد شد:

$\vec P_۲-\vec P_۱=۸\vec i+۶\vec j\Rightarrow\vec P_۲=۸\vec i+۶\vec j$

۳ اندازهٔ تکانه را حساب می‌کنیم:　$|\vec P_۲|=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰kg.m/s$

A ۹۶۶ ۱

نکته دو بردار $\vec A=A_x\vec i+A_y\vec j$ و $\vec B=B_x\vec i+B_y\vec j$ وقتی برابرند که مؤلفه‌های آن نظیربه‌نظیر برابر باشد.

۱ با توجه به رابطهٔ $\vec F_{net}=\frac{\Delta\vec P}{\Delta t}$ نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$$\vec F_{net}=\frac{\vec P_۲-\vec P_۱}{\Delta t}\xrightarrow[P_۱=۰\ \text{شروع به حرکت کرده}]{\text{جسم از حال سکون}}$$

$$\vec F_{net}=\frac{\vec P_۲}{\Delta t}=\frac{۶\vec i-۱۲\vec j}{۳}\Rightarrow\vec F_{net}=۲\vec i-۴\vec j$$

۲ نیروی برایند برابر است با:

$\vec F_۱+\vec F_۲=\vec F_{net}\Rightarrow(۷\vec i+۱۰\vec j)+(a\vec i+b\vec j)=۲\vec i-۴\vec j$

$$\Rightarrow(۷+a)\vec i+(۱۰+b)\vec j=۲\vec i-۴\vec j\Rightarrow\begin{cases}۷+a=۲\Rightarrow a=-۵\\۱۰+b=-۴\Rightarrow b=-۱۴\end{cases}$$

$\Rightarrow a+b=-۵-۱۴=-۱۹$

B ۹۶۷ ۳

۱ شتاب حرکت جسم را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم.

$$\vec F=m\vec a\xrightarrow[m=۲kg]{\vec F=-۵\vec i+۲\vec j}-۵\vec i+۲\vec j=۲\vec a\Rightarrow\vec a=-۲/۵\vec i+\vec j$$

۲ بنا به فرض مسئله سرعت متحرک را در $t=۱s$ برابر $\vec v_۱=۵\vec i+۳\vec j$ است

سرعت متحرک را در $t=۳s$ به کمک تعریف شتاب حساب می‌کنیم.

$$\vec a=\frac{\vec v_۲-\vec v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow-۲/۵\vec i+\vec j=\frac{\vec v_۲-۵\vec i-۳\vec j}{۳-۱}$$

$$\Rightarrow-۵\vec i+۲\vec j=\vec v_۲-۵\vec i-۳\vec j\Rightarrow\vec v_۲=+۵\vec j$$

۳ تکانه در لحظهٔ $t=۳s$ خواهد شد:

$\vec P=m\vec v\Rightarrow\vec P=۲\times(+۵\vec j)=+۱۰\vec j\Rightarrow|P|=۱۰kg.m/s$

A ۹۶۸ ۳

از رابطهٔ $P=mv$ ، سرعت را برحسب P و m به‌دست می‌آوریم:

$P=mv\Rightarrow v=\frac{P}{m}$

سرعت را در رابطهٔ انرژی جنبشی قرار می‌دهیم:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}m(\frac{P}{m})^۲\Rightarrow K=\frac{P^۲}{۲m}$$

A ۹۶۹ ۲

۱ تکانهٔ اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$P_۱=mv_۱\xrightarrow[v_۱=۱۰m/s]{m=۴kg}P_۱=۴\times۱۰\Rightarrow P_۱=۴۰kg.m/s$$

۲ انرژی جنبشی جسم ۹ برابر شده است.　$K_۲=۹K_۱\quad(I)$

۳ به جای انرژی جنبشی مقدار $K=\frac{P^۲}{۲m}$ را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم.

$$\frac{P_۲^۲}{۲m}=۹\frac{P_۱^۲}{۲m}\Rightarrow P_۲=۳P_۱\Rightarrow P_۲=۳\times۴۰=۱۲۰kgm/s$$

۴ تغییر تکانه خواهد شد:

$\Delta P=P_۲-P_۱=۱۲۰-۴۰\Rightarrow\Delta P=۸۰kg.m/s$

A ۹۷۰ ۴

با توجه به رابطهٔ بین انرژی جنبشی و تکانه، انرژی جنبشی گلوله و دونده را برابر قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم:

$$K=\frac{P^۲}{۲m}\Rightarrow K_{\text{دونده}}=K_{\text{گلوله}}\Rightarrow\frac{P^۲_{\text{دونده}}}{۲\times۴۰}=\frac{P^۲_{\text{گلوله}}}{۲\times۰/۱}$$

$$\Rightarrow P^۲_{\text{دونده}}=۴۰۰P^۲_{\text{گلوله}}\Rightarrow P_{\text{دونده}}=۲۰P_{\text{گلوله}}$$

بازی با سؤال **تکانهٔ اتومبیلی به جرم یک تن با تکانهٔ کامیونی به جرم پنج تن برابر است. انرژی جنبشی کامیون چند برابر انرژی جنبشی اتومبیل است؟**

ریاضی - ۸۹

۱) ۵　۲) ۲۵　۳) $\frac{۱}{۵}$　۴) $\frac{۱}{۲۵}$

پاسخ **تکانهٔ جسم برابر $P=mv$ و انرژی جنبشی آن $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ است.**

بنابراین بین تکانه و انرژی جنبشی رابطهٔ روبه‌رو برقرار است.　$K=\frac{P^۲}{۲m}$

اکنون به حل تست می‌پردازیم:

$$P(\text{اتومبیل})=P(\text{کامیون}),\ m(\text{کامیون})=۵m(\text{اتومبیل}),\ K=\frac{P^۲}{۲m}$$

$$\Rightarrow K(\text{کامیون})=\frac{۱}{۵}K(\text{اتومبیل})$$

گزینهٔ ۳

A ۹۷۱ ۲

با توجه به فرض مسئله $P_A=P_B$ و $m_B=3m_A$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}K_A=\frac{P_A^2}{2m_A}\\K_B=\frac{P_B^2}{2m_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_B}{m_A}\times\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^2$$

$$\xrightarrow{K_A=18J}\frac{18}{K_B}=\frac{3m_A}{m_A}\Rightarrow K_B=6J$$

A ۹۷۲ ۱

نکته رابطهٔ بین تکانه و انرژی جنبشی $K=\frac{P^2}{2m}$ است.

با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه نسبت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{P_A^2}{2m_A}}{\frac{P_B^2}{2m_B}}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_B}{m_A}\times\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^2$$

$$\xrightarrow{m_B=\frac{5}{8}m_A,\ P_A=\frac{4}{3}P_B}\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{5}{8}m_A}{m_A}\times\left(\frac{\frac{4}{3}P_B}{P_B}\right)^2=\frac{5}{8}\times\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{10}{9}$$

B ۹۷۳ ۳

۱ انرژی جنبشی ٪۷۵ کاهش یافته است. بنابراین:

$$K_2=\frac{25}{100}K_1\Rightarrow K_2=\frac{1}{4}K_1$$

۲ با توجه به رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\begin{cases}K_1=\frac{P_1^2}{2m_1}\\K_2=\frac{P_2^2}{2m_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{K_2}{K_1}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\times\frac{m_1}{m_2}$$

$$\xrightarrow{m_1=m_2}\frac{K_2}{K_1}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\Rightarrow P_2=\frac{1}{2}P_1$$

۳ درصد تغییرات تکانه خواهد شد:

$$\frac{\Delta P}{P_1}\times100=\frac{P_2-P_1}{P_1}\times100=\frac{\frac{1}{2}P_1-P_1}{P_1}\times100\Rightarrow\text{درصد تغییر اندازه تکانه}=-50\%$$

A ۹۷۴ ۳

نکته با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی و رابطهٔ تکانه می‌توانیم K را برحسب P بنویسیم:

$$\begin{cases}P=mv\\K=\frac{1}{2}mv^2\end{cases}\Rightarrow K=\frac{P^2}{2m}$$

درصد تغییر انرژی جنبشی برابر است با:

$$\frac{K_2-K_1}{K_1}\times100=\frac{\frac{P_2^2}{2m}-\frac{P_1^2}{2m}}{\frac{P_1^2}{2m}}\times100=\frac{P_2^2-P_1^2}{P_1^2}\times100$$

$$\xrightarrow[P_2=22,\ P_1=20]{P_2=P_1+2}\frac{(P_1+2)^2-P_1^2}{P_1^2}\times100=\frac{P_1^2+4+4P_1-P_1^2}{P_1^2}\times100$$

$$=\frac{4+4\times(20)}{(20)^2}\times100=\frac{84}{4}\%=21\%$$

A ۹۷۵ ۴

تکانه کمیت برداری است $(\vec{P}=m\vec{v})$، بنابراین جهت بردار تکانه می‌تواند تغییر کند در حالی که اندازهٔ تکانه ثابت باشد مثلاً در حرکت یک خودرو با سرعت $5m/s$ به دور یک میدان، بردار سرعت و در نتیجه بردار تکانه در حال تغییر است و گزینهٔ (۱) نادرست است، اما اندازهٔ سرعت و هم‌چنین انرژی جنبشی این خودرو $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ ثابت است و گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است، بنابراین با تغییر تکانه قطعاً بردار سرعت تغییر کرده اما انرژی جنبشی ممکن است ثابت یا متغیر باشد و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۹۷۶ ۲

با توجه به تعریف تکانه $P=mv$ و انرژی جنبشی $K=\frac{1}{2}mv^2$ بین تکانه و انرژی جنبشی جسم رابطهٔ زیر برقرار است.

$$K=\frac{P^2}{2m}\Rightarrow\frac{K'}{K}=\frac{P'^2}{P^2}\Rightarrow4=\frac{P'^2}{P^2}\Rightarrow P'=2P\Rightarrow mv'=2mv\Rightarrow v'=2v$$

از طرفی بنا به فرض مسأله $v'=v+8$ است. پس:

$$v'=2v\ ,\ v'=v+8\Rightarrow2v=v+8\Rightarrow v=8m/s$$

$$\xrightarrow{P=mv}P=2\times8=16kg.m/s$$

A ۹۷۷ ۴

۱ ابتدا بردار تکانه در $t=2s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{P}=3t^2\vec{i}+8t\vec{j}\xrightarrow{t=2s}\vec{P}=3(2)^2\vec{i}+8(2)\vec{j}=12\vec{i}+16\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{P}=12\vec{i}+16\vec{j}$$

۲ بزرگی تکانه را حساب می‌کنیم.

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2}\Rightarrow P=\sqrt{12^2+16^2}\Rightarrow P=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}$$

$$\Rightarrow P=20kgm/s$$

۳ به کمک رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه، انرژی جنبشی را به‌دست می‌آوریم.

$$K=\frac{P^2}{2m}\xrightarrow{m=5kg}K=\frac{20^2}{2\times5}\Rightarrow K=40J$$

بازی با سؤال **بردار تکانهٔ جسمی در SI به‌صورت $\vec{P}=(3t^2)\vec{i}+(2b-6)t\vec{j}$ است. اگر اندازهٔ متوسط نیروهای وارد بر جسم در دو ثانیهٔ اول حرکت برابر با $10N$ باشد، b برابر کدام گزینه است؟**

۱) ۷ **۲)** ۳

۳) −۱ **۴)** گزینهٔ (۱) و گزینهٔ (۳) می‌تواند پاسخ باشد.

پاسخ **با توجه به رابطهٔ $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ بردار نیرو را محاسبه می‌کنیم:**

$$\vec{F}=\frac{\vec{P}_2-\vec{P}_1}{\Delta t}\Rightarrow\vec{F}=\frac{12\vec{i}+(2b-6)2\vec{j}-0}{2-0}\Rightarrow\vec{F}=6\vec{i}+(2b-6)\vec{j}$$

بزرگی نیرو برابر است با:

$$|\vec{F}|=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow|\vec{F}|=10=\sqrt{6^2+(2b-6)^2}$$

$$\Rightarrow100=36+(2b-6)^2\Rightarrow(2b-6)^2=64\Rightarrow\begin{cases}2b-6=8\Rightarrow b=7\\2b-6=-8\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

گزینهٔ ٤

A ۹۷۸ ۲

خط فکری سؤال مفهومی خوبی است. آهنگ تغییر تکانه برابر نیروی خالص وارد بر جسم است $\left(\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\right)$ و بردار نیروی خالص و بردار تغییر تکانه هم‌جهت هستند، بنابراین برای اینکه مشخص کنید که جهت تغییر تکانه کدام است باید جهت نیروی خالص وارد بر جسم را مشخص کنید.

جسم در شرایط خلأ رو به بالا پرتاب شده است و تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن رو به پایین است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم در امتداد قائم و رو به پایین بوده در نتیجه تغییر تکانه نیز رو به پایین می‌باشد.

A ۹۷۹ ۴

خط فکری نیروی وارد بر جسم برابر آهنگ تغییر تکانه $(\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t})$ است. یعنی تغییر تکانه در هر ثانیه برابر نیروی وارد بر جسم است بنابراین در بررسی تغییر تکانه باید به سراغ نیروی وارد بر جسم برویم.

جسم در شرایط خلأ رها شده است و تنها نیروی وارد بر آن نیروی وزن $(W=mg)$ است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow mg=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P=mg\Delta t\xrightarrow{\Delta t=۱s}\Delta P=mg$$

در نتیجه در هر ثانیه تغییر تکانه به اندازهٔ mg است یعنی در هر ثانیه به اندازهٔ mg به اندازهٔ تکانه اضافه می‌شود و گزینهٔ (۱) و (۲) درست است.

A ۹۸۰ ۱

۱ تکانهٔ اولیه را حساب می‌کنیم.

$$P=mv\xrightarrow[m=۵\times۱۰^{-۲}kg]{v_۱=۱۴m/s}P_۱=۵\times۱۰^{-۲}\times۱۴\Rightarrow P_۱=۰/۷kgm/s$$

۲ تکانه را یک ثانیه بعد که سرعت برابر $۲۳m/s$ می‌شود به‌دست می‌آوریم.

$$P_۲=mv_۲\Rightarrow P_۲=۵\times۱۰^{-۲}\times۲۳\Rightarrow P_۲=۱/۱۵kgm/s$$

۳ تغییر تکانه خواهد شد:

$$P_۲-P_۱=۱/۱۵-۰/۷\Rightarrow\Delta P=۰/۴۵kgm/s=\frac{۹}{۲۰}kg.m/s$$

A ۹۸۱ ۲

نکته هرگاه جسمی به جرم m در شرایط خلأ در مجاورت سطح زمین از ارتفاع h به هر طرفی پرتاب شود، تغییر تکانهٔ آن خواهد شد:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F\Delta t\xrightarrow{F=mg}\Delta P=mg\Delta t$$

بازهٔ زمانی ثانیهٔ دوم حرکت برابر $\Delta t=۱s$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta P=mg\Delta t\xrightarrow[m=۰/۲kg]{\Delta t=۱}\Delta P=۲kg.m/s$$

بازی با سؤال **پرتابه‌ای به جرم m با سرعت اولیهٔ $v_۰$ تحت زاویهٔ α نسبت به افق پرتاب می‌شود و پس از ۳t ثانیه به زمین می‌رسد. بزرگی تغییر تکانهٔ پرتابه در t ثانیهٔ اول حرکت، کدام است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)**

ریاضی - ۹۷

۱) $۲mgt$ ۲) mgt ۳) $\frac{mv_۰}{۳}$ ۴) $\frac{۲mv_۰}{۳}$

پاسخ **تغییرتکانه برابر است با: $\Delta P=F\Delta t$ ، تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن است، از این‌رو:** $\Delta P=mgt$

گزینهٔ ۲

A ۹۸۲ ۱

اگر سرعت رو به بالا را مثبت بگیریم $v_۱=+۵m/s$ ، سرعت آن در برگشت منفی و برابر $v_۲=-۵m/s$ است و تنها نیروی وارد بر گلوله نیروی وزن است بنابراین با توجه به رابطهٔ بین نیروی متوسط و تغییرات تکانه داریم:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F_{av}\Delta t\Rightarrow\Delta P=mg\Delta t$$

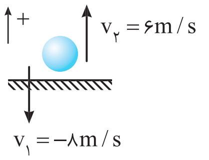
$$\Rightarrow m(\Delta v)=mg\Delta t\Rightarrow m(-۵-(+۵))=m(-۱۰)\times\Delta t\Rightarrow\Delta t=۱s$$

روش دیگر: وقتی تنها نیروی خالص وارد بر جسم وزن است شتاب جسم برابر شتاب گرانش $(a=-g)$ است بنابراین:

$$a=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow-۱۰=\frac{-۵-۵}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=۱s$$

B ۹۸۳ ۳

۱ اگر جهت مثبت را رو به بالا در نظر بگیریم سرعت اولیه $v_۱=-۸m/s$ و $v_۲=+۶m/s$ خواهد شد.

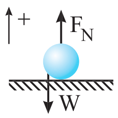


۲ نیروی خالص متوسط وارد بر توپ را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=m(\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t})$$

$$\xrightarrow[\Delta t=۳۵\times۱۰^{-۲}s]{m=۲kg}F_{net}=۲\times\frac{(۶-(-۸))}{۳۵\times۱۰^{-۲}}=\frac{۲۸\times۱۰^{۲}}{۳۵}\Rightarrow F_{net}=۸۰N$$

۳ نیرویی که سطح زمین به توپ وارد می‌کند را حساب می‌کنیم. $F_{net}=F_N-W\Rightarrow۸۰=F_N-۲۰\Rightarrow F_N=۱۰۰N$



۴ نسبت $\frac{F_{net}}{F_N}$ خواهد شد: $\frac{F_{net}}{F_N}=\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۴}{۵}$

B ۹۸۴ ۳

نکته نیروی خالص متوسط به کمک تکانه از رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید.

۱ تکانه در $t_۱=۳s$ را حساب می‌کنیم:

$$P_۱=۱۵t_۱^۲+۵t_۱\Rightarrow P_۱=۱۵(۳)^۲+۵(۳)=۱۳۵+۱۵=۱۵۰kgm/s$$

۲ تکانه در $t_۲=۶s$ را حساب می‌کنیم:

$$P_۲=۱۵t_۲^۲+۵t_۲\Rightarrow P_۲=۱۵(۶)^۲+۵(۶)=۱۵(۳۶+۲)\Rightarrow P_۲=۵۷۰kgm/s$$

۳ در گام آخر با رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ ، F_{av} را حساب می‌کنیم:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{P_۲-P_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow F_{av}=\frac{۵۷۰-۱۵۰}{۶-۳}=\frac{۴۲۰}{۳}\Rightarrow F_{av}=۱۴۰N$$

بازی با سؤال **معادلهٔ تکانه زمان جسمی به جرم ۲۰۰g در SI به صورت $P=t^۲-۲t-۱$ است. نیروی متوسط وارد بر جسم در بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۳s$ چند نیوتون است؟**

خارج تجربی - ۹۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰/۵

پاسخ ۱ **تکانه را در دو لحظهٔ $t_۱=۱s$ و $t_۲=۳s$ به‌دست می‌آوریم.**

$$P=t^۲-۲t-۱\begin{cases}\xrightarrow{t_۱=۱s}P_۱=۱-۲-۱\Rightarrow P_۱=-۲kgm/s\\ \xrightarrow{t_۲=۳s}P_۲=۹-۶-۱\Rightarrow P_۲=۲kgm/s\end{cases}$$

۲ **نیروی متوسط وارد بر جسم خواهد شد:**

$$F_{av}=\frac{P_۲-P_۱}{\Delta t}\Rightarrow_{av}=\frac{۲-(-۲)}{۳-۱}\Rightarrow F_{av}=۲N$$

گزینهٔ ۲

A ۹۸۵ ۲

نیروی متوسط وارد بر جسم برابر با $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ است، بنابراین ابتدا تغییر تکانه از $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۴s$ را به‌دست آوریم:

۱ سرعت جسم را در دو لحظهٔ $t_۱=۲s$ و $t_۲=۴s$ به‌دست می‌آوریم.

$$v=t^۲-۲t+۳\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۲s\Rightarrow v_۱=۴-۴+۳\Rightarrow v_۱=۳m/s\\ t_۲=۴s\Rightarrow v_۲=۱۶-۸+۳\Rightarrow v_۲=۱۱m/s\end{cases}$$

۲ تغییر تکانهٔ جسم خواهد شد:

$$\Delta P=P_۲-P_۱\Rightarrow\Delta P=mv_۲-mv_۱\Rightarrow\Delta P=m(v_۲-v_۱)$$

$$\xrightarrow{m=۲kg}\Delta P=۲(v_۲-v_۱)=۲(۱۱-۳)=۱۶kg.m/s$$

۳ نیروی متوسط وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{۱۶}{۲}=۸N$$

B ۹۸۶ ۱

خط فکری کافی است با توجه به جرم $m=4kg$ و رابطهٔ تکانه - زمان $P=8t^2-8$، ابتدا تکانه در لحظهٔ $t_1=0$ و $t_2=2s$ را حساب کرده سپس سرعت جسم را در این لحظات به‌دست آورده و سرانجام به کمک تعریف شتاب، شتاب جسم را حساب کنید.

در لحظه‌های $t=0$ و $t=2s$، تکانهٔ جسم را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک $P=mv$، سرعت‌ها را در این دو لحظه حساب می‌کنیم.

$$t_1=0 \Rightarrow P=0-8=-8kg.m/s$$

$$\xrightarrow{P=mv} -8=4v_1 \Rightarrow v_1=-2m/s$$

$$t_2=2s \Rightarrow P=32-8=24kg.m/s$$

$$\xrightarrow{P=mv} 24=4v_2 \Rightarrow v_2=6m/s$$

شتاب متوسط جسم خواهد شد:
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av}=\frac{6-(-2)}{2}=4\,m/s^2$$

بازی با سؤال **معادلهٔ تکانهٔ جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند نسبت به زمان در SI به صورت $P(t)=t^2-5t+6$ است. در چه زمانی برحسب ثانیه جهت شتاب تغییر می‌کند؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲/۵

پاسخ **تکانه برابر mv می‌باشد از این‌رو:**

$$P=mv(t)=t^2-5t+6 \Rightarrow v(t)=\frac{1}{m}t^2-\frac{5}{m}t+\frac{6}{m}$$

معادلهٔ v، درجه دوم (سهمی) می‌باشد. می‌دانیم در رأس سهمی شیب خط مماس صفر و شیب خط مماس نمودار $v-t$ برابر شتاب است در نتیجه در رأس سهمی نمودار $v-t$ شتاب صفر شده و تغییر جهت می‌دهد.

$$\text{رأس سهمی}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(\frac{-5}{m})}{\frac{2}{m}}=\frac{5}{2}=2/5s$$

گزینهٔ ۴

B ۹۸۷ ۴

به سراغ حرکت‌شناسی بروید و با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیه را تعیین کنید.

۱ معادلهٔ $x-t$ درجه دوم می‌باشد و ضریب t^2 برابر $\frac{1}{2}a$ و ضریب t برابر v_0 است، از این‌رو:

$$\begin{cases} x=2t^2-4t+4 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a=2 \Rightarrow a=4m/s^2\,,\, v_0=-4m/s\,,\, x_0=4m$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان متحرک را می‌نویسیم و سرعت آن را در لحظهٔ $t=3s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=4t-4 \xrightarrow{t=3s} v=12-4=8m/s$$

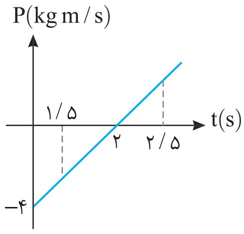
۳ تکانه در لحظهٔ $t=3s$ خواهد شد:

$$P=mv \Rightarrow P=0/2\times8=1/6kg.m/s$$

B ۹۸۸ ۴

خط فکری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت جسم است $(P=mv)$ هرگاه بزرگی تکانه افزایش یابد یعنی تندی جسم در حال افزایش و حرکت تندشونده است و اگر بزرگی تکانه کاهش یابد یعنی تندی جسم در حال کاهش و حرکت کندشونده است. بنابراین شما باید بررسی کنید که در بازهٔ زمانی $t_1=1/5s$ تا $t_2=2/5s$، بزرگی تکانه در حال افزایش است یا کاهش؟ رسم یک نمودار ساده $(P-t)$ مشکل را حل خواهد کرد.

نمودار $P-t$ به صورت روبه‌رو است.



می‌دانیم که $P=mv$ است پس هنگامی که نمودار متحرک به سمت محور t حرکت می‌کند یعنی بزرگی تکانه در حال کاهش بوده و بزرگی سرعت در حال کاهش و حرکت کندشونده است و هنگامی که نمودار متحرک از محور t دور می‌شود و بزرگی تکانه افزایش می‌یابد یعنی بزرگی سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده می‌باشد. تکانهٔ متحرک در $t=2s$، صفر می‌شود پس در $t=1/5s$ حرکت متحرک کندشونده و در $t=2/5s$ حرکت تندشونده است.

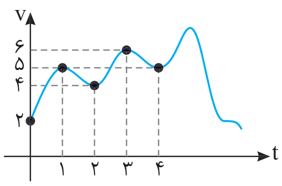
A ۹۸۹ ۴

تکانه ثابت یعنی سرعت حرکت ثابت است بنابراین باید به دنبال نمودارهایی بگردیم که در آن‌ها سرعت ثابت است. نمودار a مربوط به نمودار مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت است هم‌چنین نمودار c مربوط به حرکت با سرعت ثابت است بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

در نمودار b سرعت در حال افزایش است بنابراین تکانه ثابت نمی‌ماند و b نادرست است.

در نمودار d، جسم ساکن است و حرکت نمی‌کند بنابراین نمودار d نادرست است.

B ۹۹۰ ۱



دو ثانیهٔ نخست $t=0$ تا $t=2s$ است که در ثانیه‌های $t=0$ و $t=2s$ سرعت به ترتیب $2m/s$ و $4m/s$ است و تغییر تکانه در این بازه خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v \Rightarrow \Delta P_1=m(4-2)=2m$$

دو ثانیهٔ دوم $t=2s$ تا $t=4s$ است که در این ثانیه‌ها سرعت به ترتیب $4m/s$ و $5m/s$ است از این‌رو:

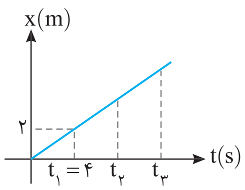
$$\Delta P_2=m(5-4)=m$$

نسبت تغییر تکانه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2}=\frac{2m}{m}=2$$

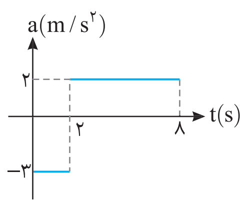
A ۹۹۱ ۲

نمودار مکان - زمان خط راست بوده بنابراین حرکت دارای سرعت ثابت است و تکانه تغییر نمی‌کند.



B ۹۹۲ ۴

یادآوری سطح محصور بین نمودار شتاب زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است.



۱ برای به‌دست آوردن تغییر تکانه باید تغییر سرعت را حساب کنیم بنابراین سطح زیر نمودار شتاب زمان را در بازهٔ صفر تا $8s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta v=S \Rightarrow \Delta v=-3\times2+(2\times6) \Rightarrow \Delta v=6m/s$$

۲ تغییر تکانه جسم خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v \xrightarrow{m=2kg} \Delta P=2\times6 \Rightarrow \Delta P=12kg\,m/s \text{ یا } N.s$$

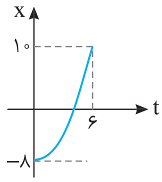
در مورد یکای ΔP که در صورت مسأله بیان شده توضیح زیر را لازم می‌دانیم:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow \Delta P=F\Delta t \Rightarrow kg.m/s \equiv N.s$$

یعنی یکای $kg.m/s$ هم‌ارز $N.s$ است.

B ۹۹۳ ۳

۱ به سراغ حرکت‌شناسی می‌رویم. شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. در لحظهٔ $t=0$ شیب خط مماس صفر است بنابراین سرعت اولیه $(v_0=0)$ است به کمک معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت را به‌دست می‌آوریم.



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow 10=\frac{1}{2}a\times(6)^2+0-8\Rightarrow 18=\frac{1}{2}a\times 36\Rightarrow a=1\,m/s^2$$

۲ حال با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت متحرک هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=0)$ را به‌دست می‌آوریم:

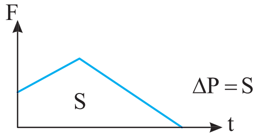
$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\xrightarrow{x=0}v^2-0=2\times 1[0-(-8)]\Rightarrow v=\pm 4\,m/s$$

۳ شیب خط در مبدأ مکان مثبت است پس $v=+4\,m/s$ می‌باشد و تکانه خواهد شد:

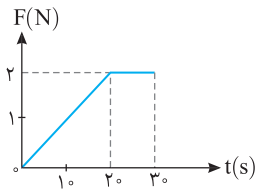
$$P=mv\Rightarrow P=2\times 4=8\,kg.m/s$$

B ۹۹۴ ۱

نکته سطح محصور بین نمودار نیرو – زمان با محور زمان برابر تغییر تکانهٔ جسم است.



سطح زیر نمودار $F-t$ را حساب می‌کنیم.



$$\Delta P=S=\frac{2\times 20}{2}\Rightarrow \Delta P=20\,kg.m/s$$

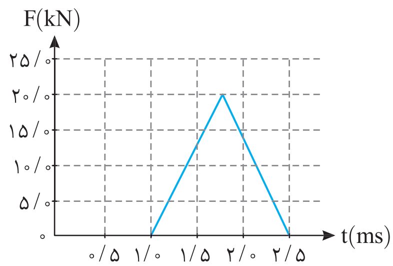
جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و $P_0=0$ است بنابراین تکانه در لحظهٔ $t=20s$ خواهد شد:

$$\Delta P=P-P_0\Rightarrow 20=P-0\Rightarrow P=20\,kg.m/s$$

B ۹۹۵ ۱

نکته سطح محصور بین نمودار نیرو – زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه است.

خط فکری نیروی متوسط وارد بر جسم برابر $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ است بنابراین شما باید به کمک سطح زیر نمودار $F-t$، تغییر تکانه را به‌دست آورده سپس F_{av} را حساب کنید.



۱ تغییر تکانه خواهد شد:

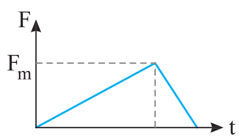
$$\Delta P=S\Rightarrow \Delta P=\frac{20\times 10^3\times 1/5\times 10^{-3}}{2}\Rightarrow \Delta P=15\,kgm/s$$

۲ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{15}{1/5\times 10^{-3}}\Rightarrow F_{av}=10^4\,N$$

میانبر در نمودارهای مثلثی‌شکل مانند شکل روبه‌رو نیروی متوسط نصف بیشینه نیروی وارد بر جسم است.

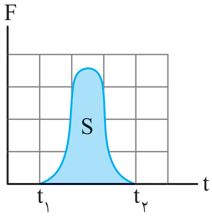
$$F_{av}=\frac{F_{max}}{2}$$



B ۹۹۶ ۱

یادآوری ممکن است نیروی وارد بر جسم متغیر باشد اما هم چنان سطح محصور بین نمودار نیرو – زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه است.

$S=\Delta P$

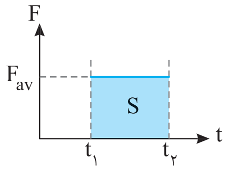


شکل (الف)

با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P=F_{av}\Delta t$$

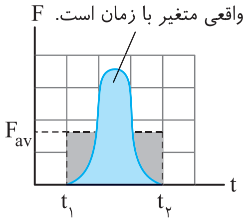
بنابراین نمودار نیروی متوسط بر حسب زمان مطابق شکل روبه‌رو است. در نتیجه سطح این مستطیل نیز برابر تغییر تکانه است.



شکل (ب)

نتیجه مقدار نیروی متوسط (F_{av}) به گونه‌ای که مساحت مستطیل زیر F_{av} با مساحت سطح زیر نمودار نیروی واقعی متغیر شکل (الف) برابر است.

تغییر تکانهٔ ناشی از نیروی متوسط برابر با تغییر تکانهٔ نیروی واقعی متغیر با زمان است.



شکل (پ)

با توجه به یادآوری، ابتدا مساحت مستطیل F_{av} را حساب می‌کنیم.

$$S_{F_{av}}=10\times 2=20\,kgm/s$$

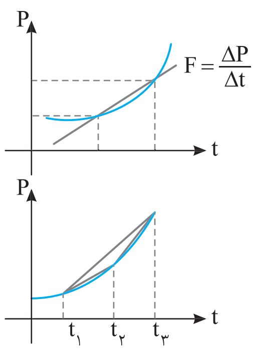
این مساحت با مجموع S_1 و S_2 برابر است از این‌رو:

$$S_{av}=S_1+S_2$$

$$20=8+S_2\Rightarrow S_2=12\,kgm/s$$

A ۹۹۷ ۳

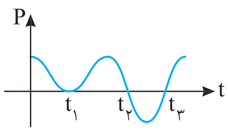
نکته شیب خط قاطع در نمودار تکانه – زمان برابر نیروی متوسط وارد بر جسم است.



خط‌های قاطع نمودار در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2، t_2 تا t_3 و t_1 تا t_3 را رسم می‌کنیم، شیب خط قاطع در بازهٔ t_2 تا t_3 از شیب خطوط قاطع دیگر بیشتر است بنابراین نیروی متوسط وارد بر جسم در این بازه بزرگ‌تر است.

A ۹۹۸ ۲

خط فکری با توجه به تعریف تکانه $(\vec{P}=m\vec{v})$، چگونگی تغییر تکانه دقیقاً شبیه چگونگی تغییر سرعت است. یعنی اگر سرعت صفر باشد تکانه صفر است و بالعکس. اگر تکانه مثبت باشد سرعت مثبت و اگر تکانه منفی باشد، سرعت منفی است.

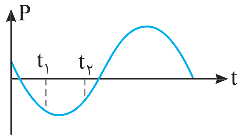


اگر تکانه صفر شده و تغییر علامت دهد، سرعت نیز در همان لحظه صفرشده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین برای اینکه مشخص کنیم متحرک چند بار تغییر جهت داده است باید تعداد دفعاتی که تکانه تغییر علامت می‌دهد را بشماریم.

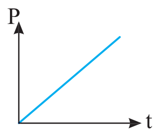
در لحظهٔ t_2 و t_3 نمودار تکانه محور زمان را قطع کرده یعنی تکانه تغییر جهت داده است بنابراین در این دو لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد.

A ۹۹۹ | ۱

تکانه حاصل ضرب جرم جسم در سرعت جسم است $(\vec{P}=m\vec{v})$ بنابراین، تغییرات تکانه عیناً شبیه تغییرات سرعت است. یعنی هر جا تکانه در حال کاهش است، سرعت در حال کاهش است و هر جا سرعت تغییر جهت دهد، تکانه تغییر جهت می‌دهد و ... در نتیجه در لحظهٔ $t_۱$ بزرگی تکانه در حال افزایش است و حرکت تندشونده است پس گزینهٔ (۱) درست است. دقت کنید در بازهٔ صفر تا $t_۱$ بزرگی تکانه ابتدا در حال کاهش و سپس در حال افزایش است. پس حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و گزینهٔ (۴) نادرست است. در لحظهٔ $t_۲$ بزرگی تکانه در حال کاهش است و حرکت کندشونده است، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. بین $t_۱$ و $t_۲$ تکانه صفر نشده پس سرعت نیز صفر نشده و گزینهٔ (۳) نادرست است.



بازی با سؤال **متحرکی به جرم ثابت بر خط راست در حال حرکت است و نمودار تکانه بر حسب زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه، به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ تغییرات سرعت و تغییرات شتاب این متحرک درست است؟**



۱) سرعت آن در حال افزایش و شتاب آن ثابت است.

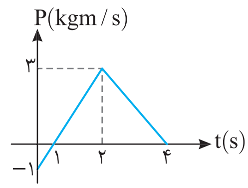
۲) سرعت آن ثابت و شتاب آن در حال افزایش است.

۳) سرعت و شتاب هر دو در حال افزایش هستند.

۴) سرعت و شتاب هر دو ثابت هستند.

پاسخ **نمودار خط راست است و با گذشت زمان تکانه و در نتیجه سرعت افزایش می‌یابد. شیب نمودار ثابت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم و در نتیجه شتاب جسم ثابت است.** گزینهٔ ۱

A ۱۰۰۰ | ۳



راه‌حل اول: شتاب متوسط برابر است با $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ پس در $t=۲s$ و $t=۴s$

ابتدا سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$P_۱=mv_۱\Rightarrow ۳=۲\times v_۱\Rightarrow v_۱=۱/۵m/s$

$P_۲=mv_۲\Rightarrow ۰=۲\times v_۲\Rightarrow v_۲=۰$

شتاب را حساب می‌کنیم: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱/۵}{۲}=-۰/۷۵m/s^۲$

راه‌حل دوم: شیب خط نمودار تکانه زمان برابر نیروی متوسط وارد بر جسم است، شیب نمودار را در بازهٔ $t=۲s$ تا $t=۴s$ به‌دست می‌آوریم.

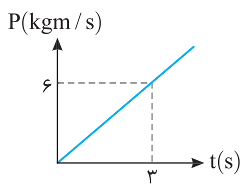
$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{-۳}{۲}=-۱/۵N$

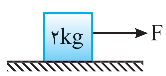
به کمک قانون دوم نیوتون شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$F_{av}=ma_{av}\Rightarrow -۱/۵=۲\times a_{av}\Rightarrow a_{av}=-۰/۷۵m/s^۲$

B ۱۰۰۱ | ۱

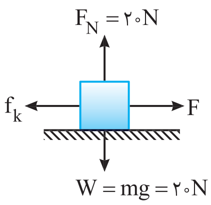
نکته شیب نمودار $P-t$ برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.





۱ از روی شیب نمودار نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم.

$F_{net}=\frac{۶-۰}{۳-۰}\Rightarrow F_{net}=۲N$



۲ نیروی اصطکاک بین سطح و جسم را حساب می‌کنیم:

$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow[F_N=W=۲۰N]{\mu_k=۰/۲}f_k=۰/۲\times ۲۰$

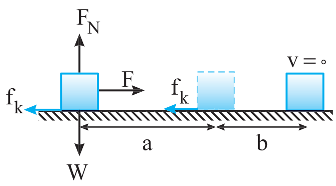
$\Rightarrow f_k=۴N$

۳ نیروی F خواهد شد:

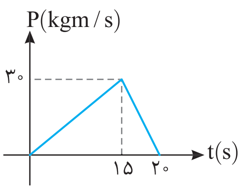
$F_{net}=F-f_k\Rightarrow ۲=F-۴\Rightarrow F=۶N$

C ۱۰۰۲ | ۳

خط فکری به نمودار نگاه کنید بنا به فرض مسئله بعد از لحظهٔ $t=۱۵s$ نیروی F حذف شده است و بنا به قانون اول نیوتون باید جسم با همان تکانه $۳۰kgm/s$ به حرکت خود ادامه دهد اما پس از قطع F در مدت $۵s$ جسم متوقف شده است، بنابراین باید سطح افقی دارای اصطکاک باشد و این اصطکاک جسم را متوقف کند. از این‌رو شما ابتدا در بازه $۱۵s$ تا $۲۰s$ نیروی اصطکاک را به‌دست آورید سپس در بازهٔ ۰ تا $۱۵s$ به کمک نمودار نیروی خالص (F_{net}) وارد بر جسم را حساب کنید تا بتوانید نیروی F را به‌دست بیاورید.



نکته شیب نمودار تکانه - زمان برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.



۱ در بازهٔ $۱۵s$ تا $۲۰s$ تنها نیروی مؤثر اصطکاک است بنابراین خواهیم داشت:

$f_k=\frac{۰-۳۰}{۲۰-۱۵}\Rightarrow f_k=-۶N$

۲ در بازهٔ صفر تا $۱۵s$ دو نیرو یکی F و دیگری f_k بر جسم وارد می‌شود (W و F_N یکدیگر را خنثی می‌کنند)، نیروی خالص را از روی شیب نمودار $P-t$ به‌دست می‌آوریم.

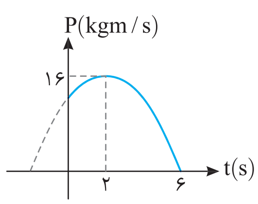
$F_{net}=\frac{۳۰-۰}{۱۵-۰}\Rightarrow F_{net}=۲N$

۳ نیروی F خواهد شد:

$F_{net}=F-f_k\Rightarrow ۲=F-۶\Rightarrow F=۸N$

C ۱۰۰۳ | ۱

خط فکری نمودار سهمی است و سهمی نسبت به محور قائم گذرا از رأسش دارای تقارن است و معادلهٔ تکانه - زمان تابع درجه ۲ است. باید از این ویژگی سهمی استفاده کرد.



۱ یکی از ریشه‌های معادلهٔ تکانه - زمان $t=۶s$ است. با توجه به تقارن سهمی باید ریشهٔ دیگر آن $t=-۲$ باشد.

۲ معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم و مختصات رأس سهمی را در آن قرار می‌دهیم.

$P=A(t-۶)(t+۲)\xrightarrow[P=۱۶kgm/s]{t=۲s}۱۶=A(۲-۶)(۲+۲)\Rightarrow A=-۱$

۳ معادلهٔ سهمی کامل شد:

$P=-(t-۶)(t+۲)\Rightarrow P=-t^۲+۴t+۱۲$

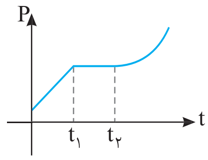
۴ تکانهٔ اولیهٔ جسم با توجه به معادلهٔ آن $P_۰=۱۲kgm/s$ است بنابراین سرعت اولیهٔ آن خواهد شد.

$P=mv\xrightarrow{m=۲kg}۱۲=۲v\Rightarrow v_۰=۶m/s$

B ۱۰۰۴ ۳

نکته شیب نمودار تکانه – زمان برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.

باید شیب نمودار را بررسی کنیم.



در بازهٔ صفر تا t_1 نمودار $P-t$ خط راست مایل است بنابراین نیرو مقدار ثابتی است و در بازهٔ t_1 تا t_2، تکانه ثابت بوده و نیروی وارد بر جسم صفر است. سرانجام در $t>t_2$ نمودار $P-t$ منحنی است یعنی شیب خط مماس بر نمودار در حال تغییر است که این توضیحات تنها با شکل (۳) همخوانی دارد.

B ۱۰۰۵ ۳

بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص به زمین و زمین به شخص وارد می‌کند هم‌اندازه و خلاف جهت هم‌اند و زمان اثر این نیروها یکی است، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_1=-F_2 \xrightarrow{F=ma} m_1a_1=-m_2a_2 \xrightarrow{a=\frac{v-v_0}{t}}$$

$$m_1\frac{v_1-0}{t}=-m_2\left(\frac{v_2-0}{t}\right)\Rightarrow m_1v_1=-m_2v_2\Rightarrow P_{\text{شخص}}=-P_{\text{زمین}}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است. البته تکانهٔ زمین خلاف جهت تکانهٔ شخص است.

B ۱۰۰۶ ۲

یادآوری قانون اول نیوتون بیان می‌کند که هرگاه نیروی خالص بر جسم وارد نشود، اگر جسم ساکن باشد ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد به حرکت روی خط راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

از دید ناظر، قانون اول نیوتون در مورد جسم صادق بوده است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. از این‌رو:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{F=0}\Delta\vec{P}=0$$

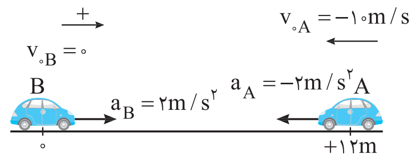
B ۱۰۰۷ ۲

خط فکری دقیقاً با یک مسئلهٔ حرکت‌شناسی سروکار داریم. باید معادله‌های حرکت را نوشته برابر قرار دهیم و زمان رسیدن دو خودرو به یکدیگر را بیابیم، سپس به کمک معادلهٔ سرعت – زمان، سرعت هریک را در لحظهٔ برخورد حساب کنیم و سرانجام تکانهٔ دو متحرک را به‌دست بیاوریم.

۱ ابتدا معادلهٔ دو متحرک را می‌نویسیم، مکان B را مبدأ در نظر گرفته و سمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم (به علامت شتاب‌ها و سرعت دقت کنید):

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_{0B}\Rightarrow x_B=t^2$$

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A}\Rightarrow x_A=-t^2-10t+12$$



۲ هنگام رسیدن دو متحرک به هم $x_A=x_B$ می‌شود بنابراین:

$$t^2=-t^2-10t+12\Rightarrow 2t^2+10t-12=0\Rightarrow t^2+5t-6=0$$

$$\Rightarrow (t+6)(t-1)=0\Rightarrow \begin{cases} t=1s \\ t=-6s \quad (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

۳ حال سرعت متحرک‌ها را با استفاده از رابطهٔ $v=at+v_0$ به‌دست می‌آوریم.

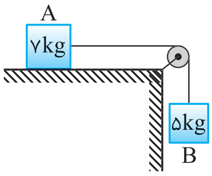
$$\begin{cases} v_A=-2t-10\xrightarrow{t=1s}v_A=-12m/s \\ v_B=2t\xrightarrow{t=1s}v_B=2m/s \end{cases}$$

۴ تکانهٔ هر متحرک خواهد شد:

$$\begin{cases} P_A=mv_A\Rightarrow P_A=-12m \\ P_B=mv_B\Rightarrow P_B=2m \end{cases}\Rightarrow \frac{P_B}{P_A}=\frac{2}{-12}=-\frac{1}{6}$$

A ۱۰۰۸ ۲

خط فکری نکتهٔ مهم در حل این مسئله این است که دو جسم با یک ریسمان به هم متصل هستند و بعد از رها شدن، اگر جسم B، یک متر پایین بیاید همزمان جسم A نیز یک متر جابه‌جا می‌شود یعنی در هر لحظه تندی A با تندی B برابر است $(v_A=v_B)$ و این نکته حل مسئله است.



تکانه‌ها را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} P_A=m_Av \\ P_B=m_Bv \end{cases}\Rightarrow \frac{P_A}{P_B}=\frac{m_A}{m_B}=\frac{7}{5}\Rightarrow \frac{P_A}{P_B}=1.4$$

B ۱۰۰۹ ۱

نیروی کشسانی فنر وارد بر دو جسم برابر است و این نیرو بر هر دو جسم A و B در مدت زمان یکسانی وارد می‌شود. از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$F_A=F_B\Rightarrow \frac{\Delta P_A}{\Delta t}=\frac{\Delta P_B}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P_A=\Delta P_B$$

دو جسم از حال سکون رها شده‌اند و تکانهٔ اولیهٔ آن‌ها صفر است $(P_{0A}=P_{0B})$ بنابراین تکانهٔ نهایی آن‌ها با هم برابر است.

$$P_A-P_{0A}=P_B-P_{0B}\Rightarrow P_A=P_B$$

C ۱۰۱۰ ۳

خط فکری در چه لحظه‌ای متحرک تغییر جهت می‌دهد؟ یعنی در چه لحظه‌ای سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد؟ وقتی که سرعت صفر می‌شود، تکانهٔ متحرک نیز صفر می‌شود؛ بنابراین باید دنبال لحظه‌ای باشیم که تکانه صفر می‌شود.

نکته سطح زیر نمودار نیرو – زمان برابر تغییر تکانه است.

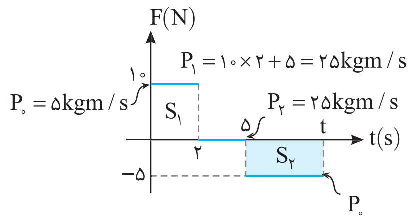
۱ تکانه در لحظهٔ $t=2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=S\Rightarrow P-P_0=10\times2\xrightarrow{P_0=5kgm/s}P_1-5=20\Rightarrow P_1=25kgm/s$$

۲ در بازهٔ $t=2s$ تا $t=5s$ نیرو صفر و تغییر تکانه صفر است و تکانه همچنان $P_2=25kgm/s$ است.

۳ بعد از $t=5s$ باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که تکانه صفر می‌شود. برای این که این اتفاق بیافتد باید مساحت سطح S_2 برابر $-25kgm/s$ شود.

$$S_2=-25\Rightarrow -5(t-5)=-25\Rightarrow t=10s$$



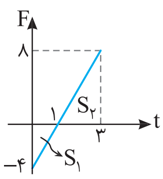
B ۱۰۱۱ ۲

خط فکری نیرو متغیر است $(F=4t-4)$ و برای یافتن تغییر تکانه باید نمودار نیرو – زمان را رسم کرده و به کمک سطح محصور بین نمودار نیرو – زمان با محور زمان تکانه را حساب کنیم.

۱ برای رسم خط $F=4t-4$ کافی است یکبار $t=0$ و یکبار $t=3s$ را در معادله قرار داد و دو نقطهٔ به‌دست آمده را روی صفحه به هم وصل کنیم.

$$F=4t-4\Rightarrow t=0\Rightarrow F=-4N,\ t=1s\Rightarrow F=0$$

$$t=3s\Rightarrow F=4\times3-4=8N$$

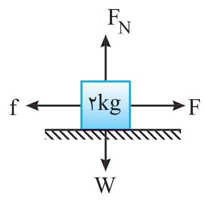


۲ جسم از حال سکون راه افتاده و تکانهٔ اولیهٔ آن صفر است. با محاسبهٔ مساحت تکانه را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta P=S_1+S_2=-\frac{4\times1}{2}+\frac{8\times2}{2}=6kg.m/s$$

$$\Rightarrow P-P_0=6\xrightarrow[P_0=0]{v_0=0}P=6kg\,m/s$$

C ۱۰۱۲ | ۱



خط فکری باید ابتدا دربارهٔ سکون و حرکت جسم فکر کنیم، برای این منظور نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم و تا لحظه‌ای که $F\le f_{max}$ جسم ساکن می‌ماند و پس از آن لحظه جسم به حرکت درمی‌آید، سپس باید نیروی خالص برحسب زمان را نوشته و نمودار آن را رسم کنید و مسئله را حل کنید.

۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت خواهد شد:

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s=0.5]{F_N=W=2\times10=20N} f_{s\,max}=0.5\times20=10N$$

۲ اکنون باید لحظه‌ای که نیروی F برابر $10N$ می‌شود را مشخص کنیم.

$$F=4t+6\Rightarrow 10=4t+6\Rightarrow 4t=4\Rightarrow t=1s$$

بعد از لحظهٔ $t=1s$ جسم به حرکت در می‌آید.

۳ از لحظهٔ $t=1s$ به بعد نیروی اصطکاک وارد بر جسم، نیروی اصطکاک جنبشی است.

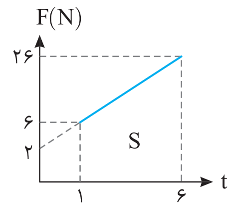
$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=0.2} f_k=0.2\times20\Rightarrow f_k=4N$$

۴ معادلهٔ نیروی خالص وارد بر جسم برحسب زمان خواهد شد.

$$F_{net}=F-f_k\Rightarrow F_{net}=4t+6-4\Rightarrow F_{net}=4t+2$$

۵ نمودار نیروی خالص بر حسب زمان را رسم می‌کنیم. البته از لحظهٔ $t=1s$ به بعد که متحرک به راه می‌افتد.

$$\Delta P=S=(6+26)\times\frac{5}{2}\Rightarrow \Delta P=80kg\,m/s$$



۶ تکانه در لحظهٔ $t=6s$ برابر خواهد شد با:

$$\Delta P=P-P_0\xrightarrow{P_0=0}80=P-0\Rightarrow P=80kg\,m/s$$

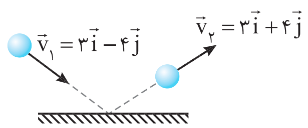
۷ تندی در لحظهٔ $t=6s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$P=mv\Rightarrow 80=2v\Rightarrow v=40m/s$$

C ۱۰۱۳ | ۴

۱ بردار تغییر سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec v=\vec v_2-\vec v_1=3\vec i+4\vec j-3\vec i+4\vec j\Rightarrow\Delta\vec v=8\vec j$$



۲ تغییر تکانهٔ جسم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta\vec P=m\Delta\vec v\xrightarrow{m=0.2kg}\Delta\vec P=0.2\times8\vec j\Rightarrow\Delta\vec P=1.6\vec j$$

۳ نیروی خالص وارد بر توپ خواهد شد:

$$F_{net}=\frac{\Delta\vec P}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=0.4s}\vec F_{net}=\frac{1.6\vec j}{0.4}\Rightarrow\vec F_{net}=4\vec j$$

۴ نیروی وزن رو به پایین است و برحسب $\vec i$ و $\vec j$ خواهد شد:

$$W=mg=0.2\times10=2N\Rightarrow\vec W=-2\vec j$$

۵ نیرویی که سطح بر توپ وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec F_{net}=\vec F_N+\vec W\Rightarrow 4\vec j=\vec F_N-2\vec j\Rightarrow\vec F_N=6\vec j$$

پنجره ۳ روبه‌روی ۴

B ۱۰۱۳ | ۴

۱ در فیزیک (۱) رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ را برای انرژی جنبشی و در فیزیک (۳) رابطه $P=mv$ را برای تکانه یاد گرفته‌اید که از ترکیب این دو رابطه، می‌توان نتیجه گرفت:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m}\Rightarrow K=\frac{P^2}{2m}$$

با توجه به فرض مسئله:

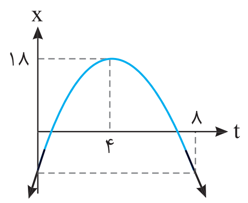
$$K_B=5K_A\Rightarrow\frac{P_B^2}{2m_B}=5\frac{P_A^2}{2m_A}\xrightarrow{P_A=P_B}\frac{m_A}{m_B}=5$$

نمای ۲۶

B ۱۰۱۳ | ۳

۲ **یادآوری ریاضی** نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرا از رأس سهمی متقارن است مثلاً مکان $2s$ قبل از رأس با مکان $2s$ بعد از رأس با هم برابر می‌باشد. همچنین شیب خط مماس نیز به همین شکل است یعنی قدرمطلق شیب خط $2s$ قبل از رأس با $2s$ بعد از رأس یکسان می‌باشد و تنها علامت شیب متفاوت است.

نکته شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است.



به نمودار نگاه کنید. با توجه به رأس سهمی $(t=4)$ لحظات $t=0$ و $t=8s$ نسبت به رأس تقارن دارند بنابراین شیب خط مماس در این دو نقطه هم‌اندازه و قرینهٔ هم هستند یعنی سرعت متحرک در این دو لحظه یکی است و با توجه به تعریف تکانه $(P=mv)$ اندازهٔ تکانه در $t=0$ و $t=8s$ برابر است.

نمای ۲۸

A ۱۰۱۳ | ۳

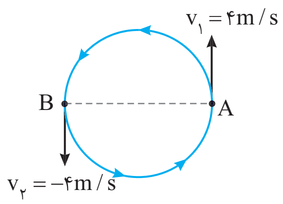
۳ بازهٔ زمانی $t_1=\frac{1}{4}s$ تا $t_2=\frac{5}{4}s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\Rightarrow\Delta t=1s$$

جسم در هر $2s$ یک دور کامل یعنی 2π روی دایره می‌چرخد. بنابراین چرخش جسم در مدت $1s$ خواهد شد.

$$\begin{array}{c|c} 2s & 2\pi \\ \hline 1s & ? \end{array}\Rightarrow ?=\pi$$

متحرک در $1s$ نیم‌دایره را می‌چرخد یعنی اگر در لحظهٔ $t_1=\frac{1}{4}s$ در نقطهٔ A باشد در لحظهٔ $t_2=\frac{5}{4}s$ از نقطهٔ B می‌گذرد.



نکته سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر حرکت مماس است.

بردارهای درست را رسم می‌کنیم. اگر $v_1=+4m/s$ در نظر بگیریم $v_2=-4m/s$ خواهد بود بنابراین:

$$|\Delta v|=|\vec v_2-\vec v_1|=|-4-4|=8m/s$$

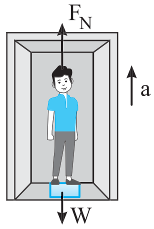
$$|\Delta P|=m|\Delta v|\Rightarrow|\Delta P|=16kg\,m/s$$

نمای ۲۴

B | ۱۰۱۳ | ۳

۴

نکته: عددی که نیروسنج نشان می‌دهد، همان نیروی عمودی سطح F_N است.



حالت اول: نیروهای وارد بر شخص را رسم می‌کنیم.

۱) نیروی وزن ۲) نیروی عمودی سطح

آسانسور از حال سکون رو به بالا شروع به حرکت می‌کند. بنابراین $F_N > W$ بوده و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_N-mg=ma \xrightarrow{m=۶۰kg}$$

$$F_N-۶۰۰=۶۰a \Rightarrow F_N=۶۰۰+۶۰a \quad (I)$$

حالت دوم: آسانسور از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند، در نتیجه $W>F'_N$ است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F'_{net}=ma' \xrightarrow{a'=۲a} mg-F'_N=m(۲a) \Rightarrow F'_N=۶۰۰-۱۲۰a (II)$$

با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$F_N-F'_N=۲۷۰ \xrightarrow{(I),(II)} ۶۰۰+۶۰a-(۶۰۰-۱۲۰a)=۲۷۰$$

$$۱۸۰a=۲۷۰ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}m/s^۲$$

میانبر: هرگاه آسانسور با شتاب a و a' به ترتیب از حال سکون رو به بالا و رو به پایین شروع به حرکت کند، اختلاف عددی که ترازو نشان می‌دهد برابر است با:

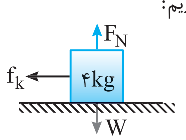
$$F_N-F'_N=m(|a|+|a'|)$$

نمای ۲۳

B | ۱۰۱۳ | ۴

۵ حل مسئله را از قسمت دوم یعنی حذف نیروی F شروع می‌کنیم:

۱ پس از قطع نیروی F، جسم تحت تأثیر نیروی اصطکاک می‌ایستد شتاب توقف جسم را به کمک معادله‌ای مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم:

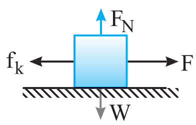


$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-۲۵=۲a(۴)$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۲۵}{۸}m/s^۲$$

۲ با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma \Rightarrow -f_k=ma \Rightarrow -f_k=۴\times(\frac{-۲۵}{۸}) \Rightarrow f_k=۱۲/۵N$$



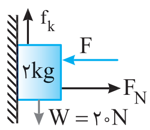
۳ اکنون به قسمت اول مسئله که در آن سرعت ثابت بوده و نیروها متوازن هستند برمی‌گردیم و نیروی F را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=۰ \Rightarrow F=f_k \Rightarrow F=۱۲/۵N$$

نمای ۱۷

B | ۱۰۱۳ | ۱

۶



۱ جسم با تندی ثابت رو به پایین می‌لغزد بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن است.

$$F_{net_y}=۰ \Rightarrow f_k=W \Rightarrow f_k=۲۰N$$

$$F_{net_x}=۰ \Rightarrow F_N=F$$

۲ اگر نیروی F، $\frac{۳}{۲}$ برابر شود، در این صورت نیروی عمودی سطح نیز $\frac{۳}{۲}$ برابر می‌شود.

$$F'_N=\frac{۳}{۲}F_N$$

۳ نیروی اصطکاک $(f_k=\mu_k F_N)$ در حالت جدید نیز $\frac{۳}{۲}$ برابر حالت اول خواهد شد:

$$f'_k=\frac{۳}{۲}f_k \Rightarrow f'_k=\frac{۳}{۲}\times۲۰ \Rightarrow f'_k=۳۰N$$

۴ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma \Rightarrow mg-f'_k=ma \Rightarrow ۲۰-۳۰=۲a \Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

۵ بنابراین با افزایش F، با شتاب $-۵m/s^۲$ از سرعت جسم کاسته می‌شود:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y \Rightarrow ۰-۱۰۰=-۱۰\Delta y \Rightarrow \Delta y=۱۰m$$

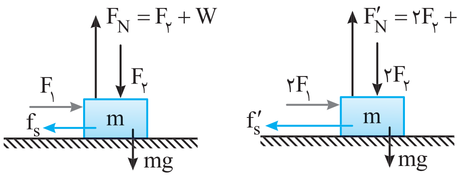
نمای ۱۸

B | ۱۰۱۳ | ۲

۷

خط فکری: وقتی در صورت تست کلمهٔ «جسم ساکن» یا «سرعت ثابت» دیدید بلافاصله بالای آن $F_{net}=۰$ را بنویسید سپس به بررسی نیروهای وارد بر جسم بپردازید. به جسم نیروی افقی وارد شده اما جسم بر سطح افقی ساکن مانده است پس سطح دارای اصطکاک است و این نکته مهمی است که شما باید به آن دقت کنید.

یادآوری: نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است. $R=\sqrt{f^۲+F_N^۲}$



حالت اول: بر جسم نیروی افقی $F_۱$ وارد می‌شود اما جسم ساکن بوده و $F_{net}=۰$ است. بر جسم نیروی اصطکاک ایستایی خلاف نیروی $F_۱$ وارد می‌شود که با $F_۱$ برابر است. در این صورت نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند برابر است با:

$$\begin{cases} F_۱=f_s \\ F_N=F_۲+W \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{(F_۱)^۲+(F_۲+W)^۲}$$

حالت دوم: با دو برابر شدن نیروی $F_۱$ و $F_۲$ جسم ساکن مانده است بنابراین در این حالت اصطکاک ایستایی برابر است با: $f'_s=۲F_۱$

و نیروی عمودی سطح در این حالت خواهد شد: $F'_N=۲F_۲+W$

نیرویی که سطح در این حالت بر جسم وارد می‌کند برابر است با:

$$R'=\sqrt{(f'_s)^۲+(F'_N)^۲} \Rightarrow R'=\sqrt{(۲F_۱)^۲+(۲F_۲+W)^۲}$$

با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$k=\frac{R'}{R}=\frac{\sqrt{(۲F_۱)^۲+(۲F_۲+W)^۲}}{\sqrt{(F_۱)^۲+(F_۲+W)^۲}}$$

صورت این کسر از مخرج آن بزرگ‌تر است اما دو برابر آن نیست، $۱<k<۲$ و گزینهٔ (۲) درست است. برای سادگی در ذهن خود $F_۱=۱$ و $F_۲=۱$ و $W=۱$ قرار دهید و k را بررسی کنید:

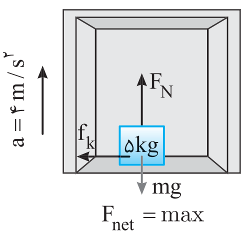
$$k=\frac{\sqrt{(۲)^۲+(۲+۱)^۲}}{\sqrt{(۱+(۱+۱)^۲}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۵}}=\sqrt{\frac{۱۳}{۵}}=\sqrt{۲/۶}<۲ \Rightarrow ۱<k<۲$$

نمای ۱۹

C | ۱۰۱۳ | ۴

۸

خط فکری: جسم را روی کف آسانسور پرت کرده‌ایم، بنابراین نیروی جلوبر صفر است. تنها نیروی مؤثر در امتداد افقی، نیروی اصطکاک جنبشی است که بر جسم در خلاف جهت حرکت اثر کرده و آن را متوقف می‌کند. شما باید ابتدا نیروی عمودی سطح وارد بر جسم را حساب کنید و سپس اصطکاک را به دست بیاورید تا بتوانید به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را مشخص کنید.



۱ ابتدا نیروی عمودی سطح وارد شده به جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net_y}=ma_y \Rightarrow F_N-mg=ma_y$$

$$\Rightarrow F_N-۵۰=۲۰ \Rightarrow F_N=۷۰N$$

۲ بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر جسم برابر است با: $f_k=\mu_k F_N=۰/۲\times۷۰=۱۴N$

۳ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب توقف جسم روی کف آسانسور را به دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma_x \Rightarrow -f_k=ma \Rightarrow -۱۴=۵a \Rightarrow a=-۲/۸m/s^۲$$

۴ حال با توجه به رابطهٔ $v=at+v_۰$ زمان توقف را به‌دست می‌آوریم:

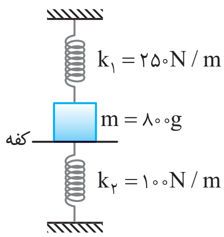
$$۰=-۲/۸t+۷ \Rightarrow t=\frac{۷}{۲/۸}=\frac{۷۰}{۲۸}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵s$$

نمای ۲۳

B ۱۰۱۳ ۴ ۹

۱ فنر شمارهٔ (۱)، 2cm کشیده شده و نیروی کشسانی آن رو به بالا است، اندازهٔ این نیرو را حساب می‌کنیم.

$$F_{e_1}=kx_1\Rightarrow F_{e_1}=250\times\frac{2}{100}\Rightarrow F_{e_1}=5N$$



۲ فنر شمارهٔ (۲) با پایین آمدن وزنه فشرده می‌شود بنابراین نیروی کشسانی آن نیز رو به بالاست و اندازهٔ آن خواهد شد:

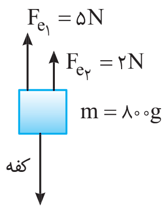
$$F_{e_2}=kx_2\Rightarrow F_{e_2}=100\times\frac{2}{100}\Rightarrow F_{e_2}=2N$$

۳ بنابراین بر وزنه، نیروی وزن $(W=8N)$ رو به پایین و دو نیروی $F_{e_1}=5N$ و $F_{e_2}=2N$ رو به بالا وارد می‌شود در نتیجه شتاب خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow W-(F_{e_1}+F_{e_2})=ma$$

$$\Rightarrow 8-7=0.8a\Rightarrow a=\frac{1}{0.8}$$

$$\Rightarrow a=1.25m/s^2$$



نمای ۲۰ و ۲۲

A ۱۰۱۳ ۳ ۱۰

تنها نیروی مؤثر وارد بر گلوله در طول مسیر نیروی وزن است. با توجه به رابطهٔ نیرو با آهنگ تغییر تکانه ابتدا تغییر تکانهٔ جسم را به دست می‌آوریم.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow{F_{av}=mg}mg=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow m\times10=\frac{\Delta P}{5}\Rightarrow\Delta P=50m$$

با توجه به تعریف تکانه، تغییر سرعت را به دست می‌آوریم.

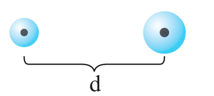
$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow 50m=m\Delta v\Rightarrow\Delta v=50m/s$$

نمای ۲۷

پنجره ۵

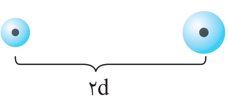
A ۱۰۱۴ ۳

نکته با توجه به قانون گرانش عمومی، $F=G\frac{M_1M_2}{r^2}$، نیروی گرانشی با فاصله بین دو جسم رابطهٔ عکس و مجذوری دارد:



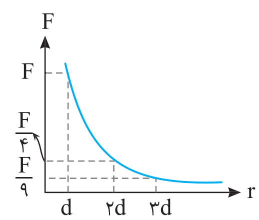
$$F=G\frac{m_1m_2}{d^2}$$

$$F'=G\frac{m_1m_2}{(2d^2)}=\frac{1}{4}G\frac{m_1m_2}{d^2}=\frac{F}{4}$$



$$F''=G\frac{m_1m_2}{(3d^2)}=\frac{1}{9}G\frac{m_1m_2}{d^2}=\frac{F}{9}$$

بنابراین نمودار نیروی گرانش برحسب فاصله به صورت زیر می‌شود:



A ۱۰۱۵ ۲

۱ جرم جسم کروی (۱) را به دست می‌آوریم:

$$\rho_1=\frac{m_1}{V_1}\xrightarrow{V_1=\frac{4}{3}\pi r_1^3}10=\frac{m_1}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}$$

$$\xrightarrow{V_1=\frac{4}{3}\times3\times64=256cm^3}10=\frac{m_1}{256}\Rightarrow m_1=2560g=2.56kg$$

۲ جرم جسم کروی (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\rho_2=\frac{m_2}{V_2}\xrightarrow{V_2=\frac{4}{3}\pi r_2^3}16=\frac{m_2}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}$$

$$\xrightarrow{V_2=\frac{4}{3}\times3\times125}16=\frac{m_2}{500}\Rightarrow m_2=8000g=8kg$$

۳ حال با توجه به رابطهٔ $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$، نیروی گرانش را حساب می‌کنیم:

$$F=6.3\times10^{-11}\times\frac{2.56\times8}{(0.6)^2}\Rightarrow F=358.4\times10^{-11}N=3.584\times10^{-9}N$$

A ۱۰۱۶ ۳

خط فکری با توجه به اینکه نیروی گرانشی از رابطهٔ $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ به‌دست می‌آید، پس نیروی گرانش با جرم دو جسم رابطهٔ مستقیم و با فاصلهٔ دو جسم از هم رابطهٔ عکس و مجذوری دارد:

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{G\frac{m_1'm_2'}{r'^2}}{G\frac{m_1m_2}{r^2}}=\left(\frac{r}{r'}\right)^2\left(\frac{m_1'm_2'}{m_1m_2}\right)$$

برای حل این سؤال ابتدا باید نیروی گرانش در هر دو حالت را به دست آوریم و سپس نسبت آن‌ها را بنویسیم.

۱ جرم دو جسم را m و فاصلهٔ آن‌ها از هم را r می‌گیریم:

$$F_1=G\frac{m\times m}{r^2}\Rightarrow F_1=G\frac{m^2}{r^2}$$

۲ اگر از جسم به جرم m، مقدار x کم شده و به جرم جسم دیگر اضافه شود، جرم یک جسم $m-x$ و جرم دیگری $m+x$ می‌شود:

$$F_2=G\frac{(m-x)(m+x)}{r^2}\Rightarrow F_2=G\frac{m^2-x^2}{r^2}$$

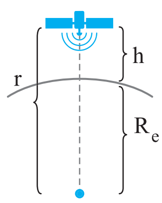
۳ با توجه به سؤال نیروی گرانش ٪۲۵ کاهش یافته است:

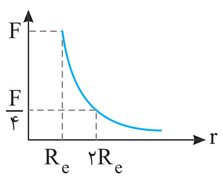
$$F_2=F_1-\frac{25}{100}F_1\Rightarrow F_2=\frac{75}{100}F_1\Rightarrow F_2=\frac{3}{4}F_1$$

$$\Rightarrow G\frac{m^2-x^2}{r^2}=\frac{3}{4}\left(G\frac{m^2}{r^2}\right)\Rightarrow m^2-x^2=\frac{3}{4}m^2\Rightarrow\frac{m^2}{4}=x^2\Rightarrow x=\frac{m}{2}$$

A ۱۰۱۷ ۲

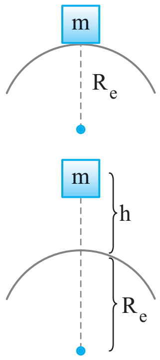
نیروی گرانش بین ماهواره و زمین برابر $F=G\frac{M_em}{r^2}$ است که r فاصله از مرکز زمین یعنی R_e+h است، پس هر چه فاصله ماهواره از سطح زمین بیشتر شود یعنی h افزایش یافته و مخرج بزرگ‌تر می‌شود و نیروی گرانش کاهش یابد. دقت کنید کمترین فاصلهٔ ماهواره زمانی است که این ماهواره روی سطح زمین $h=0$ قرار گرفته و در این حالت r برابر R_e است:





A ۱۰۱۸ ۲

نکته نیروی گرانش بین جسم و زمین برابر $F=G\frac{M_e m}{r^۲}$ است که در این رابطه r فاصله از مرکز زمین است.



۱ نیروی گرانش، نیرویی است که بین دو جسم و به واسطهٔ جرم آن‌ها وجود دارد. نیروی گرانش وارد بر جسم m در سطح زمین برابر است با: $F=G\frac{M_e m}{R_e^۲}$

۲ نیروی گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین را حساب می‌کنیم، دقت کنید در رابطهٔ نیروی گرانش r فاصله تا مرکز زمین است:

$$F'=G\frac{M_e m}{r^۲}\Rightarrow F'=G\frac{M_e m}{(R_e+h)^۲}$$

۳ با توجه به سؤال نسبت F' و F داده شده است:

$$\frac{F'}{F}=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{\frac{GM_e m}{(R_e+h)^۲}}{\frac{GM_e m}{R_e^۲}}=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\left(\frac{R_e}{(R_e+h)}\right)^۲=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{R_e}{R_e+h}=\frac{۱}{۵}$$

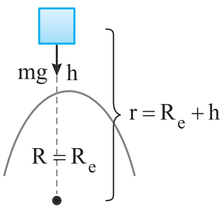
$$\Rightarrow ۵R_e=R_e+h\Rightarrow h=۴R_e$$

A ۱۰۱۹ ۲

نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره همان نیروی وزن وارد بر ماهواره در فاصلهٔ ۱۶۰۰km از سطح زمین است. ابتدا شتاب گرانش در محل ماهواره را حساب می‌کنیم. برای این منظور رابطهٔ g را در سطح زمین و در محل ماهواره نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم. شتاب گرانش از رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{R^۲}$ به‌دست می‌آید که R فاصله از مرکز زمین است:

$$\frac{g_{ماهواره}}{g_{زمین}}=\frac{G\frac{M_e}{(۱۶۰۰+۶۴۰۰)^۲}}{G\frac{M_e}{(۶۴۰۰)^۲}}\Rightarrow\frac{g_{ماهواره}}{۱۰}=\frac{(۶۴۰۰)^۲}{(۸۰۰۰)^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{g_{ماهواره}}{۱۰}=\left(\frac{۶۴۰۰}{۸۰۰۰}\right)^۲=\frac{۱۶}{۲۵}$$



شتاب گرانش در محل ماهواره $g_{ماهواره}=\frac{۱۶۰}{۲۵}m/s^۲$ است، بنابراین نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره برابر است با:

$$F_{مرکزگرا}=mg_{ماهواره}$$

$$\Rightarrow F_{مرکزگرا}=۵۰۰\times\frac{۱۶۰}{۲۵}=۲۰\times۱۶۰=۳۲۰۰N$$

میانبر می‌توان برای محاسبهٔ شتاب گرانش در محل ماهواره، به جای جایگذاری اندازهٔ ۱۶۰۰km در رابطه به صورت زیر عمل کرد:

$$\frac{h}{R_e}=\frac{۱۶۰۰}{۶۴۰۰}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow h=\frac{۱}{۴}R_e$$

پس فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین $r=R_e+h=R_e+\frac{R_e}{۴}$ است:

$$\frac{g_{ماهواره}}{g_{زمین}}=\frac{\frac{GM_e}{(\frac{۱}{۴}R_e+R_e)^۲}}{\frac{GM_e}{R_e^۲}}=\frac{R_e^۲}{(\frac{۵}{۴}R_e)^۲}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

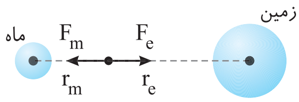
$$\Rightarrow g_{ماهواره}=\frac{۱۶}{۲۵}g=\frac{۱۶۰}{۲۵}m/s^۲$$

A ۱۰۲۰ ۱

نیروی گرانش بین دو جسم همواره ربایشی است و برای آنکه نیروی خالص وارد بر جسم صفر شود باید نیرویی که زمین به جسم وارد می‌کند با نیرویی که ماه به آن وارد می‌کند هم‌اندازه و خلاف جهت هم باشند. نیروی گرانشی وارد بر جسم توسط کرهٔ ماه و کرهٔ زمین را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$F_m=F_e\Rightarrow G\frac{mM_m}{r_m^۲}=G\frac{mM_e}{r_e^۲}$$

$$\xrightarrow{M_e=۸۱M_m}\frac{۱}{r_m^۲}=\frac{۸۱}{r_e^۲}\Rightarrow\frac{۱}{r_m}=\frac{۹}{r_e}\Rightarrow r_e=۹r_m$$



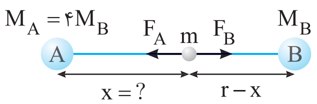
بازی با سؤال سیارهٔ A در فاصلهٔ r از سیارهٔ B قرار دارد. جرم A چهاربرابر جرم B و شعاع آن‌ها یکی است. سفینه‌ای از سیارهٔ A به سوی سیارهٔ B حرکت می‌کند. در چه فاصله‌ای از سیارهٔ A، نیروی گرانش وارد بر سفینه صفر خواهد بود؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) r ۲) $\frac{r}{۲}$ ۳) $\frac{r}{۳}$ ۴) $\frac{۲r}{۳}$

پاسخ با توجه به شکل برای این‌که نیروی گرانش وارد بر سفینه صفر باشد، باید نیروهای گرانش وارد بر آن از طرف سیارهٔ A و از طرف سیارهٔ B برابر و در خلاف جهت هم باشند.

$$F_A=F_B\Rightarrow G\frac{M_A m}{x^۲}=G\frac{M_B m}{(r-x)^۲}\xrightarrow{M_A=۴M_B}\frac{۴}{x^۲}=\frac{۱}{(r-x)^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{x}=\frac{۱}{r-x}\Rightarrow ۲r-۲x=x\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}r$$

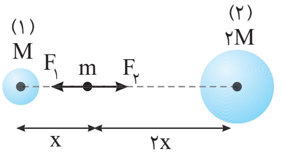


گزینهٔ ۴

B ۱۰۲۱ ۳

یادآوری نیروی گرانش نیروی ربایش بین دو جسم به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ بوده و بزرگی این نیرو از رابطهٔ $F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}$ به دست می‌آید.

۱ نیروهای گرانشی وارد بر جسم m در شکل الف را به دست می‌آوریم:

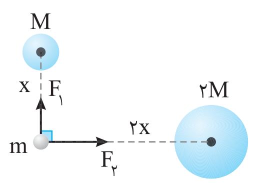


$$\begin{cases}F_۱=G\frac{mM}{x^۲}\\ F_۲=G\frac{m(۲M)}{(۲x)^۲}\Rightarrow F_۲=G\frac{mM}{۲x^۲}\end{cases}$$

این دو نیرو خلاف جهت هم اند، پس نیروی خالص گرانشی وارد بر جسم m برابر است با:

$$F_T=|F_۲-F_۱|\Rightarrow F_T=G\frac{mM}{x^۲}-G\frac{mM}{۲x^۲}=G\frac{mM}{۲x^۲}$$

۲ نیروهای گرانشی وارد بر جسم m در شکل ب را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}F'_۱=G\frac{mM}{x^۲}\\ F'_۲=G\frac{m(۲M)}{(۲x^۲)}\Rightarrow F_۲=G\frac{mM}{۲x^۲}\end{cases}$$

این دو نیرو عمود بر هم اند پس نیروی برایند آن‌ها برابر است با:

$$F'_T=\sqrt{F_۱^۲+F_۲^۲}\Rightarrow F'_T=\sqrt{(G\frac{mM}{x^۲})^۲+(G\frac{mM}{۲x^۲})^۲}$$

$$\Rightarrow F'_T=G\frac{mM}{x^۲}\sqrt{۱^۲+(\frac{۱}{۲})^۲}\Rightarrow F'_T=G\frac{mM}{x^۲}\sqrt{\frac{۵}{۴}}\Rightarrow F'_T=\frac{\sqrt{۵}}{۲}G\frac{mM}{x^۲}$$

۳ حال نسبت F_T به F'_T خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_T}{F'_T}=\frac{G\frac{mM_e}{۲x^۲}}{\frac{\sqrt{۵}}{۲}G\frac{mM_e}{x^۲}}\Rightarrow\frac{F_T}{F'_T}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\frac{F_T}{F'_T}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

A ۱۰۲۲ | ۳

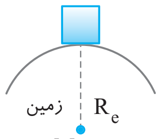
میدان گرانش در نقطه‌ای اطراف یک سیاره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که در آن M جرم سیاره و r فاصلهٔ نقطهٔ موردنظر از مرکز سیاره است.

$$g=G\frac{M}{r^۲}$$

بنابراین میدان گرانش زمین با جرم زمین و وارون مجذور فاصلهٔ نقطه از مرکز زمین، متناسب است.

A ۱۰۲۳ | ۳

خط فکری شتاب گرانش $g=G\frac{M_{سیاره}}{r^۲}$ در سطح هر کدام از سیاره‌ها را جداگانه حساب کرده و در نهایت نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:



۱ شعاع کرهٔ زمین را R_e و جرم آن را M می‌گیریم:

$$g=G\frac{M}{R_e^۲}$$

۲ سیارهٔ فرضی شعاعی نصف زمین یعنی $\frac{R_e}{۲}$ و جرمی $\frac{۱}{۴}$ زمین یعنی $\frac{M}{۴}$ دارد:

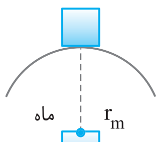
$$g'=G\frac{M'}{r'^۲}\Rightarrow g'=G\frac{\frac{M}{۴}}{(\frac{R_e}{۲})^۲}\Rightarrow g'=G\frac{\frac{M}{۴}}{\frac{R_e^۲}{۴}}\Rightarrow g'=G\frac{M_e}{R_e^۲}$$

۳ حال نسبت g' به g را به دست می‌آوریم:

$$\frac{g'}{g}=\frac{G\frac{M}{R_e^۲}}{G\frac{M}{R_e^۲}}=۱$$

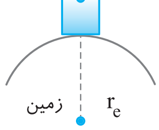
B ۱۰۲۴ | ۱

جرم کرهٔ ماه را m و جرم کرهٔ زمین را ۸۰m می‌گیریم، حال با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش $g=G\frac{M_{سیاره}}{r^۲}$، شتاب گرانش زمین و ماه را به دست می‌آوریم:



۱ شتاب گرانش ماه را حساب می‌کنیم: (r_m شعاع ماه است)

$$g_m=G\frac{M_{ماه}}{r_m^۲}\Rightarrow g_m=G\frac{m}{r_m^۲}$$



۲ شتاب گرانش زمین را حساب می‌کنیم: (r_e شعاع زمین است)

$$g_e=G\frac{M_{زمین}}{r_e^۲}\xrightarrow{m_{زمین}=۸۰m}g_e=G\frac{۸۰m}{r_e^۲}$$

۳ با توجه به سؤال شتاب گرانش زمین g_e، ۶ برابر شتاب گرانش ماه g_m است:

$$g_e=۶g_m\Rightarrow G\frac{۸۰m}{r_e^۲}=۶G\frac{m}{r_m^۲}\Rightarrow(\frac{r_e}{r_m})^۲=\frac{۸۰}{۶}=\frac{۴۰}{۳}\simeq۱۳$$

$$\Rightarrow\frac{r_e}{r_m}=\sqrt{۱۳}\simeq۳/۶$$

بازی با سؤال قطر زمین دو برابر قطر مریخ و میدان گرانش در سطح زمین تقریباً سه برابر میدان گرانش در سطح مریخ است. جرم زمین چند برابر جرم مریخ است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ میدان گرانش، در هر نقطه در اطراف یک سیاره، از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^۲}$ به دست می‌آید که در آن M جرم سیاره و r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا مرکز سیاره است.

$$\frac{g_e}{g_m}=\frac{G\frac{M_e}{R_e^۲}}{G\frac{M_m}{R_m^۲}}=\frac{R_m^۲}{R_e^۲}\times\frac{M_e}{M_m}$$

$$\xrightarrow[g_e=۳g_m]{R_e=۲R_m}۳=\frac{R_m^۲}{(۲R_m)^۲}\times\frac{M_e}{M_m}\Rightarrow\frac{M_e}{M_m}=۱۲$$

گزینه ۱

A ۱۰۲۵ | ۲

شتاب گرانش حاصل از سیاره‌ای به جرم M از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^۲}$ به دست می‌آید، در این سؤال شتاب گرانش ناشی (حاصل) از خورشید خواسته شده پس در رابطهٔ شتاب گرانش به جای m، جرم خورشید یعنی M_s را جایگزین می‌کنیم: $g=G\frac{M_s}{r^۲}$

A ۱۰۲۶ | ۲

خط فکری شاید ابتدا فکر کنیم این چگالی که در سؤال داده به چه دردی می‌خورد، اما اگر رابطهٔ چگالی را به ذهن بیاوریم، $\rho=\frac{m}{V}$ می‌بینیم که با داشتن چگالی و شعاع که می‌توان با آن حجم را حساب کرده، می‌توانیم نسبت جرم‌ها را به دست آورده و در رابطهٔ $g=G\frac{m}{r^۲}$ از آن استفاده کنیم:

۱ با توجه به نسبت چگالی، نسبت جرم را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\rho_{سیاره}}{\rho_{زمین}}=\frac{\frac{m_{سیاره}}{V_{سیاره}}}{\frac{m_{زمین}}{V_{زمین}}}\xrightarrow{V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳}\frac{۱}{۳}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times\frac{\frac{۴}{۳}\pi r_{زمین}^۳}{\frac{۴}{۳}\pi r_{سیاره}^۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times(\frac{r_{زمین}}{r_{سیاره}})^۳\xrightarrow{r_{سیاره}=۶r_{زمین}}\frac{۱}{۳}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times\frac{۱}{۶^۳}\Rightarrow\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}=۷۲$$

۲ حال با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش، نسبت خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{g_{سیاره}}{g_{زمین}}=\frac{G\frac{m_{سیاره}}{r_{سیاره}^۲}}{G\frac{m_{زمین}}{r_{زمین}^۲}}\Rightarrow\frac{g_{سیاره}}{g_{زمین}}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times(\frac{r_{زمین}}{r_{سیاره}})^۲$$

$$\xrightarrow{r_{سیاره}=۶r_{زمین}}۷۲\times(\frac{۱}{۶})^۲\Rightarrow\frac{g_{سیاره}}{g_{زمین}}=۲$$

میانبر شتاب گرانش برحسب چگالی سیاره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$G=\frac{۴}{۳}r\pi G\rho$$

شعاع سیاره — چگالی متوسط سیاره

B ۱۰۲۷ ۳

خط فکری وزن یک جسم برابر mg است، پس با تغییر فاصله از سطح زمین یا تغییر سیاره $(g=G\frac{M}{r^۲})$ شتاب گرانش تغییر کرده و وزن جسم نیز تغییر می‌کند، توجه به این نکته مهم است که جرم جسم در هر کجا و در هر سیاره‌ای ثابت است.

۱ با توجه به اینکه وزن جسم در سطح سیارهٔ A، ۱۲ برابر وزن جسم در سطح سیارهٔ B است، نسبت شتاب گرانش در این دو سیاره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{mg_A}{mg_B}=۱۲\Rightarrow\frac{g_A}{g_B}=۱۲\Rightarrow\frac{G\frac{m_A}{r_A^۲}}{G\frac{m_B}{r_B^۲}}=۱۲\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}\times(\frac{r_B}{r_A})^۲=۱۲\qquad(I)$$

۲ با توجه به چگالی متوسط سیاره‌ها نسبت جرم به شعاع را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\rho_A}{\rho_B}=۶\Rightarrow\frac{\frac{m_A}{V_A}}{\frac{m_B}{V_B}}=۶\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}\frac{V_B}{V_A}=۶\xrightarrow{V=\frac{۴}{۳}r^۳}\frac{m_A}{m_B}\times\frac{r_B^۳}{r_A^۳}=۶\qquad(II)$$

۳ حال معادلهٔ (II) را بر معادلهٔ (I) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{m_A}{m_B}\times(\frac{r_B}{r_A})^۳}{\frac{m_A}{m_B}\times(\frac{r_B}{r_A})^۲}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{r_B}{r_A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=۲$$

بازی با سؤال **شتاب گرانش در سطح سیاره‌ای که جرم و حجم آن به ترتیب ۴ و ۲۷ برابر جرم و حجم کرهٔ زمین است، چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین می‌باشد؟**

۱) $\frac{۴}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲۷}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) ۳۶

پاسخ **شتاب گرانش، همان میدان گرانش $\vec{g}$ است. شتاب گرانش در سطح یک سیاره از رابطهٔ $g=G\frac{M}{R^۲}$ به‌دست می‌آید، که در آن M جرم سیاره و R شعاع سیاره است.**

با توجه به فرض مسئله:

$$V_p=۲۷V_e\Rightarrow\frac{۴}{۳}\pi R_p^۳=۲۷(\frac{۴}{۳}\pi R_e^۳)\Rightarrow R_p=۳R_e$$

$$g_p=G\frac{M_p}{R_p^۲}=G\frac{۴M_e}{(۳R_e)^۲}=\frac{۴}{۹}G\frac{M_e}{R_e^۲}\Rightarrow g_p=\frac{۴}{۹}g_e$$

گزینهٔ ۳

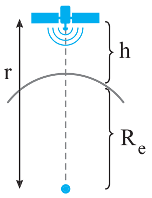
A ۱۰۲۸ ۱

نکته با تغییر فاصلهٔ جسم از سطح سیاره یا تغییر سیاره‌ای که جسم در آن قرار دارد با توجه به رابطهٔ $g=G\frac{M_{سیاره}}{r^۲}$ شتاب گرانش و به تبع آن وزن جسم $W=mg$ تغییر می‌کند، اما جرم جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

با توجه به نکتهٔ بالا جرم جسم ثابت مانده و پاسخ گزینهٔ (۱) است.

B ۱۰۲۹ ۴

نکته شتاب گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین برابر است با:



$$g=G\frac{M_e}{r^۲}=G\frac{M_e}{(h+R_e)^۲}$$

شتاب گرانش را در فاصلهٔ $۲R_e$ از سطح زمین حساب می‌کنیم:

$$g_۱=G\frac{M_e}{(h+R_e)^۲}\xrightarrow{h=۲R_e}g_۱=\frac{GM_e}{۹R_e^۲}$$

شتاب گرانش در فاصلهٔ h' از سطح زمین $\frac{g_۱}{۹}$ شده:

$$\frac{\frac{g_۱}{۹}}{g_۱}=\frac{\frac{GM_e}{(h'+R_e)^۲}}{\frac{GM_e}{۹R_e^۲}}\Rightarrow\frac{۱}{۹}=\frac{۹R_e^۲}{(h'+R_e)^۲}\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از دو طرف جذر}}\frac{۱}{۳}=\frac{۳R_e}{h'+R_e}$$

$$\Rightarrow h'+R_e=۹R_e\Rightarrow h'=۸R_e$$

A ۱۰۳۰ ۳

یادآوری شتاب گرانش یک سیاره با فاصلهٔ r از مرکز آن از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

جرم سیاره

$$g=G\frac{M}{r^۲}$$

فاصله از مرکز سیاره

ثابت جهانی گرانش

۱ شتاب گرانش زمین در سطح آن خواهد شد:

$$g_e=G\frac{M_e}{R_e^۲}$$

۲ شتاب گرانشی زمین در فاصلهٔ h از سطح آن برابر است با:

$$g_h=G\frac{M_e}{(R_e+h)^۲}$$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{g_h}{g_e}=\frac{R_e^۲}{(R_e+h)^۲}\xrightarrow{g_e=۹/۸m/s^۲}\frac{g_h}{۹/۸}=\frac{(۶۴۰۰)^۲}{(۶۴۰۰+۶۴۰۰)^۲}$$

$$\Rightarrow g_h=\frac{۱}{۴}\times۹/۸\Rightarrow g_h=۲/۴۵\,m/s^۲$$

۴ نیروی وزن فضانورد خواهد شد:

$$W_h=mg_h\Rightarrow W_h=۸۰\times۲/۴۵\Rightarrow W_h=۱۹۶N$$

میانبر البته چون فاصله سفینه از مرکز زمین دو برابر شعاع زمین است بنابراین وزن فضانورد در محل آن $\frac{۱}{۴}$ وزن فضانورد برسطح زمین است.

$$W_h=(\frac{R_e}{R_e+h})^۲\times W\Rightarrow W_h=\frac{۱}{۴}W=\frac{۱}{۴}\times۸۰\times۹/۸=۱۹۶N$$

B ۱۰۳۱ ۲

قبل از حل دقت کنید که x و x+۲۰ فاصله از سطح زمین بوده و در رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^۲}$ به جای r فاصله از مرکز زمین باید قرار گیرد:

حالت ۱:

$$g'=G\frac{M_e}{(R_e+x)^۲}$$

حالت ۲:

$$۰/۸۱g'=G\frac{M_e}{(R_e+۱/۲x)^۲}$$

نسبت $\frac{g'}{۰/۸۱g'}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{g'}{۰/۸۱g'}=\frac{\frac{GM_e}{(R_e+x)^۲}}{\frac{GM_e}{(R_e+۱/۲x)^۲}}\Rightarrow\frac{۱۰۰}{۸۱}=\frac{(R_e+۱/۲x)^۲}{(R_e+x)^۲}$$

$$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{از دو طرف جذر}}\frac{۱۰}{۹}=\frac{R_e+۱/۲x}{R_e+x}\Rightarrow۱۰R_e+۱۰x=۹R_e+۱۰/۸x$$

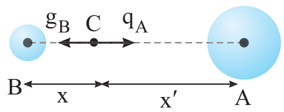
$$\Rightarrow R_e=۰/۸x\Rightarrow\frac{x}{R_e}=\frac{۱}{۰/۸}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

B ۱۰۳۲ ۲

یادآوری شتاب گرانش یک سیاره از رابطهٔ $g=G\frac{M_{\text{سیاره}}}{r^2}$ به دست می‌آید و جهت آن به سمت سیاره است.

خط فکری برای آنکه شتاب گرانش خالص در نقطه‌ای صفر شود باید شتاب گرانش حاصل از سیاره‌های A و B در آن نقطه هم‌اندازه و خلاف جهت هم باشند. برای خلاف جهت شدن شتاب گرانش‌ها، چون این شتاب به سمت مرکز سیاره‌ها است پس باید این نقطه بین دو سیاره قرار گیرد.

در نقطهٔ C: $g_A=g_B$



۱ شتاب گرانش از طرف جسم A را حساب می‌کنیم:

$$g_A=G\frac{M_A}{x'^2}\Rightarrow g_A=G\frac{8m}{x^2}$$

۲ شتاب گرانش از طرف جسم B را حساب می‌کنیم:

$$g_B=G\frac{M_B}{x^2}\Rightarrow g_B=G\frac{2m}{x^2}$$

۳ باید شتاب گرانش g_A و g_B با هم برابر باشند:

$$g_A=g_B\Rightarrow G\frac{8m}{x'^2}=G\frac{2m}{x^2}\Rightarrow\frac{x^2}{x'^2}=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم.}}\frac{x}{x'}=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=2x$$

۴ مجموع فاصله‌های x و x' برابر فاصلهٔ دو سیاره یعنی r می‌شود:

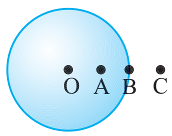
$$r=x+x'\xrightarrow{x'=2x}r=3x\Rightarrow x=\frac{r}{3},\ x'=\frac{2r}{3}$$

فاصله از سیارهٔ A یعنی x' خواسته شده که برابر $\frac{2r}{3}$ است.

B ۱۰۳۳ ۲

زمین کرهٔ کامل نیست و شعاع استوایی آن از شعاع قطبی‌اش بیشتر است و میدان گرانشی در استوا از میدان گرانشی در قطب کمتر است.

B ۱۰۳۴ ۳



برای یافتن g در خارج از سیاره، بنابر رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^2}$ هرچه r بزرگ‌تر باشد، g کوچک‌تر است (r فاصله از مرکز سیاره است)، بنابراین نقطهٔ C پاسخ این پرسش نیست. اگر با همان رابطه و با فرض آن‌که تمام جرم سیاره در مرکز آن (O) است، به بررسی مسئله بپردازیم، به خطا خواهیم رفت و میدان گرانش در نقطهٔ A بزرگ‌تر از میدان گرانش در نقطهٔ B خواهد شد. این را بدانید که همواره بزرگی میدان گرانشی در سطح آن از بقیهٔ نقاط بیشتر است و نقطهٔ B پاسخ این پرسش است.

حال با یک ساده‌نگری عمومی برای نقاط درون سیاره، یک رابطهٔ بسیار تقریبی به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که:

$$g=G\frac{M}{R^2}$$

اگر صورت و مخرج را در مقدار ثابت $\frac{4}{3}\pi R$ (با فرض کرهٔ کامل بودن سیاره) ضرب کنیم، داریم:

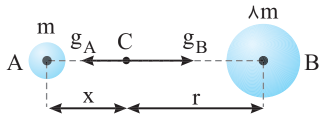
$$g=\frac{\frac{4}{3}\pi R\,GM}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{4}{3}R\pi G\frac{M}{V}\Rightarrow g=\frac{4}{3}R\pi G\bar{\rho}$$

بر مبنای رابطهٔ بالا و با فرض ثابت بودن چگالی، هر چه R (فاصله از مرکز سیاره) کمتر باشد، g کوچک‌تر است و در نقطهٔ O، g برابر صفر است.

C ۱۰۳۵ ۲

میدان گرانش خالص، حاصل از میدان گرانش دو سیاره است. میدان گرانش دو سیاره در نقطهٔ C در خلاف جهت هم هستند و برآیند آن‌ها از تفاضل آن‌ها به دست می‌آید:

$$g_{net}=|g_B-g_A|$$



بنا به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$g_{net}=g_A\Rightarrow g_B-g_A=g_A\Rightarrow g_B=2g_A$$

اکنون به جای g از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^2}$ قرار می‌دهیم:

$$G\frac{8m}{r^2}=2G\frac{m}{x^2}\Rightarrow\frac{x^2}{r^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

C ۱۰۳۶ ۲

نکته هرگاه مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بیشینه است که دو عدد با هم برابر باشند.

در رابطهٔ نیروی گرانش $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ با حاصلضرب جرم سر و کار داریم و اینکه قرار است بخشی از جرم جسم سنگین‌تر به جسم سبک‌تر منتقل شده پس مجموع جرم دو جسم m_1+m_2 ثابت است بنابراین با توجه به این نکته برای اینکه نیروی گرانش بیشینه شود، باید جرم دو جسم m_1 و m_2 با هم برابر شود، پس جرم ثانویه اجسام برابر میانگین جرم اولیه آن‌ها خواهد بود:

$$m'_1=m'_2=\frac{m_1+m_2}{2}\Rightarrow m'_1=m'_2=\frac{m+2m}{2}\Rightarrow m'_1=m'_2=1.5m$$

جرم جسم سنگین‌تر از $2m$ به $1.5m$ رسیده:

$$\text{درصد تغییرات جرم}=\frac{\Delta m}{2m}\times100\Rightarrow\text{درصد تغییرات جرم}=\frac{1.5m-2m}{2m}\times100$$

$$\Rightarrow\text{درصد تغییرات جرم}=-\frac{1}{4}\times100=-25\%$$

۲۵ درصد از جرم جسم سنگین‌تر کاهش یافته است.

پنجره تودرتو

A ۱۰۳۶ ۳

۱ نیروی وزن نیرویی است که کرهٔ زمین بر سیب وارد می‌کند و واکنش آن نیز نیرویی است که سیب بر کرهٔ زمین وارد می‌کند. گزارهٔ (الف) نادرست است. با جدا شدن سیب از درخت علاوه بر نیروی وزن که توسط زمین به سیب وارد می‌شود، مقاومت هوا نیز رو به بالا در خلاف جهت سقوط سیب وارد می‌شود و گزارهٔ (ب) درست است. وقتی که سیب به شاخه متصل و ساکن است نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر سیب صفر است و گزارهٔ (پ) درست است.

نمای ۳

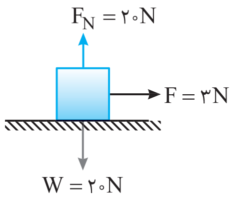
A ۱۰۳۶ ۱

۲ مقاومت شاره (هوا) به ابعاد جسم و همچنین تندی جسم بستگی دارد و هرچه ابعاد جسم در برخورد با هوا بزرگ‌تر باشد و تندی جسم بیشتر باشد، مقاومت هوا نیز بیشتر می‌شود.

نمای ۸

B ۱۰۳۶ ۲

۳ ۱ ابتدا باید مشخص کنیم نیروی اصطکاک بین جسم و سطح چند نیوتون است. مسئله به ما ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k=۰/۲$ را داده است، بنابراین نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم.



$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times۲۰=۴N$$

۲ عموماً ضریب اصطکاک آستانهٔ حرکت (μ_s) بزرگ‌تر از ضریب اصطکاک جنبشی (μ_k) است، یعنی اصطکاک آستانهٔ حرکت این جسم روی سطح افقی $f_{s_{max}}>۴N$ است.

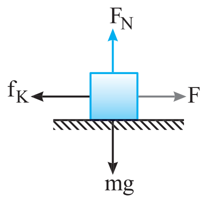
۳ نیروی افقی $F=۳N$ از اصطکاک آستانهٔ حرکت کوچک‌تر است. بنابراین جسم به حرکت درنمی‌آید در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی F برابر است.

جسم ساکن: $F_{net}=۰\Rightarrow F=f_s\Rightarrow f_s=۳N$

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۰۳۶ ۲

۴ به جسم نیروی افقی ۳۰N وارد می‌شود اما سرعت جسم ثابت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. بنابراین سطح دارای اصطکاک است و اصطکاک جنبشی آن برابر است با: $f_k=F\Rightarrow f_k=۳۰N$



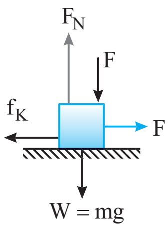
اگر قطعه چوبی مشابه را روی چوب اول قرار دهید، نیروی عمودی سطح دو برابر حالت اول می‌شود. $F'_N=۲mg$ بنابراین نیروی اصطکاک $(f_k=\mu_k F_N)$ نیز دو برابر می‌شود $f'_k=۲\times۳۰=۶۰N$. برای آنکه مجموعه با سرعت ثابت حرکت کند نیرویی که به آن وارد می‌شود برابر است با:

$$F'=f'_k\Rightarrow F'=۶۰N$$

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۰۳۶ ۱

۵ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. ابتدا جسم دارای سرعت ثابت است و تمام نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند. از این رو می‌توان نوشت:



$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F+W=F_N$$
$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F=f_k$$

نیروی اصطکاک خواهد شد: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=\mu_k(F+W)$

با افزایش F نیروی عمودی F_N افزایش یافته و سبب افزایش نیروی اصطکاک می‌شود.

$$\uparrow f_k=\mu_k(\uparrow F+W)$$

اما افزایش نیروی افقی F از افزایش f_k بیشتر است که سبب می‌گردد جسم با شتاب بر سرعتش افزوده شود.

برای توضیح بیشتر دقت کنید:

اگر F دو برابر شود، نیروی اصطکاک افزایش می‌یابد اما دو برابر نمی‌شود.

$$\frac{f'_k}{f_k}=\frac{\mu_k(F'+W)}{\mu_k(F+W)}=\frac{(۲F+W)}{F+W}=\frac{F+F+W}{F+W}=۱+\frac{F}{F+W}$$ کوچکتر از ۱ است

$$\Rightarrow\frac{f'_k}{f_k}<۲$$

بنابراین نیروی حرکت‌دهنده ۲ برابر شده اما نیروی مخالف حرکت کمتر از دو برابر است. یعنی $F'>f'_k$ بوده و جسم با شتاب شروع به حرکت می‌کند.

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۰۳۶ ۱

۶ به چه فکر می‌کنید؟ بر شخص سه نیرو وارد می‌شود یکی وزن و دو تای دیگر کشش نخ. شخص روی طناب ایستاده و ساکن است بنابراین این نیروها متوازن هستند. وقتی برایند سه نیرو صفر می‌شود که برایند دو تا از آن‌ها هم‌اندازه و مخالف سومی باشد. در نتیجه باید برایند T_1 و T_2 برابر W یعنی ۸۰۰ باشد:

$$\vec F_{net}=۰\Rightarrow\vec T_1+\vec T_2+\vec W=۰\Rightarrow(\vec T_1+\vec T_2)=-\vec W\Rightarrow|\vec T_1+\vec T_2|=|\vec W|=۸۰۰N$$

نمای ۲۰

A ۱۰۳۶ ۲

۷ نیروی گرانش برابر $W=mg$ است و $g=G\frac{M_e}{r^2}$ که در آن r فاصله از مرکز زمین است. بنابراین نیروی گرانش در سطح زمین خواهد شد:

$$W=G\frac{M_e m}{R_e^2}\quad(I)$$

و در فاصلهٔ h از سطح زمین برابر است با:

$$W_h=G\frac{M_e m}{(R_e+h)^2}\quad(II)$$

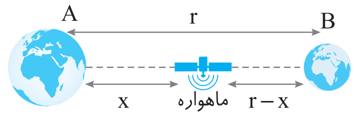
بنا به فرض مسئله نسبت $\frac{W_h}{W}=\frac{۴}{۹}$ است. رابطهٔ (II) را بر رابطهٔ (I) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{W_h}{W}=\frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}\Rightarrow\frac{۴}{۹}=(\frac{R_e}{R_e+h})^2\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{R_e}{R_e+h}\Rightarrow۲R_e+۲h=۳R_e$$
$$\Rightarrow h=\frac{R_e}{۲}$$

نمای ۳۰

B ۱۰۳۶ ۴

۸ نیروهای گرانش وارد بر ماهواره متوازن است، یعنی نیروی گرانش A و نیروی گرانش B وارد بر ماهواره هم‌اندازه هستند. اگر فاصلهٔ بین سیارهٔ A تا ماهواره را با حرف x نمایش دهیم فاصلهٔ ماهواره از سیارهٔ B برابر $r-x$ خواهد شد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$F_A=F_B\xrightarrow{F=G\frac{Mm}{r^2}}G\frac{M_A m}{x^2}=G\frac{M_B m}{(r-x)^2}$$
$$\xrightarrow{m_A=۱۶m_B}\frac{۱۶}{x^2}=\frac{۱}{(r-x)^2}\Rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{۱}{r-x}\Rightarrow۴r-۴x=x\Rightarrow۴r=۵x$$
$$\Rightarrow x=\frac{۴}{۵}r$$

نمای ۲۹

A ۱۰۳۶ ۲

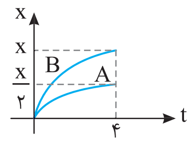
۹ اگر جهت حرکت اولیهٔ جسم را مثبت فرض کنیم، تکانهٔ جسم $P_1=۴۵kgm/s$ خواهد بود و وقتی که سرعت جسم $\frac{۱}{۵}$ مقدار اولیه می‌شود تکانهٔ جسم نیز که با سرعت رابطهٔ مستقیم دارد $(P=mv)$ نیز $\frac{۱}{۵}$ می‌شود و چون در خلاف جهت حرکت اولیهٔ جسم است، در این صورت $P_2=-\frac{۱}{۵}\times۴۵=-۹kgm/s$ خواهد بود. با توجه به رابطهٔ نیرو با آهنگ تغییر تکانه، نیروی F را حساب می‌کنیم.

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=۲s}|F|=|\frac{-۹-۴۵}{۲}|\Rightarrow|F|=|-\frac{۵۴}{۲}|=۲۷N$$

نمای ۲۵

۱۰ B ۱۰۳۶ ۲

نکته هرگاه جسمی را روی سطحی پرتاب می‌کنیم نیروی جلوبر صفر است.



هنگامی که جسم روی سطح افقی پرتاب می‌شود نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک است بنابراین نیروی وارد بر جسم در دو حالت ثابت و شتاب حرکت ثابت است و به کمک روابط حرکت‌شناسی می‌توان نسبت $\frac{v_{0B}}{v_{0A}}$ را به‌دست آورد.

رابطهٔ مستقل از شتاب را برای دو جسم نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \begin{cases} \xrightarrow{B} x=\frac{0+v_{0B}}{2}\times 4\Rightarrow v_{0B}=\frac{x}{2} \\ \xrightarrow{A} \frac{x}{2}=\frac{0+v_{0A}}{2}\times 4\Rightarrow v_{0A}=\frac{x}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{0B}}{v_{0A}}=2$$

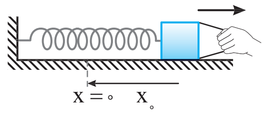
نمای ۱۷

۱۱ A ۱۰۳۶ ۱

وقتی جعبه رها می‌شود تنها نیروی وارد بر آن نیروی کشسانی فنر است که بنا به قانون هوک اندازهٔ این نیرو $F=kx$ بوده که در آن x فاصله از طول طبیعی (اولیه) فنر است.

بنا به قانون دوم نیوتون می‌نویسیم:

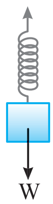
$$F_{net}=ma\Rightarrow kx=ma\Rightarrow a=\frac{k}{m}x$$



در این صورت شتاب با تغییر طول متناسب است و تابع آن درجه اول بوده و نمودار آن خط راست است. در حالتی که $x=0$ است شتاب نیز صفر و در حالتی که $x=x_0$ است شتاب بیشترین مقدار است بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نمای ۱۱

۱۲ C ۱۰۳۶ ۱



خط فکری در دو حالت ممکن است اندازهٔ شتاب حرکت یکسان باشد یک بار وقتی که $F_e>W$ و بار دیگر $F_e<W$ باشد به گونه‌ای که F_e-W هم‌اندازهٔ $W-F_e$ شود. بنابراین شما باید این دو حالت را بررسی کنید.

تغییر طول در هر دو حالت به‌ترتیب ۴۰cm و ۶۰cm شده است. تغییر طول ۴۰cm برای هنگامی است که نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن کمتر است و تغییر طول ۶۰cm برای هنگامی که نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن بیشتر است.

ابتدا $F_e<mg$ و سپس $F_e>mg$ را در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} mg-F_e=ma \\ F_e'-mg=ma \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} F_e=m(g-a) \\ F_e'=m(g+a) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k(0/4)=m(g-a) \\ k(0/6)=m(g+a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{g-a}{g+a}\Rightarrow 2g+2a=3g-3a\Rightarrow 5a=g\Rightarrow a=\frac{g}{5}$$

نمای ۲۲

۱۳ B ۱۰۳۶ ۳

خط فکری از آخر مسئله شروع کنید. جسم M در آستانهٔ حرکت قرار گیرد یعنی آن قدر جرم m زیاد شود که جسم M در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار گیرد. بنابراین نیروی اصطکاک $f_{s_{max}}$ رو به بالا بر M وارد می‌شود. نیروی F را به شکل دو مؤلفه‌اش نشان می‌دهیم. نیروهای وارد بر جسم M متوازن هستند. اکنون مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نیروها را رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_x}=0\Rightarrow F_N=f_k\Rightarrow F_N=10\sqrt{3}N$$

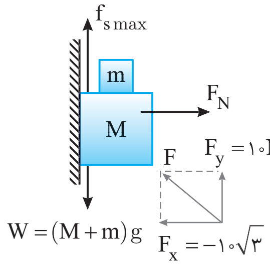
۳ اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\xrightarrow{\mu_s=\frac{\sqrt{3}}{3}}f_{s_{max}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 10\sqrt{3}\Rightarrow f_{s_{max}}=10N$$

۴ نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم نیز متوازن هستند. از این رو خواهیم داشت:

$$F_{net_y}=0\Rightarrow W-f_{s_{max}}-F_y=0\Rightarrow (M+m)g=f_{s_{max}}+F_y$$

$$\Rightarrow(1/5+m)\times 10=10+10\Rightarrow m=0/5kg\Rightarrow m=500g$$



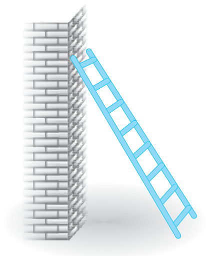
نمای ۱۸

۱۴ B ۱۰۳۶ ۳

نردبان در حال سکون است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و بر آن سه نیرو وارد می‌شود.

۱ نیروی وزن ۲ نیروی از طرف سطح زمین

۳ نیروی از طرف دیوار



برایند این سه نیرو صفر است. از این‌رو همواره برایند دو نیرو و از آن‌ها قرینهٔ نیروی سوم است یعنی:

$$|\vec{F}_{net}|=0\Rightarrow|\vec{F}_{R,\text{دیوار قائم}}+\vec{F}_{R,\text{کف زمین}}|=|\vec{W}|$$

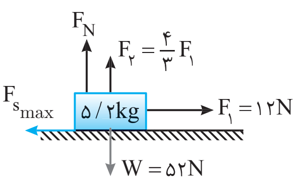
نمای ۲۱

۱۵ B ۱۰۳۶ ۲

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ وقتی نیروی $F_1=12N$ می‌شود نیروی F_2 خواهد شد:

$$F_2=\frac{4}{3}F_1=\frac{4}{3}\times 12\Rightarrow F_2=16N$$



۳ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_y}=0\Rightarrow F_N+F_2=W\Rightarrow F_N=W-F_2\Rightarrow F_N=52-16\Rightarrow F_N=36N$$

۴ هنگامی که $F=12N$ می‌شود، در این حالت جسم شروع به حرکت می‌کند یعنی $F=f_{s\,max}$ بنابراین:

$$F=f_{s\,max}\Rightarrow F=\mu_s F_N\Rightarrow 12=\mu_s\times 36\Rightarrow \mu_s=\frac{1}{3}$$

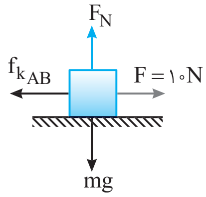
نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۰۳۶ ۳

۱۶ خط فکری آهنگ تغییر سرعت همان شتاب است. اگر جهت حرکت را مثبت فرض کنیم در مسیر AB شتاب $a_{AB}=+۴m/s^۲$ و در مسیر BC شتاب $a_{BC}=-۲m/s^۲$ است. قانون دوم نیوتون را در هر مسیر می‌نویسیم و ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم.

۱ در مسیر AB:

$$F_{net}=ma_{AB}\Rightarrow F-f_{k_{AB}}=ma_{AB}$$
$$\Rightarrow ۱۰-f_{k_{AB}}=m\times۴$$
$$\Rightarrow ۱۰=\mu_{k_{AB}}mg+m\times۴$$
$$\Rightarrow ۱۰=\mu_{k_{AB}}m\times۱۰+۴m$$
$$\Rightarrow ۱۰=m(۱۰\mu_{k_{AB}}+۴)\quad(I)$$



۲ در مسیر BC:

$$F_{net}=ma_{BC}\Rightarrow ۱۰-f_{k_{BC}}=m\times(-۲)\Rightarrow ۱۰=\mu_{k_{BC}}mg-۲m$$
$$\Rightarrow ۱۰=m(۱۰\mu_{k_{BC}}-۲)\quad(II)$$

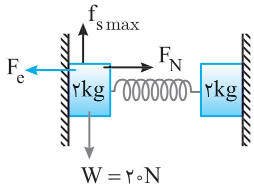
۳ سمت چپ دو رابطهٔ (I) و (II) یکسان است، سمت راست آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم.

$$۱۰\mu_{k_{AB}}+۴=۱۰\mu_{k_{BC}}-۲\Rightarrow ۱۰(\mu_{k_{BC}}-\mu_{k_{AB}})=۶\Rightarrow \mu_{k_{BC}}-\mu_{k_{AB}}=۰/۶$$

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۰۳۶ ۱

۱۷ خط فکری نیازی به بررسی هر دو جسم نیست. یکی از وزنه‌ها را در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر آن را رسم می‌کنیم. جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.



یادآوری یک فنر سبک و همگن نیروی کشسانی یکسانی به دو انتهای خود وارد می‌کند. قرار است که طول فنر کمینه تغییر را داشته باشد و نیروی کشسانی فنر که به وزنه‌ها وارد می‌شود کمینه باشد. یعنی اگر نیروی کشسانی کمتر از آن شود، جسم‌ها به پایین بلغزند بنابراین وزنه‌ها در آستانهٔ حرکت رو به پایین بوده و اصطکاک بیشینه ($f_{s_{max}}$) است. با این اطلاعات مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نیروی وزن و نیروی اصطکاک متوازن هستند.

$$f_{s_{max}}=W\Rightarrow f_{s_{max}}=۲۰N$$

۲ نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۴}۲۰=۰/۴F_N\Rightarrow F_N=۵۰N$$

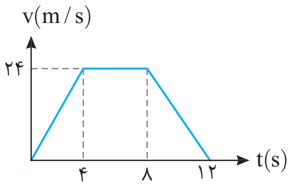
۳ نیروی کشسانی فنر و نیروی عمودی سطح متوازن هستند.

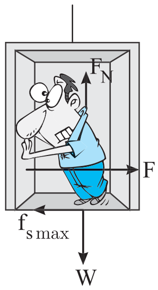
$$F_e=F_N\Rightarrow kx=۵۰\xrightarrow{k=۲۰۰N/m}۲۰۰x=۵۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}m=۲۵cm$$

نمای ۱۸

C ۱۰۳۶ ۲

۱۸ خط فکری اولین سؤالی که از خود می‌پرسیم این است که چرا با هُل دادن دیوار آسانسور شخص باید لیز بخورد؟ زیرا وقتی شخص به دیواره نیروی F را وارد می‌کند، دیواره نیز به شخص نیروی F را در خلاف جهت وارد می‌کند و این اصطکاک است که مانع سُر خوردن شخص می‌شود. بیشترین نیروی F یعنی اینکه اصطکاک آستانهٔ حرکت نیز بیشترین مقدار را داشته باشد ($f_{s_{max}}=\mu_sF_N$) بنابراین باید به دنبال بیشترین نیروی عمودی سطح بگردیم. آسانسور از حال سکون رو به بالا حرکت کرده و در ۴s اول که حرکت آن تندشونده رو به بالاست، نیروی عمودی سطح بیشترین مقدار است. این نیرو را حساب می‌کنیم و نیروی $f_{s_{max}}$ را به‌دست می‌آوریم. با این کار مسئله حل می‌شود.





۱ نیروهای وارد بر شخص را رسم می‌کنیم.

۲ از نمودار شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۲۴-۰}{۴-۰}\Rightarrow a=۶m/s^۲$$

۳ نیروی عمودی سطح در این حالت خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow$$
$$F_N-mg=ma\xrightarrow{m=۶۰kg}F_N-۶۰۰=۶۰\times۶$$
$$\Rightarrow F_N=۹۶۰N$$

۴ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۵}f_{s_{max}}=۰/۵\times۹۶۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۴۸۰N$$

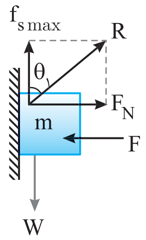
۵ در این صورت بیشینه مقدار F خواهد شد:

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_{max}=f_{s_{max}}\Rightarrow F_{max}=۴۸۰N$$

نمای ۲۳

C ۱۰۳۶ ۲

۱۹ **حالت اول:** جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار دارد و نیروهای آن متوازن هستند.

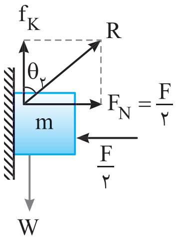


$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F$$
$$F_{net_y}=۰\Rightarrow f_{s_{max}}=W$$

زاویهٔ بین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند با جهت مثبت محور y خواهد شد:

$$\tan\theta_۱=\frac{F_N}{f_{s_{max}}}\Rightarrow\tan\theta_۱=\frac{F}{W}$$

حالت دوم: جسم با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد و نیروهای آن متوازن هستند.



$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F'_N=\frac{F}{۲}$$
$$F_{net_y}=۰\Rightarrow f_k=W$$

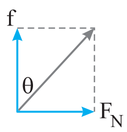
زاویهٔ بین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند با جهت مثبت محور yها را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_۲=\frac{F_N}{f_k}=\frac{\frac{F}{۲}}{W}\Rightarrow\tan\theta_۲=\frac{۱}{۲}\frac{F}{W}$$

در نتیجه:

$$\tan\theta_۲<\tan\theta_۱\Rightarrow\theta_۲<\theta_۱$$

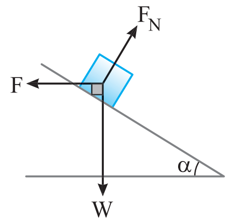
اگر خوب دقت کنید نیاز به این همه محاسبه نیست، با کوچک شدن F_N قطعاً زاویهٔ θ کوچک می‌شود.



نمای ۱۹

B ۱۰۳۶ ۲

۲۰ خط فکری شکل مسئله شما را نگران نکند. کافی است نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید. جسم در تعادل است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.



بر جسم سه نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی وزن $W=10N$

۲ نیروی افقی $F=10N$

۳ نیروی عمودی سطح

نکته هرگاه برایند سه نیرو صفر شود، برایند هر دو نیروی دلخواه از آن‌ها هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی سوم است.

نیروی F_N برایند دو نیروی عمود بر هم F و W بوده و به کمک رابطهٔ فیثاغورس F_N را می‌توان به‌دست آورد.

$$F_N^2=F^2+W^2 \Rightarrow F_N^2=(10)^2+(10)^2 \Rightarrow F_N=10\sqrt{2}N$$

نمای ۲۰

پنجره‌ای رو به گذشته

B ۱۰۳۷ ۳

۱ خط فکری انرژی جنبشی یک جسم به جرم m که با سرعت v در حرکت است برابر $K=\frac{1}{2}mv^2$ است، بنابراین شما باید سرعت متحرک را در جابه‌جایی 10m حساب کرده و انرژی جنبشی را به‌دست بیاورید.

۱ جابه‌جایی جسم تا $x=10m$ برای $\Delta x=10-0=10m$ می‌باشد و شتاب آن برابر $2m/s^2$ است. به کمک معادل مستقل از زمان سرعت را به‌دست می‌آوریم.

$$v_2^2-v_1^2=2ax \xrightarrow{v_1=0} v_2^2=2\times2\times10 \Rightarrow v_2^2=40m^2/s^2$$

۲ انرژی جنبشی برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}\times4\times40=80J$$

بازی با سؤال جسمی به جرم $5kg$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $2m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. پس از چند ثانیه انرژی جنبشی آن به $250J$ می‌رسد؟ ریاضی - ۹۰

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

پاسخ ابتدا سرعت لازم برای آنکه انرژی جنبشی جسم $250J$ شود را به‌دست می‌آوریم.

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 250=\frac{1}{2}\times5\times v^2 \Rightarrow v=10m/s$$

زمان لازم برای آنکه سرعت جسم با شتاب ثابت $2m/s^2$ از صفر به $10m/s$ برسد برابر است با:

$$v=at+v_0 \Rightarrow 10=2t+0 \Rightarrow t=5s$$

گزینهٔ ۲

A ۱۰۳۷ ۱

۲ یادآوری انرژی جنبشی از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم جسم و v تندی جسم است.

ابتدا تندی جسم در $t=5s$ را به کمک انرژی جنبشی به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 40=\frac{1}{2}\times5\times v^2 \Rightarrow v^2=16 \Rightarrow v=4m/s$$

شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4-0}{5}=0.8m/s^2$$

نیروی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F=ma \Rightarrow F=5\times0.8 \Rightarrow F=4N$$

بازی با سؤال جسمی به جرم $3kg$ تحت تأثیر نیروی $9N$ از حال سکون به حرکت در می‌آید. انرژی جنبشی جسم در $t=3s$ چند برابر $t=2s$ است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲

پاسخ ابتدا شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F=ma \Rightarrow 9=3a \Rightarrow a=3m/s^2$$

جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده پس سرعت در $t=3s$ و $t=2s$ برابر است با:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=3t \;,\; t=2s \Rightarrow v_1=6m/s \;,\; t=3s \Rightarrow v_2=9m/s$$

اکنون انرژی جنبشی $K=\frac{1}{2}mv^2$ را در دو حالت به دست آورده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}=2.25$$

گزینهٔ ۲

A ۱۰۳۷ ۲

۳ خط فکری نیروی وارد بر دو جسم برابر است و از ما نسبت انرژی جنبشی دو جسم خواسته شده است. بنابراین باید ابتدا نسبت سرعت‌های آن‌ها را به‌دست بیاورید.

۱ نیروی وارد بر دو جسم برابر است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_1=F_2 \Rightarrow m_1a_1=m_2a_2 \xrightarrow{m_1=4kg,\, m_2=5kg} 4a_1=5a_2 \Rightarrow a_1=\frac{5}{4}a_2$$

۲ نسبت سرعت دو جسم پس از t ثانیه خواهد شد:

$$\begin{cases} v_1=a_1t \\ v_2=a_2t \end{cases} \xrightarrow{a_1=\frac{5}{4}a_2} v_1=\frac{5}{4}v_2$$

۳ اکنون نسبت انرژی‌های جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2}=\frac{4}{5}\times\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5}{4}$$

B ۱۰۳۷ ۳

۴ معادلهٔ مکان زمان داده شده را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و a و v_0 را به‌دست آورده معادله سرعت زمان را می‌نویسیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$x=t^2+4t+5 \Rightarrow \frac{1}{2}a=1m/s^2 \Rightarrow a=2m/s^2$$

$$v_0=4m/s \xrightarrow{v=at+v_0} v=2t+4$$

سرعت در بازهٔ ثانیه دوم یعنی از $t_1=1s$ تا $t_2=2s$، بنابراین سرعت را در این لحظه‌ها حساب می‌کنیم.

$$t_1=1s \Rightarrow v_1=2+4=6m/s \;,\; t_2=2s \Rightarrow v_2=2(2)+4=8m/s$$

بنا به قضیهٔ کار و انرژی:

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\times2(v_2^2-v_1^2) \Rightarrow W_t=(64-36)=28J$$

بازی با سؤال معادلهٔ حرکت جسمی که بر روی یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=۲t^۲-۴t+۸$ است. در کدام بازهٔ زمانی داده شده کار نیروی برایند وارد بر جسم بیشتر است؟

۱) صفر تا ۱s ۲) ۱s تا ۲s ۳) ۲s تا ۳s ۴) ۳s تا ۴s

پاسخ با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت، مکان اولیه، سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$x=۲t^۲-۴t+۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a=۲ \Rightarrow a=۴m/s^۲$$

$$v_۰=-۴m/s \xrightarrow{v=at+v_۰} v=۴t-۴$$

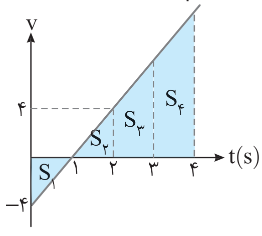
با رسم نمودار سرعت - زمان می‌بینیم که در بازهٔ صفر تا ۱s تندی در حال کاهش و در حال صفر شدن است. در بازهٔ ۱s تا ۲s سرعت از صفر به ۴m/s+ می‌رسد و در این دو بازهٔ تغییر انرژی جنبشی یکسان است. در بازه ۲s تا ۴s حرکت تندشونده است و در بازهٔ ۳s تا ۴s چون سرعت بیشتر است، جابه‌جایی بیشتر و کار نیروی برایند نیز بیشتر است.

$$S_۴>S_۳ \Rightarrow d_۴>d_۳ \xrightarrow{W=Fd} W_۴>W_۳$$

$$S_۴>S_۳>S_۲=|S_۱| \Rightarrow d_۴>d_۳>d_۲=|d_۱|$$

$$\xrightarrow{W=Fd} W_۴>W_۳>W_۲=|W_۱|$$

دقت کنید حرکت دارای شتاب ثابت است بنابراین بنا به قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$ نیروی وارد بر جسم نیز ثابت است.



گزینهٔ ۴

B | ۱۰۳۷ | ۱

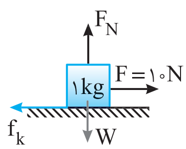
۵ **یادآوری** کار نیروی ثابت F از رابطهٔ $W=Fd\cos\theta$ به‌دست می‌آید که در آن θ زاویهٔ بین جهت بردار نیرو $(\vec F)$ و جهت بردار جابه‌جایی $(\vec d)$ است. کار کمیت نرده‌ای است.

ابتدا f_k را به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_kF_N \Rightarrow f_k=۰/۱\times۱۰=۱N$$

کار نیروی اصطکاک خواهد شد:

$$W_f=f_kd\cos۱۸۰^\circ \Rightarrow W_{f_k}=۱\times۱\times(-۱)=-۱J$$



بازی با سؤال جسمی به جرم ۵۰۰g روی سطح افقی به وسیلهٔ نیروی افقی F، به اندازهٔ ۱۰ متر جابه‌جا می‌شود. اگر ضریب اصطکاک $\mu_k=\frac{۱}{۴}$ باشد، کار انجام شده برای غلبه بر اصطکاک چند ژول است؟ $(g=۱۰N/kg)$

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۲۵

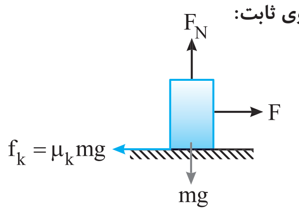
پاسخ با توجه به تعریف کار نیروی ثابت:

$$W_f=f_kd\cos\pi$$

$$\Rightarrow W_f=\mu_kmgd(-۱)$$

$$\Rightarrow W_f=-\frac{۱}{۴}\times۰/۵\times۱۰\times۱۰$$

$$\Rightarrow W_f=-۱۲/۵J$$



کار انجام شده برای غلبه بر نیروی اصطکاک ۱۲/۵J است.

گزینهٔ ۳

A | ۱۰۳۷ | ۳

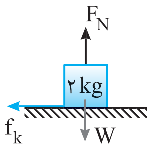
۶ **یادآوری** انرژی مکانیکی مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم است.

$$E=K+U$$

۱ پس از پرتاب روی سطح نیروی اصطکاک به جسم وارد می‌شود و باعث کاهش سرعت جسم می‌شود. شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم:

$$-f_k=ma \Rightarrow -\mu_kF_N=ma \Rightarrow -۰/۲\times۲۰=۲a$$

$$\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$



۲ سرعت جسم در لحظهٔ $t=۰$ برابر ۸m/s و در لحظهٔ $t=۲s$ خواهد شد:

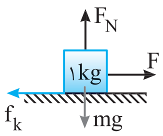
$$v=at+v_۰ \xrightarrow{t=۲s} v=-۲\times۲+۸=۴m/s$$

۳ جسم روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود و انرژی پتانسیل آن ثابت است. بنابراین تغییر انرژی مکانیکی آن در اثر تغییر انرژی جنبشی جسم است از این رو می‌توان نوشت:

$$E_۲-E_۱=K_۲-K_۱=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)=(۱۶-۶۴)=-۴۸J$$

B | ۱۰۳۷ | ۱

۷ **نکته** سطح بر جسم دو نیروی F_N و f_k وارد می‌کند، کار F_N که بر مسیر حرکت عمود است صفر است. بنابراین کار نیروی سطح وارد بر جسم همان کار نیروی اصطکاک است.



با توجه به نکتهٔ بیان شده ابتدا به کمک کار نیروی سطح یا همان کار نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

$$W_{f_k}=f_kd\cos۱۸۰^\circ \Rightarrow -۲=f_k\times۱\times-۱ \Rightarrow f_k=۲N$$

حال با توجه به رابطهٔ $f_k=\mu_kF_N$ داریم:

$$f_k=\mu_kF_N \xrightarrow{F_N=mg} ۲=\mu_k\times۲۰ \Rightarrow \mu_k=۰/۱$$

A | ۱۰۳۷ | ۲

۸ **یادآوری** جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ tام در حرکت با شتاب ثابت از رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰$ به‌دست می‌آید.

۱ ابتدا شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم: $F=ma \Rightarrow ۴=۵a \Rightarrow a=۰/۸m/s^۲$

۲ جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ سوم را حساب می‌کنیم:

$$d=\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰=\frac{۱}{۲}(۰/۸)(۲\times۳-۱)=۲m$$

۳ کار نیروی $F=۴N$ در جابه‌جایی ۲m خواهد شد:

$$W=Fd \Rightarrow W=۴\times۲=۸J$$

B | ۱۰۳۷ | ۱

۹ **نکته** هرگاه جسمی از حال سکون تحت تأثیر چند نیروی ثابت قرار گیرد و به حرکت درآید، جهت حرکت جسم در جهت نیروی خالص وارد بر آن است.

۱ نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec F=\vec F_۱+\vec F_۲=۲\vec i+۵\vec j+\vec i-\vec j=۳\vec i+۴\vec j$$

۲ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$|\vec F_{net}|=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲} \Rightarrow |\vec F_{net}|=\sqrt{۳^۲+۴^۲} \Rightarrow \vec F_{net}=۵N$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

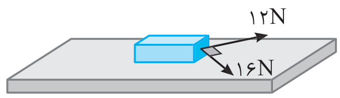
$$F_{net}=ma \xrightarrow{m=۲kg} ۵=۲a \Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$$

۴ جابه‌جایی در مدت ۴s برابر است با: $d=\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲=\frac{۱}{۲}\times۲/۵\times۱۶=۲۰m$

۵ کار نیروی برایند را به‌دست می‌آوریم:

$$W_F=Fd\cos\theta=۵\times۲۰\times\cos۰=۱۰۰J$$

بازی با سؤال **مطابق شکل بر جسمی ساکن به جرم $۵kg$ دو نیروی ۱۲ و ۱۶ نیوتونی به صورت عمود بر هم اثر می‌کنند. کار برایند این نیروها در ثانیهٔ سوم حرکت چند ژول است؟**



۱) ۲۰۰

۲) ۱۰۰

۳) ۱۴۴

۴) ۶۴

پاسخ **ابتدا برایند نیروهای وارد بر جسم را به دست می‌آوریم:**

$$F_{net}=\sqrt{۱۲^۲+۱۶^۲}=۴\sqrt{۹+۱۶}=۲۰N$$

با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۲۰=۵a\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم برابر است با:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰\Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}\times ۴(۲\times ۳-۱)+۰\Rightarrow \Delta x=۱۰m$$

کار نیروی خالص خواهد شد:

$$W_t=F_{net}d=۲۰\times ۱۰=۲۰۰J$$

گزینه ۱

B ۱۰۳۷ ۴

۱۰ ۱ ابتدا سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم: $P=mv\Rightarrow ۱۰=۲v\Rightarrow v=۵m/s$

۲ به کمک فرمول مستقل از شتاب، جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم (چون نیروها ثابت هستند شتاب جسم نیز ثابت است.):

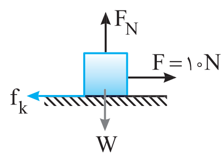
$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow \Delta x=\frac{۵+۰}{۲}\times ۱/۲\Rightarrow \Delta x=۳m$$

یادآوری قضیهٔ کار و انرژی جنبشی: تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر مجموع کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم است. $(W_t=\Delta K)$

۳ بنا به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم:

کار نیروهای F_N و W در این مسیر صفر است. بنابراین:

$$F\times d+W_f=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow ۱۰\times ۳+W_f=\frac{۱}{۲}\times ۲\times (۵)^۲\Rightarrow W_f=-۵J$$



کار نیروی اصطکاک در این حرکت به گرما تبدیل شده است، بنابراین گرمای تولیدشده ۵ ژول است.

B ۱۰۳۷ ۲

۱۱ بر جسم‌ها نیروی اصطکاک و مقاومت هوا وارد نمی‌شود و تنها نیروی وارد بر آن‌ها نیروی وزن است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg=ma\Rightarrow a=g$$

در نتیجه شتاب حرکت هر سه گلوله یکسان و برابر g است. با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت، سرعت گلوله‌ها را پس از جابه‌جایی یکسان h به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲ad\Rightarrow v^۲-۰=۲gh\Rightarrow v=\sqrt{۲gh}$$

یعنی سرعت هر سه گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین یکسان است.

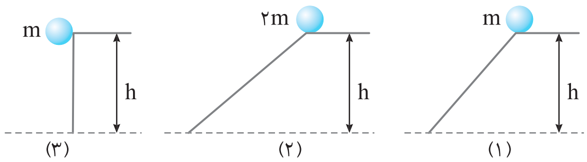
$$v_۱=v_۲=v_۳$$

در این صورت انرژی جنبشی $(K=\frac{۱}{۲}mv^۲)$ و تکانهٔ $(P=mv)$ گلوله‌ای که دارای جرم بیشتری است از بقیه بزرگ‌تر است، یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست و گزینهٔ (۲) درست است.

روش دیگر: قانون پایستگی انرژی مکانیکی:

$$E_۱=E_۲\Rightarrow mgh+۰=۰+\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow v=\sqrt{۲gh}$$

سرعت‌ها یکسان است.



B ۱۰۳۷ ۳

۱۲ **خط فکری** ابتدا به کمک پایستگی انرژی مکانیکی، تندی در مکان B را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به تعریف تکانه، P را حساب می‌کنیم.

سطح افقی را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

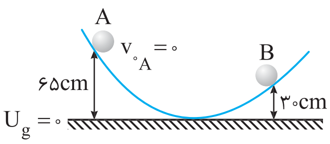
با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_A=E_B\Rightarrow U_A+K_A=U_B+K_B\Rightarrow mgh_A=mgh_B+\frac{۱}{۲}mv_B^۲$$

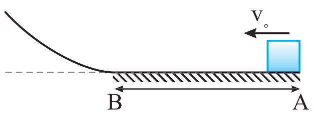
$$\Rightarrow ۱۰\times \frac{۶۵}{۱۰۰}=۱۰\times \frac{۳۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}v_B^۲\Rightarrow ۳/۵=\frac{۱}{۲}v_B^۲\Rightarrow ۷=v_B^۲\Rightarrow v_B=\sqrt{۷}m/s$$

تکانه را حساب می‌کنیم.

$$P=۵\times \sqrt{۷}\Rightarrow P=۵\sqrt{۷}kg.m/s$$



بازی با سؤال **جسمی را روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_k=۰/۲$ با سرعت اولیهٔ $۱۰m/s$ از نقطهٔ A به حرکت در می‌آوریم. جسم پس از ۳ ثانیه در نقطهٔ B وارد سطح خمیدهٔ بدون اصطکاکی می‌شود. جسم روی سطح خمیده تا چه ارتفاعی بر حسب متر بالا می‌رود؟** $(g=۱۰m/s^۲)$



۱) ۰/۸

۲) ۱/۶

۳) ۷/۲

۴) باید جرم جسم معلوم باشد.

پاسخ **شتاب حرکت روی سطح افقی را به دست می‌آوریم.**

$$F_{net}=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma$$

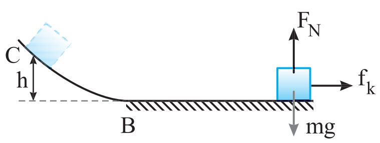
$$\Rightarrow a=-\mu_k g\Rightarrow a=-۰/۲\times ۱۰\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

سرعت جسم را در لحظهٔ گذر از B به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_B=-۲\times ۳+۱۰=۴m/s$$

اکنون به کمک پایستگی انرژی مکانیکی ارتفاعی که جسم از سطح بالا می‌رود را حساب می‌کنیم:

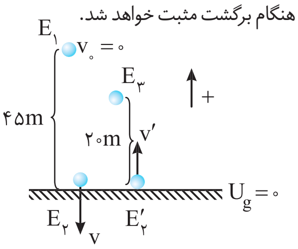
$$E_B=E_C\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_B^۲=mgh\Rightarrow v_B^۲=۲gh\Rightarrow ۱۶=۲۰h\Rightarrow h=۰/۸m$$



گزینه ۱

B ۱۰۳۷ ۴

۱۳ خط فکری با یک تست ترکیبی سروکار داریم ابتدا باید به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی، سرعت را هنگام برخورد به زمین و در لحظهٔ برگشت از سطح زمین به‌دست بیاوریم تا بتوانیم به کمک تعریف شتاب $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب برخورد و از آنجا نیروی خالص وارد بر گلوله را حساب کنیم. دقت کنید که در استفاده از تعریف شتاب باید علامت سرعت را در نظر بگیرید برای این منظور جهت مثبت را رو به بالا اختیار کنید. سرعت هنگام پایین آمدن و برخورد به زمین منفی و هنگام برگشت مثبت خواهد شد.



ابتدا به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی سرعت برخورد گلوله به زمین و همچنین سرعت برگشت آن از سطح زمین را حساب می‌کنیم. سطح زمین را مبدأ پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

$$E_۲=E_۱ \xrightarrow{K_۱=۰,U_۲=۰} \frac{۱}{۲}mv^۲=mgh \Rightarrow v^۲=۲\times۱۰\times۴۵ \Rightarrow v=-۳۰m/s$$

علت منفی قرار دادن سرعت برخورد به زمین این است که ما جهت مثبت را رو به بالا اختیار کرده‌ایم. اما پس از برخورد گلوله به زمین گلوله ابتدا متوقف می‌شود و سپس با سرعت v' روبه بالا حرکت می‌کند و در این لحظه دارای انرژی جنبشی $\frac{۱}{۲}mv'^۲$ است و تا ۲۰m بالا می‌رود و سرعتش صفر می‌شود و انرژی جنبشی‌اش به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود.

$$E'_۲=E_۳ \xrightarrow[U'_۲=۰]{K_۳=۰} \frac{۱}{۲}mv'^۲=mgh'$$

$$\Rightarrow v'^۲=۲gh'=۲\times۱۰\times۲۰ \Rightarrow v'=۲۰m/s$$

v' را مثبت قرار می‌دهیم زیرا جهتش رو به بالا و در جهت مثبت اختیاری ما بود. اکنون شتاب در مدت برخورد و سپس نیروی خالص را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v'-v}{t}=\frac{۲۰-(-۳۰)}{۲\times۱۰^{-۳}}=۲۵\times۱۰^۳ m/s^۲$$

با نوشتن قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر گلوله در مدت برخورد قابل محاسبه است.

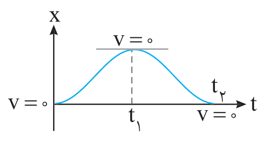
$$F_{net}=ma \Rightarrow F_{net}=۰/۲\times۲۵\times۱۰^۳=۵۰۰۰N$$

میانبر در شرایط خلأ می‌توانید از رابطهٔ $v=\sqrt{۲gh}$ که در آن h مقدار جابه‌جایی در امتداد قائم است استفاده کنید.

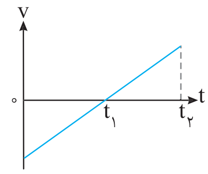
B ۱۰۳۷ ۴

۱۴ خط فکری چگونه از روی نمودار مکان زمان دربارهٔ علامت نیروی خالص وارد بر جسم اظهار نظر کنیم. کافی است مشخص کنیم که در هر بازهٔ زمانی تندی در حال افزایش و یا در حال کاهش است. سپس با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی $W_t=\Delta K$ اگر تندی در حال افزایش باشد $\Delta K>۰$ و کار نیروی خالص مثبت است و اگر تندی در حال کاهش باشد، $\Delta K<۰$ و کار نیروی خالص منفی است.

با توجه به شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ صفر تا $t_۱$، ابتدا سرعت افزایش و سپس کاهش می‌یابد تا در لحظهٔ $t_۱$ سرعت صفر می‌شود و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ نیز مجدداً سرعت زیاد و سرانجام کم می‌شود. بنابراین در بازهٔ صفر تا $t_۱$ انرژی جنبشی ابتدا افزایش $(\Delta K>۰)$ و سپس کاهش $(\Delta K<۰)$ می‌یابد و کار نیروی خالص ابتدا مثبت $(W>۰)$ و سپس منفی $(W<۰)$ است و در بازهٔ $t_۱$ و $t_۲$ نیز همین حالت تکرار می‌شود.



بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. کار نیروی خالص وارد بر ذره در بازه‌های زمانی صفر تا $t_۱$ و $t_۱$ تا $t_۲$ به‌ترتیب از راست به چپ چگونه است؟



۱) مثبت، منفی ۲) مثبت، مثبت ۳) منفی، مثبت ۴) منفی، منفی

پاسخ از صفر تا $t_۱$ اندازهٔ سرعت در حال کاهش و انرژی جنبشی ذره در حال کم شدن است $(\Delta K<۰)$ و بنا به قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ کار نیروی خالص وارد بر ذره منفی است. از $t_۱$ تا $t_۲$ اندازهٔ سرعت در حال افزایش و انرژی جنبشی ذره در حال زیاد شدن است و کار برایند نیروهای وارد بر ذره مثبت است.

گزینهٔ ۳

B ۱۰۳۷ ۴

۱۵ خط فکری باید از روی نمودار شتاب و سرعت اولیه را پیدا کنیم، معادلهٔ سرعت زمان را بنویسیم تا بتوانیم کار نیروی خالص را به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ به‌دست بیاوریم.

۱ در بازهٔ صفر تا ۲s متحرک از مکان $x_۰=۵m$ به مکان $x=۹m$ می‌رود. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{v+v_۰}{۲}t+x_۰ \Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times۲+۵ \Rightarrow v_۰=۴m/s$$

۲ شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a=\frac{۰-۴}{۲} \Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

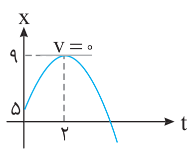
۳ معادله سرعت زمان را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت صفر است، در لحظهٔ $t=۴s$ سرعت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=-۲t+۴ \xrightarrow{t=۴s} v=-۲\times۴+۴ \Rightarrow v=-۴m/s$$

۴ اکنون کار نیروی خالص قابل حساب کردن است.

$$W_t=\Delta K=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \xrightarrow{m=۲kg} W_t=\frac{۱}{۲}\times۲\times(-۴)^۲+۰$$

$$\Rightarrow W_t=۱۶J$$



B ۱۰۳۷ ۳

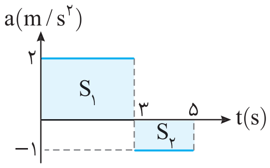
۱۶ مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت می‌باشد. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\Delta v=S_۱+S_۲ \Rightarrow v_۲-v_۱=۶+(-۲) \xrightarrow[\text{جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده}]{v_۱=۰}$$

$$v_۲=۴m/s$$

با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_t=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲) \Rightarrow W_t=\frac{۱}{۲}\times۲(۴^۲-۰) \Rightarrow W_t=۱۶J$$



بازی با سؤال بر جسم ساکنی به جرم $4kg$ نیروی $F=8t$ وارد شده و جسم شروع به حرکت می‌کند. کار این نیرو در ۲ ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

پاسخ **خط فکری** برای به‌دست آوردن کار نیروی F در بازهٔ صفر تا $2s$ باید سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را به‌دست بیاوریم. مساحت سطح زیر نمودار شتاب زمان برابر تغییرات سرعت است. بنابراین نمودار $a-t$ را رسم کنید، سطح زیر نمودار آن را به‌دست بیاورید تا بتوانید v را حساب کرده به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ کار این نیرو را به‌دست بیاورید.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ معادلهٔ شتاب - زمان را می‌نویسیم:

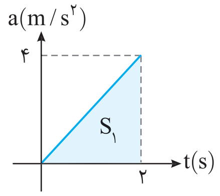
$$\begin{cases} F=ma \\ F=8t \end{cases} \Rightarrow 4a=8t \Rightarrow a=2t$$

۲ نمودار $a-t$ را رسم می‌کنیم و تا لحظهٔ $t=2s$ مساحت زیر نمودار آن را حساب کرده و با توجه به اینکه $v_0=0$ است، خواهیم داشت:

$$\Delta v=S \Rightarrow \Delta v=\frac{4\times 2}{2}=4m/s \Rightarrow v-v_0=4m/s \Rightarrow v=4m/s$$

۳ اکنون به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی، کار نیروی F را حساب می‌کنیم.

$$W=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2) \Rightarrow W=\frac{1}{2}\times 4\times(4^2-0)=32$$

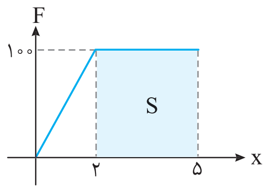


گزینهٔ ۳

B ۱۰۳۷ ۱

۱۷ **نکته** مساحت سطح محصور بین نمودار نیرو با محور xها برابر کار نیروی F است.

۱ سطح زیر نمودار $F-x$ را حساب کرده و کار نیروی F را به‌دست می‌آوریم.



$$W=S=\frac{100(3+5)}{2}=400J$$

۲ به کمک قضیه کار و انرژی سرعت در مکان $x=5m$ خواهد شد:

$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow 400=\frac{1}{2}\times 2\times(v_2^2-0) \Rightarrow v_2=20m/s$$

۳ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم. $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{20-0}{2}=10m/s^2$

B ۱۰۳۷ ۱

۱۸ سرعت گلوله هنگام رسیدن به زمین را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow{a=8m/s^2, h=10m} v^2-0=2\times 8\times 10 \Rightarrow v^2=160$$

بنا به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، تغییر انرژی جنبشی برابر مجموع کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم است. بر این جسم دو نیرو یکی نیروی وزن و دیگری نیروی مقاومت هوا وارد می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_g+W_{f_D}=K_2-K_1 \Rightarrow mgh+W_{f_D}=\frac{1}{2}mv^2-0$$

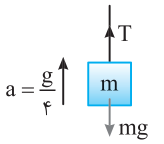
$$\xrightarrow{m=2kg} 2\times 10\times 10+W_{f_D}=\frac{1}{2}\times 2\times(160)=200+W_{f_D}=160$$

$$\Rightarrow W_{f_D}=-40J$$

B ۱۰۳۷ ۴

۱۹ **خط فکری** ابتدا نیروی کشش نخ (T) را به کمک دینامیک حساب کنید. سپس کار این نیرو و کار نیروی وزن را به‌دست آورده بر هم تقسیم کنید.

ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشش طناب را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net}=ma \Rightarrow T-mg=\frac{mg}{4} \Rightarrow T=\frac{5}{4}mg$$

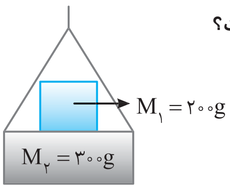
کار نیروی T و mg خواهد شد:

$$W=Fd\cos\theta \begin{cases} \xrightarrow{W_T} W_T=Td\cos 0=\frac{5}{4}mgd \\ \xrightarrow{W_{mg}} W_{mg}=mgd\cos 180^\circ=-mgd \end{cases}$$

نسبت $\frac{W_T}{W_{mg}}$ برابر است با:

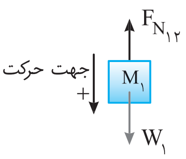
$$\frac{W_T}{W_{mg}}=\frac{\frac{5}{4}mgd}{-mgd}=-\frac{5}{4}$$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو دستگاه با شتاب ثابت $2m/s^2$ از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. کار نیرویی که M_2 بر M_1 وارد می‌کند در سه ثانیه آغازین حرکت چند ژول است؟



۱) ۱۴/۴
۲) −۱۴/۴
۳) ۷/۲
۴) −۷/۲

پاسخ نیروهای وارد بر M_1 را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون نیرویی که M_2 بر M_1 وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=Ma \Rightarrow M_1g-F_{N_{12}}=M_1a$$

$$\Rightarrow 2-F_{N_{12}}=0/2\times 2 \Rightarrow F_{N_{12}}=1/6N$$

جابه‌جایی دستگاه در مدت ۳ ثانیه را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 2\times 9 \Rightarrow d=9m$$

کار نیروی $F_{N_{12}}$ برابر است با:

$$W=F_{N_{12}}d\cos 180^\circ \Rightarrow W=1/6\times 9\times(-1)=-14/4J$$

گزینهٔ ۲

A ۱۰۳۷ ۲

۲۰ **یادآوری** قضیه کار و انرژی جنبشی: کار نیروی خالص وارد بر جسم برابر تغییرات انرژی جنبشی جسم: $W_t=\Delta K$

شتاب حرکت $a=0/2m/s^2$ است و آسانسور از حال سکون $(v_0=0)$ به مدت $5s$ در حرکت است. بنابراین سرعت در $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی کار نیروی برایند را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=5(0/2)+0 \Rightarrow v=1m/s$$

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\times 400(v^2-v_0^2) \Rightarrow W_t=200J$$

بازی با سؤال وزنه‌ای به جرم $60kg$ درون آسانسوری قرار دارد و آسانسور با شتاب $2m/s^2$ کندشونده رو به بالا در حرکت است. کار نیروی عمودی سطح پس از $10m$ جابه‌جایی چند ژول است؟

۱) ۴۸۰۰ ۲) ۲۴۰۰ ۳) ۵۶۰۰ ۴) ۷۲۰۰

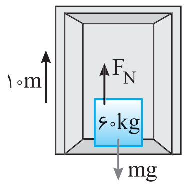
پاسخ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون F_N را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma$

$\Rightarrow ۶۰۰-F_N=۱۲۰\Rightarrow F_N=۴۸۰N$

کار نیروی عمودی سطح برابر است:

$W_{F_N}=F_N d\cos ۰=۴۸۰\times۱۰=۴۸۰۰J$



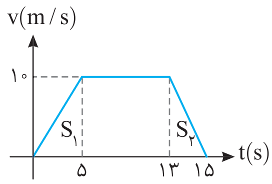
گزینهٔ ۱

B ۱۰۳۷ ۳

۲۱

۱ در قسمت اول حرکت (۵s آغازین) شتاب حرکت برابر است با:

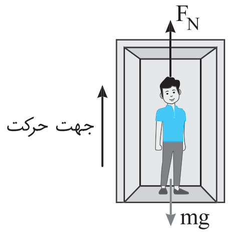
$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۵}=۲m/s^۲$



۲ نیروی عمودی سطح در این حالت را حساب می‌کنیم:

$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=ma$

$\Rightarrow F_N=۶۰۰+۱۲۰=۷۲۰N$



۳ هم‌چنین جابه‌جایی برابر مساحت زیر نمودار $v-t$ می‌باشد:

$d=S_۱=۲۵m$

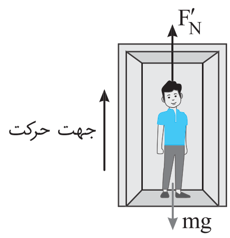
۴ کار نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$W_{F_N}=F_N d\cos ۰=۷۲۰\times۲۵\times۱=۱۸۰۰۰J$

۵ تمام مراحل بالا را برای ۲s آخر تکرار می‌کنیم:

در ۲s آخر حرکت شتاب برابر است با $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱۰}{۲}=-۵m/s^۲$ و با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$\begin{cases}F_{net}=ma\Rightarrow F'_N-mg=-ma\Rightarrow F'_N-۶۰۰=-۳۰۰\Rightarrow F'_N=۳۰۰N\\ W_{F'_N}=F'_N d_۲\cos ۰\xrightarrow{d_۲=S_۲}W_{F'_N}=۳۰۰\times\frac{۲\times۱۰}{۲}=۳۰۰۰J\end{cases}$$



۶ نسبت کار نیروی عمودی سطح در دو حالت خواهد شد: $\frac{W_{F_N}}{W_{F'_N}}=\frac{۱۸۰۰۰}{۳۰۰۰}=۶$

بازی با سؤال **وزنه‌ای به جرم ۲kg درون آسانسوری قرار دارد. آسانسور با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ رو به بالا شروع به حرکت می‌کند. کار نیروی عمودی سطح در نیم ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟** $(g=۱۰N/kg)$

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۸۹ ۴) ۶

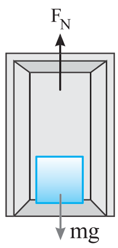
پاسخ ابتدا نیروی عمودی تکیه‌گاه را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-۲۰=۴$

$\Rightarrow F_N=۲۴N$

سپس جابه‌جایی را در مدت نیم‌ثانیه حساب می‌کنیم:

$d=\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow d=\frac{۱}{۲}\times۲(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}m$



کار نیروی عمودی سطح خواهد شد: $W_{F_N}=F_N d\cos\theta=۲۴\times\frac{۱}{۴}\times\cos ۰=۶J$

گزینهٔ ۴

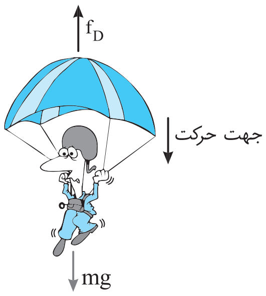
B ۱۰۳۷ ۴

۲۲

در تندی حدی، سرعت ثابت بوده و برایند نیروهای وارد بر چترباز صفر است، از این رو نیروی مقاومت هوا وارد بر چترباز برابر نیروی وزن چترباز است:

$F_{net}=۰\Rightarrow mg=f_D\Rightarrow f_D=۸۰۰N$

در هر متر سقوط کار نیروی مقاومت هوا برابر است با: $W_{f_D}=f_D d\cos ۱۸۰^\circ=-۸۰۰J$



B ۱۰۳۷ ۴

۲۳

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون کشش T را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۵۰۰=۱۰۰$

$\Rightarrow T=۶۰۰N$

۲ حال جابه‌جایی آن در مدت ۴s را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta y=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱۶\Rightarrow\Delta y=۱۶m$

۳ کار نیرویی که طناب به شخص وارد می‌کند برابر است با:

$W=Td=۶۰۰\times۱۶=۹۶۰۰J$

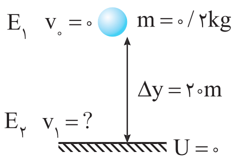
A ۱۰۳۷ ۳

۲۴

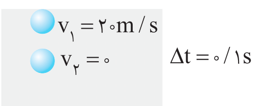
۱ ابتدا تندی گلوله هنگام رسیدن به تودهٔ شنی را به کمک پایستگی انرژی مکانیکی به دست می‌آوریم:

$E_۲=E_۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_۱^۲-۰=mg\Delta y$

$\Rightarrow\frac{۱}{۲}v_۱^۲=۱۰\times۲۰\Rightarrow v_۱=۲۰m/s$



۲ گلوله با این سرعت به تودهٔ شن برخورد می‌کند و در مدت ۰/۱s سرعت گلوله به صفر می‌رسد.



شتاب توقف گلوله در تودهٔ شنی را حساب می‌کنیم.

$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۲۰}{۰/۱}\Rightarrow a=-۲۰۰m/s^۲$

۳ نیروی خالص وارد بر گلوله خواهد شد:

$F_{av}=ma\Rightarrow|F_{av}|=|۰/۲\times(-۲۰۰)|=۴۰N$

A ۱۰۳۷ ۳

۲۵

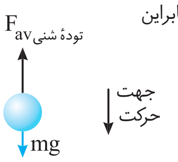
هنگام برخورد گلوله به تودهٔ شنی بر گلوله دو نیرو یکی نیروی وزن و دیگری نیروی مقاومت تودهٔ شن در مقابل حرکت گلوله است. نیروهای وارد بر گلوله را رسم می‌کنیم و با استفاده از قانون دوم نیوتون، نیروی متوسطی که تودهٔ شن به گلوله وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

نیروی خالص متوسط وارد بر گلوله $F_{av}=-۴۰N$ است بنابراین

$mg-F_{av\,\text{تودهٔ شنی}}=-۴۰$

$\Rightarrow ۲-F_{av\,\text{تودهٔ شنی}}=-۴۰$

$\Rightarrow F_{av\,\text{تودهٔ شنی}}=۴۲N$



B ۱۰۳۷ ۳

۲۶ **خط فکری** در دو مسیر بیان شده مطابق شکل جهت بردار نیروی اصطکاک تغییر می‌کند. دقت کنید کار در رابطهٔ $W=Fd\cos\theta$ برای نیروی ثابت تعریف می‌شود. در حالی که بردار نیروی اصطکاک تغییر کرده است. از این رو شما نمی‌توانید از جابه‌جایی کل از ابتدا تا انتهای مسیر استفاده کنید. بلکه باید در هر قسمت کار نیروی اصطکاک را جداگانه به‌دست آورده و با هم جمع کنید.

ابتدا نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک در هر دو مسیر را حساب کرده و با توجه به جابه‌جایی کار نیروی اصطکاک‌ها را حساب می‌کنیم.

$$F_{net,y}=۰\Rightarrow F_N=mg$$

کار نیروی اصطکاک در قسمت اول:

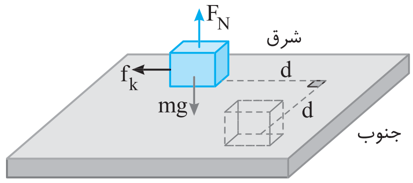
$$f_{k_۱}=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow W_{f_{k_۱}}=f_{k_۱}d\cos۱۸۰^\circ=-\mu_k mgd$$

کار نیروی اصطکاک در قسمت دوم:

$$f_{k_۲}=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow W_{f_{k_۲}}=f_{k_۲}d\cos۱۸۰^\circ=-\mu_k mgd$$

کار نیروی اصطکاک در کل مسیر:

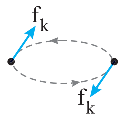
$$W_{f_k}=W_{f_{k_۱}}+W_{f_{k_۲}}=-\mu_k mgd-\mu_k mgd=-۲\mu_k mgd$$



B ۱۰۳۷ ۳

۲۷ **نکته** اندازهٔ کار نیروی اصطکاک برابر حاصل‌ضرب نیروی اصطکاک در مسافت طی شده (طول مسیر) است.

نیروی اصطکاک روی سطح میز افقی برابر است با:



$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=mg}f_k=\mu_k mg$$

طول مسیر حرکت در یک دور کامل برابر محیط دایره $(۲\pi R)$ است. بنابراین کار نیروی اصطکاک در یک دور کامل خواهد شد:

$$W_f=-f_k(۲\pi R)=-۲\mu_k mg\pi R$$

B ۱۰۳۷ ۲

۲۸ نیروی خالص متوسط که سبب حرکت اتومبیل می‌شود خواهد شد:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{m=۱۲۰۰kg,\ a=۴m/s^۲}F_{net}=۱۲۰۰\times۴\Rightarrow F_{net}=۴۸۰۰N$$

یادآوری جابه‌جایی متحرک با شتاب ثابت در ثانیهٔ دوم حرکت از رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰$ به‌دست می‌آید.

جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}\times۴\times(۲\times۲-۱)+۰\Rightarrow\Delta x=۶m$$

یادآوری توان: آهنگ انجام کار یا مصرف انرژی است.

$$P=\frac{W}{t}\xrightarrow{W=Fx}P=\frac{۴۸۰۰\times۶}{۲-۱}\Rightarrow P=۲۸۸۰۰W\Rightarrow P=۲۸/۸kW$$

A ۱۰۳۷ ۴

۲۹ ۱ با تطابق معادلهٔ سرعت ـ زمان داده شده $(v=۵t+۲)$ با معادلهٔ سرعت ـ زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_۰)$، شتاب حرکت $۵m/s^۲$ و سرعت اولیه $۲m/s$ است.

۲ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۲+۲\Rightarrow v_{av}=۷m/s$$

۳ نیروی وارد بر جسم برابر است با:

$$F=ma\Rightarrow F=۳\times۵=۱۵N$$

۴ توان متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$P_{av}=\frac{W}{t}=\frac{F.d}{t}=Fv_{av}=۱۵\times۷=۱۰۵W$$

بازی با سؤال **جسمی تحت تأثیر نیروی ثابت F از حال سکون به حرکت درمی‌آید و پس از مدت t به سرعت v می‌رسد. توان متوسطی که در این مدت جسم دریافت می‌کند برابر است با:**

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{۱}{۲}Fv$ ۲) Fv ۳) $\frac{۱}{۲}\frac{Fv}{t}$ ۴) $\frac{Fv}{t}$

پاسخ **توان متوسط برابر است با:**

$$\bar{P}=\frac{W}{t}=\frac{Fd}{t}=F\frac{d}{t}\xrightarrow{v_{av}=\frac{d}{t}}\bar{P}=Fv_{av}$$

چون نیروی وارد بر جسم ثابت است و با توجه به رابطهٔ $F=ma$ شتاب حرکت ثابت می‌باشد. بنابراین $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$:

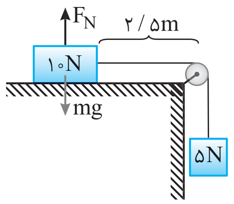
$$\bar{P}=Fv_{av}\Rightarrow\bar{P}=F\frac{v_۱+v_۲}{۲}\xrightarrow[v_۲=v]{v_۱=۰}\bar{P}=F\frac{v}{۲}=\frac{۱}{۲}Fv$$

گزینهٔ ۱

B ۱۰۳۷ ۱

۳۰ ۱ وقتی وزنه‌ها را رها می‌کنیم و وزنه‌ها ۱/۵ متر جابه‌جا می‌شوند وزنهٔ ۱۰N همچنان روی سطح میز است و انرژی پتانسیل آن تغییر نمی‌کند اما انرژی جنبشی به‌دست می‌آورد. در حالی که وزنهٔ ۵N، ۱/۵m به پایین می‌آید و انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد.

$$\Delta U=-mg\Delta h\Rightarrow\Delta U=-۵\times۱/۵\Rightarrow\Delta U=-۷/۵$$



۲ بنا به قانون پایستگی انرژی، تغییر انرژی مکانیکی سامانه برابر کار نیروهای مقاوم به سامانه است بنابراین:

$$E_۲-E_۱=W_f\Rightarrow K_۲+U_۲-(K_۱+U_۱)=W_f\Rightarrow\overbrace{(K_۲-K_۱)}^{\Delta K}+\overbrace{(U_۲-U_۱)}^{\Delta U}=W_f$$

$$\Rightarrow\Delta K+\Delta U=W_f\xrightarrow{\Delta K=۶J}۶+(-۷/۵)=W_f\Rightarrow W_f=-۱/۵J$$

۳ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$W_f=-f_k d\xrightarrow{d=۱/۵m}-۱/۵=-f_k(۱/۵)\Rightarrow f_k=۱N$$

۴ ضریب اصطکاک سطح میز خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=۱۰N}۱=\mu_k\times۱۰\Rightarrow\mu_k=۰/۱$$

روش دیگر به کمک قضیهٔ کار و انرژی جنبشی:

با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی برای دستگاه می‌توان نوشت:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_{mg}+W_{f_k}=K_۲-K_۱\Rightarrow mgd+W_{f_k}=K_۲$$

$$\xrightarrow[K_۲=۶J]{d=۱/۵m}۷/۵+W_{f_k}=۶$$

$$W_{f_k}=-۱/۵J\Rightarrow f_k d\cos۱۸۰^\circ=-۱/۵J\xrightarrow{d=۱/۵m}f_k=۱N$$

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow۱=\mu_k\times۱۰\Rightarrow\mu_k=۰/۱N$$

فصل سوم

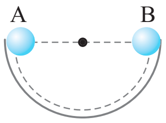
نوسان و امواج

پنجره ۱

A ۱۰۳۸ — ۴

حرکت دوره‌ای به حرکتی گویند که در بازه‌های زمانی یکسان عیناً تکرار می‌شود. چرخش زمین به دور خورشید، ضربان قلب و تاب خوردن دائماً در حال تکرار هستند، از این‌رو هر سه آن‌ها حرکت دوره‌ای‌اند.

A ۱۰۳۹ — ۲



سطح نیمکره بدون اصطکاک است و با رها شدن جسم، جسم از نقطهٔ A تا B می‌رود و این مسیر را بازمی‌گردد. در نتیجه این حرکت، یک نوسان دوره‌ای است اما چون مسیر حرکت خط راست نیست، این حرکت، حرکت هماهنگ ساده نخواهد بود.

A ۱۰۴۰ — ۳

نوسان‌های دوره‌ای هرگاه دارای نوسان‌های سینوسی باشند، حرکت هماهنگ ساده هستند و گزینهٔ (۱) نادرست و گزینهٔ (۳) درست است.

نکته به‌طور عمومی به همهٔ تابع‌های سینوسی و کسینوسی، تابع سینوسی گویند.

با توجه به نکتهٔ بیان شدهٔ معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده می‌تواند به‌صورت‌های مختلف از جمله $x=A\sin\omega t$ یا $x=A\cos\omega t$ باشد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

A ۱۰۴۱ — ۴

یادآوری به نوسان‌های سینوسی (و کسینوسی) حرکت هماهنگ ساده (SHM) گویند.

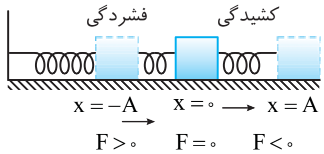
نمودار (الف) نمودار مکان - زمان یک نوسان دوره‌ای است اما نوسان‌های آن سینوسی نیست و این نمودار مربوط به حرکت هماهنگ ساده نیست.

نمودار (پ) نیز با اینکه دوره‌ای است اما سینوسی نبوده و این نمودار نیز مربوط به حرکت هماهنگ ساده نیست.

نمودارهای (ب) و (ت) نمودارهای سینوسی و کسینوسی هستند که به آن‌ها به‌طور عمومی تابع سینوسی می‌گویند و مربوط به حرکت هماهنگ ساده هستند.

A ۱۰۴۲ — ۳

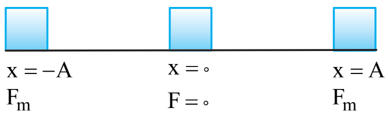
به حرکت هماهنگ ساده این وزنه و فنر دقت کنید. وقتی که فنر دارای فشردگی است (یعنی از $x=0$ تا $x=-A$) قطعاً نیروی فنر می‌خواهد فنر را به حالت طبیعی برگرداند و این نیرو به سمت راست است و در فاصله صفر تا $+A$ که فنر از طول طبیعی کشیدگی دارد، نیروی فنر به سمت چپ است، بنابراین نیروی فنر همواره به سمت نقطه حالت تعادل (طول طبیعی فنر) است یعنی نیرو به سمت مرکز نوسان است.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، نیروی برگرداننده نقش اصلی را دارد که جهت بردار این نیرو همواره به سوی مرکز نوسان است.

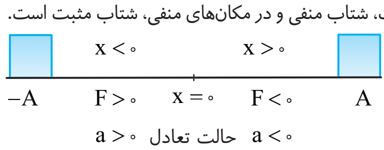
A ۱۰۴۳ — ۳

هنگامی که نوسانگر در دو انتهای مسیر است، نیروی خالص وارد بر آن بیشینه است و در مرکز نوسان، نیروی خالص وارد بر نوسانگر صفر است. بنابراین هنگامی که نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر آن می‌رود، ابتدا تا مرکز نوسان نیرو کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



A ۱۰۴۴ — ۲

نکته در حرکت هماهنگ ساده، مکان و شتاب هم‌علامت نیستند و در مکان‌های مثبت، شتاب منفی و در مکان‌های منفی، شتاب مثبت است.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، علامت سرعت، ارتباطی به علامت مکان ندارد. یعنی در مکان‌های مثبت سرعت می‌تواند مثبت و یا منفی باشد.

در صورت تست گفته شده در چه حالتی مکان نوسانگر الزاماً منفی است. بنابراین باید شتاب مثبت باشد.

بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ ساده، در لحظه‌ای که شتاب حرکت مثبت است، الزاماً ......**

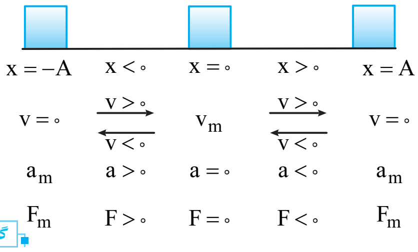
۱) بردار مکان منفی و بردار سرعت مثبت است.

۲) بردار مکان مثبت و بردار سرعت منفی است.

۳) بردار مکان منفی و نیروی وارد بر نوسانگر مثبت است.

۴) بردار مکان و نیروی وارد بر نوسانگر مثبت است.

پاسخ **در حرکت هماهنگ ساده، مطابق شکل، در لحظه‌ای که بُعد حرکت مثبت است، سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اما شتاب و نیرو قطعاً منفی هستند و در لحظه‌ای که بُعد حرکت منفی است، شتاب و نیرو قطعاً مثبت بوده اما سرعت ممکن است مثبت یا منفی باشد. در صورت سؤال بیان شده که شتاب حرکت مثبت است، بنابراین نیرو مثبت، مکان منفی و سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.**

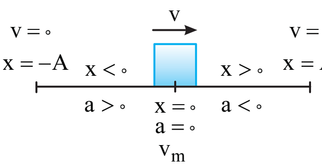


گزینهٔ ۳

A ۱۰۴۵ — ۴

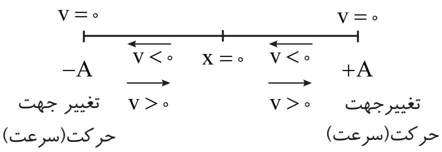
بردار مکان در گذر نوسانگر از مبدأ یعنی در نقطهٔ تعادل تغییر علامت می‌دهد و در این نقطه بردار سرعت تغییر جهت نمی‌دهد، در صورتی که بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.

مطابق شکل بردار سرعت در انتهای مسیر (دامنهٔ حرکت) صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.



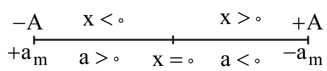
A ۱۰۴۶ — ۲

سرعت در دو انتهای مسیر تغییر علامت می‌دهد. وقتی سرعت ابتدا مثبت است و سپس منفی می‌شود، یعنی متحرک در انتهای مسیر و در مکان $x=+A$ بوده و تغییر جهت داده است. در حرکت هماهنگ ساده هرگاه مکان مثبت باشد، شتاب منفی است بنابراین در این لحظه شتاب بیشینه مقدار منفی خود را دارد.



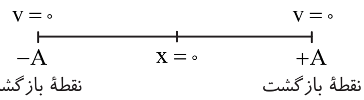
A ۱۰۴۷ — ۴

در مرکز نوسان (حالت تعادل) شتاب صفر و در دامنه‌ها شتاب بیشینه است، بنابراین اندازهٔ شتاب در حال تغییر است. در مکان‌های مثبت، شتاب نوسانگر منفی و در مکان‌های منفی شتاب نوسانگر مثبت است و جهت بردار شتاب در لحظهٔ گذر از مبدأ مکان تغییر می‌کند. همچنین جهت سرعت و شتاب مستقل از یکدیگرند. در نتیجه حرکت هماهنگ ساده، یک حرکت شتاب‌دار با شتاب متغیر است که بزرگی و جهت شتاب در حال تغییر است.



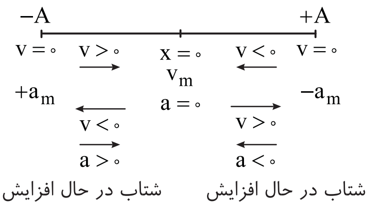
۱۰۴۸ **۲**

دو انتهای مسیر نوسان $(x=\pm A)$ را که در آن‌جا تندی نوسانگر صفر می‌شود و نوسانگر تغییر جهت می‌دهد نقطهٔ بازگشت می‌گویند. پس گزینهٔ (۳) نادرست است. در این نقاط بازگشت تندی صفر است و گزینهٔ (۲) درست است. اما شتاب نوسانگر بیشینه است زیرا نیروی خالص برگردانندهٔ وارد بر نوسانگر در این نقاط بیشینه است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.



۱۰۴۹ **۴**

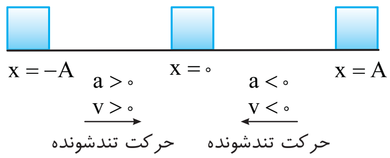
در حرکت هماهنگ ساده، در مرکز نوسان سرعت بیشینه و شتاب صفر است و در دو انتهای مسیر، سرعت صفر و شتاب بیشینه است. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. هنگام حرکت نوسانگر به سوی مرکز نوسان که حرکت تندشونده است بردار سرعت و شتاب هم‌جهت هستند، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. هنگام حرکت نوسانگر به سوی دو انتهای مسیر، شتاب افزایش می‌یابد و بیشینه می‌شود، در حالی که سرعت کاهش یافته و صفر می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.



۱۰۵۰ **۴**

نکته وقتی نوسانگر به سوی مرکز نوسان می‌رود، تندی آن افزایش می‌یابد و حرکت نوسانگر تندشونده است.

در حرکت تند شونده باید علامت سرعت و شتاب یکسان نباشد. یعنی اگر $v<0$ باشد $a<0$ باشد و اگر $v>0$ باشد، $a>0$ باشد. بنابراین ممکن است سرعت مثبت و یا منفی بوده و گزینهٔ (۴) درست است.



بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر در حال نزدیک شدن به مبدأ (نقطهٔ تعادل) است. کدام گزینه درست است؟**

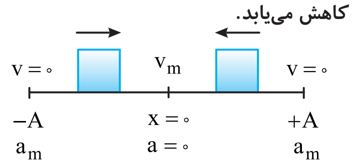
۱) شتاب در حال افزایش و تندی در حال کاهش است.

۲) شتاب و تندی در حال افزایش است.

۳) شتاب در حال کاهش و تندی در حال افزایش است.

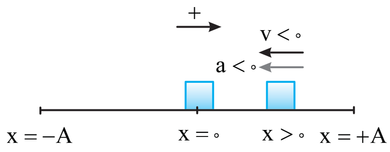
۴) شتاب ثابت و تندی در حال افزایش است.

پاسخ **در حرکت هماهنگ ساده هنگامی که نوسانگر به مبدأ نزدیک می‌شود، تندی در حال افزایش است اما به دلیل کاهش نیروی خالص وارد بر نوسانگر شتاب کاهش می‌یابد.** گزینهٔ ۳



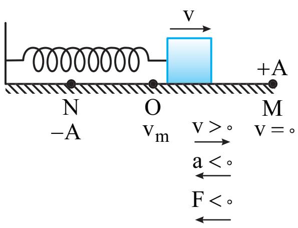
۱۰۵۱ **۳**

مکان مثبت است و مطابق شکل برای آن‌که حرکت تندشونده باشد باید نوسانگر در حال حرکت به سمت مرکز نوسان باشد، یعنی سرعت منفی بوده و چون حرکت تندشونده است شتاب نیز منفی است و گزینهٔ (۳) درست است. البته می‌دانیم که علامت مکان و شتاب خلاف یکدیگر است و هرگاه مکان مثبت باشد، قطعاً شتاب منفی است.



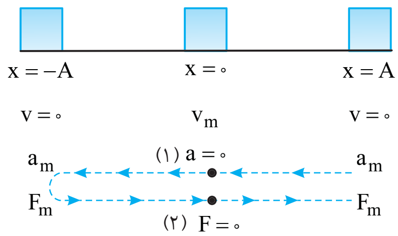
۱۰۵۲ **۴**

جسم در حال حرکت به سمت نقطهٔ بازگشت است و تندی آن در حال کاهش است، پس حرکت آن کندشونده بوده، از این‌رو بردار شتاب در خلاف جهت بردار سرعت یعنی در خلاف جهت محور xهاست و با توجه به قانون دوم نیوتون $(\vec{F}=m\vec{a})$ نیروی خالص وارد بر نوسانگر نیز در خلاف جهت محور xهاست.



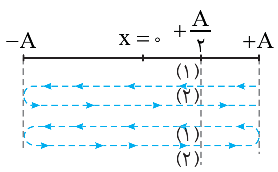
۱۰۵۳ **۲**

در حرکت هماهنگ ساده، در مرکز نوسان، شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر صفر است و در دامنه‌ها سرعت نوسانگر صفر می‌شود و در هر دوره مطابق شکل، نیرو و سرعت دو بار صفر می‌شود.



۱۰۵۴ **۲**

با توجه به مسیرهای شکل روبه‌رو، متحرک در یک دوره دو بار از مکان $x=+\frac{A}{2}$ می‌گذرد.

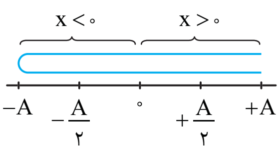


نکته در هر دوره نوسانگر از هر نقطهٔ مسیر بین $+A$ تا $-A$ دو بار می‌گذرد.

۱۰۵۵ **۲**

خط فکری فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان $(x=0)$ می‌تواند در مکان‌های مثبت و یا در مکان‌های منفی باشد، یعنی وقتی گفته می‌شود فاصله از مرکز نوسان $\frac{A}{2}$ باشد شما باید مکان‌های $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ را درنظر بگیرید.

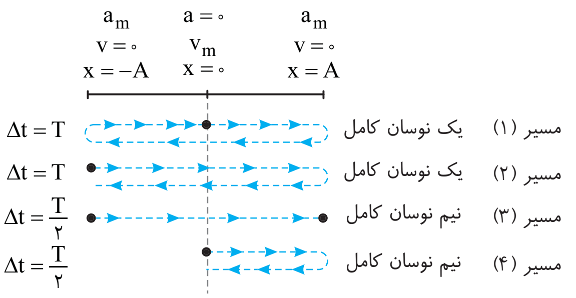
به شکل نگاه کنید نوسانگر در یک دوره دو بار از مکان $+\frac{A}{2}$ و دو بار از مکان $-\frac{A}{2}$ می‌گذرد یعنی در هر دوره جمعاً ۴ بار فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادل (مرکز نوسان $x=0$) برابر $\frac{A}{2}$ می‌شود.



A ۱۰۵۶ ۲

دوره یعنی زمان یک نوسان کامل و نصف دوره یعنی زمانی که نوسانگر نصف نوسان انجام می‌دهد. به شکل دقت کنید در مسیر (۳) حداقل سرعت یک‌بار بیشینه (max) می‌شود و در مسیر (۴) در مدت نیم‌نوسان سرعت یکبار صفر می‌شود بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

نکته در یک حرکت هماهنگ ساده، مطابق شکل زیر، در بازهٔ $\frac{T}{۲}$ سرعت، شتاب، نیرو، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل حداقل یک بار صفر و یک بار بیشینه می‌شود.



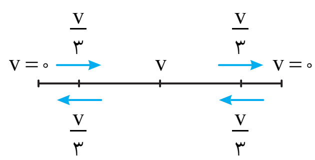
بازی با سؤال در یک حرکت هماهنگ روی خط راست، در مدت $\frac{T}{۲}$ سرعت به‌ترتیب حداکثر چند بار صفر و چند بار بیشینه می‌شود؟

۱) صفر، ۱ ۲) ۱، ۱ ۳) ۱ و صفر ۴) ۲ و ۲

پاسخ در مسیر (۳) سرعت دوبار صفر شده و در مسیر (۴) سرعت دوبار بیشینه می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است. گزینهٔ ٤

A ۱۰۵۷ ۳

تندی در نقاط بازگشت صفر و در نقطهٔ تعادل بیشینه یعنی v است، از این‌رو تندی بین صفر تا v تغییر می‌کند و مطابق شکل زیر در هر دوره چهار بار تندی برابر $\frac{v}{۳}$ می‌شود.



میانبر در حرکت هماهنگ ساده در هر دوره تندی نوسانگر چهار بار می‌تواند $\frac{۱}{n}v_m$ (یعنی کسری از تندی بیشینه) شود.

A ۱۰۵۸ ۱

یادآوری زمان یک نوسان را دوره (T) می‌گویند.

با یک تناسب ساده مسئله قابل حل است.

نوسان $N=۴۰$	$t=۲۰s$
۱ نوسان	$T=?$

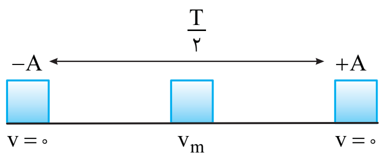
$$\Rightarrow T=\frac{۲۰}{۴۰}=۰/۵s$$

A ۱۰۵۹ ۳

در صورت مسئله بیان شده در بازه‌های زمانی $۰/۱s$ سرعت صفر می‌شود. یعنی در این مدت مطابق شکل نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر رفته است که این مسیر نصف دوره طول می‌کشد، بنابراین می‌توان نوشت:

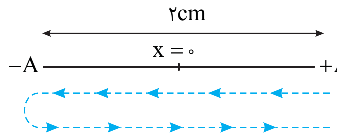
$$\frac{T}{۲}=۰/۱\Rightarrow T=۰/۲s$$

$$f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=\frac{۱}{۰/۲}\Rightarrow f=۵Hz$$



A ۱۰۶۰ ۳

یادآوری در هر نوسان کامل، نوسانگر دو بار طول پاره‌خط مسیر را طی می‌کند. مسافتی که نوسانگر در هر نوسان طی می‌کند چهار برابر دامنه $(L=۴A)$ است.



۱) ۱۲۰ بار طی طول پاره‌خط یعنی $\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰$ نوسان.

۲) ۶۰ نوسان در مدت $1min=۶۰s$ انجام شده است. بنابراین زمان هر نوسان (دوره) خواهد شد.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow t=\frac{۶۰}{۶۰}=۱s$$

۳) در هر ثانیه نوسانگر یک نوسان انجام می‌دهد، در این صورت در مدت $۴s$، نوسانگر ۴ نوسان انجام می‌دهد. $(N=۴)$

۴) در هر نوسان مسافت طی شده $۲\times۲=۴cm$ است و در مدت ۴ نوسان مسافت طی شده $\ell=۴\times۴=۱۶cm$ می‌شود.

بازی با سؤال نوسانگری از یک سر پاره‌خطی شروع به حرکت کرده و در مدت ۵ ثانیه ۲۰۰ بار از مرکز پاره‌خط (وسط پاره‌خط) می‌گذرد. بسامد نوسانگر چند هرتز است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰۰

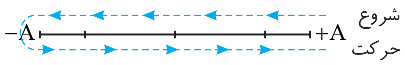
پاسخ نکته نوسانگر در هر دوره، دو بار از مرکز نوسان می‌گذرد.

در این حرکت در مدت $۵s$ نوسانگر ۲۰۰ بار از مرکز نوسان می‌گذرد، یعنی تعداد نوسان‌ها در مدت $۵s$، $N=۱۰۰$ نوسان است. دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۵}{۱۰۰}\Rightarrow T=۰/۰۵s$$

بسامد را حساب می‌کنیم:

$$f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=\frac{۱}{۰/۰۵}\Rightarrow f=۲۰Hz$$



گزینهٔ ۳

A ۱۰۶۱ ۲

خط فکری نوسانگر اول پس از $۶s$، یک نوسان از نوسانگر دوم جلو می‌افتد، یعنی اگر تعداد نوسان اولی $N_۱$ باشد تعداد نوسان دومی در $۶s$، $N_۲=N_۱-۱$ است. از این‌رو شما باید $N_۱$ و سپس $N_۲$ را بیابید تا بتوانید دوره $T_۲$ را به‌دست بیاورید.

۱) تعداد نوسان‌های اولی را به‌دست می‌آوریم:

$$N_۱=\frac{t}{T_۱}\Rightarrow N_۱=\frac{۶}{۱/۵}=۴$$

۲) تعداد نوسان‌های دومی برابر $N_۲=۴-۱=۳$ است و دورهٔ آن برابر است با:

$$N_۲=\frac{t}{T_۲}\Rightarrow ۳=\frac{۶}{T_۲}\Rightarrow T_۲=۲s$$

A ۱۰۶۲ ۴

با توجه به رابطه بسامد زاویه‌ای و دوره:

$$\begin{cases}\omega_A=\frac{۲\pi}{T_A}\\ \omega_B=\frac{۲\pi}{T_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}\Rightarrow ۴=\frac{T_B}{T_A}\Rightarrow T_A=\frac{۱}{۴}T_B$$

$$T=f=\frac{۱}{T}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{T_B}{T_A}=۴\Rightarrow f_A=۴f_B$$

A ۱۰۶۳ ۲

۱ دورهٔ نوسان ۳۶٪ کاهش یافته، بنابراین دورهٔ جدید برابر است با:

$$T_2=T_1-\frac{36}{100}T_1=\frac{64}{100}T_1=\frac{16}{25}T_1\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\frac{16}{25}$$

۲ بسامد و دوره با هم نسبت وارون دارند از این‌رو: $f=\frac{1}{T}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{T_1}{T_2}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{25}{16}$

۳ حال درصد تغییرات بسامد را حساب می‌کنیم.

درصد تغییر بسامد $=\frac{\Delta f}{f_1}\times100=\frac{\frac{25}{16}f_1-f_1}{f_1}\times100=\frac{9}{16}\times100=56/25\%$

۴ بنابراین بسامد ۵۶/۲۵٪ افزایش یافته است.

۵ برای بسامد زاویه‌ای $(\omega=2\pi f)$ نیز داریم:

درصد تغییر بسامد زاویه‌ای $=\frac{\Delta\omega}{\omega_1}\times100=\frac{2\pi f_2-2\pi f_1}{2\pi f_1}\times100=\frac{f_2-f_1}{f_1}\times100=56/25\%$

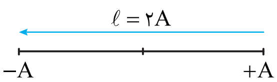
A ۱۰۶۴ ۲

دامنه $A=0/05m$ و بسامد زاویه‌ای $\omega=2\pi f=40\pi\,rad/s$ است، بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=0/05\cos40\pi t$

یادآوری معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده‌ای که در کتاب معرفی شده به‌صورت $x=A\cos\omega t$ است که در آن A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای است.

A ۱۰۶۵ ۲

نکته طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه $(2A)$ است.



نکته هر ۲ بار طی پاره‌خط مسیر برابر یک نوسان است.

۱ دامنه خواهد شد: $2A=20\,cm\Rightarrow A=10\,cm$

۲ ۲۰ بار طی کردن طول پاره‌خط یعنی $\frac{20}{2}=10$ نوسان

۳ در مدت $0/1s$، ۱۰ نوسان انجام شده است بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{0/1}{10}\Rightarrow T=0/01s$$

۴ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/01}\Rightarrow\omega=200\pi\,rad/s$

۵ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم $x=0/1\cos200\pi t$

A ۱۰۶۶ ۱

با توجه به معادلهٔ حرکت $x=0/02\cos5\pi t$ بسامد زاویه‌ای برابر $5\pi\,rad/s$ است

از این‌رو دوره خواهد شد: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow5\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/4s$

نوسانگر در $0/4s$ یک نوسان انجام می‌دهد و ۵۰ نوسان را در مدت:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow t=NT\Rightarrow t=50\times0/4=20s$$

A ۱۰۶۷ ۱

کافی است زمان داده‌شده را در معادلهٔ حرکت جای‌گذاری کنیم. البته باید مثلثات نیز بلد باشیم.

$$x=0/02\cos20\pi t\xrightarrow{t=\frac{1}{6}s}x=0/02\cos\frac{20\pi}{6}=0/02\cos(\frac{18\pi}{6}+\frac{2\pi}{6})$$

$$\Rightarrow x=0/02\cos(3\pi+\frac{\pi}{3})\Rightarrow x=0/02\cos(\pi+\frac{\pi}{3})\Rightarrow x=-0/02\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=-0/02\times\frac{1}{2}=-0/01m=-1cm$$

(2π دورهٔ گردش تابع $\cos\theta$ بوده که آن را برمی‌داریم.)

A ۱۰۶۸ ۱

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $x=A\cos\omega t$ است. لحظه‌ای که نوسانگر در بیشینه مکان مثبت است را مبدأ زمان فرض می‌کنیم، $\frac{2T}{3}$ بعد از آن یعنی باید در معادلهٔ حرکت به جای t مقدار $\frac{2T}{3}$ را قرار دهیم. $x=A\cos\frac{2\pi}{T}\times\frac{2T}{3}\Rightarrow x=A\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{A}{2}$

B ۱۰۶۹ ۳

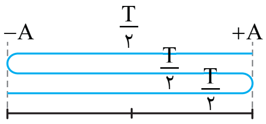
خط فکری انتهای پاره‌خط مسیر نوسان را که در آنجا سرعت صفر شده و نوسانگر تغییر جهت می‌دهد نقطه بازگشت گویند. در صورت مسئله بیان نشده که برای چندمین بار نوسانگر باید به نقطهٔ بازگشت برسد. بنابراین وقتی از مکان $+A$ نوسانگر شروع به حرکت می‌کند، در مدت $\frac{T}{2}$ برای اولین بار به مکان $-A$ (نقطهٔ بازگشت) می‌رسد و در $\frac{T}{2}$ بعدی برای دومین بار به نقطهٔ بازگشت می‌رسد. بنابراین شما باید هر زمان که نوسانگر در نقطهٔ بازگشت است را به‌دست بیاورید.

ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow4\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/5s$

نوسانگر با گذشت هر $\frac{T}{2}$ به نقطهٔ بازگشت می‌رسد. لحظه‌هایی که نوسانگر به نقاط بازگشت می‌رسند را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t_1=\frac{0/5}{2}=0/25s,\ \Delta t_2=2\times\frac{0/5}{2}=0/5s,\ \Delta t_3=3\times\frac{0/5}{2}=0/75s,\ \Delta t_4=4\times\frac{0/5}{2}=1s$$

تنها گزینهٔ (۳) در این اعداد وجود دارد پس گزینهٔ (۳) درست است.



روش دیگر: اگر نوسانگر از یک انتها شروع به نوسان کند. در هر $\frac{T}{2}$ یک‌بار نوسانگر به نقطهٔ بازگشت می‌رسد، بنابراین تعداد دفعاتی که در بازهٔ زمانی Δt به نقطهٔ بازگشت می‌رسد خواهد شد: $N=\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}$

حال گزینه‌ها را بر $\frac{T}{2}$ تقسیم می‌کنیم، اگر عدد صحیح به‌دست آمد، آن زمان درست بوده و اگر عدد صحیح به‌دست نیاید در آن زمان نوسانگر در نقطهٔ بازگشت قرار ندارد.

گزینهٔ ۱: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}=\frac{0/4}{\frac{0/5}{2}}=\frac{8}{5}=1/6$ جواب نیست

گزینهٔ ۲: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}=\frac{0/6}{\frac{0/5}{2}}=2/4$ جواب نیست

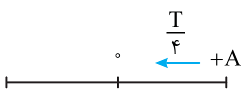
گزینهٔ ۳: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}=\frac{1}{\frac{0/5}{2}}=4$ درست است

A ۱۰۷۰ ۲

نقطهٔ تعادل یعنی مبدأ $x=0$، بنابراین بنا به فرض مسئله در لحظهٔ $t=2s$ مکان متحرک $x=0$ شده است، از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow0=A\cos\frac{2\pi}{T}\times2\Rightarrow\cos\frac{4\pi}{T}=0\Rightarrow\frac{4\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=8s$$

روش دیگر: نوسانگر ابتدا در مکان $+A$ بوده و پس از $2s$ به مکان $x=0$ می‌رود. زمان حرکت از A تا صفر برابر $\frac{T}{4}$ است.



بنابراین: $\frac{T}{4}=2\Rightarrow T=8s$

A ۱۰۷۱ — ۲

خط فکری مسافت‌های طی شده متوالی هستند، یعنی در مجموع زمان‌های $t_۱$ و $t_۲$ نوسانگر به اندازهٔ مجموع $۳/۷۸cm$ و $۴/۲۲cm$ مسافت طی کرده است. این مسافت را به‌دست بیاورید و با دامنه مقایسه کنید.

کل مسافت طی شده در بازهٔ زمانی $t_۱+t_۲$ برابر است با: $۴/۲۲+۳/۷۸=۸cm$

دامنهٔ حرکت $۲cm$ است و در مدت یک دوره نوسانگر مسافتی برابر $۴A=۴\times ۲=۸cm$ طی می‌کند از این‌رو کل مدت حرکت یک دوره بوده است $(t_۱+t_۲=T)$.

A ۱۰۷۲ — ۴

مسافتی که نوسانگر در هر دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه $(۴A)$ است، این نوسانگر در یک دوره مسافت $۱۶cm$ را طی کرده است، بنابراین دامنهٔ حرکت نوسانگر برابر است با: $۴A=۱۶\Rightarrow A=۴cm=۰/۰۴m$

مکان ذره در $t=۰/۰۵s$ برابر $x=+۲\sqrt{۳}cm$ است از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}}{۱۰۰}=۰/۰۴\cos\omega(\frac{۵}{۱۰۰})\Rightarrow \cos\frac{۵}{۱۰۰}\omega=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \frac{۵}{۱۰۰}\omega=\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{۱۰\pi}{۳}rad/s$$

معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=۰/۰۴\cos\frac{۱۰\pi}{۳}t$

A ۱۰۷۳ — ۳

خط فکری دقت کنید که در توابع مثلثاتی در یک دوره دو بار مقدار تابع یکسان است، به‌طور مثال اگر $\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ شود زاویهٔ α می‌تواند $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ باشد. در این مسئله بیان شده کمترین زمان پس از $t=۰$، بنابراین باید شما زاویهٔ کوچک‌تر را انتخاب کنید.

کافی است در معادلهٔ حرکت، مکان را $x=-\frac{A}{۲}$ قرار دهیم.

$$-\frac{A}{۲}=A\cos\omega t\Rightarrow \cos\omega t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow (\omega t=\frac{۲\pi}{۳},\omega t=\frac{۴\pi}{۳})$$

در صورت سؤال کمترین زمان پس از $t=۰$ خواسته شده است از این‌رو:

$$\omega t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{T}{۳}$$

B ۱۰۷۴ — ۲

خط فکری ابتدا با قرار دادن مکان نوسانگر در معادلهٔ حرکت لحظهٔ $t_۱$ را احساب کرده سپس $t_۱$ را دو برابر کنید و در معادلهٔ حرکت قرار دهید و مکان نوسانگر را به‌دست بیاورید.

۱ لحظهٔ $t_۱$ را حساب می‌کنیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}A=A\cos\omega t_۱\Rightarrow \omega t_۱=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow t_۱=\frac{\pi}{۶\omega}$$

۲ لحظهٔ $t_۲=۲t_۱$ را در معادله قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega\times\frac{۲\pi}{۶\omega}\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=+\frac{A}{۲}$$

بازی با سؤال **ذره‌ای با دورهٔ T در مبدأ زمان از مکان بیشینهٔ مثبت شروع به نوسان کرده و در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲=۲t_۱$ از یک مکان می‌گذرد. $t_۱$ کدام است؟** $(t_۱<\frac{T}{۲})$ از کتاب درسی

۱) $\frac{T}{۶}$ ۲) $\frac{T}{۳}$ ۳) $\frac{T}{۴}$ ۴) $\frac{۲T}{۳}$

پاسخ **در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $(x=A\cos\omega t)$ لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را قرار داده در این دو لحظه بنا به فرض مکان‌ها یکسان است، بنابراین مکان‌ها را برابر قرار داده و مسئله را حل کنید.**

با توجه به فرض مسأله مکان‌ها در لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲=۲t_۱$ برابر است، از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{x_۲=x_۱}A\cos\omega(۲t_۱)=A\cos\omega t_۱\Rightarrow \cos ۲\omega t_۱=\cos\omega t_۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ۲\omega t_۱=۲\pi-\omega t_۱\Rightarrow ۳\omega t_۱=۲\pi\Rightarrow ۳\times\frac{۲\pi}{T}t_۱=۲\pi\Rightarrow t_۱=\frac{T}{۳}\\ \omega t_۱=۲\omega t_۱-۲\pi\Rightarrow \omega t_۱=۲\pi\Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۱=۲\pi\Rightarrow t_۱=T(t_۱<\frac{T}{۲})\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

گزینهٔ ۲

A ۱۰۷۵ — ۲

نکته در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ سرعت نوسانگر صفر است.

$x=-A$ $x=۰$ $x=+A$

$v=۰$ v_m $v=۰$

وقتی معادلهٔ حرکت به شما داده شده است و از شما خواسته شده که لحظه‌هایی را که سرعت صفر می‌شود به‌دست آورید، شما باید به جای مکان، $+A$ و یا $-A$ را قرار دهید. متحرک وقتی اولین بار به مکان $x=-۰/۰۳m$ می‌رسد، سرعتش صفر می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$x=۰/۰۳\cos ۱۰\pi t\Rightarrow -۰/۰۳=۰/۰۳\cos ۱۰\pi t\Rightarrow \cos ۱۰\pi t=-۱$$

$$\Rightarrow ۱۰\pi t=\pi\Rightarrow t=۰/۱s$$

دقت کنید شما باید تمام زاویه‌های مثلثاتی را در حرکت هماهنگ ساده برحسب رادیان بلد باشید.

زاویه برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱

B ۱۰۷۶ — ۴

یادآوری ریاضی برای توابع کسینوسی و سینوسی داریم:

$$\sin\alpha=\pm ۱\Rightarrow \alpha=(۲k-۱)\frac{\pi}{۲}\qquad \cos\alpha=\pm ۱\Rightarrow \alpha=k\pi$$

نقاط بازگشت مکان‌های $x=\pm A$ هستند. بنابراین شما در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار $\pm A$ را قرار داده و با توجه به معادلهٔ مثلثاتی مسئله را حل کنید.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow \pm A=A\cos\omega t\Rightarrow \cos\omega t=\pm ۱\Rightarrow \omega t=k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t=k\pi\Rightarrow t=k\frac{T}{۲}$$

A ۱۰۷۷ — ۴

یادآوری به کمان مثلثاتی در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $(x=A\cos\omega t)$ یعنی ωt، شناسهٔ تابع کسینوس (و یا فاز) می‌گویند.

تغییر شناسهٔ تابع کسینوس در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ را احساب می‌کنیم. $\omega t_۲-\omega t_۱=\omega(t_۲-t_۱)$

اکنون اگر $t_۲-t_۱$ برابر ۱s باشد آنگاه:

بسامد زاویه‌ای $=\omega\times ۱=$ تغییر شناسهٔ تابع کسینوس

A ۱۰۷۸ — ۱

شناسهٔ تابع کسینوس یعنی کمان ωt در حرکت هماهنگ ساده. با توجه به فرض مسئله، شناسهٔ تابع کسینوس (فاز) را در دو حالت نوشته از هم کم کرده و مقدار آن را برابر $\frac{\pi}{۱۰}$ قرار می‌دهیم و بسامد زاویه‌ای را احساب می‌کنیم. $\omega t_۲-\omega t_۱=\omega(t_۲-t_۱)=\frac{\pi}{۱۰}\Rightarrow \omega\times\frac{۱}{۱۲۰}=\frac{\pi}{۱۰}\Rightarrow \omega=۱۲\pi$

اکنون بسامد را به‌دست می‌آوریم $\omega=۲\pi f=۱۲\pi\Rightarrow f=۶Hz$

B ۱۰۷۹ ۲

خط فکری به شکل نگاه کنید. از لحظهٔ $t=۰$، $\frac{T}{۴}$ طول می‌کشد تا نوسانگر برای اولین بار به نقطه تعادل رسیده و $۳\frac{T}{۴}$ طول می‌کشد تا برای دومین بار تندی نوسانگر بیشینه شود و بعد از $\frac{۵T}{۴}$ برای سومین بار و بعد از $۷\frac{T}{۴}$ برای چهارمین بار و بعد از $(۲n-۱)\frac{T}{۴}$ برای n امین بار نوسانگر از مبدأ می‌گذرد. یعنی لحظه‌هایی که تندی بیشینه است، مضرب فرد $\frac{T}{۴}$ است.

اکنون شما گزینه‌ها را بررسی کنید. هر کدام که مضرب فرد $\frac{T}{۴}$ باشد جواب مسئله است.

الف) $\frac{\Delta t}{\frac{T}{۴}}=\frac{۲T}{\frac{T}{۴}}=۸\xrightarrow{\text{عدد زوج}}$ t_1 جواب نیست

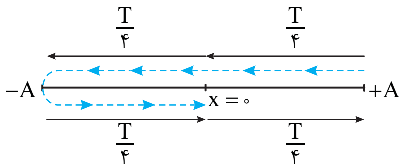
ب) $\frac{t_2}{\frac{T}{۴}}=\frac{۳/۵T}{\frac{T}{۴}}=۱۴\xrightarrow{\text{عدد زوج}}$ t_2 جواب نیست

پ) $\frac{t_3}{\frac{T}{۴}}=\frac{۵/۲۵T}{\frac{T}{۴}}=۲۱\xrightarrow{\text{عدد فرد}}$ t_3 جواب است

البته به کمک حل معادلهٔ مثلثاتی نیز می‌توانستید رابطهٔ $\Delta t=(۲n-۱)\frac{T}{۴}$ را به‌دست بیاورید.

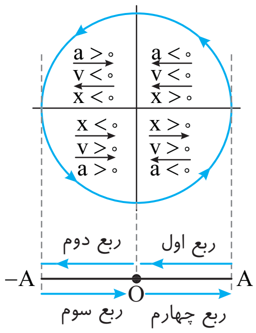
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow ۰=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=۰$$

$$\omega t=(۲n-۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}t=(۲n-۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t=(۲n-۱)\frac{T}{۴}$$



A ۱۰۸۰ ۳

یادآوری با یک یادآوری طولانی سر و کار داریم. در معادلهٔ حرکت $x=A\cos\omega t$ به کمان ωt کتاب، شناسهٔ تابع کسینوس می‌گوید و ما به اختصار آن را فاز می‌گوییم. بنابراین منظور ما از فاز مقدار $\theta=\omega t$ است.

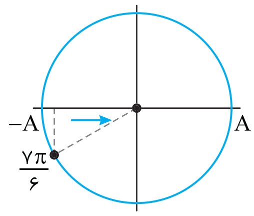


به شکل مقابل با دقت نگاه کنید اگر فاز در ربع اول مثلثاتی باشد مطابق شکل نوسانگر از مکان $+A$ در حال حرکت به حالت تعادل $x=۰$ است و حرکت تندشونده است. اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع دوم مثلثاتی باشد، نوسانگر در حال حرکت از حالت تعادل به سوی دامنهٔ $-A$ است و حرکت کندشونده است.

اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع سوم مثلثاتی باشد نوسانگر در حال حرکت از $-A$ به سوی حالت تعادل است و حرکت تندشونده است.

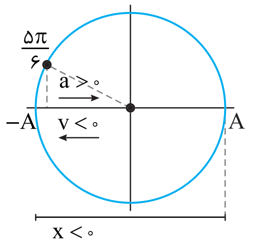
اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع چهارم مثلثاتی باشد، نوسانگر در حال حرکت از مکان $x=۰$ به سوی $+A$ بوده و حرکت کندشونده است.

در مسئله فاز حرکت $\omega t=\frac{۷\pi}{۶}$ بیان شده یعنی فاز در ربع سوم است. بنابراین مکان منفی و گزینهٔ (۱) نادرست است، شتاب مثبت و گزینهٔ (۲) نادرست است و سرعت مثبت و گزینهٔ (۳) درست است، حرکت نیز تندشونده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



B ۱۰۸۱ ۲

خط فکری در حل این مسئله اگر شما به جای t مقدار $\frac{۱}{۷۲}s$ را قرار دهید و مکان را به‌دست آورید، هیچ‌یک از گزاره‌ها را نمی‌توانید بررسی کنید زیرا جهت حرکت نوسانگر مشخص نیست اما اگر فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس ωt) را به‌دست بیاورید مشکل حل می‌شود.



۱ فاز حرکت را در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۷۲}s$ حساب می‌کنیم. $\theta=\omega t=۶۰\pi\times\frac{۱}{۷۲}\Rightarrow\theta=\frac{۵\pi}{۶}$

۲ کمان $\frac{۵\pi}{۶}$ در ربع دوم مثلثاتی است بنابراین نوسانگر در حال حرکت از $x=۰$ به سوی $-A$ است. در نتیجه در این لحظه نوسانگر در حال دور شدن از حالت تعادل است و گزارهٔ (الف) نادرست است.

۳ در حرکت به سوی دامنهٔ $-A$ حرکت کندشونده است و گزارهٔ (ب) درست است.

۴ مکان منفی و شتاب که همواره به سوی حالت تعادل است مثبت است و گزارهٔ (پ) درست است.

۵ سرعت منفی و در خلاف جهت محور بوده و گزارهٔ (ت) نادرست است.

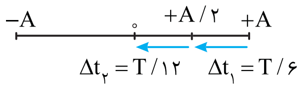
B ۱۰۸۲ ۳

تابع حرکت هماهنگ ساده یک تابع سینوسی (و کسینوسی) است. بنابراین گزینهٔ (۱)، (۲) و (۴) می‌تواند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد. اما $x=۴\tan ۲t$ نمی‌تواند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد، تابع تانژانت در $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نشده است و گزینهٔ (۳) نمی‌تواند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد.

B ۱۰۸۳ ۳

نکته زمان حرکت از $+A$ به $+\frac{A}{۲}$ بدون تغییر جهت برابر $\frac{T}{۶}$ و از $+\frac{A}{۲}$ به $x=۰$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{۱۲}$ است.

روش اول: (استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده): اگر شما نکتهٔ بالا را به خاطر بسپرید مسئله به سادگی قابل حل است.



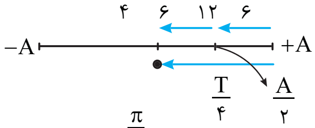
$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=۲$$

روش دوم: (استفاده از معادلهٔ حرکت): معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده را می‌نویسیم. در معادله به جای x، $+\frac{A}{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{x=+\frac{A}{۲}}\frac{A}{۲}=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\frac{۲\pi}{T}t=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲\pi}{T}t=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{T}{۶}\\ \frac{۲\pi}{T}t=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{۵T}{۶}\end{cases}$$

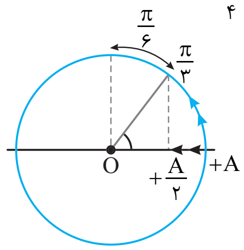
جواب $\frac{۵\pi}{۶}$ مربوط به دومین بار عبور از $+\frac{A}{۲}$ است که مورد پرسش نیست.

$$\frac{T}{۴}-\frac{T}{۶}=\frac{T}{۱۲}\qquad\frac{T}{۶}$$



$$\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{T}{۶}}{\frac{T}{۱۲}}=۲$$

روش سوم: استفاده از فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوسی) و دایرهٔ مثلثاتی (مرجع) است. از $+A$ تا $+\frac{A}{۲}$ فاز حرکت $\frac{\pi}{۳}$ رادیان و از $+\frac{A}{۲}$ تا $x=۰$ فاز حرکت $\frac{\pi}{۶}$ تغییر می‌کند. از این‌رو:



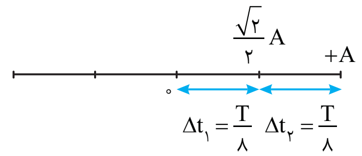
$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{T}\Delta t_1\Rightarrow\Delta t_1=\frac{T}{۶},\ \frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{T}\Delta t_2\Rightarrow\Delta t_2=\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=۲$$

A ۱۰۸۴ ۲

نکته مدت زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{8}$ و از $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا $x=0$ نیز $\frac{T}{8}$ است.

روش اول: با استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده

بنابراین: $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=1$



روش دوم: استفاده از معادلهٔ حرکت

می‌دانیم زمان حرکت از مکان $+A$ تا صفر برابر $\frac{T}{4}$ است. اکنون در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ را قرار می‌دهیم.

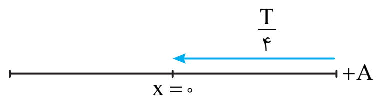
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow +\frac{\sqrt{2}}{2}A=A\cos\omega t\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}$$

نوسانگر مستقیماً از $+A$ به $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ رفته است یعنی برای اولین بار از مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌گذرد بنابراین کمان $\frac{\pi}{4}$ قابل قبول است.

$$\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{T}{8}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{T}{8}$$

بنابراین از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$، $\Delta t_1=\frac{T}{8}$ و از $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا صفر نیز $\Delta t_2=\frac{T}{4}-\frac{T}{8}=\frac{T}{8}$ طول می‌کشد.

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=1$$



روش سوم: دایرهٔ مثلثاتی (مرجع)

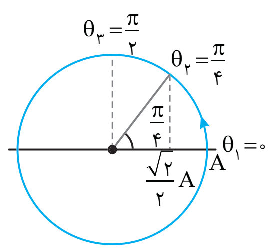
فاز حرکت $(\theta=\omega t)$ در مکان $x=+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ برابر $\theta=\omega t_A=\frac{\pi}{4}$ و در مکان $x=+A$ برابر صفر است، بنابراین زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ خواهد شد:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{4}-0\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\Delta t_1=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{T}{8}$$

فاز حرکت در مکان $x=0$ برابر $\theta=\omega t=\frac{\pi}{2}$ بنابراین زمان حرکت از $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا $x=0$ خواهد شد.

$$\omega t_3-\omega t_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\Delta t_2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{T}{8}$$

بنابراین: $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=1$

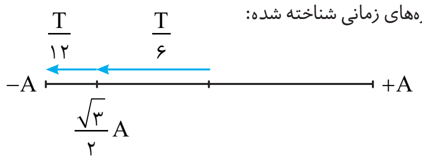


A ۱۰۸۵ ۳

نکته زمان حرکت از مرکز نوسان (حالت تعادل $x=0$) تا مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{6}$ و از مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ تا $-A$ بدون تغییر جهت برابر $\frac{T}{12}$ است.

روش اول: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{12}}=2$$



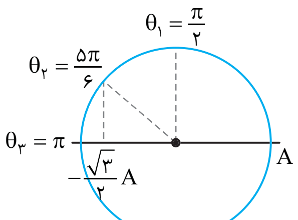
روش دوم: استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوسی $\theta=\omega t$) (دایره مرجع):

کمان‌های مثلثاتی معادل $x=0$ و $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ را روی دایره مثلثاتی مشخص کرده و به کمک تغییر فاز، Δt_1 و Δt_2 را حساب می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\Delta t_1=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{T}{6}$$

$$\omega t_3-\omega t_2=\pi-\frac{5\pi}{6}\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\Delta t_2=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{T}{12}$$

بنابراین نسبت $\Delta t_1/\Delta t_2$ خواهد شد. $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{12}}=2$



روش سوم: استفاده از معادلهٔ حرکت

در معادله به جای x، $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ را قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t=\frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{7\pi}{6}$$

متحرک برای بار اول به مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ رسیده است و $\frac{5\pi}{6}$ پاسخ است.

$$\frac{2\pi}{T}t=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{5T}{12}$$

این زمان حرکت از $+A$ تا $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است و اگر از آن مقدار $\frac{T}{4}$ یعنی زمان حرکت از $+A$ تا صفر را کم کنیم، Δt_1 به‌دست می‌آید. $\Delta t_1=\frac{5T}{12}-\frac{T}{4}=\frac{T}{6}$ و Δt_2 خواهد شد:

$$\Delta t_2=\frac{T}{4}-\frac{T}{6}=\frac{T}{12}$$

بنابراین: $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=2$

بازی با سؤال **در یک حرکت نوسانی ساده متحرک از دامنهٔ $+A$ بدون تغییر جهت به مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ در مدت Δt_1 و از $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ نیز بدون تغییر جهت حرکت به مکان $-A$ در مدت Δt_2 حرکت می‌کند. نسبت $\Delta t_2/\Delta t_1$ کدام است؟ (A دامنهٔ نوسان است.)**

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) $\frac{3}{2}$

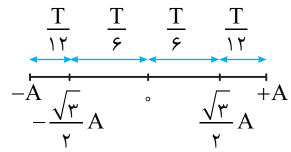
پاسخ **راه‌حل اول:** اگر معادلهٔ حرکت نوسانگر را $x=A\cos\omega t$ بگیریم مدت زمانی که طول می‌کشد بدون تغییر جهت نوسانگر از $+A$ به $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ برسد برابر است با:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\frac{2\pi}{T}t_1\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t_1=\frac{T}{12}$$

مدت زمانی که نوسانگر از $+A$ به $-A$ می‌رسد برابر $\frac{T}{2}$ است، بنابراین مدت زمانی که نوسانگر از $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ به $-A$ می‌رسد برابر $\frac{T}{2}-t_1=\frac{T}{2}-\frac{T}{12}=\frac{5T}{12}$ است، پس $\Delta t_1=\frac{T}{12}$ و $\Delta t_2=\frac{5T}{12}$ است.

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=\frac{\frac{5T}{12}}{\frac{T}{12}}=5$$

راه‌حل دوم: با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده داریم:

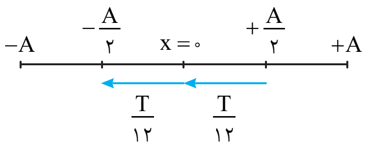


$$\Delta t_1=\frac{T}{12}\ ,\ \Delta t_2=\frac{T}{6}+\frac{T}{6}+\frac{T}{12}=\frac{5T}{12}\Rightarrow\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=5$$

گزینهٔ ۳

۱۰۸۶ B ۱

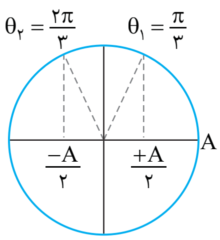
خط فکری کمترین زمانی که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ به مکان $-\frac{A}{2}$ برود یعنی متحرک بدون تغییر جهت از $+\frac{A}{2}$ به $-\frac{A}{2}$ می‌رود، اکنون با دانستن این مطلب و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.



مدت زمان حرکت از $+\frac{A}{2}$ به $x=0$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{12}$ و از $x=0$ بدون تغییر جهت تا $-\frac{A}{2}$ نیز $\frac{T}{12}$ است. از این‌رو:

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}\Rightarrow 0/1=\frac{T}{6}\Rightarrow T=0/6s$$

روش استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوس ωt):



فاز حرکت در مکان $+\frac{A}{2}$ مطابق شکل برابر $\frac{\pi}{3}$ و در مکان $-\frac{A}{2}$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین تغییر فاز در این جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

$$\omega(t_2-t_1)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}(\Delta t)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}\Rightarrow T=0/6s$$

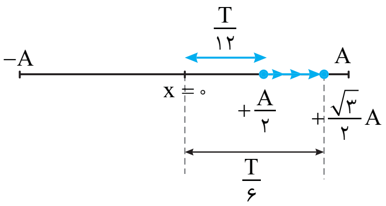
میانبر کافی است محاسبه کنید $\frac{\pi}{3}$ چه کسری از دایره (2π) است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}\Rightarrow T=0/6s$$

۱۰۸۷ B ۴

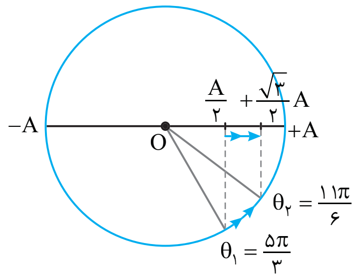
نکته مدت زمان حرکت از مکان صفر تا $+\frac{A}{2}$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{12}$ و از صفر تا $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{6}$ است.

راه‌حل اول: روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده $\Delta t=\frac{T}{6}-\frac{T}{12}=\frac{T}{12}$



راه‌حل دوم: روش استفاده از فاز حرکت و دایره مثلثاتی: روی محور کسینوس‌ها مکان‌ها را مشخص کرده و کمان مربوط به هر مکان را مشخص می‌کنیم. مطابق شکل نوسانگر از $+\frac{A}{2}$ به $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ رفته یعنی کمان از $\frac{5\pi}{3}$ به $\frac{11\pi}{6}$ تغییر کرده بنابراین تغییر فاز برابر است با:

$$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1=\frac{11\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{12}$$



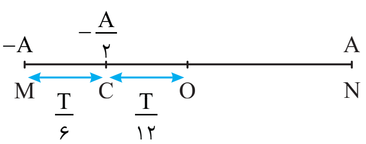
۱۰۸۸ A ۳

خط فکری در حل این نوع مسائل باید مشخص کنید که زمانی که در مسئله داده شده چه کسری از دوره (T) است تا بتواند به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.

۱ مشخص می‌کنیم $0/2s$ چه کسری از دوره $(T=1/2s)$ است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/2}{1/2}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}$$

۲ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از دامنه $(-A)$ تا نصف $(-\frac{A}{2})$ برابر $\frac{T}{6}$ است یعنی نوسانگر فاصلهٔ C تا M را در مدت $\frac{T}{6}$ طی کرده، بنابراین نقطهٔ C باید در وسط O و M باشد. بنابراین $MC=OC$.



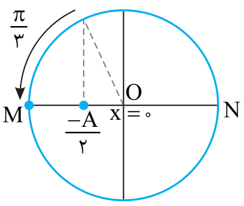
روش استفاده از تغییر فاز $(\Delta\theta=\omega\Delta t)$ و دایرهٔ مثلثاتی:

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{1/2}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{3}rad/s$$

تغییر فاز در مدت $0/2s$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\Delta\theta=\frac{5\pi}{3}\times 0/2\Rightarrow\Delta\theta=\frac{\pi}{3}$$

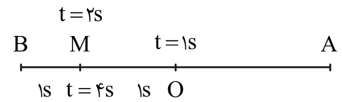


بنابراین فاز حرکت برای رسیدن نوسانگر به نقطهٔ M، $\frac{\pi}{3}$ تغییر کرده بنابراین مطابق شکل دایرهٔ مثلثاتی باید نقطهٔ C در مکان $\frac{-A}{2}$ باشد از این رو $MC=OC$ است.

A ۱۰۸۹ — ۳

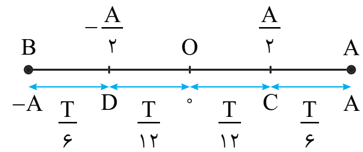
خط فکری دقت کنید نوسانگر در هر بازهٔ زمانی که از یک نقطه مثلاً M به انتهای مسیر مثلاً نقطهٔ B $(-A)$ برود در همان بازهٔ زمانی از نقطهٔ B به نقطهٔ M باز می‌گردد، بنابراین اگر در مدت $1s$ از M به B برود در مدت $1s$ از B به M می‌رود و یا اگر در مدت $1s$ از O تا M برود در همان مدت $1s$ از M به O برمی‌گردد.

نوسانگر از O تا M را در مدت $(2-1=1s)$ و از M تا B را نیز در مدت $(\frac{4-2}{2}=1s)$ طی کرده است. یعنی از O تا B را در مدت $(1+1=2s)$ طی کرده است. از طرف بازهٔ زمانی حرکت از مبدأ تا انتهای مسیر (O تا B) $\frac{1}{4}$ دوره طول می‌کشد، بنابراین: $\frac{T}{4}=2\Rightarrow T=8s$

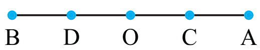


B ۱۰۹۰ — ۱

راه‌حل اول: سریع‌ترین راه‌حل استفاده از بازه‌های زمانی است که در درسنامه گفتیم به‌خاطر بسپارید: D تا C از: $t_1=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6}$ ، B تا D از: $t_2=\frac{T}{6}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=1$



راه‌حل دوم: معادلهٔ مکان - زمان به‌صورت $x=A\cos\omega t$ می‌باشد. در نقطهٔ C متحرک در فاصلهٔ $\frac{A}{2}$ از مرکز تعادل $(x=0)$ قرار دارد.



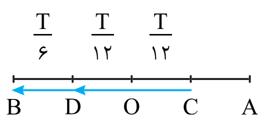
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{A}{2}=A\cos\omega t_C$$

$$\Rightarrow\cos\omega t_C=\frac{1}{2}\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}t_C=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_C=\frac{T}{6}$$

بنابراین زمان حرکت از A تا C برابر $\frac{T}{6}$ است و زمان حرکت از C تا O خواهد شد:

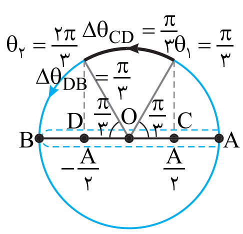
$$t_{C\to O}=\frac{T}{4}-\frac{T}{6}=\frac{T}{12}$$

بـه دلیل تقـارن حرکت، زمـان از O تا D نیز $\frac{T}{12}$ و از D تا B نیز $\frac{T}{6}$ خواهد بود از این‌رو:



$$t_{C\to D}=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6},\ t_{D\to B}=\frac{T}{6}\Rightarrow\frac{T_{C\to D}}{T_{D\to B}}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{6}}=1$$

راه‌حل سوم: استفاده از فاز حرکت $(\theta=\omega t)$ و دایرهٔ مثلثاتی است. کمان متناظر $\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ را روی دایره مشخص می‌کنیم. اکنون می‌توان نوشت:



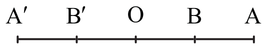
$$\begin{cases}\omega t_D-\omega t_C=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\\ \frac{2\pi}{T}(t_1)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_1=\frac{T}{6}\\ \omega t_B-\omega t_D=\pi-\frac{2\pi}{3}\\ \omega(t_2)=\frac{\pi}{3}\\ \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_2=\frac{T}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=1$$

دقـت کنید تغییر شناسـهٔ تابع کسینوسـی با زمـان رابطهٔ خطی دارد. یعنی شناسـهٔ تابع کسینوسـی در زمان‌های یکسـان، تغییرات یکسانی دارد. در این مسـئله در جابه‌جایی از $+\frac{A}{2}$ تـا $-\frac{A}{2}$ تغییـر شناسـه $\frac{\pi}{3}$ بـوده و در جابه‌جایی از $-\frac{A}{2}$ تـا $-A$ نیز تغییر شناسه $\frac{\pi}{3}$ است، بنابراین این دو جابه‌جایی در مدت‌زمان یکسان طی می‌شود.

بازی با سؤال در شـکل روبـه‌رو اگـر متحرکی بیـن دو نقطهٔ A و A′ حرکت هماهنگ ساده انجام دهد و فاصلهٔ OB را در مدت $\frac{1}{300}$ ثانیه طی کند، بسامد نوسان چند هرتز است؟

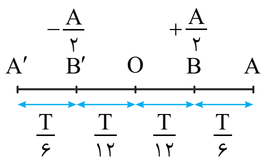
۱) ۲۵
۲) ۳۷/۵
۳) ۵۰
۴) ۷۵



$OB=BA=OB'=B'A'$

پاسخ خط فکری به‌فرض مسئله‌دقت کنید $OB=BA=OB'=B'A'$ یعنی، نقاط B و B′ به ترتیب مکان $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ هستند و با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ (نقطهٔ B) $\frac{T}{6}$ و از $+\frac{A}{2}$ تا O، $\frac{T}{12}$ است. با دانستن این مطالب مسئله به راحتی قابل حل است.

مـدت زمان رفـتن از B به O برابر $\frac{T}{12}$ است. بنابراین:

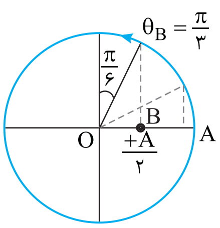


$$t_{B\to O}=\frac{T}{12}=\frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow T=\frac{4}{100}s\Rightarrow f=\frac{1}{T}=25Hz$$

روش استفاده از فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

نقطـهٔ B در مکان $+\frac{A}{2}$ اسـت و مطابق شـکل دایرهٔ مثلثاتی فاز آن $\theta_B=\frac{\pi}{3}$ است. در حرکت نوسـانگر از B تا O تغییر فاز $\frac{\pi}{6}$ است از این رو خواهیم داشت:



$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{12}$$

البته با یک تناسب ذهنی هم می‌توانستیم بگوییم:

2π	T
$\frac{\pi}{6}$	Δt

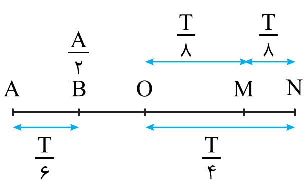
$\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{12}$

گزینهٔ ۱

B ۱۰۹۱ — ۲

بنا به فرض مسئله بازهٔ زمانی حرکت از O تا M و از M تا N برابر است. از این‌رو M نمی‌تواند وسط ON باشد. از O تا N، $\frac{T}{4}$ طول می‌کشد. بنابراین: $t_{OM}=t_{MN}=\frac{1}{2}(\frac{T}{4})=\frac{T}{8}$

نقطهٔ B وسـط OA اسـت و با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده بازهٔ زمانی حرکت از A تا B برابر $\frac{T}{6}$ است. $t_{AB}=\frac{T}{6}$

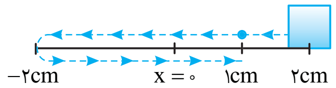


در این صورت خواهیم داشت: $\frac{t_{AB}}{t_{MN}}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{8}}=\frac{4}{3}$

A ۱۰۹۲ ۳

روش اول: استفاده از معادلهٔ حرکت:

۱ طول پاره‌خط ۴cm است بنابراین دامنه مطابق شکل برابر ۲cm است. از طرفی بنا به فرض مسئله بسامد زاویه‌ای نوسانگر $\frac{5\pi}{6}\,rad/s$ است بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/02\cos(\frac{5\pi}{6}t)$



۲ حال زمان‌هایی که نوسانگر از $x=1cm=0/01m$ عبور می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$$0/01=0/02\cos(\frac{5\pi}{6}t)\Rightarrow\cos\frac{5\pi}{6}t=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5\pi}{6}t_1=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_1=\frac{2}{5}s\\ \frac{5\pi}{6}t_2=2\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_2=2s\end{cases}$$

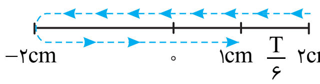
۳ بنابراین پس از ۲s برای دومین بار از $x=1cm$ عبور می‌کند.

روش دوم: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

ابتدا دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{5\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{12}{5}s=2/4s$

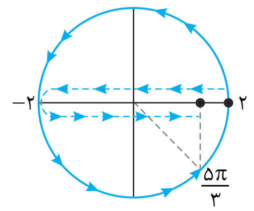
مدت زمان حرکت از مکان $\frac{A}{2}=1cm$ تا مکان $+A=+2cm$ برابر $\frac{1}{6}$ دوره $(\frac{T}{6})$ است بنابراین باید $\frac{T}{6}$ را از کل دوره (T) کم کنیم:

$$\Delta t=T-\frac{T}{6}=\frac{5T}{6}\xrightarrow{T=2/4}\Delta t=\frac{5\times2/4}{6}=2s$$



روش سوم: استفاده از فاز (شناسه تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

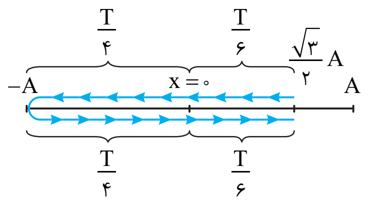
فاز (کمان) در مکان ۱+ برای دومین بار در ربع چهارم مثلثاتی قرار می‌گیرد و فاز برابر $\frac{5\pi}{3}$ است بنابراین: $\Delta\theta=\omega t\Rightarrow\frac{5\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}t\Rightarrow t=2s$



دقت کردید در این مسئله استفاده از دایرهٔ مثلثاتی از روش‌های دیگر سریع‌تر بود.

B ۱۰۹۳ ۱

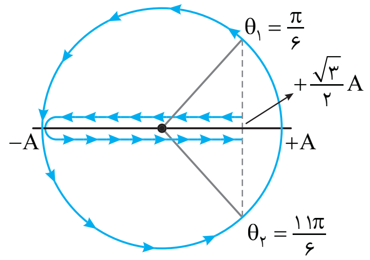
خط فکری مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی مسیر را با بازه‌های شناخته شده مقایسه می‌کنیم. نوسانگر از مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ به سمت مرکز رفته سپس در نقطهٔ بازگشت $x=-A$ تغییر جهت می‌دهد و به مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌رسد. بنابراین شما باید بازهٔ زمانی را روی شکل نوشته، با هم جمع کنید تا دوره را به دست بیاورید.



بازهٔ زمانی حرکت از $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ تا $x=0$ برابر $\frac{T}{6}$ و از صفر تا $-A$ برابر $\frac{T}{4}$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}\xrightarrow{\Delta t=1s}1=(\frac{2+3+3+2}{12})T\Rightarrow T=1/2s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:



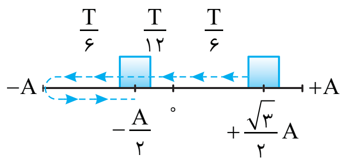
متحرک از مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌گذرد و بعد از رسیدن به مکان $-A$ مجدداً به مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ برمی‌گردد. فاز حرکت در حالت اول $\frac{\pi}{6}$ و در حالت دوم در ربع چهارم بوده و برابر $\frac{11\pi}{6}$ است، بنابراین به کمک تغییر فاز می‌توان دوره را حساب کرد.

$$\omega(t_2-t_1)=\theta_2-\theta_1\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times(1)=\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow T=1/2s$$

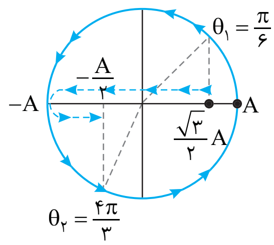
B ۱۰۹۴ ۳

روش اول: در لحظهٔ اول مکان نوسانگر $x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ و سرعت منفی است، پس نوسانگر در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل می‌باشد و در لحظهٔ دوم نیز مکان نوسانگر $x=-\frac{A}{2}$ بوده و حرکت تندشونده است یعنی نوسانگر از مکان‌های منفی در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل است.

با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم: $\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{12}+2(\frac{T}{6})=\frac{7T}{12}$



روش دوم: حل با کمک دایرهٔ مثلثاتی: معادلهٔ مکان - زمان به‌صورت $x=A\cos\omega t$ است پس در لحظهٔ t_1 کمان متناظر با $x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ برابر $\frac{\pi}{6}$ است و در لحظهٔ دوم t_2 برای دومین بار نوسانگر از مکان $-\frac{A}{2}$ عبور می‌کند پس کمان متناظر (فاز $\theta=\omega t$) با مکان در لحظهٔ t_2 برابر $\theta_2=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ است.



اکنون به کمک تغییر فاز، مسئله حل است.

$$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1$$

$$\Rightarrow\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\omega(t_2-t_1)$$

$$\Rightarrow\frac{7\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}(\Delta t)\Rightarrow\Delta t=\frac{7}{12}T$$

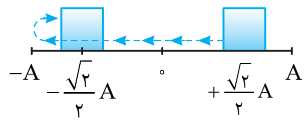
دقت کنید اگر مثلثات شما خوب است و می‌توانید به راحتی کمان (فاز) متناظر با مکان را روی دایرهٔ مثلثاتی تشخیص دهید نیازی به فراگیری بازه‌های زمانی شناخته شده ندارید، اما چنانچه با دایرهٔ مثلثاتی مشکل دارید بهترین روش برای شما فراگیری و به خاطر سپردن بازه‌های زمانی شناخته شده است.

بازی با سؤال ذره‌ای حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A و دورهٔ T دارد. در یک لحظه مکان ذرهٔ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ و سرعت آن منفی است. کمترین زمان لازم برای آنکه مکان ذره $-\frac{\sqrt{۲}A}{۲}$ و سرعت آن مثبت شود. کدام است؟ (کنکور دهه‌های گذشته)

۱) $\frac{T}{۲}$　۲) $\frac{T}{۳}$　۳) $\frac{T}{۴}$　۴) T

پاسخ روش اول: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

$$\begin{cases} \frac{T}{۸}: \text{از } \frac{\sqrt{۲}}{۲}A \text{ تا صفر} \\ \frac{T}{۴}: \text{از ۰ تا } -A \\ \frac{T}{۸}: \text{از } -A \text{ تا } -\frac{\sqrt{۲}}{۲}A \end{cases} \Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۸}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{T}{۲}$$



روش دوم: در لحظهٔ $t_۱$ مکان متحرک $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ و سرعت منفی است پس جهت حرکت خلاف جهت محور xها می‌باشد و در لحظهٔ $t_۲$ مکان متحرک در قسمت منفی قرار دارد اما جهت حرکت به واسطهٔ مثبت بودن سرعت در جهت محور xها می‌باشد. بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ نوسانگر اولین بار به $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ رسیده و در $t_۲$ برای دومین بار از $x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \omega t_۱=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۱=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow t_۱=\frac{T}{۸} \\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \omega t_۲=\pi+\frac{\pi}{۴} \\ \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۲=\frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow t_۲=\frac{۵T}{۸} \end{cases}$$

بنابراین:　$t_۲-t_۱=\frac{۵T}{۸}-\frac{T}{۸}=\frac{۴T}{۸}=\frac{T}{۲}$

گزینه ۱

B ۱۰۹۵ ۴

یادآوری در هر نوسان، نوسانگر ۲ بار طول پاره‌خط مسیر را طی می‌کند.

یادآوری هرگاه نوسانگر به سوی دامنه برود اندازهٔ شتاب در حال افزایش است.

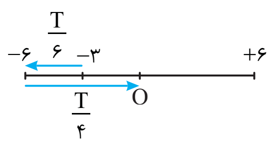
یادآوری هنگامی که نوسانگر از حالت تعادلش می‌گذرد $(x=۰)$ بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

۱ طول پاره‌خط ۱۲cm و دامنه برابر $A=\frac{۱۲}{۲}=۶cm$ است.

۲ ذره در مدت 5s، ۲۰ بار طول پاره‌خط را طی کرده یعنی ۱۰ نوسان را در مدت 5s انجام داده است و دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N} \Rightarrow T=\frac{۵}{۱۰}=۰/۵s$$

۳ ذره در مکان −۳cm و شتاب آن در حال افزایش است بنابراین ذره مطابق شکل در لحظهٔ $t_۱$ به سوی انتهای مسیر در حرکت و در لحظهٔ $t_۲$ که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد از نقطهٔ O می‌گذرد بنابراین بازهٔ زمانی بین $t_۱$ و $t_۲$ برابر است با:

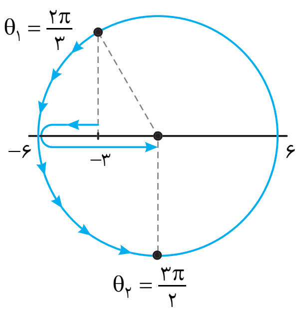


$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵T}{۱۲} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۱۲}\times ۰/۵ \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۲۴}s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

وقتی مکان منفی است فاز در ربع دوم و یا ربع سوم مثلثاتی است چون شتاب در حال افزایش است یعنی نوسانگر به سوی دامنهٔ $-A$ در حال حرکت است بنابراین فاز در ربع دوم مثلثاتی است. یعنی در مکان −۳cm در این مسئله فاز برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ و هنگام گذر از نقطهٔ O فاز $\theta_۲=\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان است.

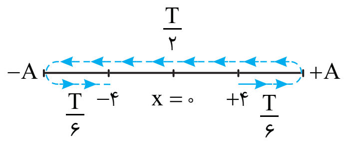
$$\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega=۴\pi} ۴\pi(t_۲-t_۱)=\frac{۹\pi-۴\pi}{۶} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۲۴}s$$



بازی با سؤال ذره‌ای روی پاره‌خطی به طول ۱۶cm دارای حرکت هماهنگ ساده است. ذره در لحظهٔ $t_۱$ از مکان +۴cm می‌گذرد و از حالت تعادل دور می‌شود. ۰/۵ ثانیه بعد از $t_۱$ با گذر از مکان −۴cm به سوی حالت تعادل می‌رود. کمینه بسامد این ذره چند هرتز است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$　۲) $\frac{۶}{۵}$　۳) $\frac{۴}{۵}$　۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ خط فکری ابتدا دامنهٔ حرکت را حساب کنید سپس مشخص کنید که مکان‌های +۴cm و −۴cm چه کسری از دامنه هستند تا بتوانید بازه‌های زمانی شناخته شده را استفاده کرده، مسئله را حل کنید.



دامنه برابر $\frac{۱۶}{۲}=۸cm$ است. با توجه به صورت مسأله مسیر حرکت را رسم کرده، بازه‌های زمانی شناخته شده را روی آن نوشته با هم جمع کرده و دوره را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{T+۳T+T}{۶} \Rightarrow ۰/۵=\frac{۵T}{۶} \Rightarrow T=۰/۶s$$

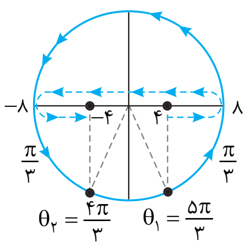
بسامد را به‌دست می‌آوریم:

$$f=\frac{۱}{T} \Rightarrow f=\frac{۱}{۰/۶}=\frac{۵}{۳}Hz$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

دامنه ۸cm است. فاز حرکت را برای مکان +۴cm و −۴cm روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

مکان نوسانگر +۴cm و در حال دور شدن از مبدأ یعنی فاز در ربع چهارم بوده بنابراین $\theta_۱=\frac{۵\pi}{۳}$ و در مکان نوسانگر −۴cm و در حال نزدیک شدن به حالت تعادل یعنی فاز در ربع سوم بنابراین $\theta_۲=\frac{۴\pi}{۳}$. تغییر فاز را از روی دایره بررسی می‌کنیم:



$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۳}+\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}$$

$$\Delta\theta=\frac{۲\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \frac{۵\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{T}\times ۰/۵ \Rightarrow T=۰/۶s$$

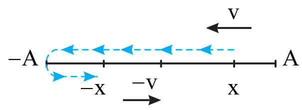
$$f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{۰/۶} \Rightarrow f=\frac{۵}{۳}Hz$$

گزینه ۱

B ۱۰۹۶ ۴

نکتهٔ مهم مدت زمانی که طول می‌کشد که مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود برابر $\frac{T}{2}$ است.

صورت مسئله به‌گونه‌ای است که شخص از خیر حل آن می‌گذرد اما نگران نباشید این همه علائم ریاضی یعنی اینکه در لحظهٔ t مکان نوسانگر x بوده و بعد از گذشت T' مکان نوسانگر قرینه شده در ضمن سرعت آن نیز قرینه شده، بنابراین T' همان $\frac{T}{2}$ است.



B ۱۰۹۷ ۳

نکته حداقل زمانی که طی آن مکان و سرعت نوسانگر هر دو قرینه می‌شوند برابر $\frac{T}{2}$ (نصف دوره) است.

با توجه به صورت مسئله طول پاره‌خط 8cm است در نتیجه دامنهٔ حرکت $A=\frac{8}{2}=4cm$ می‌شود. البته این مطلب در حل مسئله به ما کمکی نمی‌کند فقط برای درک بهتر مسیر حرکت ذره از −1cm تا +1cm است.

نکته هرگاه نوسانگر از مرکز نوسان به سوی دامنه حرکت می‌کند حرکت آن کندشونده است.

در صورت مسئله بیان شده که نوسانگر از مکان −1cm با حرکت کندشونده می‌گذرد. نوسانگر در حال حرکت به سوی دامنهٔ منفی (−4cm) است و سپس از نقطهٔ بازگشت برمی‌گردد و به نقطه +1cm می‌رود. از این‌رو بازهٔ زمانی که طی می‌کند برابر $\frac{T}{2}$ است.

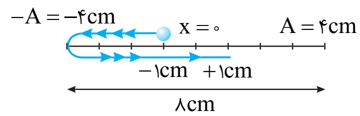
$$T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=5Hz}T=\frac{1}{5}s$$

$\frac{T}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$t_2-t_1=\frac{T}{2}=\frac{\frac{1}{5}}{2}\Rightarrow \Delta t=\frac{1}{10}s$$

بنابراین حداقل زمان حرکت از −1cm تا +1cm در این مسئله $\frac{1}{10}s$ است.

کندشونده

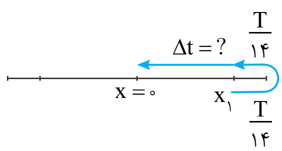


B ۱۰۹۸ ۳

خط فکری حداقل زمان دو بار عبور متوالی از یک مکان یعنی اینکه نوسانگر از آن مکان به یک انتهای مسیر (دامنه) رفته و دوباره به همان مکان بازگردد. بنابراین وقتی گفته شده در مدت $\frac{T}{7}$ نوسانگر از مکان x_1 دو بار عبور کرده، پس نوسانگر از مکان x_1 تا دامنه به مدت نصف $\frac{T}{7}$ در حال حرکت بوده است یعنی $\frac{T}{14}$. اکنون با دانستن این مطلب مسئله به راحتی حل می‌شود.

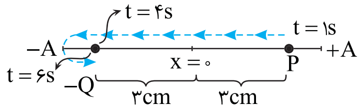
نوسانگر از مکان x_1 تا دامنه $\frac{T}{14}$ در حرکت بوده است همچنین از دامنه نیز $\frac{T}{14}$ طول می‌کشد تا نوسانگر به مکان x_1 برسد بنابراین بازهٔ زمانی حرکت از x_1 تا نقطهٔ تعادل خواهد شد:

$$\Delta t=\frac{T}{4}-\frac{T}{14}\Rightarrow \Delta t=\frac{7T-2T}{28}\Rightarrow \Delta t=\frac{5T}{28}$$



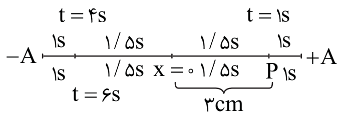
B ۱۰۹۹ ۳

خط فکری شکل ساده‌ای از موضوع مسئله بکشید. دقت کنید که در صورت مسئله بیان شده که فاصله از حالت تعادل 3cm است یعنی مکان نوسانگر می‌تواند +3cm و −3cm باشد.



مطلب دیگری که باید به آن دقت کنید، تقارن است یعنی اینکه وقتی در مدت $4-1=3s$ نوسانگر از مکان P به Q می‌رود این بازه به دو قسمت مساوی 1/5s تقسیم می‌شود و از P تا $x=0$، 1/5s و از $x=0$ تا Q نیز 1/5s طول می‌کشد و یا در بازهٔ $6s-4s=2s$، در مدت 1s نوسانگر از نقطهٔ Q به انتهای مسیر (−A) رفته و در مدت 1s همین مسیر را برمی‌گردد. اکنون این اطلاعات را روی شکل قرار داده مسئله را حل کنید.

دوره را حساب می‌کنیم: $T=1+1+1/5+1/5+1/5+1/5+1+1=10s$



میانبر چون در لحظهٔ $t=1s$ مکان +3cm و جهت سرعت منفی و در لحظهٔ $t=6s$ مکان −3cm و جهت سرعت مثبت شده است، یعنی در این بازهٔ زمانی مکان و سرعت قرینه شده است، بنابراین این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{2}$ بوده و دوره خواهد شد:

$$\frac{T}{2}=6-1\Rightarrow T=10s$$

اما حالا به سراغ دامنه می‌رویم. برای این کار معادلهٔ حرکت می‌نویسیم و در لحظهٔ $t=1s$ مکان را +3cm قرار می‌دهیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{10}\Rightarrow \omega=\frac{\pi}{5}rad/s$$

$$x=A\cos\frac{\pi}{5}t\xrightarrow[x=3cm]{t=1s}3=A\cos\frac{\pi}{5}\Rightarrow 3=A\times 0/8$$

$$\Rightarrow A=\frac{30}{8}=3/75cm$$

B ۱۱۰۰ ۲

خط فکری یک معادلهٔ حرکت به شما داده شده و جابه‌جایی متحرک را در یک بازهٔ زمانی از شما می‌خواهد از این رو بنا به آنچه در حرکت‌شناسی یاد گرفته‌ایم تنها باید در معادلهٔ حرکت ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی را قرار داده و مکان‌های به‌دست آمده را از هم کم کنیم.

کافی است مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t=0$ و $t=1/5s$ به‌دست آورده و از هم کم کنیم:

$$x=0/02\cos\pi t\Rightarrow\begin{cases}t_1=0\Rightarrow x_1=0/02m\\ t_2=1/5s\Rightarrow x_2=0/02\cos\frac{3}{2}\pi\Rightarrow x_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2-x_1=0-0/02\Rightarrow \Delta x=-0/02m$$

B ۱۱۰۱ ۴

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم:

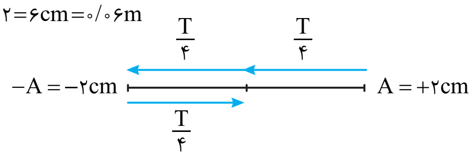
$$\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{\omega=\pi\ rad/s}\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2s$$

۲ مشخص می‌کنیم که 1/5s چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{1/5}{2}\Rightarrow \Delta t=\frac{3T}{4}$$

۳ در مدت $\frac{3T}{4}$ نوسانگر مطابق شکل از مکان $A=+2cm$ به مکان $A=-2cm$ رفته و به مبدأ $x=0$ برمی‌گردد. بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=3\times 2=6cm=0/06m$$



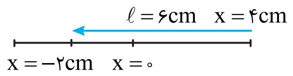
B | ۱۱۰۲ | ۱

خط فکری: شما ابتدا باید دامنه را پیدا کنید و به کمک آن مشخص کنید که وقتی نوسانگر در مدت $0/2s$ مسافت $6cm$ را طی می‌کند به کدام نقطهٔ مسیر می‌رسد و با داشتن مکان می‌توانید از روی معادلهٔ حرکت بسامد زاویه‌ای را حساب کرده و معادلهٔ حرکت را بنویسید.

۱ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر است بنابراین: $A=\frac{8}{2}=4cm$

۲ متحرک از $+4cm$ شروع به حرکت کرده و پس از ۰/۲ ثانیه، ۶ سانتی‌متر مسافت طی کرده یعنی به مکان $x=-2cm$ رسیده است.

۳ مکان $-2cm$ را در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده قرار می‌دهیم.



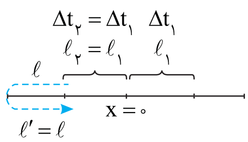
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow -2=4\cos\omega(0/2)\Rightarrow \cos 0/2\omega=-\frac{1}{2}\Rightarrow 0/2\omega=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{10\pi}{3}rad/s$$

معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=0/04\cos\frac{10\pi}{3}t$

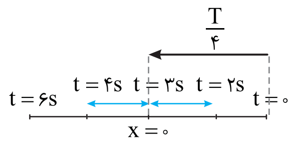
B | ۱۱۰۳ | ۴

خط فکری: به شکل روبه‌رو نگاه کنید.

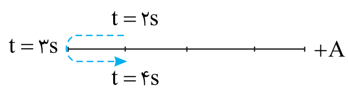


در حرکت هماهنگ ساده مسافت طی شده در بازه‌های زمانی یکسان در دو طرف $x=0$ و همچنین در دو طرف انتهای مسیر $(x=\pm A)$ تقارن دارد. بنابراین وقتی در ثانیهٔ سوم و ثانیهٔ چهارم مسافت طی شده برابر است دو حالت وجود دارد، یکی در دو طرف مبدأ و دیگری در دو طرف انتهای مسیر. با دانستن این مطلب مسئله قابل حل است.

حالت اول: ثانیهٔ سوم قبل از $x=0$ و ثانیهٔ چهارم بعد از $x=0$ است، بنابراین در لحظهٔ $t=3s$ متحرک از مکان $x=0$ می‌گذرد یعنی در بازهٔ صفر تا $3s$ از $+A$ متحرک به مبدأ رسیده است که این بازه برابر $\frac{T}{4}$ است. $\frac{T}{4}=3\Rightarrow T=12s$



حالت دوم: ثانیهٔ سوم (بازهٔ بین $t=2s$ تا $t=3s$) قبل از انتهای مسیر $(-A)$ و ثانیهٔ چهارم (بازهٔ بین $t=3s$ تا $t=4s$) بعد از انتهای مسیر است:



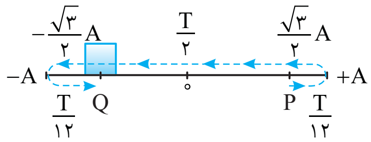
بنابراین در مدت صفر تا $t=3s$ نوسانگر از $+A$ به $-A$ رفته که این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{2}$ است، از این‌رو دوره خواهد شد: $\frac{T}{2}=3\Rightarrow T=6s$

B | ۱۱۰۴ | ۴

۱ در لحظهٔ t_1 مکان نوسانگر $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ و سرعت آن مثبت است، یعنی نوسانگر از مکان P در حال حرکت به سوی دامنه است.

۲ در لحظهٔ t_2 در مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ نیز سرعت مثبت است یعنی نوسانگر به سوی مرکز نوسان در حرکت است.

۳ شکل مسیر را رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی شناخته شده را در طول مسیر نوشته تا مدت زمان حرکت از P تا Q مشخص شود. $\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{2}+\frac{T}{12}=\frac{2T}{3}$



۴ جابه‌جایی متحرک از P تا Q خواهد شد:

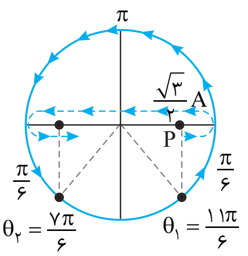
$$\Delta x=-\frac{\sqrt{3}}{2}A-(+\frac{\sqrt{3}}{2}A)\Rightarrow \Delta x=-\sqrt{3}A$$

۵ بنا به تعریف، سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-\sqrt{3}A}{\frac{2T}{3}}=-\frac{3\sqrt{3}A}{2T}$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

در لحظهٔ t_1 مکان نوسانگر مثبت و سرعت آن نیز مثبت است، بنابراین فاز در ربع چهارم قرار دارد.

در لحظهٔ t_2 مکان نوسانگر منفی و سرعت مثبت است بنابراین فاز در ربع سوم قرار دارد. تغییر فاز برابر است با:



$$\Delta\theta=\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$$

$$\Delta\theta=\omega(t_2-t_1)=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow\Delta t=\frac{2T}{3}$$

سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-\sqrt{3}A}{\frac{2T}{3}}\Rightarrow v_{av}=-\frac{3\sqrt{3}A}{2T}$

A | ۱۱۰۵ | ۱

خط فکری: متحرک در یک جهت از مکان $-5cm$ به مکان $+10cm$ مبدأ می‌رود.

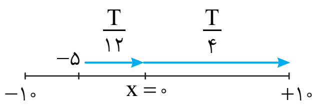
برای به‌دست آوردن سرعت متوسط شما باید زمان جابه‌جایی از $-5cm$ تا $+10cm$ را حساب کنید البته می‌توانید از بازه‌های زمانی شناخته شده و یا از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنید.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

زمان حرکت از مکان $-5cm$ یعنی $-\frac{A}{2}$ تا مبدأ $(x=0)$ برابر $\frac{T}{12}$ و از مبدأ تا مکان $+10cm$ یعنی $+A$ برابر $\frac{T}{4}$ است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{4}=\frac{T+3T}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{3}=\frac{0/15}{3}=0/05s$$

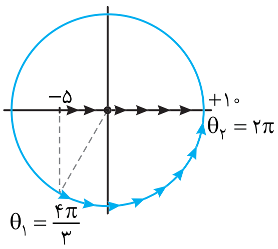
سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{[10-(-5)]\times 10^{-2}}{0/05}\Rightarrow v_{av}=3m/s$



روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت (ωt): کمان متناظر با مکان $x=-5cm$ و $x=10cm$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=2\pi-\frac{4\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{0/15}\Delta t=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\Delta t=0/05s$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0/15}{0/05}=3m/s$$

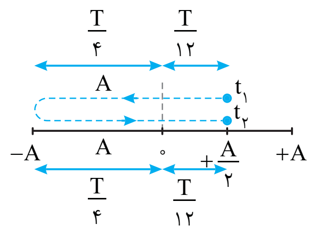


B ۱۱۰۶ | ۳

خط فکری شما باید مسیر حرکت را به کمک اطلاعات مسئله رسم کنید و روی شکل بازه‌های زمانی شناخته شده را نوشته تا بتوانید بازهٔ زمانی حرکت و همچنین مسافت طی شده را حساب کرده و تندی متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ در لحظهٔ $t_۱$ نوسانگر از مکان $+\frac{A}{۲}$ می‌گذرد و دارای حرکت تندشونده است یعنی نوسانگر در حال حرکت به سوی حالت تعادل است.

۲ بعد از لحظهٔ $t_۱$ در لحظهٔ $t_۲$، نوسانگر مجدداً از مکان $+\frac{A}{۲}$ می‌گذرد. بنابراین مسیر حرکت مطابق شکل زیر است.



۳ مدت زمان حرکت از $+\frac{A}{۲}$ تا $x=۰$ برابر $\frac{T}{۱۲}$ و از $x=۰$ تا دامنهٔ $-A$ برابر $\frac{T}{۴}$ است. بازهٔ زمانی حرکت نوسانگر در این مسیر رفت و برگشت از $+\frac{A}{۲}$ تا $+\frac{A}{۲}$ برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}\Rightarrow \Delta t=\frac{۲T}{۳}\xrightarrow{T=\frac{۲\pi}{\omega}}\Delta t=\frac{۴\pi}{۳\omega}$$

همچنین در این مدت مسافت طی شده برابر است با: $\ell=\frac{A}{۲}+A+A+\frac{A}{۲}=۳A$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم: $s_{av}=\frac{\ell}{t_۲-t_۱}=\frac{۳A}{\frac{۴\pi}{۳\omega}}\Rightarrow s_{av}=\frac{۹A\omega}{۴\pi}$

دقت کردید که ما در روابط T را برحسب بسامد زاویه‌ای ω نوشته‌ایم. چرا؟ برای آنکه در گزینه‌ها خبری از T نبوده بلکه ω در گزینه‌ها وجود دارد.

B ۱۱۰۷ | ۲

روش اول: استفاده از معادلهٔ حرکت:

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۵\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۰}s$

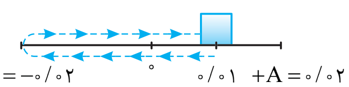
۲ با توجه به زمان‌های داده شده مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱=۰/۰۲\cos ۵\pi\times\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow x_۱=۰/۰۱m$$

$$x_۲=۰/۰۲\cos ۵\pi\times\frac{۱}{۳}\Rightarrow x_۲=۰/۰۱m$$

از همین‌جا که نقطهٔ ابتدا و انتهای نوسان یکسان است، می‌توانیم متوجه شویم که سرعت متوسط آن صفر است.

۳ در این صورت متحرک دو بار از مکان $x=۰/۰۱m$ گذشته است که هر دو بار در بازهٔ زمانی کوچک‌تر از یک دوره $T=\frac{۴}{۱۰}s$ صورت گرفته و مسیر مطابق شکل زیر است. مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:



$$\ell=۰/۰۱+۰/۰۲+۰/۰۲+۰/۰۱=۰/۰۶m$$

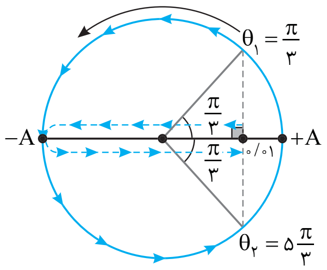
۴ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۰/۰۶}{\frac{۴}{۱۵}}=\frac{۰/۹}{۴}=\frac{۹}{۴۰}m/s$$

روش دوم: استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:

ابتدا کمان‌های متناظر با $t_۱$ و $t_۲$ را به‌دست می‌آوریم: $\theta_۱=\omega t_۱=\frac{\pi}{۳}$, $\theta_۲=\omega t_۲=\frac{۵\pi}{۳}$

بنابراین متحرک از $۰/۰۱m$ شروع به حرکت به سمت مرکز کرده و با یک بار تغییر جهت مجدد به $۰/۰۱m$ خواهد رسید: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۰/۰۶}{\frac{۴}{۱۵}}=\frac{۹}{۴۰}m/s$

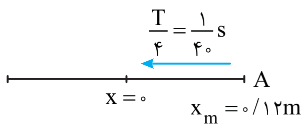


بازی با سؤال **ذره‌ای روی پاره‌خطی به‌طول ۲۴ سانتی‌متر با بسامد ۱۰ هرتز در مبدأ زمان از بیشینه مکان مثبت شروع به نوسان می‌کند. تندی متوسط این ذره بین $t=۰$ و $t=\frac{۱}{۴۰}s$ چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۹/۶ ۲) ۴/۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۶

پاسخ **دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر نوسان است.**

دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{۱}{f}\xrightarrow{f=۱۰Hz}T=\frac{۱}{۱۰}s$



بازهٔ زمانی داده شده را بر حسب دوره به‌دست می‌آوریم: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۴۰}}{\frac{۱}{۱۰}}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۴}$

در مدت $\frac{T}{۴}$ نوسانگر از مکان $+A$ به $x=۰$ می‌رود، بنابراین تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{۰/۱۲}{\frac{۱}{۴۰}}=۴/۸m/s$

گزینهٔ ۲

B ۱۱۰۸ | ۲

دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲s$

بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۱}{۵}s$ تا $t_۲=\frac{۶}{۵}s$ برابر است با: $\Delta t=\frac{۶}{۵}-\frac{۱}{۵}\Rightarrow\Delta t=۱s$

این بازه زمانی ۱s است که برابر نصف دوره این حرکت است و در مدت $\frac{T}{۲}$ مسافت طی شده متحرک برابر ۲A می‌شود. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۲\times۰/۰۴}{۱}=۰/۰۸m/s=۸cm/s$

B ۱۱۰۹ | ۲

۱ با توجه به معادلهٔ حرکت، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۲}t\ ,\ \omega=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow T=۴s$$

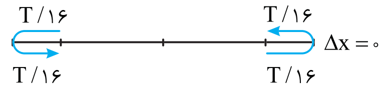
۲ بازهٔ زمانی برابر است با: $\Delta t=t_۲-t_۱=\frac{۲۵}{۱۲}-\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=۲s\xrightarrow{T=۴s}\Delta t=\frac{T}{۲}$

نکته همواره مسافت طی شده در مدت زمان T برابر با ۴A و در مدت زمان $\frac{T}{۲}$ برابر با ۲A است.

۳ با توجه به نکته در مدت نصف دوره مسافتی که نوسانگر طی می‌کند ۲A یعنی ۰/۰۴ متر است. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۰/۰۴}{۲}=۰/۰۲m/s=۲cm/s$

B ۱۱۱۰ ۱

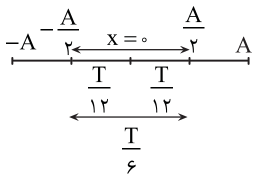
در هر بازهٔ زمانی دلخواه (مانند $\frac{T}{8}$) که به شما داده می‌شود و از شما کمینهٔ جابه‌جایی خواسته می‌شود شما اگر این بازه را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید $(\frac{(\frac{T}{8})}{2}=\frac{T}{16})$ می‌توانید فرض کنید که نوسانگر در مدت نصف بازه از یک مکان به دامنه رفته و سپس در نیمهٔ دیگر بازه از دامنه به همان مکان برگشته است. در این صورت جابه‌جایی صفر خواهد شد.



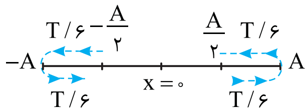
میانبر در هر بازهٔ زمانی دلخواه در حرکت هماهنگ ساده کمینهٔ جابه‌جایی صفر است.

B ۱۱۱۱ ۱

خط فکری در مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل) تندی نوسانگر بیشینه است و در جایی که تندی بیشتر است، زمانی طی یک مسافت معین کمتر خواهد شد و در دو انتهای مسیر (نقاط بازگشت) تندی صفر است و در نزدیکی نقاط بازگشت، زمان طی یک مسافت معین طولانی‌تر خواهد بود. بنابراین برای کمینهٔ زمان به سراغ تقسیم مسافت (A) در دوطرف نقطه تعادل می‌رویم و برای بیشینه زمان مسافت طی‌شده برابر یک دامنه را به دو قسمت مساوی در دو طرف نقطهٔ بازگشت تقسیم می‌کنیم.



کوتاه‌ترین زمان حرکت برای مسافتی برابر دامنه مطابق شکل وقتی است که نوسانگر از $-\frac{A}{2}$ به $\frac{A}{2}$ (و یا بالعکس) می‌رود که این زمان $\Delta t_{min}=\frac{T}{6}$ است. بیشینه زمان وقتی است که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ به $+A$ رفته و بر می‌گردد: $\Delta t_{max}=\frac{T}{6}+\frac{T}{6}=\frac{T}{3}$



بنابراین $\frac{\Delta t_{min}}{\Delta t_{max}}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{3}}=\frac{1}{2}$

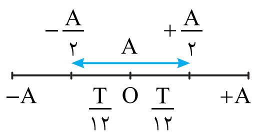
B ۱۱۱۲ ۲

بیشینهٔ سرعت متوسط وقتی است که در بازهٔ $0/02s$ بیشترین جابه‌جایی طی شود، از این‌رو باید این جابه‌جایی در دو طرف مرکز نوسان که تندی از بقیهٔ نقاط بیشتر است صورت گیرد.

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{50}{3}\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/12s$

۲ اکنون بررسی می‌کنیم $0/02s$ چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/02}{0/12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}$

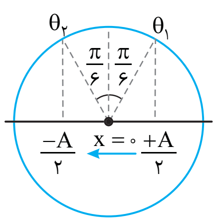
۳ این بازه را به دو قسمت مساوی در دو طرف مرکز نوسان تقسیم می‌کنیم. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده خواهیم داشت:



پس در $0/02s$ بیشینهٔ جابه‌جایی برابر A است. $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{0/06}{0/02}=3m/s$

روش دایرهٔ مثلثاتی: در مدت $0/02s$ تغییر شناسهٔ تابع کسینوسی (تغییر فاز) برابر است با: $\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\Delta\theta=\frac{50\pi}{3}\times0/02=\Delta\theta=\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ باید به دو قسمت مساوی در دو طرف مبدأ تقسیم شود.

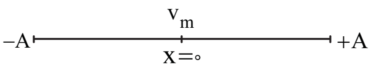


در این صورت $\theta_1=\frac{\pi}{3}$ و $x_1=+\frac{A}{2}$ و $\theta_2=\frac{2\pi}{3}$ و $x_2=-\frac{A}{2}$ خواهد بود و اندازهٔ جابه‌جایی در مدت $0/02s$ برابر $+A=0/06m$ می‌شود. $v_{av}=\frac{0/06}{0/02}=3m/s$

بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان یک نوسانگر در SI به صورت $x=0/05\cos3\pi t$ می‌باشد. بیشینهٔ جابه‌جایی که این نوسانگر در بازهٔ زمانی $\Delta t=\frac{1}{6}s$ می‌پیماید چند سانتی‌متر است؟

۱) ۵ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۱۰

پاسخ خط فکری می‌خواهیم در یک مدت معین $(\Delta t=\frac{1}{6}s)$ نوسانگر بیشینهٔ جابه‌جایی را داشته باشد. برای آنکه یک متحرک در یک مدت معین جابه‌جایی بیشتری داشته باشد باید سرعتش از لحظه‌های دیگر بیشتر باشد. در حرکت هماهنگ ساده بیشینهٔ سرعت در وسط مسیر اتفاق می‌افتد بنابراین باید نوسانگر در این بازهٔ زمانی در دو طرف $x=0$ در حرکت باشد. یعنی $\frac{1}{6}s$ را باید به دو قسمت تقسیم کنید و در هر $\frac{1}{12}s$ مشخص کنید که متحرک از کجا به کجا می‌رود، البته ابتدا باید دوره را بیابید و سپس معین کنید $\frac{1}{12}s$ چه کسری از دوره است تا به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.



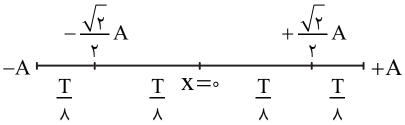
۱ بیشینهٔ جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی معین همواره در دو طرف نقطهٔ تعادل یعنی جایی که تندی بیشینه است رخ می‌دهد، بنابراین $\Delta t=\frac{1}{6}s$ را به دو بازهٔ زمانی $\frac{1}{12}s$ تقسیم می‌کنیم.

۲ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow3\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{3}s$

۳ معین می‌کنیم که $\frac{1}{12}s$ چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{8}$

۴ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مسیر را رسم می‌کنیم، مدت $\frac{T}{8}$ زمان حرکت از مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به مکان $x=0$ است. بنابراین جابه‌جایی بیشینه خواهد شد:

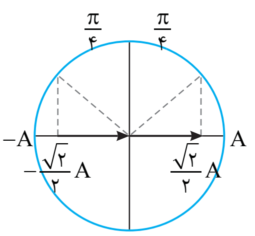
$$\frac{\sqrt{2}}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}A=\sqrt{2}A=\sqrt{2}\times\frac{5}{100}m=5\sqrt{2}cm$$



روش حل به کمک دایرهٔ مثلثاتی و تغییر فاز $(\Delta\theta=\omega\Delta t)$:

۵ تغییر فاز را حساب می‌کنیم: $\Delta\theta=\omega\Delta t=3\pi\times\frac{1}{6}=\frac{\pi}{2}$

۶ تغییر فاز را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم: $(\frac{(\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{\pi}{4})$



۷ روی دایرهٔ مثلثاتی در دو طرف مرکز، $\frac{\pi}{4}$ را نشان داده و مکان متحرک را روی مسیر مشخص می‌کنیم. بنابراین بیشینهٔ جابه‌جایی وقتی است که نوسانگر از مکان $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌رود.

$\Delta x=\sqrt{2}A\xrightarrow{A=5cm}\Delta x=5\sqrt{2}\,cm$

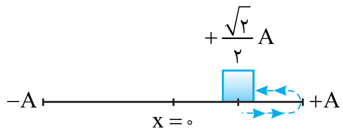
گزینهٔ ۲

B ۱۱۱۳ ۲

نکته کمترین جابه‌جایی و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه در حرکت هماهنگ ساده صفر است.

۱ کمترین اندازهٔ سرعت متوسط برای زمانی است که نوسانگر از نقطه‌ای از مسیر حرکت کرده و دوباره به آن نقطه برگردد که در این صورت سرعت متوسط برابر صفر می‌شود.

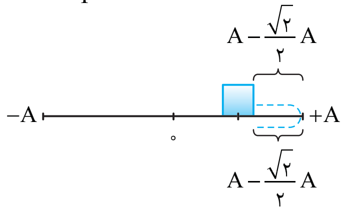
۲ کمترین تندی متوسط در اطراف نقطهٔ بازگشت $(v=0)$ اتفاق می‌افتد، زیرا در این ناحیه سرعت کم و زمان طولانی‌تر از بقیهٔ مسیر است، بنابراین نصف زمان نوسان را از قبل از رسیدن به نقطهٔ بازگشت در نظر گرفته و نصف دیگر زمان را بعد از گذر از نقطهٔ بازگشت در نظر می‌گیریم. نصف $\frac{T}{4}$ برابر $\frac{T}{8}$ است. مکان در $\frac{T}{8}$ را به کمک معادله به‌دست می‌آوریم:



۳ بنابراین مسافت طی شده برابر است با: $x_1=A\cos\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{8}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

$$l=2(A-\frac{\sqrt{2}}{2}A)=A(2-\sqrt{2})$$

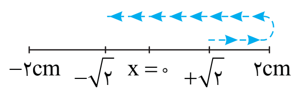
۴ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{A(2-\sqrt{2})}{\frac{T}{4}}=\frac{4A(2-\sqrt{2})}{T}$



B ۱۱۱۴ ۴

۱ دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم. $T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=\frac{1}{4}Hz}T=\frac{1}{\frac{1}{4}}\Rightarrow T=4s$

۲ نوسانگر از مکان $+\sqrt{2}cm$ در جهت محور x می‌گذرد، بنابراین نوسانگر در حال حرکت از $+\sqrt{2}cm$ به سوی دامنه $A=+2cm$ است. در نتیجه کمترین بازهٔ زمانی برای رسیدن متحرک به مکان $-\sqrt{2}cm$ مسیری است که نوسانگر مطابق شکل از مکان $+\sqrt{2}cm$ به مکان $+2cm$ رفته و از آنجا در خلاف جهت محور xها خود را به مکان $-\sqrt{2}cm$ برساند.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، کمترین بازهٔ زمانی که طی آن مکان و سرعت نوسانگر قرینه می‌شود برابر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ است.

۳ در بازهٔ مورد نظر مکان از $+\sqrt{2}cm$ در جهت مثبت محور xها به مکان $-\sqrt{2}cm$ در خلاف جهت محور xها رفته یعنی هم مکان و هم سرعت نوسانگر قرینه شده و این بازه برابر $\frac{T}{2}$ است. $\Delta t=\frac{T}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{4}{2}\Rightarrow\Delta t=2s$

۴ با توجه به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

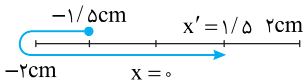
$$|v_{av}|=|\frac{\Delta x}{\Delta t}|=|\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}|=\sqrt{2}m/s$$

بازی با سؤال **ذره‌ای روی پاره‌خطی واقع بر محور xها به طول $4cm$ دارای حرکت هماهنگ ساده است و حالت تعادل آن مبدأ مختصات است. بیشینه سرعت متوسط ذره در بازه‌ای که از مکان $-1/5cm$ در جهت منفی محور می‌گذرد تا لحظه‌ای که از مکان $x'=+1/5cm$ عبور می‌کند برابر $+1/5m/s$ است. بسامد ذره چند هرتز است؟**

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ ۱ **دامنه برابر نصف طول پاره‌خط است.** $A=\frac{4}{2}\Rightarrow A=2cm$

۲ **سرعت متوسط از رابطه $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید. در صورت مسئله بیان شده که بیشینه سرعت متوسط، دقت کنید Δx مقدارش ثابت است و برای آنکه v_{av} بیشینه شود باید Δt کمینه باشد. اما کمینه بودن Δt مفهومش چیست؟ یعنی ذره از مکان $-1/5cm$ مطابق شکل به مکان $+1/5cm$ برود.**



۳ **با توجه به مسیر حرکت از مکان $-1/5cm$ به مکان $+1/5cm$ مشخص است که در مدت Δt مکان و سرعت ذره قرینه شده یعنی Δt برابر نصف دوره است. اکنون Δt را به کمک تعریف سرعت متوسط حساب می‌کنیم.**

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow1/5=\frac{[1/5-(-1/5)]\times10^{-2}}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=2\times10^{-2}s$$

بنابراین دوره خواهد شد: $\Delta t=\frac{T}{2}\Rightarrow2\times10^{-2}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=4\times10^{-2}s$

بسامد را حساب می‌کنیم. $f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{4\times10^{-2}}\Rightarrow f=25Hz$ گزینه ۱

B ۱۱۱۵ ۴

خط فکری به عبارت «بیشترین سرعت متوسط» دقت کرده‌اید. جابه‌جایی از مکان $\frac{+A}{\sqrt{2}}$ تا $+\frac{A}{2}$ مقدار ثابتی است و در رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x\ \text{ثابت}}{\Delta t}$ وقتی v_{av} بیشینه است که Δt کمترین مقدار باشد و کمترین مقدار Δt وقتی است که متحرک بدون تغییر جهت مستقیماً از $\frac{+A}{\sqrt{2}}$ به $+\frac{A}{2}$ برود. شما باید زمان این جابه‌جایی را به‌دست بیاورید تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید.

روش استفاده از بازه‌های زمانی:

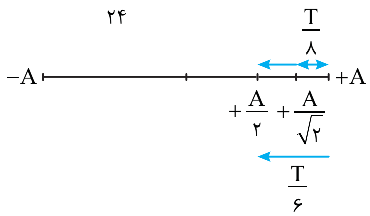
۱ جابه‌جایی نوسانگر برابر است با:

$$\Delta x=\frac{+A}{2}-\frac{A}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}-2)A}{2\sqrt{2}}\Rightarrow|\Delta x|=|(\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}})A|=\frac{\sqrt{2}-1}{2}A$$

۲ زمان حرکت از $+A$ تا $\frac{A}{+\sqrt{2}}$ برابر $\frac{T}{8}$ و از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ برابر $\frac{T}{6}$ است.

بنابراین زمان حرکت از $\frac{A}{+\sqrt{2}}$ تا $\frac{+A}{2}$ برابر $\Delta t=\frac{T}{6}-\frac{T}{8}=\frac{T}{24}$ است. بزرگی سرعت متوسط خواهد شد:

$$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}\Rightarrow|v_{av}|=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}A}{\frac{T}{24}}\Rightarrow|v_{av}|=12(\sqrt{2}-1)\frac{A}{T}$$

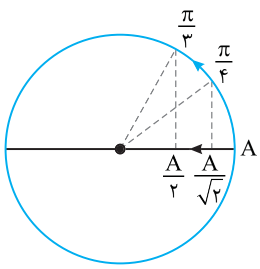


روش مثلثاتی: فاز حرکت در مکان $\frac{+A}{\sqrt{2}}$ مطابق شکل $\frac{\pi}{4}$ و در مکان $+\frac{A}{2}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. بازهٔ زمانی حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t=\frac{\pi}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{24}$$

باقی راه‌حل شبیه به روش قبل است.



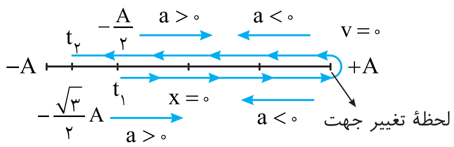
B ۱۱۱۶ ۱

خط فکری در حل این مسائل باید مسیر حرکت را رسم کنید. به تعداد گذر نوسانگر از مبدأ مکان $x=0$ شتاب تغییر علامت می‌دهد و به تعداد رسیدن به نقطهٔ بازگشت و برگشت از آن متحرک تغییر جهت می‌دهد.

نکته در لحظه‌ای که نوسانگر از مبدأ مکان $x=0$ می‌گذرد علامت شتاب و نیروی خالص تغییر جهت می‌دهد.

نکته در لحظه‌ای که نوسانگر به نقطهٔ بازگشت می رسد، سرعتش صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.

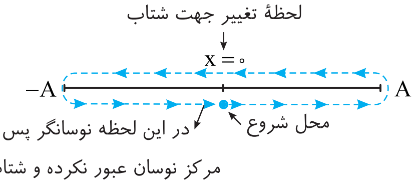
با توجه به صورت مسئله، مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. متحرک در مکان $-\frac{A}{2}$ دارای حرکت تندشونده است یعنی در حال حرکت به سوی نقطه تعادل است و برای رسیدن به مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ باید به انتهای مسیر برود $(+A)$ و برگردد بنابراین نوسانگر در مکان $+A$ یک بار تغییر جهت می‌دهد و چون دو بار از مرکز نوسان می‌گذرد دو بار شتاب تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست است. یادمان باشد با هر بار گذر نوسانگر از مرکز نوسان، شتاب و نیرو تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۱۱۷ ۱

نکته هرگاه نوسانگر از مبدأ **بگذرد** شتاب تغییر جهت می‌دهد.

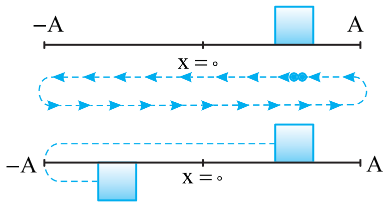
در لحظهٔ مورد نظر که تندی نوسانگر بیشینه است یعنی مطابق شکل نوسانگر در مرکز نوسان است. از این لحظه به بعد در مدت یک دوره نوسانگر تنها یک بار از مبدأ می‌گذرد و شتاب تغییر علامت می‌دهد. دقت کنید در آخر دوره شتاب صفر شده اما از مبدأ نمی‌گذرد بنابراین در آخر دوره هنوز تغییر جهت شتاب رخ نداده است.



بازی با سؤال **ذره‌ای روی پاره‌خطی دارای حرکت هماهنگ ساده است. اگر در یک لحظه نوسانگر در مکان‌های مثبت قرار داشته باشد $(x>0)$ در مدت یک دوره پس از این لحظه شتاب .... بار تغییر جهت می‌دهد و در مدت نصف دوره پس از این لحظه نوسانگر .... بار تغییر جهت می‌دهد.**

۱) ۲، ۱ ۲) ۲، ۲ ۳) ۱، ۲ ۴) ۱، ۱

پاسخ **مکان ابتدایی نوسانگر در لحظهٔ مورد نظر مثبت است. مسیر حرکت در یک دوره را رسم می‌کنیم، نوسانگر دو بار از مبدأ می‌گذرد بنابراین شتاب دو بار تغییر علامت می‌دهد. در مدت نصف دوره $(\frac{T}{2})$ یکبار به نقطهٔ بازگشت می‌رود و برمی‌گردد بنابراین جهت حرکت یکبار عوض می‌شود.**



گزینهٔ ۱

B ۱۱۱۸ ۴

در لحظه‌ای که مکان نوسانگر $x=\pm A$ باشد، نوسانگر تغییر جهت می‌دهد. در معادلهٔ حرکت به جای x، $\pm A$ قرار می‌دهیم و لحظه‌های گذر از این نقاط را بررسی می‌کنیم:

$$x=0/04\cos\frac{\pi}{2}t\xrightarrow{x=\pm A}\pm0/04=0/04\cos\frac{\pi}{2}t$$

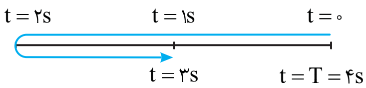
$$\Rightarrow\cos\frac{\pi}{2}t=\pm1\Rightarrow\frac{\pi}{2}t=k\pi\Rightarrow t=2k\begin{cases}\xrightarrow{k=0}t=0\\ \xrightarrow{k=1}t=2s\\ \xrightarrow{k=2}t=4s\end{cases}$$

دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$

بازهٔ بیان شده $(t=\frac{1}{3}s$ تا $t=\frac{15}{4}s)$ بین صفر تا $4s$ است و یک بار تغییر جهت رخ می‌دهد. اما راه‌حل ساده‌تری وجود دارد. دوره را به‌دست می‌آوریم و مسیر را رسم می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

بازهٔ زمانی $t=\frac{1}{3}s$ تا $t=\frac{15}{4}s$ بین صفر و $4s$ است و در $t=2s$ یک بار تغییر جهت رخ می‌دهد.



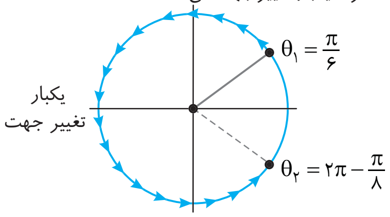
روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز $(\theta=\omega t)$:

در لحظه‌های بیان شده فاز حرکت (ωt) را به دست آورده و روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنید. هر بار که از صفر یا π بگذریم متحرک یک بار تغییر جهت داده و هرگاه از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بگذریم شتاب یک بار تغییر جهت می‌دهد.

۱ بسامد زاویه‌ای $\frac{\pi}{2}rad/s$ است بنابراین:

$$\theta_1=\omega t_1=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6} \quad , \quad \theta_2=\omega t_2=\frac{\pi}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{15\pi}{8}=2\pi-\frac{\pi}{8}$$

۲ اکنون در جهت مثلثاتی از θ_1 تا θ_2 می‌چرخیم. مشاهده می‌شود که یکبار از π می‌گذریم یعنی متحرک یکبار تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۱۱۹ ۳

روش استفاده از معادلهٔ حرکت:

نکته شتاب در دو انتهای مسیر یعنی $x=\pm A$ بیشینه است.

بررسی می‌کنیم در بازهٔ $t=\frac{1}{120}s$ تا $t=\frac{1}{12}s$ چند بار مکان‌ها برابر $\pm A$ می‌شود.

$$x=A\cos40\pi t\Rightarrow\pm A=A\cos40\pi t\Rightarrow\cos40\pi t=\pm1\Rightarrow40\pi t=k\pi$$

$$\Rightarrow t=\frac{k}{40}$$

بنابراین:

$k=0\Rightarrow t=0$, $k=1\Rightarrow t=\frac{1}{40}=\frac{3}{120}s$ بار اول

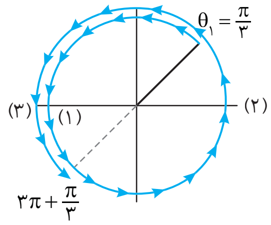
$k=2\Rightarrow t=\frac{2}{40}=\frac{6}{120}s$ بار دوم

$k=3\Rightarrow t=\frac{3}{40}=\frac{9}{120}s$ بار سوم

$k=4\Rightarrow t=\frac{4}{40}=\frac{12}{120}s>\frac{1}{12}s$ قابل قبول نیست

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس $(\theta=\omega t)$ را در لحظه‌های $t=\frac{1}{120}s$ و $t=\frac{1}{12}s$ را به‌دست آورده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهد.



$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=\frac{1}{120}s}\theta_1=40\pi\times\frac{1}{120}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=\frac{1}{12}s}\theta_2=40\pi\times\frac{1}{12}\Rightarrow\theta_2=\frac{10\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=\frac{10\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\Delta\theta=3\pi$$

از $\theta_1=\frac{\pi}{3}$، 3π رادیان روی دایره می‌چرخیم. هر بار که از $(\pm A)$ یعنی کمان صفر و π می‌گذریم، نوسانگر یک بار تغییر جهت می‌دهد و شتاب یک بار بیشینه می‌شود، بنابراین سه بار شتاب بیشینه شده است.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ مکان را در ابتدای بازه به‌دست بیاورید.

$$x=A\cos 40\pi t\Rightarrow x=A\cos 40\pi\times\frac{1}{120}\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=+\frac{A}{2}$$

۲ دوره را به‌دست می‌آوریم:

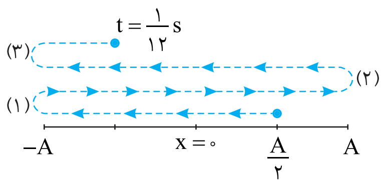
$$\omega=40\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=40\pi\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta t=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{10-1}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{40}s$$

۴ مشخص می‌کنیم که Δt چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{20}}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T$

۵ اکنون روی مسیر حرکت از $+\frac{A}{2}$ به اندازهٔ $\frac{3T}{2}$ حرکت کرده و هر بار گذر از نقطهٔ بازگشت شتاب بیشینه می‌شود.



B ۱۱۲۰ ۲

روش استفاده از معادلهٔ حرکت:

هر بار که ذره از نقطهٔ تعادل (مبدأ) می‌گذرد، نیروی وارد بر نوسانگر تغییر جهت می‌دهد. از این‌رو:

$$x=0\Rightarrow\cos 10\pi t=0\Rightarrow 10\pi t=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{k}{10}+\frac{1}{20}$$

$k=0\Rightarrow t=\frac{1}{20}s<\frac{1}{15}s$ غ ق ق ، $k=1\Rightarrow t=\frac{3}{20}s>\frac{1}{15}s$ قابل قبول

$$k=2\Rightarrow t=\frac{2}{10}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}s$$

در لحظهٔ $t=\frac{1}{4}s$ نوسانگر در مرکز نوسان است و از آن عبور نکرده و نیرو تغییر علامت نمی‌دهد.

نکته در حرکت هماهنگ ساده هر بار که نوسانگر از مبدأ $x=0$ می‌گذرد بردار نیرو و شتاب تغییر علامت می‌دهد.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ مکان ذره را در ابتدای بازه $t_1=\frac{1}{15}s$ حساب می‌کنیم.

$$x=0/02\cos 10\pi t\Rightarrow x=0/02\cos\frac{10\pi}{15}=0/02\cos\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}}$$

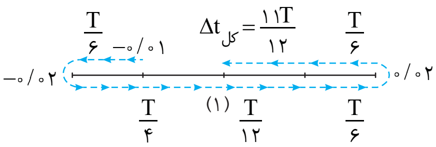
$$x=-0/01m\Rightarrow x=-1cm$$

۲ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 10\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{15-4}{60}}{\frac{1}{5}}=\frac{11}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{11T}{12}$$

۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و از مکان $x=-0/01m$ به اندازهٔ $\frac{11T}{12}$ جلو می‌رویم. یعنی تکه تکه جلو می‌رویم و بازه‌ها را می‌نویسیم تا جمع آن‌ها $\frac{11T}{12}$ شود.



۵ نوسانگر یک بار از مرکز نوسان (حالت تعادل) می‌گذرد و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۱۲۱ ۳

نکته هنگام گذر نوسانگر از مبدأ مکان $(x=0)$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

در معادلهٔ حرکت به جای x، صفر قرار می‌دهیم و تمام پاسخ‌های معادله بین 1s تا 5s جواب مسئله خواهند بود.

$$x=2\cos\frac{\pi}{3}t\xrightarrow{x=0}0=2\cos\frac{\pi}{3}t\Rightarrow\frac{\pi}{3}t=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

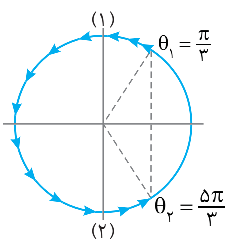
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{3}t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2}s\\ \frac{\pi}{3}t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{9}{2}s\\ \frac{\pi}{3}t=\frac{5\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{15}{2}s\end{cases}$$

بنابراین $t=\frac{3}{2}s$ و $t=\frac{9}{2}s$ در بازهٔ $1s\le t\le 5s$ قرار دارد و در این دو لحظه متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند.

استفاده از روش دایرهٔ مثلثاتی و فاز $(\theta=\omega t)$:

۱ فاز حرکت در $t=1s$ و $t=5s$ را حساب کرده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهد.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=1s}\theta_1=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=5s}\theta_2=\frac{\pi}{3}\times 5=\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$



۲ اکنون از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{3}$ روی دایره می‌چرخیم و هر بار که از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ یعنی $x=0$ می‌گذریم بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

۳ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی بردار مکان دو بار تغییر جهت می‌دهد. البته شما می‌توانید به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.

B ۱۱۲۲ ۲

۱ ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 20\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{10}s$

۲ بازهٔ $t=0$ تا $t=\frac{1}{24}s$ قطعاً از یک دوره $T=\frac{1}{10}s$ کمتر است.

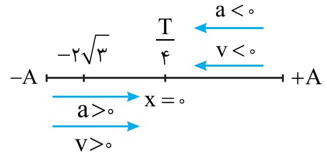
با توجه به مسیر نوسانگر ساده در بازهٔ $+A$ تا صفر و $-A$ تا صفر شتاب و سرعت هم‌جهت است.

اکنون مکان متحرک را در $t=\frac{1}{24}$ حساب می‌کنیم.

$$x=0/04\cos 20\pi t\Rightarrow x=0/04\cos 20\pi\times\frac{1}{24}=0/04\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=0/04\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow x=-2\sqrt{3}cm$$

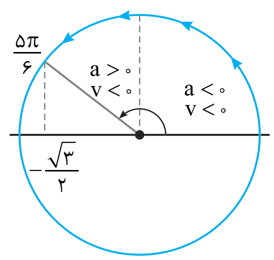
از $t=0$ تا $\frac{1}{24}s$ نوسانگر از $x=0$ به $x=-2\sqrt{3}cm$ می‌رود و در بازهٔ زمانی حرکت از $+A$ تا $x=0$ بردار شتاب و سرعت هم‌جهت‌اند: $\Delta t=\frac{T}{4}=\frac{\frac{1}{10}}{4}=\frac{1}{40}s$



روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

فاز (شناسهٔ تابع کسینوسی) در لحظهٔ $t=\frac{1}{24}s$ را حساب می‌کنیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\theta=20\pi\times\frac{1}{24}=\frac{5\pi}{6}$$



در حرکت از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ یعنی ربع اول سرعت و شتاب هم‌علامت است در واقع به مدت $\frac{T}{4}$ بردار سرعت و شتاب و هم‌جهت هستند. $\Delta t=\frac{T}{4}=\frac{\frac{1}{10}}{4}=\frac{1}{40}s$

C ۱۱۲۳ ۱

یادآوری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم در بردار سرعت $(\vec{P}=m\vec{v})$ بوده و تکانه برداری در جهت سرعت است.

خط فکری هرگاه بردار تکانه مثبت باشد یعنی بردار سرعت مثبت است. در حرکت هماهنگ ساده هرگاه نوسانگر از $-A$ به سوی $+A$ برود سرعت مثبت است یعنی در دایرهٔ مثلثاتی هرگاه فاز در ربع سوم و چهارم باشد سرعت مثبت است. اکنون باید شبیه مسائل قبلی، شما بررسی کنید که در بازهٔ زمانی داده شده نوسانگر از کجا به کجا می‌رود تا بتوانید مدت زمانی که بردار تکانه مثبت است را مشخص کنید.

روش استفاده از بازهٔ زمانی شناخته شده:

۱ مکان نوسانگر را در ابتدای بازه به‌دست می‌آوریم.

$$x=0/02\cos 12\pi t\xrightarrow{t_1=\frac{1}{48}s}x_1=0/02\cos\frac{12\pi}{48}$$

$$\Rightarrow x_1=0/02\cos\frac{\pi}{4}=0/02\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{2}cm$$

۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 12\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{6}s$

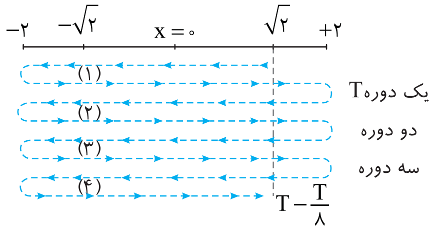
۳ بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{48}}{\frac{1}{6}}=\frac{\frac{32-1}{48}}{\frac{1}{6}}=\frac{31}{8}\Rightarrow\Delta t=4T-\frac{T}{8}$$

۴ دقت کردید، تعداد دوره‌ها را از شکل Δt بیرون کشیدیم اکنون مسیر را رسم کرده و مسئله را حل می‌کنیم.

به شکل مسیر دقت کنید. در هر قسمت $\frac{T}{2}$ جهت سرعت و جهت تکانه مثبت بوده بنابراین به مدت $4\times\frac{T}{2}$ بردار تکانه مثبت است.

$$\Delta t=4\times\frac{\frac{1}{6}}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{3}s$$



شما نیز با روش مثلثاتی مسئله را حل کنید.

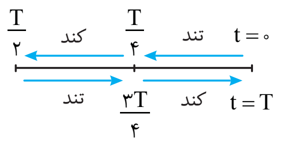
B ۱۱۲۴ ۳

روش بازه‌های زمانی:

با توجه به مسیر حرکت ذره مکان‌هایی با حرکت کندشونده و تندشونده مشخص است.

ابتدا دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 10\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{10}s\Rightarrow\frac{T}{4}=\frac{1}{20}s$$

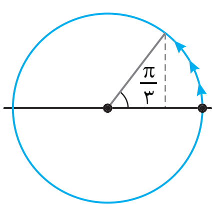


بازهٔ صفر تا $\frac{1}{30}s$ از $\frac{1}{20}s$ یعنی از $\frac{T}{4}$ کمتر است و متحرک از $+A$ در حال حرکت به سوی $x=0$ است و در تمام بازهٔ حرکت تندشونده می‌باشد.

روش دایرهٔ مثلثاتی:

فاز حرکت در ابتدای بازهٔ صفر و در لحظهٔ $t=\frac{1}{30}s$ خواهد شد:

$$\theta=\omega t=10\pi\times\frac{1}{30}=\frac{\pi}{3}$$



یعنی در بازهٔ صفر تا $\frac{1}{30}$ همچنان شناسهٔ تابع کسینوسی (فاز) در ربع اول است و حرکت تندشونده است.

B ۱۱۲۵ | ۱

نکته در بازهٔ زمانی که نوسانگر از دامنه ($+A$ یا $-A$) به سوی مرکز نوسان می‌رود حرکت تندشونده است.

خط فکری شما باید مشخص کنید در بازهٔ زمانی داده شده چه مدت نوسانگر در حال حرکت از $+A$ یا $-A$ به سوی حالت تعادل است.

۱ در $t=۰$ و $t=\frac{۵}{۶}s$ مکان نوسانگر را به‌دست آورده سپس مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

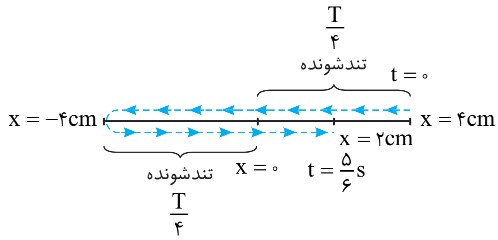
$t=۰\Rightarrow x_۱=۰/۰۴m=۴cm$

$t=\frac{۵}{۶}s\Rightarrow x=۰/۰۴\cos(۲\pi\times\frac{۵}{۶})=۰/۰۴\cos\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x_۲=۰/۰۴\times\frac{۱}{۲}=+۰/۰۲m$

$\Rightarrow x_۲=۲cm$

۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۲\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۱s$

۳ اکنون مسیر را رسم می‌کنیم.



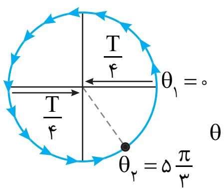
۴ با توجه به شکل در دو بازهٔ $\frac{T}{۴}$ یعنی به مدت $\frac{T}{۲}$ حرکت تندشونده است.

$\Delta t=\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$

بنابراین در مدت $\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$ حرکت تندشونده است. اما پرسشی مطرح است ما از کجا متوجه شدیم که متحرک در $t=\frac{۵}{۶}s$ برای بار دوم به مکان $+۲cm$ می‌رسد. برای پاسخ به این پرسش باید به شناسهٔ تابع کسینوسی (فاز) دقت کنید که با قرار دادن $t=\frac{۵}{۶}s$ مقدار آن $\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ شده است که کمانی در ربع چهارم است. بنابراین مسیر رسم شده کاملاً درست است.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

۱ فاز حرکت در $t=۰$ و $t=\frac{۵}{۶}s$ را مشخص کرده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهیم.



$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۰}\theta_۱=۰\\ \xrightarrow{t=\frac{۵}{۶}}\theta_۲=۲\pi\times\frac{۵}{۶}\Rightarrow\theta_۲=\frac{۵}{۳}\pi\end{cases}$$

۲ از $\theta_۱$ به سوی $\theta_۲$ می‌رویم در مدتی که فاز در ربع اول و ربع سوم است. حرکت تندشونده است.

۳ مدت زمانی که متحرک حرکت تندشونده است خواهد شد:

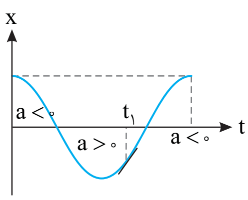
$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}=\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$

A ۱۱۲۶ | ۴

با توجه به نمودار مکان - زمان در لحظهٔ $t_۱$، مکان منفی است.

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است.

در لحظهٔ $t_۱$، شیب خط مماس مثبت بوده بنابراین سرعت و تکانه مثبت است.

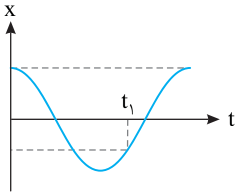


یادآوری هرگاه جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت است.

در لحظهٔ $t_۱$ جهت دهانه رو به بالاست و شتاب و نیرو مثبت است.

بازی با سؤال

نمودار مکان - زمان نوسانگری که روی سطح افقی در امتداد محور xها در حال نوسان است، به صورت مقابل می‌باشد. کدام گزینه جهت شتاب و سرعت نوسانگر در لحظهٔ $t_۱$ را به ترتیب از راست به چپ درست بیان می‌کند؟



۱) $\rightarrow$ ، $\rightarrow$ ۲) $\rightarrow$ ، $\leftarrow$

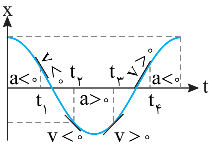
۳) $\nearrow$ ، $\swarrow$ ۴) $\swarrow$ ، $\swarrow$

پاسخ **در حل این نوع مسائل تمام بحث‌های حرکت هماهنگ ساده را فراموش کنید و تنها به حرکت‌شناسی و ویژگی‌های نمودار مکان زمان دقت کنید.**

۱ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان علامت سرعت را نشان می‌دهد.

۲ جهت تقعر نمودار مکان - زمان علامت شتاب را نشان می‌دهد. در لحظهٔ $t_۱$ دهانهٔ نمودار مکان - زمان رو به بالاست و شتاب مثبت و در جهت محور xها است و شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۱$ مثبت است بنابراین سرعت مثبت و در جهت محور xهاست. بنابراین بردار سرعت و شتاب هر دو در جهت مثبت محور xها خواهد بود و گزینهٔ (۱) درست است. گزینهٔ ۱

A ۱۱۲۷ | ۲

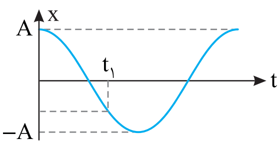


در لحظهٔ $t_۲$ شتاب مثبت و سرعت منفی است.

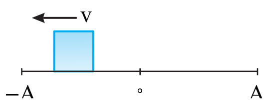
بنابراین حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۲) درست است.

روش دیگر: در لحظهٔ $t_۲$ متحرک به سوی دامنه منفی می‌رود. بنابراین تندی آن در حال کاهش بوده و حرکت کندشونده است. در مکان‌های منفی شتاب نوسانگر مثبت است. بنابراین لحظهٔ $t_۲$ جواب مسئله است.

A ۱۱۲۸ | ۴

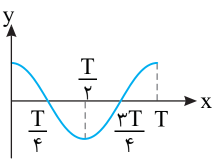


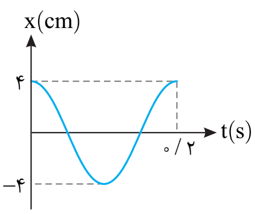
در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر منفی است. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار نیز منفی بوده یعنی سرعت متحرک منفی است، بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ نوسانگر از $x=۰$ به سوی $x=-A$ در حرکت است و گزینهٔ (۴) درست است.



A ۱۱۲۹ | ۲

یادآوری ریاضی در نمودار توابع کسینوسی خواهیم داشت:





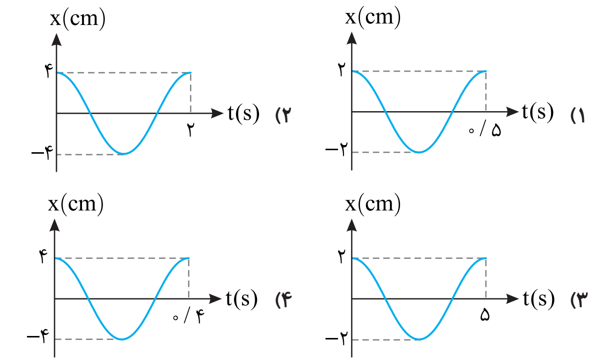
با توجه به نمودار $A=۴cm$ و $T=۰/۲s$ است.

$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{۲\pi}{T}t$

$\Rightarrow x=۰/۰۴\cos\frac{۲\pi}{۰/۲}t$

$\Rightarrow x=۰/۰۴\cos ۱۰\pi t$

بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان نوسانگری در SI به صورت $x=۰/۰۲\cos(\frac{۲\pi}{۵}t)$ می‌باشد. کدام گزینه نمودار مکان - زمان این نوسانگر است؟



پاسخ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۰/۰۲\cos(\frac{۲\pi}{۵}t)\xrightarrow[\omega=\frac{۲\pi}{T}]{\omega=\frac{۲\pi}{۵}rad/s}\frac{۲\pi}{۵}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۵s$$

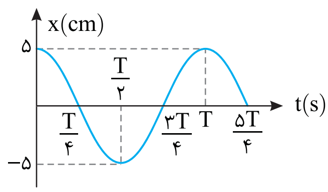
تنها گزینه‌ای که در آن $T=۵s$ است، گزینهٔ (۳) می‌باشد. البته دامنه برابر $A=۰/۰۲m=۲cm$ است. **گزینهٔ ۳**

A ۱۱۳۰ ۳

یادآوری مسافتی که نوسانگر در هر دوره طی می‌کند، چهار برابر دامنه $(۴A)$ است.

۱ ابتدا با توجه به نمودار دوره را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۵T}{۴}=۵\Rightarrow T=۴s$$



۲ در مدت یک دقیقه تعداد دور کاملی که نوسانگر طی می‌کند برابر است با:

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow ۴=\frac{۶۰}{n}\Rightarrow n=۱۵$$

۳ نوسانگر ۱۵ نوسان انجام داده بنابراین مسافتی که طی می‌کند خواهد شد:

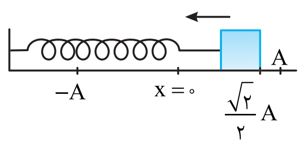
$$\ell=۱۵\times(۴A)=۱۵\times۴\times(۵)\Rightarrow\ell=۳۰۰cm=۳m$$

A ۱۱۳۱ ۳

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t_۱$ متحرک در مکان مثبت و در حال حرکت به سمت $+A$ می‌باشد. پس مسیر حرکت گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۳) می‌باشد. مقدار $t=\frac{۷T}{۸}$ را در معادله قرار می‌دهیم و مکان نوسانگر را به‌دست بیاوریم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{۲\pi}{T}\times\frac{۷T}{۸}\Rightarrow x=A\cos\frac{۱۴\pi}{۸}\Rightarrow x=A\cos\frac{۷\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x=+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$



پس گزینهٔ (۳) درست می‌باشد.

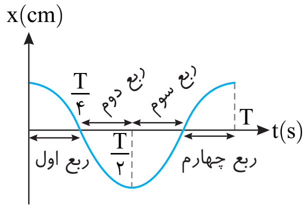
A ۱۱۳۲ ۴

خط فکری مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ صدق کند. بنابراین معادلهٔ حرکت را نوشته به جای زمان $t=۰/۳s$ و به جای مکان $-۲/۵m$ را قرار دهید. البته باید دقت کنید که در این لحظه نوسانگر برای اولین بار از مکان $-۲/۵\,cm$ می‌گذرد.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-۲/۵=۵\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{۱}{۲}$$

البته $\cos\alpha=-\frac{۱}{۲}$ دو جواب دارد، یکی $\frac{۲\pi}{۳}$ و دیگری $\frac{۴\pi}{۳}$ است. اما چگونه تشخیص بدهیم که کدام‌یک را اختیار کنیم؟ برای این منظور به نمودار مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده دقت کنید.

در نمودار مکان - زمان تقسیم‌بندی نمودار با توجه به دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت روبه‌رو است. در شکل مسئله در $۰/۳s$، کمان در ربع دوم قرار دارد. بنابراین $\omega t=\frac{۲\pi}{۳}$ قابل قبول است.



با توجه به نمودار $A=۵cm$ است.

$$\omega t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\times\frac{۳}{۱۰}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow T=\frac{۹}{۱۰}s\Rightarrow x=۰/۰۵\cos\frac{۲۰\pi}{۹}t$$

B ۱۱۳۳ ۳

۱ به کمک $t=۰/۴۵s$ که روی نمودار مشخص است، دوره قابل محاسبه است.

$$t=۰/۴۵=\frac{۳T}{۴}\Rightarrow T=۰/۶s$$

۲ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم $\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۰/۶}\Rightarrow\omega=\frac{۱۰\pi}{۳}rad/s$

۳ دامنهٔ حرکت برابر $A=۶cm$ بوده و معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=۰/۰۶\cos\frac{۱۰\pi}{۳}t$$

۴ مکان در لحظهٔ $t=۱/۱s$ را حساب می‌کنیم:

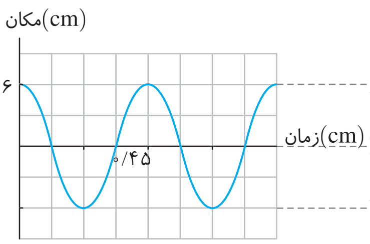
$$x=۰/۰۶\cos\frac{۱۰\pi}{۳}\times۱/۱\Rightarrow x=۰/۰۶\cos\frac{۱۱\pi}{۳}\Rightarrow x=۰/۰۶\cos(۴\pi-\frac{\pi}{۳})$$

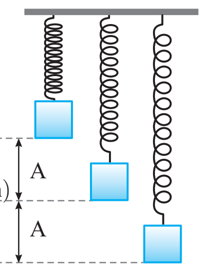
۴π دورهٔ تابع کسینوسی است از این رو:

$$x=۰/۰۶\cos(-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=۰/۰۶\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۰/۰۶\times\frac{۱}{۲}=۰/۰۳m=۳cm$$

بنابراین نوسانگر در این لحظه در مکان $+۳cm$ و در بالای نقطهٔ تعادل قرار دارد.

۵ اما قسمت سخت مسئله در مورد رفتار تندی در این لحظه است. کمان $-\frac{\pi}{۳}$ که در آخر به‌دست آوریم در ربع چهارم قرار دارد و در ربع چهارم، نوسانگر از حالت تعادل به سوی $+A$ در حرکت بوده و تندی آن در حال کاهش است.

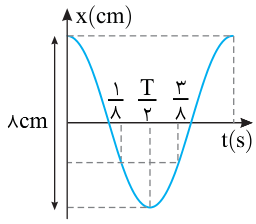




B ۱۱۳۴ ۴

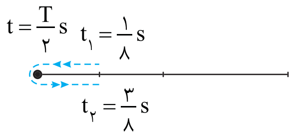
۱ طول مسیر نوسانگر برابر $8cm$ است. از این رو دامنهٔ حرکت خواهد شد.

$$A=\frac{8}{2}=4cm$$



۲ در لحظهٔ $t=\frac{1}{8}s$ و $t=\frac{3}{8}s$ مکان نوسانگر یکسان است. با توجه به نمودار $\frac{T}{2}$ وسط این بازه است. بنابراین:

$$\frac{T}{2}=\frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{4}s\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$



۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\frac{rad}{s}$$

۴ معادلهٔ حرکت خواهد شد:

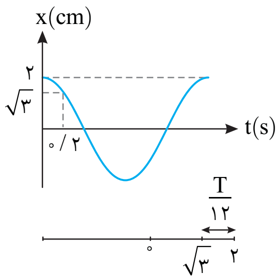
$$x=0/04\cos 4\pi t$$

B ۱۱۳۵ ۳

روش استفاده از بازه‌های زمانی

۱ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده و با توجه به اینکه دامنه $A=2cm$ است و در لحظهٔ $t=0/2s$ مکان نوسانگر $x=\sqrt{3}cm=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌باشد یعنی نوسانگر در مدت $0/2s$ از $+A$ به $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌رود که بازهٔ زمانی این جابجایی برابر $\frac{T}{12}$ است. از این‌رو:

$$\frac{T}{12}=0/2\Rightarrow T=2/4s\xrightarrow{\omega=2\pi/T}\omega=\frac{2\pi}{2/4}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{6}rad/s$$



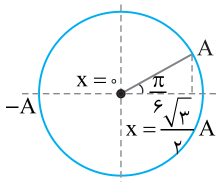
۲ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/02\cos\frac{5\pi}{6}t$$

۳ زمان $t=1s$ را در معادلهٔ حرکت قرار داده و مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/02\cos\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=0/02\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{-\sqrt{3}}{100}m\Rightarrow x=-\sqrt{3}cm$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی



در $t=0/2s$ نوسانگر در ربع اول قرار داشته و مکان آن $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌باشد پس کمان متناظر مکان نوسانگر $\theta=\frac{\pi}{6}$ است. با توجه به نمودار

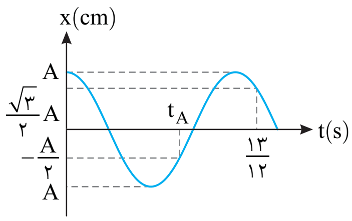
از $\theta_0=0$ تا $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ در مدت $0/2s$ طی می‌شود پس:

$$\theta_1-\theta_0=\omega t_1-\omega t_0=\omega(\Delta t)=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega\times\frac{2}{10}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{6}$$

ادامهٔ حل شبیه قسمت اول است.

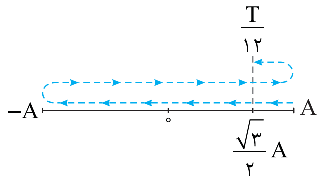
A ۱۱۳۶ ۲

مسیر حرکت را از $t=0$ تا $t=\frac{13}{12}s$ رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی را روی آن نوشته با هم جمع می‌کنیم.



نوسانگر در یک دورهٔ کامل T و از A تا $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ نیز $\frac{T}{12}$ در راه بوده و جمعاً Δt خواهد شد:

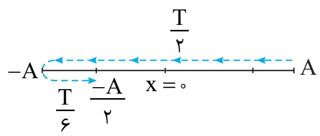
$$\Delta t=T+\frac{T}{12}\Rightarrow\frac{13}{12}=\frac{13T}{12}\Rightarrow T=1s$$



اما مسیر از $x=0$ تا $x=-\frac{A}{2}$ را رسم کرده t_A را به‌دست می‌آوریم.

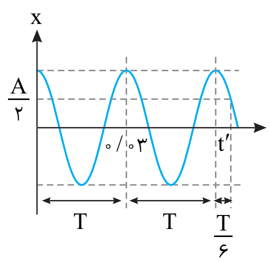
از A تا $-A$ زمان $\frac{T}{2}$ و از $-A$ تا $-\frac{A}{2}$ مدت زمان طی مسیر $\frac{T}{6}$ است. بنابراین t_A خواهد شد:

$$t_A=\frac{T}{2}+\frac{T}{6}=\frac{2T}{3}\Rightarrow t_A=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}s$$



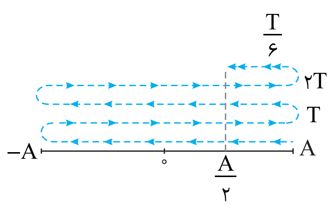
B ۱۱۳۷ ۳

به نمودار دقت کنید. دورهٔ حرکت $T=0/03s$ است. مسیر حرکت را در بازهٔ $t=0$ تا t' رسم می‌کنیم. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله به راحتی حل می‌شود.



$$t'=2T+\frac{T}{6}\Rightarrow t'=2\times0/03+\frac{0/03}{6}\Rightarrow t'=0/06+\frac{0/01}{2}$$

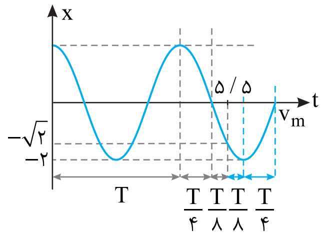
$$\Rightarrow t'=0/065s=6/5\times10^{-2}s$$



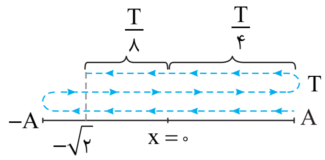
B ۱۱۳۸ ۴

راه‌حل اول: حل به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسیر حرکت را مطابق نمودار رسم کرده و بازه‌های زمانی را روی آن می‌نویسیم.

$$T+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=۵/۵\Rightarrow \frac{۸+۲+۱}{۸}T=۵/۵\Rightarrow T=۴s$$

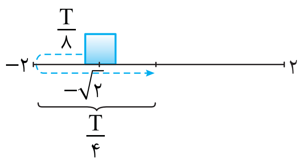


مسیر حرکت را مطابق نمودار رسم کرده و بازه‌های زمانی را روی آن می‌نویسیم.



تندی نوسانگر وقتی بیشینه می‌شود که نوسانگر از مرکز نوسان بگذرد. بنابراین مسیر نوسانگر در بازهٔ t_1 تا گذر از حالت تعادل مطابق شکل روبه‌روست.

$$\frac{T}{۸}+\frac{T}{۴}=\frac{۳T}{۸}=\frac{۳}{۸}\times ۴=۱/۵s$$



راه‌حل دوم: حل به کمک معادلهٔ مکان - زمان: با توجه به نمودار در $t=۵/۵s$ نوسانگر برای سومین بار از $x=-\sqrt{۲}cm$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow -\sqrt{۲}=۲\cos\omega t\Rightarrow \cos\omega t=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

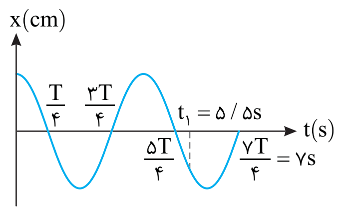
$$\Rightarrow \omega t=(۲k-۱)\pi\pm\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \omega t=\frac{۳\pi}{۴}\text{ یا }\frac{۵\pi}{۴}\text{ یا }\frac{۱۱\pi}{۴}$$

با توجه به توضیح بالا $\omega t_1=\frac{۱۱\pi}{۴}$ می‌باشد:

$$\omega\times ۵/۵=\frac{۱۱\pi}{۴}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow T=۴s$$

مطابق نمودار در لحظهٔ $\frac{۷T}{۴}=۷s$ تندی بیشینه است. از این‌رو از ۵/۵s تا ۷s طول می‌کشد تا تندی بیشینه شود. یعنی:

$$\Delta t=۷-۵/۵=۱/۵s$$

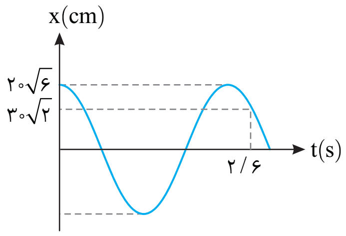


B ۱۱۳۹ ۱

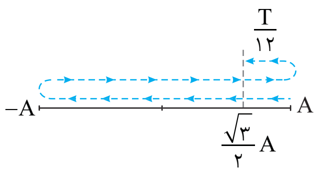
خط فکری هرگاه دامنه داده شده و مکان در یک لحظه عجیب غریب باشد، شما نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب کنید. سپس به سراغ محاسبهٔ دوره بروید.

۱ نسبت $\frac{x}{A}$ را در لحظهٔ $t=۲/۶s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{A}=\frac{۳۰\sqrt{۲}}{۲۰\sqrt{۶}}\Rightarrow\frac{x}{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$$



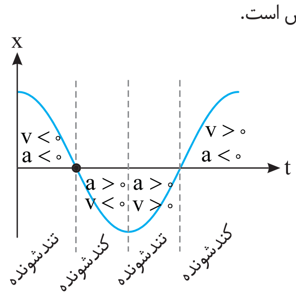
۲ مسیر حرکت را رسم کرده بازه‌های زمانی شناخته شده را روی آن می‌نویسیم.



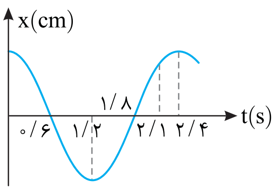
نوسانگر یک نوسان کامل انجام داده (T) سپس به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ رفته که زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$، $\frac{T}{۱۲}$ طول می‌کشد. بنابراین

$$T+\frac{T}{۱۲}=۲/۶\Rightarrow\frac{۱۳T}{۱۲}=۲/۶\Rightarrow T=۲/۴s$$

یادآوری هنگام نزدیک شدن نوسانگر به حالت تعادل حرکت تندشونده و اندازهٔ شتاب در حال کاهش است و هنگام دورشدن نوسانگر از حالت تعادل حرکت کندشونده و شتاب در حال افزایش است.



دوره ۲/۴s به‌دست آمده است و نمودار مطابق شکل زیر است.



۱ از لحظهٔ ۰ تا ۰/۶s و از لحظهٔ ۱/۲s تا ۱/۸s که نوسانگر به حالت تعادل نزدیک می‌شود یعنی جمعاً ۱/۲s حرکت تندشونده و گزارهٔ (الف) درست است.

۲ در بازهٔ ۰ تا ۰/۶s و در بازهٔ ۱/۸s تا ۲/۱s شتاب منفی است که جمعاً $۰/۶+۰/۳=۰/۹s$ خواهد بود و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ در بازهٔ ۰ تا ۱/۲s سرعت منفی است و گزارهٔ (پ) درست است.

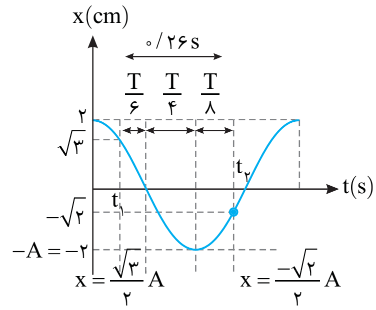
۴ در بازهٔ ۰/۶s تا ۱/۲s $(۱/۲-۰/۶=۰/۶s)$ و در بازهٔ ۱/۸s تا ۲/۱s که نوسانگر به سوی دامنه در حرکت است، اندازهٔ شتاب در حال افزایش است که جمعاً $۰/۶+۰/۳=۰/۹s$ می‌شود و گزارهٔ (ت) درست است.

B ۱۱۴۰ ۲

دقت کنید با توجه به اینکه دامنه $A=۲cm$ است، مکان‌های $+\sqrt{۳}cm$ و $-\sqrt{۲}cm$ به ترتیب برابر $x=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ خواهد بود، بنابراین بازهٔ زمانی $۰/۲۶s$ برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۴T+۶T+۳T}{۲۴}\Rightarrow ۰/۲۶=\frac{۱۳T}{۲۴}\Rightarrow T=۰/۴۸s$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{۰/۴۸}=\omega=\frac{۲۵}{۶}\pi\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{۲۵\pi}{۶}t$$



حل به کمک دایره مثلثاتی و فاز حرکت:

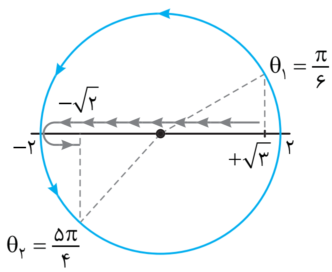
با رسم یک دایرهٔ مثلثاتی، کمان معادل مکان‌های $+\sqrt{۳}cm$ و $-\sqrt{۲}cm$ را روی دایره مشخص می‌کنیم. سپس به کمک آن مسأله را حل می‌کنیم.

$$\omega t_۲-\omega t_۱=\theta_۲-\theta_۱\Rightarrow \omega(\Delta t)=\frac{۵\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow \omega(\frac{۲۶}{۱۰۰})=\frac{۱۵\pi-۲\pi}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{۲۵\pi}{۶}rad/s$$

معادلهٔ حرکت خواهد شد:

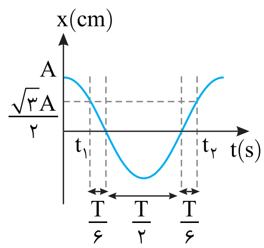
$$x=۰/۰۲\cos\frac{۲۵\pi}{۶}t$$



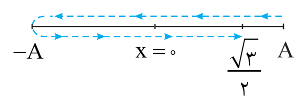
B ۱۱۴۱ ۱

کافی است روی نمودار بازه‌های زمانی شناخته شده از $t_۱$ تا $t_۲$ را مشخص کرده با هم جمع کنیم.

از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ تا $x=۰$، $\frac{T}{۶}$ و از $x=۰$ تا $x=-A$، $\frac{T}{۴}$ و از $x=-A$ تا $x=۰$، $\frac{T}{۴}$ و از $x=۰$ تا $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$، $\frac{T}{۶}$ طول می‌کشد. بنابراین:

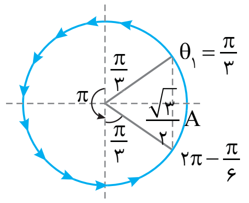


$$t_۲-t_۱=\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۵T}{۶}$$



روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:

در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ مکان نوسانگر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ بوده اما $t_۱$ در ربع اول و $t_۲$ در ربع چهارم مثلثاتی است. فاز را در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ روی دایره مشخص می‌کنیم. $\theta_۱=\frac{\pi}{۶}$ و $\theta_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۶}$ است. در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، تغییر فاز را روی دایره به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{۳}+\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}$$

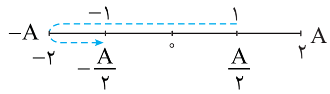
یک تناسب ساده و حل مسئله:

$$\begin{array}{c|c} ۲\pi & T \\ \frac{۵\pi}{۳} & \Delta t \end{array}\Rightarrow \Delta t=\frac{۵\pi}{۳}\times\frac{T}{۲\pi}\Rightarrow \Delta t=\frac{۵T}{۶}$$

B ۱۱۴۲ ۳

نکته هرگاه در یک بازهٔ زمانی مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود، آن بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{۲}$ است.

مسیر حرکت از $t_۱$ تا $t_۲$ را رسم کنید. کاملاً مشخص است که مکان و سرعت نوسانگر در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ قرینه شده است و این یعنی $t_۲-t_۱=\frac{T}{۲}$ بنابراین $۲/۴=\frac{T}{۲}\Rightarrow T=۴/۸s$

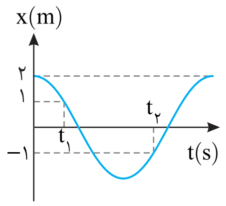


بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{۴/۸}\Rightarrow \omega=\frac{۵\pi}{۱۲}rad/s$$

معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=۲\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t$$



اکنون مشخص می‌کنیم در چه لحظه‌ای نوسانگر برای چهارمین بار از مکان $+\sqrt{۲}cm$ می‌گذرد.

$$+\sqrt{۲}=۲\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t\Rightarrow \cos\frac{۵\pi}{۱۲}t=+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۱۲}t=(۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴})$$

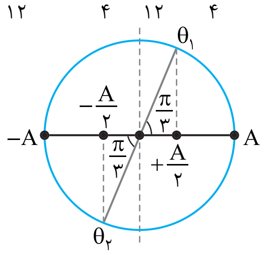
بار اول: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=\frac{\pi}{۴}$ ، بار دوم: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=۲\pi-\frac{\pi}{۴}$ ، بار سوم: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=۲\pi+\frac{\pi}{۴}$

و بار چهارم: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=۴\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۱۲}t=\frac{۱۵\pi}{۴}\Rightarrow t=۹s$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: کمان متناظر با مکان در $t_۱$ و $t_۲$ برابر است با:

$$۱=۲\cos\theta_۱\xrightarrow{\text{در ربع اول}}\theta_۱=\frac{\pi}{۳}$$

$$-۱=۲\cos\theta_۲\xrightarrow{\text{در ربع سوم}}\theta_۲=\pi+\frac{\pi}{۳}$$



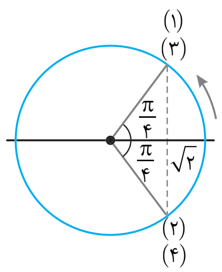
با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\theta_۲-\theta_۱=\omega t_۲-\omega t_۱\Rightarrow\omega(t_۲-t_۱)=\pi\ ,\ \omega(۲/۴)=\pi\Rightarrow\omega=\frac{۵\pi}{۱۲}rad/s$$

حال زمانی که نوسانگر برای چهارمین بار از $\sqrt{۲}cm$ می‌گذرد را به‌دست می‌آوریم، نوسانگر در نوسان اولش دو بار از $+\sqrt{۲}$ می‌گذرد و چهارمین بار در نوسان دوم رخ می‌دهد یعنی:

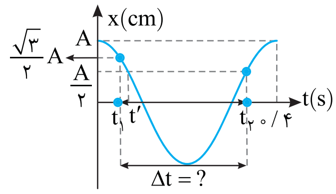
$$\omega t'=۲\pi+(۲\pi-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\frac{۵\pi}{۱۲}\times t'=\frac{۱۵\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow t'=۹s$$

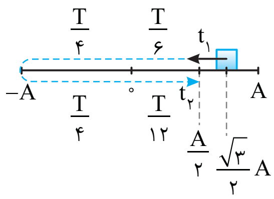


B ۱۱۴۳ ۴

هنگام حرکت نوسانگر از مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ مطابق نمودار برای اولین بار متحرک در لحظهٔ t' از $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد اما در مسـأله بیان شده بیشینه زمان در مدت یک دوره، بنابراین بار دومی که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد مورد نظر است.



با توجه به بازه‌های زمانی روی شکل می‌توان نوشت:

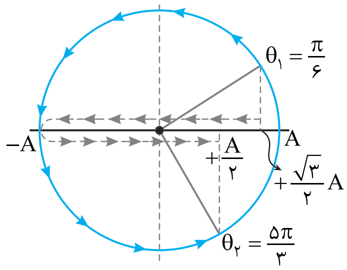


$$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}$$
$$\Rightarrow \Delta t=\frac{2T+3T+3T+T}{12}$$
$$\Rightarrow \Delta t=\frac{3T}{4}\xrightarrow{T=0/4s}$$
$$\Delta t=0/3s$$

استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

کمان معادل مکان‌های $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ و $+\frac{A}{2}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\theta_2-\theta_1\Rightarrow\frac{2\pi}{T}(t_2-t_1)=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{2\pi}{0/4}\Delta t=\frac{9\pi}{6}$$
$$\Rightarrow 5\pi\Delta t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\Delta t=0/3s$$



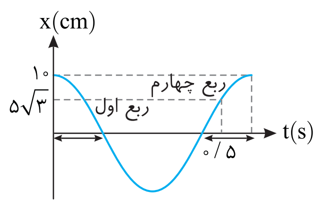
البته با یک تناسب ساده هم می‌توانستیم دوره را حساب کنیم.

2π	$T=0/4s$
$\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$	Δt

$\Rightarrow\Delta t=0/3s$

B ۱۱۴۴ ۱

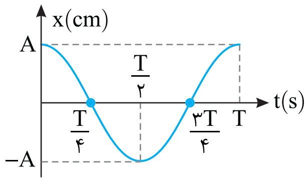
راه‌حل اول: با توجه به شـکل در $t=0/5s$ نوسانگر برای دومین بار از مکان $+5\sqrt{3}$ عبور کرده است و ωt در ربع چهارم مثلثاتی است.



$$x=A\cos\omega t\Rightarrow 5\sqrt{3}=10\cos\omega t$$
$$\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\omega t=2\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega t=\frac{11\pi}{6}$$
$$\omega\times 0/5=\frac{11\pi}{6}\Rightarrow\omega=\frac{11\pi}{3}\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}=\frac{11\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$

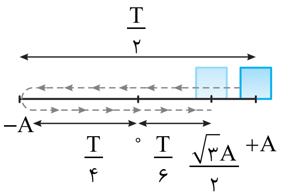
به A و $-A$ نقطهٔ بازگشـت گویند، پس با توجه به نمودار روبه‌رو در مدت $\frac{T}{2}$ پس از $t=0$ برای اولین بار به نقطهٔ بازگشت می‌رسیم:

$$\frac{T}{2}=\frac{6}{22}s=\frac{3}{11}s$$



راه‌حل دوم: (راه‌حل مورد علاقهٔ ما) با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده نیز می‌توانیم مسیر حرکت را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی تست را حل کنیم:

$$\Delta t_{کل}=\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{11T}{12}=0/5\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$



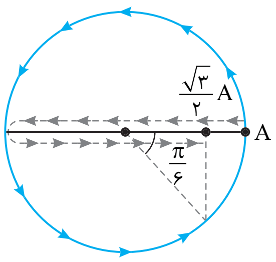
متحرک پس از $\frac{T}{2}$ به نقطهٔ بازگشت خود می‌رسد:

$$\frac{T}{2}=\frac{\frac{6}{11}}{2}=\frac{3}{11}s$$

راه‌حل سوم:

نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{x}{A}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$



حال با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، فاز حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\theta\Rightarrow\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

بنابراین از $t_1=0$ تا $t_2=0/5s$ کمان دایره مثلثاتی از $\theta_1=0$ به $\theta_2=\frac{11\pi}{6}$ رسـیده است:

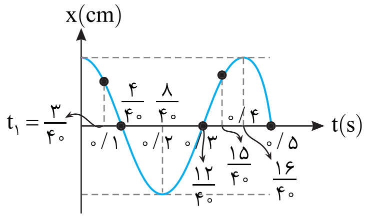
$$\theta_2-\theta_1=\omega(t_2-t_1)=\frac{11\pi}{6}\xrightarrow{t_2-t_1=0/5}$$
$$\omega=\frac{11\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{11\pi}{3}}\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$

ادامه حل شبیه روش‌های قبلی است.

B ۱۱۴۵ ۲

۱ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم: $\frac{۵T}{۴}=۰/۵\Rightarrow T=۰/۴s$

۲ اکنون اعداد داده شده را روی نمودار نمایش می‌دهیم.



نکته هرگاه نمودار مکان – زمان حرکت هماهنگ ساده محور زمان را قطع کند $(x=۰)$ تندی بیشینه است.

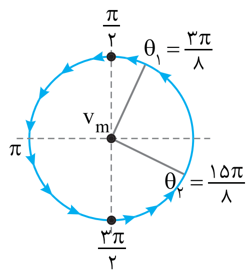
۳ در بازهٔ $t_۱=\frac{۳}{۴۰}s$ تا $t_۲=\frac{۱۵}{۴۰}s$، نمودار دو بار در لحظهٔ $۰/۱s$ و $۰/۳s$ محور زمان را قطع کرده بنابراین دو بار تندی بیشینه می‌شود.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$

۱ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم. $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۴}\Rightarrow\omega=۵\pi\,rad/s$

۲ فاز در لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ را به‌دست آورده روی دایره نمایش می‌دهیم.

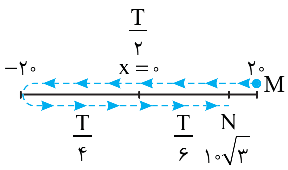
$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\theta_۱=۵\pi\times\frac{۳}{۴۰}=\frac{۳\pi}{۸}rad\\ \theta_۲=۵\pi\times\frac{۱۵}{۴۰}=\frac{۱۵\pi}{۸}rad\end{cases}$$



۳ از $\theta_۱$ در جهت مثلثاتی به سوی $\theta_۲$ می‌رویم. هرگاه از $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ بگذریم تندی بیشینه است. بنابراین دو بار تندی بیشینه می‌شود.

B ۱۱۴۶ ۱

۱ مسیر حرکت را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده، مدت زمان حرکت از M تا N را به‌دست می‌آوریم. $\Delta t=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۶}=\frac{۱۱T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱۱\times۱۲}{۱۲}=۱۱\,s$



۲ مسافت طی شده را از روی مسیر حرکت حساب می‌کنیم:

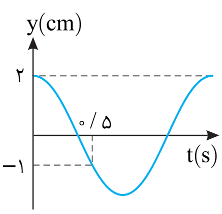
$\ell=۲۰+۲۰+۲۰+۱۰\sqrt{۳}=۶۰+۱۰\sqrt{۳}\Rightarrow\ell=۶۰+۱۰\times۱/۷=۷۷cm$

۳ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۷۷}{۱۱}=۷\,cm/s$

B ۱۱۴۷ ۱

۱ از روی نمودار دامنهٔ حرکت ۲cm است.

۲ با توجه به نمودار در $t=۰/۵s$ برای اولین بار متحرک به مکان $-۱\,cm$ می‌رسد؛ در معادلهٔ حرکت زمان $۰/۵s$ و مکان $x=-۱m$ قرار می‌دهیم و بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.



$x=A\cos\omega t\Rightarrow-۱=۲\cos\omega(\frac{۱}{۲})\Rightarrow\cos\frac{\omega}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\omega}{۲}=\frac{۲\pi}{۳}$

$\Rightarrow\omega=\frac{۴\pi}{۳}rad/s$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=۰/۰۲\cos\frac{۴\pi}{۳}t$

۴ مکان را در لحظهٔ $t=۱/۲۵s$ به‌دست می‌آوریم.

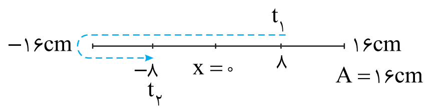
$x_۲=A\cos\omega t\Rightarrow x_۲=۲\cos(\frac{۴\pi}{۳}\times۱/۲۵)\Rightarrow x_۲=۲\cos\frac{۵\pi}{۳}=۱\,cm$

۵ اکنون می‌توان سرعت متوسط را حساب کرد.

$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱-(-۱)}{۱/۲۵-۰/۵}=\frac{۲}{\frac{۷۵}{۱۰۰}}=\frac{۲}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۸}{۳}cm/s$

B ۱۱۴۸ ۳

مسیر حرکت را از روی نمودار رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار دامنه $A=۱۶cm$ است.



مسئلهٔ ساده‌ای است. جابه‌جایی در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ برابر $d=-۱۶cm$ و مسافت طی شده برابر است با: $\ell=۸+۱۶+۸=۳۲cm$

نسبت تندی متوسط به سرعت متوسط خواهد شد:

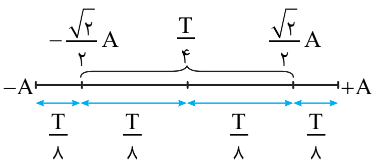
$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\ ,\ v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\ell}{d}=\frac{۳۲}{-۱۶}=-۲$

C ۱۱۴۹ ۳

خط فکری سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین هنگامی بیشینه است که جابه‌جایی در آن بازه بیشینه باشد. جابه‌جایی بیشینه در یک بازهٔ معین در دو طرف نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد زیرا در نقطهٔ تعادل سرعت بیشینه است.

بنابراین شما باید با تقسیم بازهٔ زمانی به دو قسمت و یافتن مکان نوسانگر بیشینه جابه‌جایی آن را حساب کرده و سرعت متوسط بیشینه را به‌دست آورید.

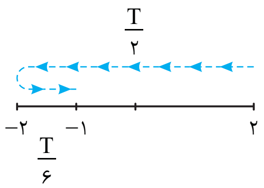
۱ بازه $\frac{T}{۴}$ را به دو بازهٔ یکسان $\frac{T}{۸}$ در دو طرف نقطهٔ تعادل تقسیم می‌کنیم. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مکان در این بازه به صورت زیر است.



۲ در بازهٔ $\frac{T}{۴}$ بیشترین اندازه جابه‌جایی برابر است با:

$|\Delta x|=|-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A|=\sqrt{۲}A\Rightarrow|\Delta x|=۲\sqrt{۲}cm$

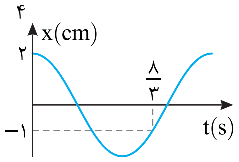
۳ نوسانگر در مدت $\frac{۸}{۳}s$ از مکان $x=-۱=-\frac{A}{۲}$ به مکان $A=۲cm$ می‌رود. بازه‌های زمانی را روی مسیر نوشته، به کمک آن‌ها دوره را به‌دست می‌آوریم.



$\Delta t=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow\frac{۲T}{۳}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow T=۴s$

۴ اندازه سرعت متوسط خواهد شد:

$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{T}{۴}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{۴}{۴}}=۲\sqrt{۲}cm/s\Rightarrow|v_{av}|=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱۰۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۵۰}m/s$



A ۱۱۵۰ ۳

دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست می‌آید که در آن m جرم وزنهٔ متصل به فنر و k ثابت فنر است. در این صورت دوره با جذر ثابت فنر نسبت وارون دارد و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۱۵۱ ۴

دوره حرکت هماهنگ سادهٔ جرم - فنر از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به‌دست می‌آید و بسامد برابر با وارون دوره است، بنابراین:

$$f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

A ۱۱۵۲ ۱

به کمک رابطهٔ دوره سامانه جرم - فنر، ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{1}{16}=\frac{0.5}{k}\Rightarrow k=8N/m$$

A ۱۱۵۳ ۱

روش اول: دورهٔ نوسان سامانه جرم - فنر برابر است با:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{0.4}{360}}\Rightarrow T=2\pi\times\frac{1}{30}\xrightarrow{\pi=3}T=0.2s$$

جسم در هر $0.2s$ یک نوسان انجام می‌دهد و تعداد نوسان‌ها در $1s$ خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\xrightarrow[T=0.2]{t=1s}0.2=\frac{1}{N}\Rightarrow N=5$$

روش دوم: تعداد نوسان‌ها در مدت ۱ ثانیه، همان بسامد نوسان است، پس

$$T=\frac{1}{f}\Rightarrow f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.2}=5Hz\Rightarrow N=5$$

بازی با سؤال **جسمی به جرم $400g$ به فنری با ثابت $90N/m$ متصل است و روی سطح افقی نوسان می‌کند. این جسم در مدت ۴ دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهد؟ $(\pi\approx3)$**

۱) ۶۰　۲) ۶۰۰　۳) ۳۰　۴) ۳۰۰

پاسخ **با توجه به رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ دوره را به‌دست می‌آوریم:**

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.4}{90}}=2\pi\times\frac{0.2}{3}=0.4s$$

حال با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ تعداد نوسان کامل در مدت ۴ دقیقه را حساب می‌کنیم.

$$0.4=\frac{4\times60}{N}\Rightarrow N=600$$

گزینهٔ ۲

A ۱۱۵۴ ۱

نکته دوره نوسان دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{m/k}$ به‌دست می‌آید و در تمام حالت‌ها T تنها به جرم و ثابت فنر بستگی دارد. یعنی دورهٔ نوسان دستگاه جرم فنر در تمام امتدادها، افقی، قائم و سطح شیبدار ودر تمام فواصل از سطح زمین و در تمام سیارات مقدار ثابتی است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۱) پاسخ درست است.

A ۱۱۵۵ ۴

خط فکری در اغلب مسائلی که نسبت خواسته شده است، روابط مورد نیاز را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم و نسبت‌های داده شده در مسئله را در آن قرار می‌دهیم تا نسبت مورد نظر به‌دست آید. در این جا نیز رابطهٔ دوره برای A و B نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم.

دورهٔ حرکت دستگاه جرم - فنر برابر با $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است.

$$\begin{cases}T_A=2\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}}\\ T_B=2\pi\sqrt{\frac{m_B}{k}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$$

$$\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}\frac{f_B}{f_A}=\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}\xrightarrow{f_B=2f_A}\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}=2\Rightarrow m_A=4m_B$$

A ۱۱۵۶ ۳

نکته هرگاه وزنه را از حالت تعادل کشیده و رها کنیم مقدار کشیدگی برابر دامنهٔ حرکت است.

نکته دورهٔ حرکت هماهنگ ساده $T=2\pi\sqrt{m/k}$ از ویژگی‌های طبیعی نوسانگر است و به دامنه بستگی ندارد. البته به شرط آنکه کشیدگی فنر به حدی نباشد که فنر خاصیت کشسانی خود را از دست بدهد.

در این مسئله جرم و فنرها مشابه بوده بنابراین دوره‌ها یکسان $(T_A=T_B)$ است و مدت زمانی که نوسانگر از دامنه به حالت تعادل می‌رسد برابر $\frac{T}{4}$ است از این‌رو زمان برگشت برای هر دو وزنه یکسان است. $(t_A=t_B=\frac{T}{4})$

A ۱۱۵۷ ۲

دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر $(T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ تنها به جرم وزنه و ثابت فنر بستگی دارد که هیچ‌کدام تغییر نکرده است. بنابراین دوره همچنان $4s$ است.

A ۱۱۵۸ ۴

۱ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{60}{30}\Rightarrow T=2s$$

نکته دوره نوسان دستگاه جرم - فنر به دامنه بستگی ندارد.

۲ رابطهٔ دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم کرده و دوره را در حالت دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow\frac{T'}{2}=\sqrt{\frac{4m}{m}}\Rightarrow T'=4s$$

تعداد نوسانات در مدت ۳ دقیقه برابر است با:

$$N'=\frac{t'}{T'}\Rightarrow N'=\frac{3\times60}{4}\Rightarrow N'=45$$ نوسان

B ۱۱۵۹ ۳

۱ جرم متصل به فنر $2kg$ افزایش یافته:

$$m_2=m_1+2$$

۲ دوره ۵۰٪ زیاد شده:

$$T_2=T_1+\frac{50}{100}T_1$$

۳ رابطه دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و جرم اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_1+\frac{50}{100}T_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_1+2}}$$

$$\Rightarrow\frac{T_1}{1.5T_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_1+2}}\Rightarrow\frac{4}{9}=\frac{m_1}{m_1+2}\Rightarrow 9m_1=4m_1+8$$

$$\Rightarrow 5m_1=8\Rightarrow m_1=1.6kg$$

B ۱۱۶۰ ۴

خط فکری ابتدا بسامد را بر حسب m و k بنویسید. سپس در دو حالت رابطهٔ بسامد را نوشته بر هم تقسیم کنید و یک رابطه بین بسامد دو حالت به‌دست بیاورید. یادتان باشد که جرم کاهش یافته و بسامد افزایش می‌یابد یعنی $f_۲-f_۱=۲/۵Hz$ است حل مسئله را حل کنید.

۱ بسامد خواهد شد:

$$f=\frac{۱}{T}\xrightarrow{T=۲\pi\sqrt{m/k}}f=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{m/k}}\Rightarrow f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲ نسبت بسامدها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m_۲}}}{\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m_۱}}}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\sqrt{\frac{۴۰۰}{۱۰۰}}\Rightarrow f_۲=۲f_۱$$

۳ اکنون دو معادله و دو مجهول در اختیار دارید و می‌توانید $f_۱$ را به‌دست بیاورید.

$$\begin{cases}f_۲-f_۱=۲/۵\\ f_۲=۲f_۱\end{cases}\Rightarrow ۲f_۱-f_۱=۲/۵\Rightarrow f_۱=۲/۵\,Hz$$

۴ ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

$$f_۱=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m_۱}}\Rightarrow ۲/۵=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{۰/۴}}\Rightarrow ۶/۲۵=\frac{۱}{۴\pi^۲}\frac{k}{۰/۴}$$

$$\Rightarrow k=۶/۲۵\times۴\times۱۰\times۰/۴\Rightarrow k=۱۰۰\,N/m=۱\,N/cm$$

A ۱۱۶۱ ۲

خط فکری دورهٔ نوسـان دستگاه جرم - فنر برابر $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است. فنر در هر دو حالت یکسان بوده و $k_۱=k_۲$ است.

۱ با توجه به دوره در دو حالت مختلف نسبت جرم را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{۲\pi\sqrt{\frac{m_۲}{k}}}{۲\pi\sqrt{\frac{m_۱}{k}}}\Rightarrow\frac{۰/۰۹\pi}{۰/۱\pi}=\sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}}$$

۲ جرم ثانویه ۱۹۰ گرم کمتر از جرم اولیه است.

$$\frac{۹}{۱۰}=\sqrt{\frac{m_۱-۱۹۰}{m_۱}}\Rightarrow\frac{۸۱}{۱۰۰}=\frac{m_۱-۱۹۰}{m_۱}\Rightarrow ۸۱m_۱=۱۰۰m_۱-۱۹\times۱۰^۳$$

$$\Rightarrow ۱۹m_۱=۱۹\times۱۰^۳\Rightarrow m_۱=۱۰^۳g=۱kg$$

۳ حال با توجه به دورهٔ اولیه، k را به‌دست می‌آوریم:

$$T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{m_۱}{k}}\Rightarrow ۰/۱\pi=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{k}}\Rightarrow\frac{۱}{۲۰}=\sqrt{\frac{۱}{k}}\Rightarrow k=۴۰۰\,N/m$$

نکته برای تبدیل یکای ثابت فنر داریم:

$$\frac{N}{m}\underset{۱۰۰\times}{\overset{\div۱۰۰}{\rightleftarrows}}\frac{N}{cm}$$

بنابراین ثابت فنر برابر $۴۰۰N/m=۴N/cm$ است.

B ۱۱۶۲ ۲

۱ در انتهای مسیر یعنی وقتی که وزنه در دامنهٔ حرکتش است، $\frac{۳}{۴}$ جرم آن را جدا کرده‌ایم، بنابراین بیشینه کشیدگی فنر تغییر نمی‌کند و دامنه همان مقدار اولیه خواهد بود $A_۲/A_۱=۱$.

۲ بسامد با دوره نسبت وارون دارد از این‌رو: $f=\frac{۱}{T}\xrightarrow{T=۲\pi\sqrt{m/k}}f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

۳ نسبت $f_۲/f_۱$ خواهد شد:

$$\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m_۲}}}{\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m_۱}}}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}}\xrightarrow{m_۲=m_۱-\frac{۳}{۴}m_۱=\frac{۱}{۴}m_۱}\frac{f_۲}{f_۱}=\sqrt{\frac{m_۱}{\frac{m_۱}{۴}}}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=۲$$

A ۱۱۶۳ ۱

نکته بسـامد زاویـه‌ای دسـتگاه جـرم - فنر از رابطهٔ $\omega=\sqrt{k/m}$ به‌دسـت می‌آید که در آن m جرم وزنه و k ثابت فنر است.

بـا توجه بـه معادلهٔ حرکت $x=۰/۰۲\cos ۵۰\pi t$، بسـامد زاویـه‌ای این نوسـانگر برابر $\omega=۵۰\pi rad/s$ است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=۵۰۰N/m}۵۰\pi=\sqrt{\frac{۵۰۰}{m}}\Rightarrow ۲۵۰۰\pi^۲=\frac{۵۰۰}{m}$$

$$\Rightarrow m=\frac{۱}{۵\pi^۲}\xrightarrow{\pi^۲=۱۰}m=\frac{۱}{۵۰}=۰/۰۲kg=۲۰g$$

B ۱۱۶۴ ۳

با توجه به فرض مسئله تغییر شناسه تابع کسینوس (تغییر فاز) نوسانگر (ωt) برابر π است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}t_۱\text{ در}\rightarrow\omega t_۱\\ t_۲\text{ در}\rightarrow\omega t_۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow\omega t_۲-\omega t_۱=\omega\Delta t=\pi\Rightarrow\omega\times۰/۰۸=\pi\Rightarrow\omega=\frac{۲۵}{۲}\pi\,rad/s$$

با داشتن بسامد زاویه‌ای، ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

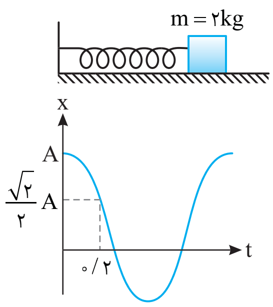
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{۲۵}{۲}\pi=\sqrt{\frac{k}{۰/۸}}\Rightarrow\frac{۶۲۵}{۴}\pi^۲=\frac{k}{۰/۸}\Rightarrow k=۱۲۵۰\,N/m$$

B ۱۱۶۵ ۲

راه حل اول: با توجه به معادلهٔ مکان - زمان داریم:

$$A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\omega t=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\times۰/۲=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow T=۱/۶s$$

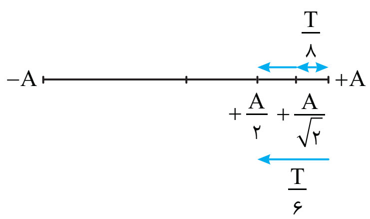


حال با توجه به رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ داریم:

$$۱/۶=۲\pi\sqrt{\frac{۲}{k}}\Rightarrow\frac{۰/۸}{\pi}=\sqrt{\frac{۲}{k}}\Rightarrow\frac{۰/۶۴}{\pi^۲}=\frac{۲}{k}\Rightarrow k=\frac{۲\pi^۲}{۰/۶۴}$$

$$\Rightarrow k=\frac{۲۰}{۰/۶۴}=۳۱/۲۵\,N/m$$

راه حل دوم: قسـمت اول سـؤال را می‌توانسـتیم به کمک بازه‌های زمانی شـناخته شده به‌دست آوریم.



نوسـانگر در مدت ۰/۲s از مکان $+A$ به مکان $\frac{+\sqrt{۲}}{۲}A$ رفته است که بازهٔ زمانی این جابه‌جایی برابر $\frac{T}{۸}$ است بنابراین دورهٔ نوسان خواهد شد: $\frac{T}{۸}=۰/۲\Rightarrow T=۱/۶s$

بقیه مراحل شبیه راه حل اول است.

B ۱۱۶۶ ۳

خط فکری دامنهٔ حرکت در دوره نوسانگر تأثیری ندارد با توجه به شکل دامنه $A_3>A_2>A_1$ است. اما برای بررسی دوره با توجه به اینکه فنرها مشابه هستند $(k_1=k_2=k_3)$، شما با توجه به جرم وزنه‌ها باید دوره‌ها را با هم مقایسه کنید.

دوره در حرکت هماهنگ ساده از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{m/k}$ به‌دست می‌آید و دوره با جذر جرم نسبت مستقیم دارد:

نمودار (الف): $m_1=m_2=m_3\Rightarrow T_1=T_2=T_3$

و نمودار (الف) درست است.

نمودار (ب): $m_1<m_2<m_3\Rightarrow T_1<T_2<T_3$

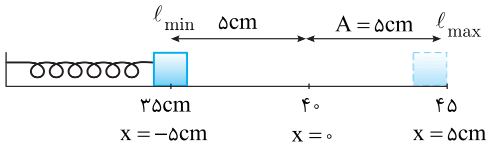
نمودار (ب) درست است.

نمودار (پ): $m_1>m_2>m_3\Rightarrow T_1>T_2>T_3$

نمودار (پ) نیز درست است.

B ۱۱۶۷ ۱

نکته تفاضل بیشینه طول فنر ℓ_{max} و کمینه طول فنر ℓ_{min} برابر طول پاره‌خط مسیر نوسان است. از طرفی طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه حرکت است بنابراین می‌توان نوشت: $\ell_{max}-\ell_{min}=2A$



۱ طول مسیر حرکت $45-35=10cm$ و دامنهٔ حرکت $A=\frac{10}{2}=5cm$ است.

۲ بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{400}{1/6}}=\sqrt{\frac{4000}{16}}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{20}{4}\times\sqrt{10}=5\sqrt{10}\xrightarrow{\sqrt{10}=\pi}\omega=5\pi\,rad/s$$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=0/05\cos 5\pi t$

۴ مکان را در لحظه‌های $t_1=0$ و $t_2=15s$ به‌دست می‌آوریم:

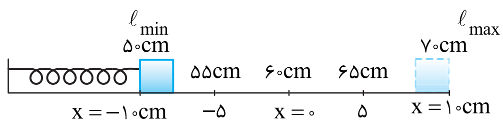
$$\begin{cases}t_1=0\Rightarrow x_1=+0/05m\\ t_2=15s\Rightarrow x_2=-0/05m\end{cases}$$

۵ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-0/05-0/05}{15-0}\Rightarrow v_{av}=\frac{-1}{150}m/s$$

B ۱۱۶۸ ۴

۱ طول مسیر حرکت را حساب می‌کنیم: $\ell_{max}-\ell_{min}=70-50=20cm$



۲ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر است: $A=\frac{20}{2}=10cm$

۳ محل تعادل وسط مسیر با نوسان است. بنابراین وقتی طول فنر ۶۰cm است نوسانگر در حال گذر از محل تعادل $(x=0)$ است.

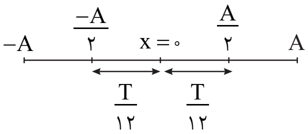
۴ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{5\times10^{-2}}{500}}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{100}=\frac{\pi}{50}s=\frac{3}{50}=0/06s$$

۵ مکان نوسانگر وقتی طول فنر ۵۵cm است برابر $x=55-60=-5cm$ و وقتی طول فنر ۶۵cm می‌شود مکان نوسانگر $65-60=+5cm$ است.

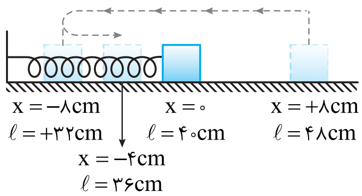
۶ کمترین زمان حرکت از $-5cm$ تا $+5cm$ یعنی نوسانگر در مسیر تغییر جهت نداده و مستقیماً از $-5cm$ به $+5cm$ برود.

۷ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از $-5cm$ تا $+5cm$ خواهد شد: $\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6}\Rightarrow\Delta t=\frac{0/06}{6}=0/01s$



A ۱۱۶۹ ۳

نکته مقدار انحراف از حالت تعادل و رها شدن وزنه برابر دامنه نوسان است.



۱ طول طبیعی فنر ۴۰cm است وزنه را کشیده تا طول فنر ۴۸cm شود یعنی طول فنر ۸cm افزایش یابد و وزنه را رها کرده‌ایم از این‌رو دامنه حرکت $A=8cm$ می‌شود.

۲ بنابراین وزنه بین $L_{max}=48cm$ و $L_{min}=40-8=32cm$ در حال نوسان است. وقتی طول فنر ۳۶cm است یعنی مکان نوسانگر $x=-4cm$ خواهد بود.

۳ بسامد زاویه‌ای سامانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{250}{0/1}}=50\,rad/s$$

۴ زمان گذر وزنه از مکان $x=-4cm$ برای دومین بار را به کمک معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده به‌دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-4=8\cos 50t\Rightarrow\cos 50t=-\frac{1}{2}$$

برای بار اول $50t=\frac{2\pi}{3}$ و برای دومین بار $50t=\frac{4\pi}{3}$ است از این‌رو $t=\frac{4\pi}{150}s$ جواب مسأله است.

$$t=\frac{4\pi}{150}\xrightarrow{\pi\approx3}t=\frac{4}{50}=0/08s$$

البته با استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده قسمت ۴ حل مسئله بسیار کوتاه‌تر می‌شد.

از $+A$ تا $-A$ $(\frac{T}{2})$ و از $-A$ تا $-\frac{A}{2}$ $(\frac{T}{6})$ طول می‌کشد بنابراین:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow50=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{50}$$

$$\Delta t=\frac{T}{2}+\frac{T}{6}=\frac{2T}{3}\Rightarrow\Delta t=\frac{2}{3}\times\frac{2\pi}{50}\xrightarrow{\pi=3}\Delta t=\frac{4}{50}=0/08s$$

A ۱۱۷۰ ۳

نکته مسافتی که نوسانگر در مدت یک دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه (۴A) و مسافتی که در مدت نیم دوره $(\frac{T}{2})$ طی می‌کند دو برابر دامنه (۲A) است.

ابتدا باید دورهٔ حرکت وزنه را حساب کنیم.

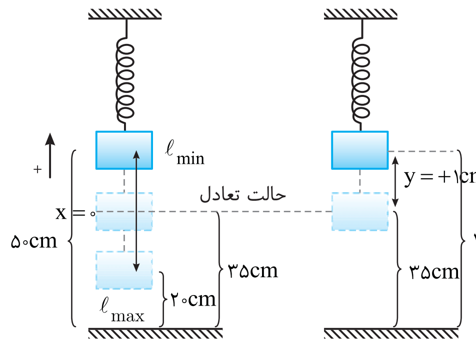
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=0/2kg,k=200N/m}T=2\pi\sqrt{\frac{0/2}{200}}$$

$$\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}}T=2\times\frac{1}{10}\Rightarrow T=0/2s$$

مدت زمانی که بیان شده ۰/۱s است و این ۰/۱s نصف دوره است و در مدت نیم دوره مسافت طی شده دو برابر دامنه یعنی $\ell=2\times4=8cm$ است.

B ۱۱۷۱ ۳

خط فکری با استفاده از کمترین و بیشترین فاصلهٔ وزنه از سطح میز، طول پاره‌خط مسیر نوسان را حساب کنید و به کمک آن دامنهٔ حرکت را بیابید تا بتوانید فاصلهٔ محل تعادل از سطح زمین را مشخص کنید با داشتن فاصلهٔ حالت تعادل از سطح زمین، می‌توانید مکان نوسانگر را نسبت به حالت تعادل به دست آورید و در مورد حرکت آن اظهارنظر کنید.



(الف) (ب)

با توجه به شکل (الف)، طول پاره‌خط مسیر حرکت برابر $۵۰-۲۰=۳۰\,cm$ است.

دامنهٔ حرکت را حساب می‌کنیم: $A=\frac{۳۰}{۲}=۱۵\,cm$

وقتی فاصلهٔ نوسانگر از سطح زمین ۳۶cm است یعنی مکان آن $۳۶-۳۵=۱\,cm$ بالاتر از حالت تعادل است و چون مکان مثبت است شتاب باید منفی یعنی رو به پایین باشد. اما جهت حرکت مشخص نیست و نوسانگر می‌تواند از این نقطه در حال حرکت رو به بالا یا رو به پایین باشد.

A ۱۱۷۲ ۲

خط فکری باید به سراغ دینامیک بروید. در حالت تعادل نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. با توجه به این مطلب، می‌توانید ثابت فنر را حساب کرده، سپس دوره را به دست بیاورید.

پس از آویزان کردن جسم، فنر ۲cm کشیده شده تا به تعادل برسد.

$$kx=mg\Rightarrow k\times\frac{۲}{۱۰۰}=۲۰\Rightarrow k=۱۰۰۰\,N/m$$

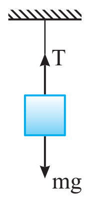
در حالت دوم به فنر وزنه‌ای ۱۰N وصل کرده‌ایم در واقع جرم وزنه برابر ۱kg می‌باشد. از این‌رو دوره خواهد داشت: $(mg=۱۰N\Rightarrow m=۱kg)$

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\times\sqrt{۱۰}\times\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰۰}}=۲\times\sqrt{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{۵}=۰/۲s$$

B ۱۱۷۳ ۱

خط فکری از حالت اول که وزنه را به نخ متصل کرده‌ایم می‌توانید جرم وزنه را به‌دست بیاورید سپس دوره را حساب کرده و تعداد نوسان‌ها را در مدت ۳۰s حساب کنید. با داشتن تعداد نوسان‌ها مسافت طی شده در مدت ۳۰s قابل محاسبه است.

به حل مسئله می‌پردازیم:



۱ نیروی وزن با نیروی کشش نخ برابر است از این‌رو:

$$mg=T\Rightarrow mg=۲N\Rightarrow m=۰/۲kg$$

۲ با وصل کردن وزنه به فنر، دورهٔ نوسان وزنه خواهد شد:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\sqrt{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰\sqrt{۱۰}}\Rightarrow T=۰/۲s$$

۳ تعداد نوسان‌های وزنه در مدت ۳۰s برابر است با:

نوسان	زمان
۱	۰/۲s
N=?	۳۰

$N=۱۵۰$ دوره (نوسان)

۴ در هر دوره نوسانگر مسافتی برابر $۴A=۴\times۵=۲۰\,cm$ طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده در مدت ۱۵۰ دوره (نوسان) خواهد شد:

$$\ell=۱۵۰\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=۳۰m$$

۵ تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۰}{۳۰}=۱\,m/s$$

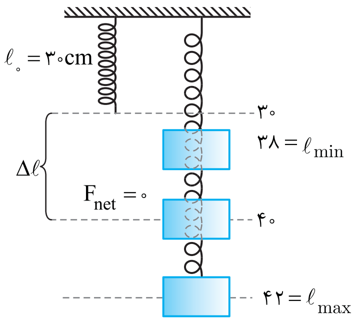
B ۱۱۷۴ ۳

۱ طول پاره‌خط مسیر حرکت را حساب می‌کنیم.

$$\text{طول مسیر}=\ell_{max}-\ell_{min}\Rightarrow \text{طول مسیر}=۴۲-۳۸=۴cm$$

۲ دامنهٔ حرکت نصف مسیر نوسان است

$$A=\frac{۴}{۲}=۲cm$$



۳ طول فنر در محل تعادل (وسط مسیر) خواهد شد:

$$\text{طول فنر در حالت تعادل}=۳۸+۲=۴۰\,cm$$

۴ تغییر طول فنر از حالت طبیعی تا حالت تعادل را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta L=۴۰-۳۰=۱۰\,cm$$

۵ در محل تعادل نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند. بر وزنه دو نیرو، یکی وزن و دیگری نیروی کشسانی فنر وارد می‌شود. بنابراین:

$$F_{net}=۰\Rightarrow k\Delta\ell=mg\Rightarrow\frac{m}{k}=\frac{\Delta\ell}{g}=\frac{۰/۱}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

۶ اکنون در رابطهٔ دوره به جای نسبت $\frac{m}{k}$ می‌توانیم $\frac{۱}{۱۰۰}$ را قرار داده و دوره را حساب کنیم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}=\frac{\pi}{۵}s$$

میانبر در حرکت سامانه جرم - فنر در امتداد قائم دوره را می‌توان از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\Delta\ell/g}$ به‌دست آورد که در آن $\Delta\ell$ فاصلهٔ محل تعادل از طول طبیعی فنر است.

B ۱۱۷۵ ۲

۱ دوره را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{۱}{f}\xrightarrow{f=۰/۵Hz}T=\frac{۱}{۰/۵}\Rightarrow T=۲s$$

۲ اگر تمام کمک‌فنرها را معادل یک فنر فرض کنیم ثابت فنر آن خواهد شد:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=۱۰۰۰\,kg}۲=۲\pi\sqrt{\frac{۱۰۰۰}{k}}$$

$$\Rightarrow۴=۴\pi^۲\times\frac{۱۰۰۰}{k}\xrightarrow{\pi^۲=۱۰}k=۱۰^۴\,N/m$$

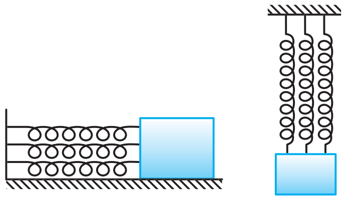
۳ وقتی یک مسافر به جرم ۱۰۰kg سوار ماشین می‌شود، با فرض این‌که به جای تمام فنرها فنری با ثابت $۱۰^۴\,N/m$ وجود دارد. تغییر طول فنر خواهد شد:

$$mg=k\Delta\ell\Rightarrow۱۰۰\times۱۰=۱۰^۴\Delta\ell\Rightarrow\Delta\ell=۰/۱m=۱۰\,cm$$

بنابراین ماشین ۱۰cm پایین می‌رود.

C ۱۱۷۶ ۴

نکته هرگاه با n فنر مشابه با ثابت k یک وزنه را به دیواره‌ای متصل کنیم و وزنه را به نوسان درآوریم می‌توانیم n فنر را یک فنر با ثابت nk فرض کنیم.



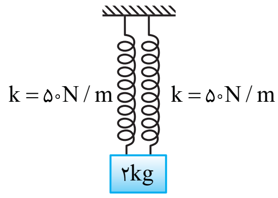
جسم به دو فنر مشابه با ثابت $400\,N/m$ متصل است پس می‌توانیم در نظر بگیریم (مدل‌سازی کنیم) جسم به فنری با ثابت $800\,N/m$ وصل است و دوره را به‌دست بیاوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{800}}=\frac{\pi}{10}=0/3s$$

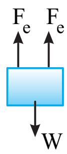
با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ زمان ۲۰ نوسان کامل خواهد شد. $0/3=\frac{t}{20}\Rightarrow t=6s$

برای درک این مدل‌سازی به مثال زیر توجه کنید.

مثال: در شکل روبه‌رو افزایش طول هر فنر چند سانتی‌متر است؟



پاسخ: نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم و نیروی خالص را برابر صفر قرار می‌دهیم:



$$2F_e=W\Rightarrow 2k\Delta\ell=mg\Rightarrow 100\Delta\ell=20\Rightarrow\Delta\ell=0/2m=20cm$$

به قسمت $2k$ دقت کنید مانند این است که وزنه به یک فنر با ثابت $k'=2k$ متصل است. در واقع وقتی n فنر با ثابت k را به طور موازی بین دیوار و وزنه متصل کنیم، می‌تون فنرها را یک فنر با یک ثابت $k'=nk$ در نظر گرفت.

A ۱۱۷۷ ۲

خط فکری فرض می‌کنیم که وزن خودرو و سرنشینانش به‌طور یکنواخت روی چهار فنر خودرو تقسیم می‌شود. در این حالت می‌توانیم چهار فنر مشابه با ثابت k را یک فنر با ثابت $k'=4k$ فرض کرده و مسئله را با یک فنر حل کنیم.

۱ ثابت فنر معادل این چهار فنر خواهد شد:

$$k'=4k\Rightarrow k'=4\times5\times10^3=2\times10^4\,N/m$$

۲ بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{2\times10^4}{1800}}=\sqrt{\frac{10^4}{900}}\Rightarrow\omega=\frac{10}{3}\,rad/s$$

A ۱۱۷۸ ۲

یادآوری دورهٔ آونگ ساده برابر با $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است که در آن L طول آونگ و g میدان گرانش در محل است.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\ell=0/25m,\,g=\pi^2}T=2\pi\sqrt{\frac{0/25}{\pi^2}}=2\times0/5\Rightarrow T=1s$$

A ۱۱۷۹ ۴

دورهٔ آونگ ساده $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، از این رو:

$$T^2=4\pi^2\frac{\ell}{g}\Rightarrow T^2\propto\ell$$

بنابراین a می‌تواند T^2 باشد.

A ۱۱۸۰ ۲

۱ ابتدا با توجه به اینکه در مدت $1min$ آونگ $N=30$ نوسان کامل انجام داده، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{60}{30}\Rightarrow T=2s$$

۲ رابطهٔ دورهٔ آونگ را نوشته و شتاب گرانش در محل را به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 2=2\pi\sqrt{\frac{1/01}{g}}\Rightarrow\frac{1}{\pi}=\sqrt{\frac{1/01}{g}}\Rightarrow\frac{1}{\pi^2}=\frac{1/01}{g}$$

$$\Rightarrow g=1/01\pi^2\xrightarrow{\pi^2\approx10}g=10/1\,m/s^2$$

بازی با سؤال **طول یک آونگ ساده کدام‌چند سانتی‌متر باشد تا بتواند در مدت ۷۲ ثانیه ۴۰ نوسان کامل انجام دهد؟** $(\pi^2=10\ ,\ g=10\,m/s^2)$

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۸۱   ۲) ۱۶/۲   ۳) ۴۰   ۴) ۸۰

پاسخ **ابتدا دورهٔ آونگ را به دست می‌آوریم:**

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{72}{40}\Rightarrow T=1/8s$$

اکنون طول آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow1/8=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow1/8=2\sqrt{\ell}\Rightarrow\ell=0/81m\Rightarrow\ell=81cm$$

گزینهٔ ۱

A ۱۱۸۱ ۳

نکته در هر دوره نوسانگر (آونگ) دو بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند.

آونگ در هر دقیقه، ۶۰ بار مسیر AB را طی کرده بنابراین آونگ در هر دقیقه $\frac{60}{2}=30$ نوسان انجام داده است.

دوره را حساب می‌کنیم. $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{60}{30}=2s$

طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow\ell=1m\Rightarrow\ell=100cm$$

A ۱۱۸۲ ۲

دورهٔ آونگ ساده به جرم آونگ بستگی ندارد. دوره را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{64}{25}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{8}{5}$$

A ۱۱۸۳ ۱

نکته دورهٔ نوسان آونگ ساده به جرم گلولهٔ آن بستگی ندارد و اگر دامنهٔ آن بیش از حد بزرگ نباشد، دوره به دامنه بستگی ندارد.

جرم گلوله m و یا 3m باشد تأثیری در دوره ندارد. همچنین زاویهٔ انحراف 2° یا 4° نیز نقشی در دوره ندارد. نسبت دوره‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\xrightarrow{\ell'=4\ell}\frac{T'}{T}=2\Rightarrow\frac{f'}{f}=\frac{1}{2}$$

A ۱۱۸۴ ۲

طول آونگ تغییر نکرده از این‌رو دوره آونگ را در دو محل نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_1}}\\T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_2}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\Rightarrow\frac{5}{4}=\sqrt{\frac{10}{g_2}}\Rightarrow\frac{25}{16}=\frac{10}{g_2}\Rightarrow g_2=6/4\,m/s^2$$

A ۱۱۸۵ ۱

دورهٔ نوسان آونگ از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}\xrightarrow[T_2=\frac{T_1}{2}]{\ell_1=80cm}\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\ell_2}{80}}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{\ell_2}{80}\Rightarrow\ell_2=20cm$$

بنابراین باید طول آونگ را به اندازهٔ $80-20=60cm$ کاهش دهیم.

بازی با سؤال دوره آونگ ساده‌ای ۳ ثانیه است. کاهش طول آونگ چه کسری از طول اولیه آونگ شود تا دوره آن یک ثانیه شود؟

۱) $\frac{3}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

پاسخ با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ طول ثانویه را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\\ T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{1}{9}=\frac{\ell'}{\ell}\Rightarrow\ell'=\frac{\ell}{9}$$

تغییر طول آونگ خواهد شد. $\Delta\ell=\ell-\ell'=\ell-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\ell$

گزینه ۴

A ۱۱۸۶ ۴

دوره آونگ را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}T_1=\frac{t}{N_1}\\ T_2=\frac{t}{N_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{N_2}{N_1}=\frac{T_1}{T_2}\qquad(I)$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{\ell_2}}\qquad(II)$$

از رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود که: $\frac{N_2}{N_1}=\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$

در حالت اول در مدت t، ۴ نوسان کامل و در حالت دوم در همان مدت t، یک نوسان بیشتر یعنی ۵ نوسان کامل انجام داده است بنابراین: $\frac{4+1}{4}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\Rightarrow\ell_2=\frac{16}{25}\ell_1$

حال درصد تغییرات طول را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_1}\times100=\frac{-\frac{9}{25}\ell_1}{\ell_1}\times100=-36\%$

که علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش می‌باشد.

B ۱۱۸۷ ۴

۱ با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ داریم: $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

با توجه به رابطهٔ بالا بسامد آونگ به جرم آن بستگی ندارد.

۲ بسامد را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و یک معادله برای f_1 و f_2 به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_1}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_2}}}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\xrightarrow{\ell_2=16\ell_1}\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{16}\Rightarrow f_2=\frac{1}{4}f_1\qquad(I)$$

۳ f_1 بزرگ‌تر از f_2 بوده و بنا به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$f_1-f_2=60Hz\xrightarrow{(I)}f_1-\frac{1}{4}f_1=60\Rightarrow\frac{3}{4}f_1=60\Rightarrow f_1=80Hz$$

B ۱۱۸۸ ۳

خط فکری ابتدا با داشتن دوره $T_1=3s$ و $T_2=4s$، طول هر آونگ را بر حسب g حساب کنید، سپس ℓ_1 را با ℓ_2 جمع کرده و دوره آونگ جدید را به‌دست بیاورید.

با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ طول هر آونگ را حساب می‌کنیم:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow3=2\pi\frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{g}}\Rightarrow\sqrt{\ell_1}=\frac{3\sqrt{g}}{2\pi}\Rightarrow\ell_1=\frac{9g}{4\pi^2}$$

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow4=2\pi\frac{\sqrt{\ell_2}}{\sqrt{g}}\Rightarrow\sqrt{\ell_2}=\frac{4\sqrt{g}}{2\pi}\Rightarrow\ell_2=\frac{16g}{4\pi^2}$$

حال رابطهٔ دورهٔ آونگ را برای آونگ با طول $\ell_1+\ell_2$ می‌نویسیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{9g}{4\pi^2}+\frac{16g}{4\pi^2}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{25g}{4\pi^2}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{25}{4\pi^2}}=2\pi\times\frac{5}{2\pi}=5s$$

میانبر اگر دو آونگ با طول‌های ℓ_1 و ℓ_2 به ترتیب با دوره‌های T_1 و T_2 در اختیار داشته باشیم دوره آونگی که طول ریسمان آن $\ell_1+\ell_2$ است از رابطه $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$ به‌دست می‌آید.

اثبات میانبر:

$$\begin{cases}T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow T_1^2=4\pi^2\frac{\ell_1}{g}\\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow T_2^2=4\pi^2\frac{\ell_2}{g}\end{cases}\xrightarrow[\text{با هم جمع می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را}}T_1^2+T_2^2=4\pi^2(\frac{\ell_1}{g}+\frac{\ell_2}{g})$$

$$\Rightarrow T_1^2+T_2^2=4\pi^2(\frac{\ell_1+\ell_2}{g})\Rightarrow\sqrt{T_1^2+T_2^2}=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}$$

از طرفی دوره آونگی به طول $\ell_1+\ell_2$ برابر $2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$$

B ۱۱۸۹ ۱

۱ طول هر آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{T_1=1.5s}1.5=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow\ell_1=\frac{2.25g}{4\pi^2}\\ \xrightarrow{T_2=2.5s}2.5=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow\ell_2=\frac{6.25g}{4\pi^2}\end{cases}$$

۲ طول آونگ جدید خواهد شد:

$$\ell_2-\ell_1=\frac{6.25g}{4\pi^2}-\frac{2.25g}{4\pi^2}=\frac{4g}{4\pi^2}\Rightarrow\ell_2-\ell_1=\frac{g}{\pi^2}$$

۳ دوره آونگ جدید را به‌دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2-\ell_1}{g}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{g}{\pi^2g}}\Rightarrow T=2s$$

میانبر هرگاه دو آونگ با طول‌های ℓ_1 و ℓ_2 به ترتیب دارای دورهٔ T_1 و T_2 باشد، دوره آونگی با طول $\ell_2-\ell_1$ برابر $T=\sqrt{T_2^2-T_1^2}$ می‌شود.

B ۱۱۹۰ ۳

۱ با توجه به صورت سؤال دوره یکی از آونگ‌ها دو برابر دیگری است. بنابراین می‌توان به کمک این مطلب یک رابطه بین طول دو آونگ ℓ_1 و ℓ_2 پیدا کنیم.

$$T_2=2T_1\Rightarrow2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}=2(2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}})\Rightarrow\ell_2=4\ell_1\qquad(I)$$

۲ با توجه به فرض مسئله مجموع ℓ_1 و ℓ_2 برابر طول نخ اولیه یعنی $100cm$ می‌شود.

$$\ell_2+\ell_1=100\ell_1\xrightarrow{(I)}4\ell_1+\ell_1=100cm\Rightarrow\ell_1=20cm$$

۳ آونگی که دورهٔ تناوب بیشتری دارد طولش بزرگ‌تر است، بنابراین:

$$\ell_2=4\ell_1\Rightarrow\ell_2=4\times20=80cm$$

B ۱۱۹۱ ۳

خط فکری با داشتن بسامد آونگ‌ها، طول هر آونگ را حساب کنید تا بتوانید طول آونگی که بسامد آن مجهول (f) است را بیابید.

۱ رابطهٔ بسامد آونگ به صورت زیر است.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{f=2/5\mathrm{Hz}}6/25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell}\Rightarrow\ell=\frac{g}{25\pi^2}\\ \xrightarrow{f_1=10\mathrm{Hz}}100=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell_1}\Rightarrow\ell_1=\frac{g}{400\pi^2}\\ \xrightarrow{f_2=5\mathrm{Hz}}25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell_2}\Rightarrow\ell_2=\frac{g}{100\pi^2}\end{cases}$$

۲ مجموع طول سه آونگ جدید برابر طول ریسمان آونگ اول است، بنابراین:

$$\ell=\ell_1+\ell_2+\ell_3\Rightarrow\frac{g}{25\pi^2}=\frac{g}{400\pi^2}+\frac{g}{100\pi^2}+\ell_3$$

$$\frac{g}{25\pi^2}-\frac{g}{400\pi^2}-\frac{g}{100\pi^2}=\ell_3\Rightarrow\frac{16g-g-4g}{400\pi^2}=\ell_3\Rightarrow\ell_3=\frac{11g}{400\pi^2}$$

۳ بسامد f را حساب می‌کنیم.

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\frac{11g}{400\pi^2}}}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400\pi^2}{11}}\Rightarrow f=\frac{20\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{11}}$$

$$\Rightarrow f=\frac{10}{\sqrt{11}}\Rightarrow f=\frac{10\sqrt{11}}{11}\mathrm{Hz}$$

میانبر اگر دورهٔ آونگ T باشد و آن را به n قسمت تقسیم کنیم و با هر قسمت یک آونگ با دورهٔ T_1، T_2، … و T_n بسازیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2}$$

B ۱۱۹۲ ۲

خط فکری طول آونگ از ما خواسته شده، دورهٔ آونگ دو برابر دورهٔ نوسان جرم - فنر است. جرم و ثابت فنر را داریم. بنابراین شما ابتدا دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را بیابید، سپس آن را دو برابر کرده دورهٔ آونگ را به‌دست آورده و از آنجا طول آونگ را حساب کنید.

۱ دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow[k=112/5\mathrm{N/m}]{m=0/5\mathrm{kg}}T=2\pi\sqrt{\frac{0/5}{125}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{1}{250}}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{50}\Rightarrow T=\frac{\pi}{25}\mathrm{s}$$

۲ دورهٔ آونگ دو برابر T است.

$$T'=2T=2\times\frac{\pi}{25}\Rightarrow T'=\frac{2\pi}{25}\mathrm{s}$$

۳ طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\frac{2\pi}{25}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}\Rightarrow\frac{1}{25}=\sqrt{\frac{\ell}{10}}\Rightarrow\frac{1}{625}=\frac{\ell}{100}\Rightarrow\ell=0/16\mathrm{m}=16\mathrm{cm}$$

B ۱۱۹۳ ۴

خط فکری کافی است از روی معادلهٔ حرکت $x=0/04\cos\frac{\pi}{3}t$، بسامد زاویه‌ای ω را مشخص کرده و به کمک رابطهٔ $\omega=\sqrt{g/\ell}$ طول آونگ را به‌دست آورد.

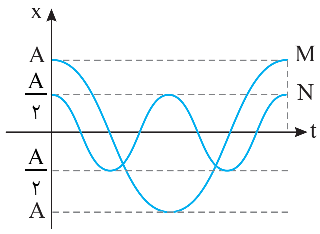
بسامد زاویه‌ای این آونگ $\omega=\frac{\pi}{3}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ است، بنابراین:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\frac{\pi^2}{9}=\frac{\pi^2}{\ell}\Rightarrow\ell=9\mathrm{m}$$

B ۱۱۹۴ ۳

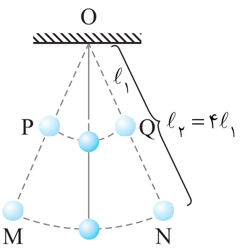
دامنهٔ آونگ در دورهٔ آن تأثیری ندارد. به نمودار دقت کنید. دورهٔ نوسان آونگ M دو برابر دورهٔ نوسان آونگ N است. بنابراین دورهٔ آونگ را نوشته و رابطهٔ ℓ_M با ℓ_N را به‌دست می‌آوریم.

$$T_M=2T_N\Rightarrow2\pi\sqrt{\frac{\ell_M}{g}}=2(2\pi\sqrt{\frac{\ell_N}{g}})\Rightarrow\ell_M=4\ell_N$$



B ۱۱۹۵ ۲

خط فکری باید آونگ را در دو حالت مطابق شکل رسم کنید تا بتوانید دامنهٔ حرکت را از روی شکل به کمک هندسه و مثلثات به‌دست بیاورید. سپس دورهٔ جدید آونگ را به‌دست بیاورید تا مشخص شود کدام نمودار درست است.



با توجه به شکل و تشابه مثلث‌های OPQ و OMN، خواهیم داشت:

$$\frac{MN}{PQ}=\frac{\ell_2}{\ell_1}=4\Rightarrow MN=4PQ\xrightarrow[\text{دامنه است}]{\text{طول مسیر دو برابر}}A_2=4A_1$$

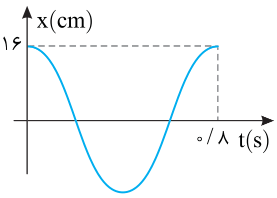
بنابراین دامنهٔ آونگ جدید خواهد شد:

$$A_2=4\times4=16\mathrm{cm}$$

دورهٔ آونگ $0/4\mathrm{s}$ است. دورهٔ آونگ جدید را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}\Rightarrow\frac{T_2}{0/4}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{T_2}{0/4}=\sqrt{\frac{4\ell_1}{\ell_1}}\Rightarrow T_2=0/8\mathrm{s}$$

از این‌رو نمودار به شکل روبه‌رو است و گزینهٔ (۲) درست است.



A ۱۱۹۶ ۳

نسبت دورهٔ آونگ‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{\ell_B}{\ell_A}}\xrightarrow[\ell_A=45\mathrm{cm}]{\ell_B=20\mathrm{cm}}\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{20}{45}}$$

$$\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{4}{9}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\frac{2}{3}\qquad(I)$$

نسبت تعداد نوسان‌ها در یک مدت معین را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{\frac{t}{N_B}}{\frac{t}{N_A}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\frac{N_A}{N_B}\xrightarrow[(I)]{N_B=9}\frac{2}{3}=\frac{N_A}{9}\Rightarrow N_A=6\ \text{نوسان}$$

B ۱۱۹۷ | ۴

دورهٔ آونگ ساده برابر با $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است. از طرفی به ازای هر ۵ نوسان آونگ A، آونگ B، ۳ نوسان می‌کند، در این صورت:

۱ نسبت دوره‌ها را از روی تعداد نوسان‌های دو آونگ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}T_A=\frac{t}{N_A}\\ T_B=\frac{t}{N_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{N_B}{N_A}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{3}{5}\qquad(I)$$

۲ نسبت دوره‌ها بر حسب طول آونگ‌ها خواهد شد.

$$\begin{cases}T_A=2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}\\ T_B=2\pi\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{\frac{\ell_A}{\ell_B}}\qquad(II)$$

۳ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری کرده و نسبت طول‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{3}{5}=\sqrt{\frac{\ell_A}{\ell_B}}\Rightarrow\frac{\ell_A}{\ell_B}=\frac{9}{25}\Rightarrow\ell_B=\frac{25}{9}\ell_A$$

۴ با توجه به فرض مسئله $(\ell_B-\ell_A=48cm)$ اکنون می‌توان ℓ_A را به‌دست آورد.

$$\frac{25}{9}\ell_A-\ell_A=48\Rightarrow\frac{16\ell_A}{9}=48\Rightarrow\ell_A=27cm$$

B ۱۱۹۸ | ۴

خط فکری اگر بسامد آونگی را که طولش بلندتر است f_1 و بسامد دیگری را f_2 بنامیم، چون دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ با جذر طول نسبت مستقیم دارد بنابراین آونگ بلندتر، دوره‌اش بیشتر و در نتیجه بسامد آن کوچک‌تر است $(\downarrow f=\frac{1}{T})$ یعنی $f_1<f_2$ است، بنابراین نسبت $\frac{f_1}{f_2}=0/9$ است. حال مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نسبت دوره‌ها را به کمک نسبت بسامدها به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_2}}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\frac{T_2}{T_1}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=0/9\Rightarrow T_2=0/9T_1\qquad(I)$$

۲ آونگی که طول کوتاه‌تری دارد و بسامدش بیشتر است تعداد نوسانات آن در یک مدت معین بیشتر است بنابراین:

$$N_2=N_1+3$$

۳ از رابطهٔ $N=\frac{t}{T}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{54}{T_2}=\frac{54}{T_1}+3\Rightarrow\frac{54T_1-54T_2}{T_1T_2}=3\Rightarrow18(T_1-T_2)=T_1T_2$$

$$\xrightarrow{T_2=0/9T_1}18(T_1-0/9T_1)=0/9T_1T_1$$

$$\Rightarrow18(0/1T_1)=0/9T_1^2\Rightarrow T_1=\frac{1/8}{0/9}=2s$$

بازی با سؤال دو آونگ سادهٔ A و B را با هم با دامنهٔ کم به نوسان درمی‌آوریم. پس از گذشت ۲ دقیقه و ۲۴ ثانیه آونگ B، ۱۰ نوسان کامل از آونگ A جلو می‌افتد. اگر زمان نوسان کامل آونگ A برابر با ۱/۸ ثانیه باشد، دورهٔ آونگ B چند ثانیه می‌باشد؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۲

پاسخ آونگ B در مدت ۲ دقیقه و ۲۴s یعنی در مدت ۱۴۴s از آونگ A، ۱۰ نوسان جلو افتاده است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$N_B=N_A+10\Rightarrow\frac{t}{T_B}=\frac{t}{T_A}+10$$

$$\xrightarrow{t=144s}\frac{144}{T_B}=\frac{144}{1/8}+10\Rightarrow\frac{144}{T_B}=80+10\Rightarrow T_B=\frac{144}{90}=1/6s$$

گزینهٔ ۳

B ۱۱۹۹ | ۳

نکته میدان گرانش در استوا کمترین مقدار و در قطب‌ها بیشترین مقدار است، در واقع زمین کرهٔ کامل نیست و شعاع استوایی زمین از شعاع قطبی آن بیشتر است و هرچه از استوا به سمت قطب‌ها برویم، g در حال افزایش است.

اگر از استوا به مدار 45° جغرافیایی برویم یعنی از استوا به سوی قطب برویم، g افزایش می‌یابد و دورهٔ آونگ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ کمی کوچک‌تر می‌شود.

B ۱۲۰۰ | ۲

خط فکری ابتدا میدان گرانش در ارتفاع R_e (R_e شعاع کرهٔ زمین) از سطح زمین را به‌دست بیاورید، سپس به سراغ به دست آوردن دوره بروید.

۱ شتاب گرانش در هر نقطه برابر $g=GM/R^2$ است که R فاصله از مرکز زمین است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\text{در سطح زمین}:g_0=G\frac{M}{R_e^2}\\ \text{در ارتفاع } R_e:g'=G\frac{M}{(R_e+R_e)^2}\Rightarrow g'=G\frac{M}{4R_e^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{g'}{g}=\frac{G\frac{M}{4R_e^2}}{G\frac{M}{R_e^2}}\Rightarrow\frac{g'}{g}=\frac{1}{4}$$

۲ اکنون می‌توان نسبت دوره‌ها را به‌دست آورد.

$$\begin{cases}T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\\ T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g'}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\times\sqrt{\frac{g}{g'}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{9\ell}{\ell}}\times\sqrt{4}\Rightarrow\frac{T'}{T}=3\times2\Rightarrow T'=6T$$

B ۱۲۰۱ | ۴

وقتی حالت بی‌وزنی وجود دارد، اگر آونگ ساعت را منحرف کنیم به جای اول باز نمی‌گردد یعنی اصولاً آونگ نوسان نمی‌کند در نتیجه ساعت آونگ‌دار نیز که عقربه‌هایش در اثر نوسان آونگ حرکت می‌کنند، کار نخواهد کرد.

A ۱۲۰۲ | ۱

دورهٔ حرکت آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ و دورهٔ نوسان دستگاه جرم-فنر $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است، در این صورت دورهٔ آونگ به شتاب گرانش (g) بستگی دارد اما دورهٔ نوسان دستگاه جرم-فنر به شتاب گرانش (g) بستگی ندارد. بنابراین با دور شدن از سطح زمین و کاهش شتاب گرانش $(\downarrow g=G\frac{M}{r^2}\uparrow)$ دورهٔ حرکت آونگ افزایش می‌یابد اما دورهٔ حرکت دستگاه جرم-فنر ثابت می‌ماند.

B ۱۲۰۳ | ۴

یادآوری هرگاه دمای یک ریسمان یا میله فلزی با طول اولیه ℓ_1 و ضریب انبساط طولی α به اندازهٔ $\Delta\theta$ افزایش یابد، طول ثانویه آن خواهد شد $\ell_2=\ell_1(1+\alpha\Delta\theta)$.

دوره آونگ را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_1(1+\alpha\Delta\theta)}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1+\alpha\Delta\theta}$$

دمای اولیه $0^\circ C$ بوده و دمای نهایی θ است، از این‌رو $\Delta\theta=\theta$ بنابراین:

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1+\alpha\theta}$$

A | ۱۲۰۴ | ۱

نکته هرگاه دوره آونگ ساعت آونگ‌دار افزایش یابد، ساعت کندتر کار کرده و عقب می‌ماند و هرگاه دوره کاهش یابد ساعت تندتر کار کرده و جلو می‌افتد.

نکته شتاب گرانش g در استوا از بقیه نقاط دیگر سطح زمین کمتر است.

اگر ساعت را از تهران به استوا ببریم با توجه به اینکه در استوا شتاب گرانش از بقیهٔ نقاط سطح کرهٔ زمین کمتر است، دورهٔ نوسان آونگ افزایش می‌یابد $(\uparrow T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\downarrow}})$ و ساعت کندتر کار کرده و عقب می‌ماند. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

بـا افزایـش دما، طول آونگ فلزی افزایـش می‌یابد و دورهٔ آونگ افزایش یافته و سـاعت عقب می‌ماند بنابراین گزارهٔ (ب) نیز درست است.

C | ۱۲۰۵ | ۲

دورهٔ آونـگ ۲s بـوده و ۰/۲s دوره کاهـش می‌یابـد، در ایـن صـورت دوره $T'=2-0/2=1/8s$ می‌شـود. در این صورت تعداد نوسان‌های آونگ افزایش می‌یابد و باعث می‌شـود سـاعت تندتر کار کند و جلو بیفتد. یعنی در هر ۱/۸s، سـاعت ۰/۲s جلـو می‌افتـد. با توجه بـه این مطلب میـزان جلو افتادن سـاعت در مدت ۲۴h با یک تناسب ساده به‌دست می‌آید.

۱/۸s	۰/۲s
۲۴h	x

$$\Rightarrow x=\frac{8}{3}h=160\,min$$

B | ۱۲۰۶ | ۳

دورهٔ آونگ سـاده $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ اسـت و در سطح کرهٔ ماه دورهٔ آونگ طولانی‌تر می‌شود و دوره در سطح کره ماه خواهد شد:

$$\frac{T_{\text{م}}}{T_{\text{ز}}}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{\text{م}}}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{\text{ز}}}}}=\sqrt{\frac{g_{\text{ز}}}{g_{\text{م}}}}\Rightarrow\frac{T_{\text{م}}}{T_{\text{ز}}}=\sqrt{\frac{g_{\text{ز}}}{\frac{1}{6}g_{\text{ز}}}}=\sqrt{6}\Rightarrow T_{\text{م}}=\sqrt{6}T_{\text{ز}}$$

چرخـش عقربه‌هـای سـاعت آونگ‌دار به کمک نوسـان آونـگ صورت می‌گیـرد. دورهٔ چرخش عقربهٔ ساعت‌شمار در سطح زمین ۱۲ ساعت است، بنابراین دورهٔ چرخش عقربهٔ ساعت‌شمار در سطح کرهٔ ماه برابر است با:

$$12\times\sqrt{6}\simeq 12\times 2/45=29h$$

B | ۱۲۰۷ | ۲

۱ طول آونگ را در حالت اول به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 1=\pi^2(\frac{\ell}{\pi^2})\Rightarrow \ell=1m$$

۲ بنابرایـن طول آونگ جدید برابر اسـت بـا $\ell'=100-19=81cm$ و دورهٔ آونگ جدید ساعت برابر خواهد شد با:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\Rightarrow T'=2\pi\sqrt{\frac{0/81}{\pi^2}}\Rightarrow T'=1/8s$$

۳ در مدت ۱/۸s ساعت به اندازهٔ $2-1/8=0/2s$ جلو می‌افتد، پس در مدت یک شبانه‌روز (۸۶۴۰۰s) مقدار مدتی که جلو می‌افتد برابر است با:

۱/۸	۰/۲
۸۶۴۰۰	Δt

$\Rightarrow \Delta t=9600s=$ ۲ ساعت و ۴۰ دقیقه

C | ۱۲۰۸ | ۲

خط فکری باید در حل این مسـئله به کمک چگالی و جرم سیاره، شتاب گرانش در سـطح سیاره را برحسب شتاب گرانش در سطح زمین به‌دست بیاورید. سپس دورهٔ آونگ را در سطح سیاره حساب کنید تا بتوانید مقدار عقب‌افتادگی یا جلوافتادگی ساعت را بیابید.

۱ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\rho_p=32\rho_e\Rightarrow\frac{M_p}{V_p}=32\frac{M_e}{V_e}\xrightarrow{M_p=4M_e}V_e=8V_p$$

$$\xrightarrow{V=\frac{4}{3}\pi R^3}R_e=2R_p$$

۲ اکنون با داشـتن نسـبت جرم‌ها و نسبت شعاع‌ها نسـبت میدان گرانش در سطح سیاره (g_p) به میدان گرانش در سطح زمین (g_e) را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} g_p=G\dfrac{M_p}{R_p^2} \\ g_e=G\dfrac{M_e}{R_e^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{g_p}{g_e}=\frac{M_p}{M_e}\times\frac{R_e^2}{R_p^2}=4\times4=16\Rightarrow g_p=16g_e$$

۳ دورهٔ آونگ در سطح زمین ۲s است. دوره را در سطح سیاره به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} T_p=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g_p}} \\ T_e=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g_e}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_p}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_p}}\Rightarrow\frac{T_p}{2}=\sqrt{\frac{1}{16}}\Rightarrow T_p=\frac{1}{2}s$$

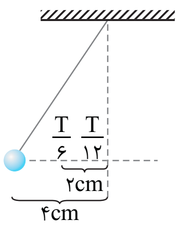
۴ دورهٔ آونـگ سـاعت کوتاه شـده اسـت، بنابراین سـاعت تندتـر کار می‌کند و جلو می‌افتد. سـاعت هر ۰/۵s را به اشـتباه ۲s نشـان می‌دهد یعنی در هر ۰/۵s، ساعت ۱/۵s جلو می‌افتد. در مدت یک شبانه‌روز یعنی ۲۴ ساعت:

۰/۵s	۱/۵s
۲۴h	Δt

$$\Rightarrow \Delta t=72h$$

C | ۱۲۰۹ | ۴

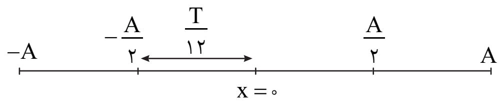
۱ بیشـترین انحـراف آونـگ از راسـتای قائم همان دامنـهٔ نوسـان آونـگ اسـت، بنابرایـن دامنـهٔ نوسـان $A=4cm$ است.



۲ مکان ۲cm یعنی:

$$\frac{x}{A}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{A}{2}$$

یادآوری بازهٔ زمانی که طول می‌کشـد تا نوسـانگر از مکان $\frac{A}{2}$ به مرکز نوسان برسد برابر $\frac{T}{12}$ است.



۳ با توجه به فرض مسئله دوره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{T}{12}=\frac{1}{4}\Rightarrow T=3s$$

۴ طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 3=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 3=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow \ell=\frac{9}{4}m$$

بنابراین طول نخ برابر $\frac{9}{4}\times100=225cm$ می‌باشد.

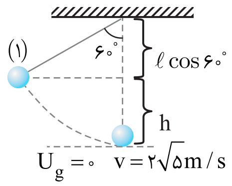
A | ۱۲۱۰ | ۴

دوره آونگ به مقدار انحراف آن بستگی ندارد، بنابراین وقتی انحراف آن را از ۲° به ۵° تغییر می‌دهیم، دوره تغییری نمی‌کند و گزینه (۱) و (۲) نادرست است.

تندی گلوله آونگ هنگام گذر از راستای قائم (حالت تعادل) بیشینه و برابر $v_m=A\omega$ اسـت، بسـامد زاویه‌ای در دو حالت برابر اسـت (طول آونگ‌ها برابر است)، اما دامنه در حالـت دوم بزرگ‌تـر بوده و تندی آونگ در حالت دوم بزرگ‌تر اسـت بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۱۲۱۱ | ۱

خط فکری باید به سراغ کار و انرژی برویم و ابتدا به کمک پایستگی انرژی مکانیکی، طول آونگ را به‌دست بیاورید، سپس با داشتن طول آونگ، دوره را حساب کرد.



۱ پایین‌ترین نقطهٔ مسیر حرکت را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

۲ ارتفاع گلولهٔ آونگ را وقتی ۶۰° منحرف می‌شود برحسب طول آونگ حساب می‌کنیم:

$$h=\ell-\ell\cos 60^\circ \Rightarrow h=\ell-\frac{\ell}{2}\Rightarrow h=\frac{\ell}{2}$$

۳ پایستگی انرژی مکانیکی را می‌نویسیم:

$$E_1=E_2\Rightarrow U_1+K_1=U_2+K_2\Rightarrow mgh+0=0+\frac{1}{2}mv^2$$

$$gh=\frac{1}{2}v^2\Rightarrow 10\times(\frac{\ell}{2})=\frac{1}{2}(2\sqrt{5})^2\Rightarrow \ell=2m$$

۴ دورهٔ آونگ را حساب می‌کنیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\pi^2=g}T=2\sqrt{2}s$$

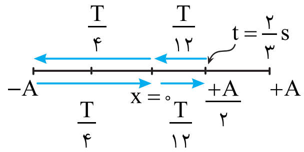
B ۱۲۱۲ | ۴

روش بازهٔ زمانی ۱ ابتدا با توجه به $t=\frac{2}{3}s$ مکان x_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1=A\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{3}\Rightarrow x_1=\frac{A}{2}$$

۲ بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{2}{3}s$ نوسانگر برای اولین بار از $+\frac{A}{2}$ به سمت مرکز عبور می‌کند و کمینه زمان عبور مجدد از $+\frac{A}{2}$، یعنی نوسانگر به نقطهٔ بازگشت $-A$ برود و سپس به $+\frac{A}{2}$ برگردد، با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده و شکل زیر این بازهٔ زمانی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}\Rightarrow \Delta t=2\frac{T}{3}$$



۳ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

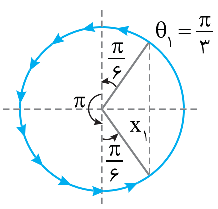
۴ Δt را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t=\frac{2}{3}\times4=\frac{8}{3}s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$

۱ فاز حرکت در مکان x_1 را حساب می‌کنیم و روی دایرهٔ مثلثاتی نشان می‌دهیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$



۲ برای آنکه مجدداً نوسانگر از $x_1=+\frac{A}{2}$ بگذرد باید فاز آن روی دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ روبه‌رو تغییر کند:

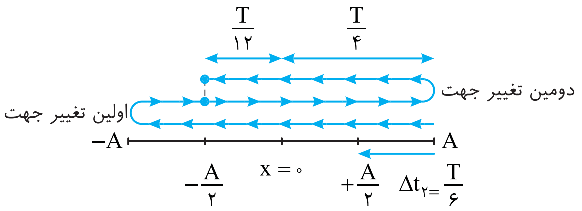
$$\Delta\theta=\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow\Delta\theta=\frac{4\pi}{3}$$

۳ زمان این تغییر فاز را حساب می‌کنیم.

$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{8}{3}s$$

B ۱۲۱۳ | ۲

خط فکری شما باید مسیر حرکت را بنا بر صورت مسئله رسم کنید، سپس بازه‌های زمانی را روی شکل بنویسید تا بتوانید بازه‌های زمانی بیان شده در صورت مسئله را مشخص کنید.



۱ زمان حرکت از $+A$ با دو بار تغییر جهت و رسیدن به $-\frac{A}{2}$ خواهد شد:

$$\Delta t_1=T+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{16T}{12}=\frac{4}{3}T$$

۲ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده، زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ برابر $\Delta t_2=\frac{T}{6}$ است.

۳ نسبت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{4T}{3}}{\frac{T}{6}}=8$$

B ۱۲۱۴ | ۳

یادآوری ریاضی هرگاه $\cos\alpha=\cos\beta$ باشد آنگاه: $\alpha=\beta$ یا $\alpha=2\pi-\beta$

در لحظهٔ t_1 و $2t_1$ مکان نوسانگر یکسان و برابر $x=-4cm$ است. بنابراین در این دو لحظه معادلهٔ حرکت را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_1}x_1=A\cos\omega t_1\\ \xrightarrow{t_2=2t_1}x_2=A\cos2\omega t_1\end{cases}\xrightarrow{x_1=x_2}$$

$$\cos\omega t_1=\cos2\omega t_1\Rightarrow\omega t_1=2\pi-2\omega t_1\Rightarrow3\omega t_1=2\pi\Rightarrow\omega t_1=\frac{2\pi}{3}$$

اکنون به کمک معادلهٔ حرکت A را حساب می‌کنیم:

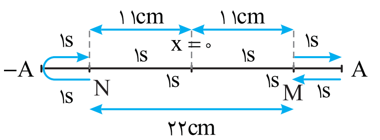
$$x=A\cos\omega t_1\Rightarrow-4=A\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow-4=A(-\frac{1}{2})\Rightarrow A=8cm$$

C ۱۲۱۵ | ۱

نکته در حرکت هماهنگ ساده در نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از حالت تعادل یکسان است، اندازهٔ سرعت برابر است.

خط فکری سرعت نوسانگر در نقاط M و N هم‌اندازه است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط M و N از حالت تعادل یکسان باشد. اما عبارت «دو بار عبور متوالی» نیز بسیار مهم است و معنی آن این است که نوسانگر از یک نقطه به انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) برود و برگردد. اکنون با توجه به این مطالب، مسیر را رسم کرده، زمان‌های داده شده در مسئله را روی آن بنویسید و دوره را حساب کنید. سپس به کمک معادلهٔ حرکت دامنه را به‌دست بیاورید.

۱ نقاط M و N را روی شکل در مکان‌های $x_M=11cm$ و $x_N=-11cm$ مشخص کنید.



۲ از M تا N دو ثانیه طول کشیده، بنابراین از M تا $x=0$ ، ۱s و از $x=0$ تا N نیز ۱s طول می‌کشد.

۳ دو بار عبور متوالی از نقطهٔ N دو ثانیه طول کشیده، یعنی از نقطهٔ N تا نقطهٔ بازگشت ۱s و از نقطهٔ بازگشت تا N نیز ۱s طول می‌کشد.

۴ از N تا M نیز ۲s طول می‌کشد و از M تا A و از A تا M هریک ۱s طول می‌کشد.

۵ بنابراین دوره خواهد شد: $T=1+2+2+2+1=8s$

۶ در لحظهٔ $t=1s$ نوسانگر از A به M می‌رود، یعنی مکانش در $t=1s$ برابر $x=11cm$ است. اکنون دامنه را به‌دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow11=A\cos\frac{2\pi}{8}\times1\Rightarrow A=11\sqrt{2}cm$$

C ۱۲۱۶ ۴

خط فکری باید بررسی کنیم که این معادلات را می‌توانیم به‌صورت تابع سینوسی یا کسینوسی بنویسیم، زیرا معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده یک تابع سینوسی است.

یادآوری ریاضی $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$

بررسی گزینهٔ (۱):

$$x=A\sin\omega t\cos\omega t \xrightarrow{۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha} x=\frac{A}{۲}\sin ۲\omega t$$

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است.

بررسی گزینهٔ (۳):

$$x=۲A\cos^{۲}\omega t-A\Rightarrow x=A(۲\cos^{۲}\omega t-۱)\Rightarrow x=A\cos ۲\omega t$$

این نیز معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است.

C ۱۲۱۷ ۳

به کمک ریاضی معادله را به‌صورت $x=A\cos\omega t$ درمی‌آوریم:

$$x=۱-۲\sin^{۲}۵\pi t\Rightarrow x=\cos ۱۰\pi t \xrightarrow{x=\frac{A}{۲}} \frac{۱}{۲}=\cos ۱۰\pi t\Rightarrow ۱۰\pi t=\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱}{۳۰}s$$

B ۱۲۱۸ ۱

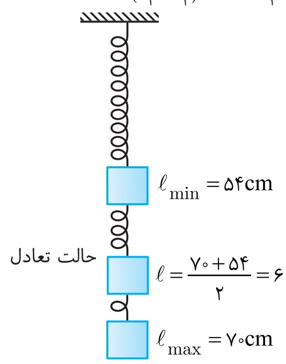
خط فکری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه نوسانگر به حالت تعادل (مرکز نوسان) نزدیک می‌شود تندی‌اش افزایش می‌یابد، بنابراین در حل این مسئله باید مشخص کنیم که وقتی طول فنر ۶۰cm و ۶۵cm است، فاصلهٔ آن از مرکز نوسان چند سانتی‌متر است و هر کدام که به مرکز نوسان نزدیک‌تر باشد تندی در آن نقطه بیشتر است.

یادآوری حرکت هماهنگ ساده، یک حرکت روی خط راست در دو طرف یک نقطه در وسط مسیر است.

۱ طول فنر را در حالتی که وزنه از مرکز نوسان (وسط مسیر) می‌گذرد به‌دست می‌آوریم:

$$\ell_{\text{حالت تعادل}}=\frac{۷۰+۵۴}{۲}=۶۲cm$$

۲ متحرک (نوسانگر) در ۶۰cm در فاصلهٔ ۶۲−۶۰=۲cm مرکز نوسان قرار دارد و در ۶۵cm در فاصلهٔ ۶۵−۶۲=۳cm مرکز قرار دارد و می‌دانیم که تندی متحرک در مرکز نوسان بیشینه است و با دور شدن از مرکز نوسان تندی کاهش می‌یابد، از این‌رو تندی $s_۱$ بزرگ‌تر از تندی $s_۲$ است. $(s_۱>s_۲)$

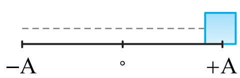


C ۱۲۱۹ ۴

خط فکری تندی متوسط $\frac{۲A\omega}{\pi}$ است. تندی متوسط را برحسب دامنهٔ A و دورهٔ T به‌دست می‌آوریم. سپس برای تک‌تک گزینه‌ها تندی را حساب کرده و با هم مقایسه می‌کنیم.

۱ با توجه به رابطهٔ $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ خواهیم داشت:

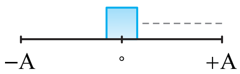
$$s_{av}=\frac{۲A\omega}{\pi}\xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} s_{av}=\frac{۲A}{\pi}\left(\frac{۲\pi}{T}\right)\Rightarrow s_{av}=\frac{۴A}{T}$$



۲ در بازهٔ صفر تا $\frac{T}{۲}$ یعنی در مدت نصف دوره، نوسانگر از +A تا −A حرکت می‌کند: $s_{av}=\frac{۲A}{\frac{T}{۲}}=\frac{۴A}{T}$ و گزینهٔ (۱) درست است.

۳ در بازهٔ صفر تا T یعنی در مدت یک دوره، نوسانگر مسافت ۴A را طی می‌کند. پس تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{۴A}{T}$ و گزینهٔ (۲) درست است.

۴ همچنین در بازهٔ $\frac{۳T}{۴}$ تا T نوسانگر از مکان $x_۱=A\cos(\frac{۲\pi}{T}\times\frac{۳T}{۴})=۰$ تا $x_۲=+A$ جابه‌جا می‌شود: $s_{av}=\frac{A}{T-\frac{۳T}{۴}}=\frac{۴A}{T}$



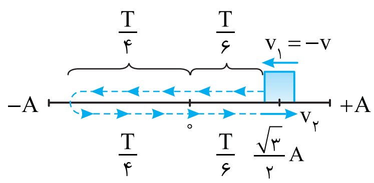
پس در هر سه گزینه تندی متوسط برابر $\frac{۲A\omega}{\pi}=\frac{۴A}{T}$ است.

C ۱۲۲۰ ۲

نکته هرگاه نوسانگر در حال نزدیک شدن به حالت تعادل باشد، اندازهٔ شتاب در حال کاهش است.

خط فکری باید در حل مسئله به تک‌تک عبارت‌ها و اطلاعات مسئله دقت کرد. مکان در لحظهٔ $t_۱$ مثبت $(x=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A)$ بوده و شتاب در حال کاهش است، یعنی نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک شده و سرعت آن منفی است $(v_۱=-v)$. عبارت «برای اولین بار مجدداً نوسانگر از مکان $\frac{+\sqrt{۳}}{۲}A$ بگذرد» یعنی نوسانگر به نقطهٔ بازگشت $(-A)$ برود و از آن نقطه برگردد. در این صورت وقتی به مکان $\frac{+\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌رسد، سرعت آن مثبت است $(v_۲=v)$. اکنون مسیر را رسم کنید و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده بازهٔ زمانی حرکت را بیابید تا بتوانید اندازهٔ شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ مسیر را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:



۲ بازهٔ زمانی کل مسیر خواهد شد:

$$\Delta t=۲\left(\frac{T}{۶}\right)+۲\left(\frac{T}{۴}\right)=\frac{T}{۳}+\frac{T}{۲}=\frac{۵T}{۶}$$

۳ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{v-(-v)}{\frac{۵T}{۶}}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۲v}{۵T}$$

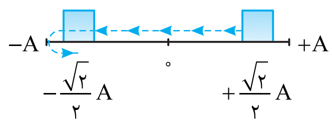
C ۱۲۲۱ ۲

خط فکری تکانه برابر $\vec{P}=m\vec{v}$ است، پس تکانه و سرعت هم‌جهت‌اند و می‌دانیم که نیرو نیز با شتاب هم‌جهت است $(\vec{F}=m\vec{a})$. بنابراین در لحظاتی که تکانه و نیرو هم‌جهت هستند، سرعت و شتاب نیز هم‌جهت بوده و حرکت تندشونده است. می‌دانیم هنگامی که نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز تعادل است، اندازهٔ سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است، بنابراین شما باید مشخص کنید که در بازهٔ $t_۱=۰/۰۵s$ تا $t_۲=۰/۲۵s$ نوسانگر از کجا به کجا رفته و چه مدت در حال نزدیک شدن به مرکز نوسان است.

راه‌حل اول: دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 5\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/4s$

بازهٔ $t=0/05s$ تا $t=0/25s$ در یک دوره قرار می‌گیرد، مکان متحرک در لحظه‌های داده شده را به‌دست آورده و مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

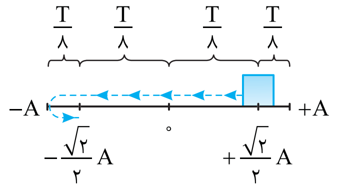
$$t_1=0/05s\Rightarrow x_1=A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A\ ,\ t_2=0/25s\Rightarrow x_2=A\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}A$$



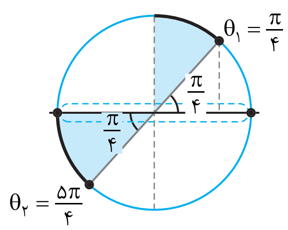
حال با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم:

از $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا مرکز تعادل و از $-A$ تا $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ حرکت تندشونده است. بنابراین

$$t=\frac{T}{8}+\frac{T}{8}=\frac{T}{4}=0/1s$$



راه‌حل دوم: در $t=0/05$ کمان دایرهٔ مثلثاتی (فاز) متناظر با $\theta_1=\omega t_1=\frac{\pi}{4}$ و در $t=0/25s$ کمان دایرهٔ مثلثاتی متناظر با $\theta_2=\omega t_2=\frac{5\pi}{4}$ است و در دایرهٔ مثلثاتی زیر در دو کمان θ_1 تا $\frac{\pi}{2}$ و π تا θ_2 نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز تعادل $x=0$ $(\theta=\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2})$ است و تندی آن در حال افزایش است، پس در این بازه‌ها حرکت تندشونده است و داریم:

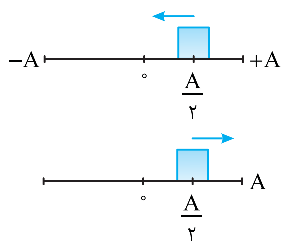


$$\frac{\pi}{2}-\theta_1=\omega\Delta t_1\Rightarrow\frac{\pi}{4}=5\pi\Delta t_1$$
$$\Rightarrow\Delta t_1=\frac{1}{20}s\Rightarrow\Delta t_1=0/05s$$
$$\theta_2-\pi=\omega\Delta t_2\Rightarrow\frac{\pi}{4}=5\pi\Delta t_2$$
$$\Rightarrow\Delta t_2=\frac{1}{20}s\Rightarrow\Delta t_2=0/05s$$

پس به مدت $\Delta t_1+\Delta t_2=0/1s$ حرکت نوسانگر تندشونده است.

B ۱۲۲۲ ۴

هر دو متحرک در فاصلهٔ $\frac{A}{2}$ از نقطهٔ تعادل قرار دارند و یکی از نوسانگرها در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل بوده و نوسانگر دیگر در حال حرکت به سمت انتهای مسیر است. در معادلهٔ حرکت $x=A\cos\omega t$ به جای x، $+\frac{A}{2}$ را قرار می‌دهیم و ωt را در هر حالت به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{A}{2}=A\cos\omega t_1\xrightarrow[\text{ربع اول}]{\text{در حال حرکت به سمت مرکز}}\cos\omega t_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\omega t_1=\frac{\pi}{3}$$
$$\frac{A}{2}=A\cos\omega t_2\xrightarrow[\text{ربع چهارم}]{\text{در حال حرکت به سمت انتهای مسیر}}\cos\omega t_2=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\omega t_2=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

بنابراین اختلاف شناسهٔ تابع کسینوسی (اختلاف فاز) خواهد شد:

$$\Delta\theta=\omega t_2-\omega t_1=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$

B ۱۲۲۳ ۱

خط فکری: در حرکت‌شناسی یاد گرفتیم که هرگاه لحظهٔ رسیدن دو به متحرک به هم را از ما خواسته باشند، باید معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار دهیم. پس شما هم همین کار را بکنید.

۱ بسامد زاویه‌ای نوسانگر اول خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{T_1=2s}\omega_1=\frac{2\pi}{2}\Rightarrow\omega_1=\pi\ rad/s$$

۲ معادلهٔ حرکت نوسانگر اول را می‌نویسیم. $x=A\cos\omega t\Rightarrow x_1=A\cos\pi t$

۳ بسامد زاویه‌ای نوسانگر دوم را به‌دست آورده و معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{T_2=6s}\omega_2=\frac{2\pi}{6}\Rightarrow\omega_2=\frac{\pi}{3}rad/s$$
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x_2=A\cos\frac{\pi}{3}t$$

۴ دو معادله را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_1=x_2\Rightarrow A\cos\pi t=A\cos\frac{\pi}{3}t\Rightarrow\cos\pi t=\cos\frac{\pi}{3}t$$

یادآوری ریاضی: $\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta$ یا $\alpha=2\pi-\beta$

$$\pi t=2\pi-\frac{\pi}{3}t\Rightarrow\frac{4\pi}{3}t=2\pi\Rightarrow t=\frac{3}{2}s=1/5s$$

۵ حال با جای‌گذاری $t=1/5s$ در x_1 یا x_2، مکان نوسانگرها را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1=A\cos\pi t\Rightarrow x_1=A\cos\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x_1=0$$

C ۱۲۲۴ ۱

یادآوری: مکان نوسانگر یعنی فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ (حالت تعادل).

در $t=1s$ فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادلش $x_1=A-b$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{t=1s}A-b=A\cos\omega\Rightarrow\cos\omega=\frac{A-b}{A}$$

در $t=2s$ مکان نوسانگر برابر $x_2=A-(b+c)$ می‌شود. از این‌رو می‌توان نوشت:

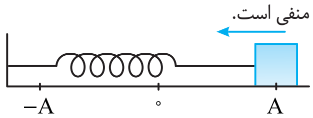
$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{t=2s}A-b-c=A\cos2\omega\Rightarrow\cos2\omega=\frac{A-b-c}{A}$$

یادآوری ریاضی: $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

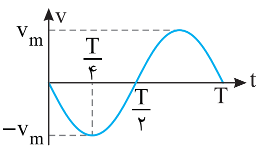
$$\cos2\omega=2\cos^2\omega-1\Rightarrow\frac{A-b-c}{A}=2(\frac{A-b}{A})^2-1$$
$$\Rightarrow\frac{A-b-c}{A}=\frac{2A^2-4Ab+2b^2-A^2}{A^2}$$
$$\Rightarrow A^2-Ab-Ac=A^2-4Ab+2b^2\Rightarrow3Ab-Ac=2b^2\Rightarrow A=\frac{2b^2}{3b-c}$$

B ۱۲۲۵ ۴

متحرک از $x=+A$ رها شده پس در لحظهٔ $t=0$ سرعت متحرک صفر می‌باشد و پس از رها شدن مطابق شکل نوسانگر در خلاف جهت محور x ها شروع به حرکت می‌کند و سرعت متحرک ابتدا منفی است.



یعنی نمودار باید در مدت $\frac{T}{2}$ که نوسانگر از A به $-A$ می‌رود، زیر محور زمان باشد. البته در $\frac{T}{4}$ تندی بیشینه است و در برگشت از $-A$ به $+A$ سرعت مثبت و باید نمودار بالای محور زمان باشد. بنابراین نمودار سرعت زمان به شکل روبه‌رو است و گزینهٔ (۴) درست است.



B ۱۲۲۶ ۱

خط فکری: ابتدا دورهٔ حرکت را با توجه به نمودار $x-t$ به دست آورده و سپس به صورت تقریبی مشخص می‌کنیم که در $t=1/3s$ نوسانگر در چه مکانی قرار می‌گیرد تا مشخص شود علامت سرعت و شتاب آن چگونه است.

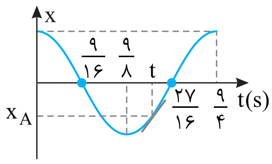
۱ با توجه به نمودار در $t=0/75s$ نوسانگر برای اولین بار به $x=\frac{-A}{2}$ رسیده است. از این رو در معادلهٔ حرکت t را $0/75s$ و x را $-\frac{A}{2}$ قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{-A}{2}=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\omega t=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times\frac{75}{100}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{9}{4}s=2/25s$$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.

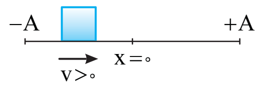
۳ مشخص می‌کنیم که لحظهٔ $t=1/3s$ بین کدام لحظه‌های روی شکل است: $\frac{9}{8}<1/3<\frac{27}{16}$



یعنی متحرک در لحظهٔ $t=1/3s$ در قسمت سوم نمودار بوده و مکان آن منفی است.

۴ در حرکت هماهنگ سادهٔ شتاب و مکان هم‌علامت نیستند و وقتی مکان منفی است، شتاب مثبت است.

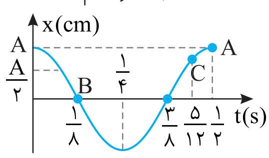
۵ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=1/3s$ مثبت است، بنابراین سرعت مثبت است. البته می‌توان این‌گونه استدلال کرد که متحرک از مکان‌های منفی در حال حرکت به سوی حالت تعادل است، بنابراین سرعت آن مثبت است.



C ۱۲۲۷ ۲

خط فکری: در حرکت هماهنگ ساده، هرچه مکان نوسانگر به حالت تعادل $x=0$ نزدیک‌تر باشد، تندی نوسانگر بیشتر است. بنابراین باید مکان نوسانگر را در سه لحظهٔ بیان شده مشخص کرد تا بتوانیم دربارهٔ مقایسهٔ تندی آن‌ها اظهارنظر کنیم.

ابتدا دورهٔ حرکت را با توجه به نمودار به دست می‌آوریم. در $t=\frac{1}{12}s$ نوسانگر برای اولین بار از $\frac{A}{2}$ عبور کرده است:



$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{1}{2}=\cos\omega t$$

$$\omega t=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{t=\frac{1}{12}s}\omega\times\frac{1}{12}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\omega=4\pi\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}T=\frac{1}{2}s$$

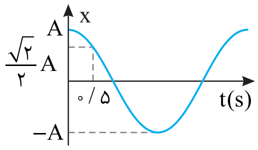
اکنون در لحظه‌های t_1، t_2 و t_3 مکان نوسانگر را مشخص می‌کنیم. هرچه مکان به مبدأ (حالت تعادل) نزدیک‌تر باشد تندی بیشتر است. در $t_1=\frac{1}{2}s$ نوسانگر در مکان A بوده و تندی صفر است و در $t_3=\frac{1}{8}s$ نوسانگر در نقطهٔ B در حال گذر از مرکز نوسان است و تندی‌اش بیشینه است. در لحظهٔ $t_2=\frac{5}{12}s$ یعنی نقطهٔ C نمودار تندی بین صفر و v_m است. پس $s_1<s_2<s_3$.

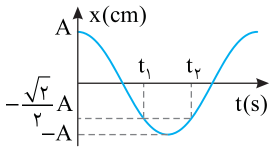
C ۱۲۲۸ ۱

با توجه به نمودار $x-t$، در لحظهٔ $t=0/5s$ نوسانگر برای اولین بار از $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega t=\frac{\pi}{4}\xrightarrow{t=0/5s}\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}rad/s$$





با توجه به اینکه نوسانگر در t_1 و t_2 دو بار پشت سر هم از $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ عبور کرده پس دو حالت داریم:

حالت اول:

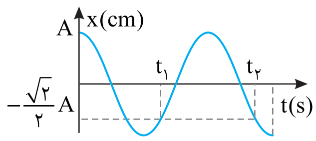
$$x_1=A\cos\frac{\pi}{2}t_1\Rightarrow\frac{-\sqrt{2}}{2}\theta=\cos\frac{\pi}{2}t_1\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_1=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow t_1=\frac{3}{2}s$$

$$x_2=A\cos\frac{\pi}{2}t_2\Rightarrow\frac{-\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{2}t_2\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_2=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow t_2=\frac{5}{2}s$$

$$\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=\frac{5}{3}$$

اما نسبت به دست آمده با فرض مسئلهٔ سازگاری ($\frac{t_2}{t_1}=2/2$) ندارد و قابل قبول نیست.

حالت دوم:



$$x=A\cos\frac{\pi}{2}t_1\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_1=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow t_1=\frac{5}{2}s$$

$$x=A\cos\frac{\pi}{2}t_2\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_2=\frac{11\pi}{4}\Rightarrow t_2=\frac{11}{2}s$$

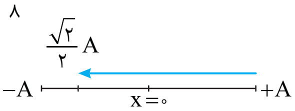
$$\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=2/2$$

بنابراین حالت دوم درست می‌باشد و $t_1=2/5s$ است.

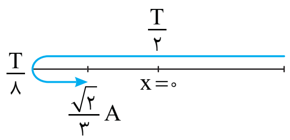
روش دیگر: با رسم مسیر و بازه‌های زمانی شناخته شده

مدت زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $+A$ به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ برود برابر $\frac{T}{8}$ است. بنابراین دوره خواهد شد: $\frac{T}{8}=0/5\Rightarrow T=4s$

حالت اول:



$$t_1=\frac{T}{4}+\frac{T}{8}=\frac{3T}{8}=\frac{3}{8}\times4=\frac{3}{2}s$$

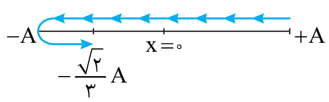


$$t_2=\frac{T}{2}+\frac{T}{8}=\frac{5T}{8}\Rightarrow t_2=\frac{5}{8}\times4=\frac{5}{2}s$$

نسبت t_2 به t_1 را حساب می‌کنیم: $\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$

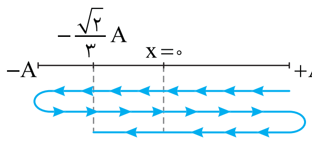
با فرض مسئله سازگاری ندارد و جواب نیست.

حالت دوم:



$$t_1=\frac{T}{2}+\frac{T}{8}=\frac{5\pi}{8}$$

$$t_1=\frac{5}{8}\times4\Rightarrow t_1=\frac{5}{2}s$$



$$t_2=T+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}\Rightarrow t_2=\frac{11T}{8}$$

$$\Rightarrow t_2=\frac{11}{8}\times4\Rightarrow t_2=\frac{11}{2}s$$

نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ را حساب می‌کنیم: $\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{11}{2}}{\frac{5}{2}}=2/2s$

بنابراین حالت دوم درست است و t_1 برابر $2/5s$ است.

B ۱۲۲۹ ۳

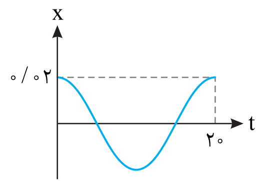
یادآوری ریاضی $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده را به شکل معادلهٔ کتاب درسی $x=A\cos\omega t$ درمی‌آوریم:

$$x=۰/۰۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰}t)\Rightarrow x=۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۱۰}t)$$

دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲۰s$

اکنون می‌توان نمودار را رسم کرد.



بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

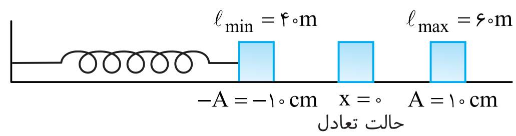
C ۱۲۳۰ ۲

۱ دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=۲kg,\ k=۸۰۰N/m}T=۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۸۰۰}}\xrightarrow{\pi\simeq۳}$$

$$T=۲\times۳\times\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow T=۰/۳s$$

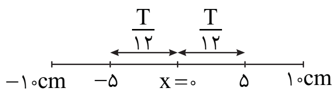
۲ طول پاره‌خط مسیر برابر اختلاف بیشینه طول فنر (ℓ_{max}) و کمینه طول فنر (ℓ_{min}) است. $طول\ مسیر=\ell_{max}-\ell_{min}=۶۰-۴۰=۲۰cm$



۳ دامنهٔ حرکت نصف طول مسیر حرکت است. $A=\frac{۲۰}{۲}=۱۰cm$

۴ تغییر طول فنر در اطراف $x=۰$ (نقطهٔ تعادل) در زمان کوتاه‌تری نسبت به مکان‌های دیگر انجام می‌شود زیرا در اطراف این نقطه تندی نوسانگر بیشینه است، بنابراین تغییر طول به اندازهٔ ۱۰cm در بین $x=-۵cm$ تا $x=+۵cm$ و بالعکس در زمان کوتاه‌تری نسبت به تغییر طول به اندازهٔ ۱۰cm در بقیه مسیر صورت می‌گیرد.

۵ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از $+۵cm$ به $-۵cm$ خواهد شد. $\Delta t=۲\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}\xrightarrow{T=۰/۳s}\Delta t=\frac{۰/۳}{۶}=۰/۰۵s$



B ۱۲۳۱ ۳

خط فکری از مبحث دینامیک استفاده کنید. هنگامی که وزنه‌ها در حال تعادل هستند نیروی خالص وارد بر وزنه‌ها صفر بوده و نیروها متوازن هستند. با توجه به این مطلب می‌توانید، ثابت فنر را حساب کنید. بعد از جداشدن B، تنها A به فنر متصل بوده و دوره خواهد شد: $T=۲\pi\sqrt{m_A/k}$

۱ ابتدا ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=۰\Rightarrow(m_A+m_B)g=k\Delta\ell\Rightarrow$$

$$(۰/۱+۰/۳)\times۱۰=k(۰/۳-۰/۲)\Rightarrow k=۴۰N/m$$

۲ بعد از جدایی وزنهٔ B، وزنهٔ A حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت، بنابراین:

$$T_A=۲\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}}\Rightarrow T_A=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۱}{۴۰}}\Rightarrow T_A=\frac{\pi}{۱۰}s$$

B ۱۲۳۲ ۱

نکته هرگاه n فنر مشابه به یک وزنه متصل شوند، می‌توان به جای n فنر، یک فنر با ثابت $k'=nk$ در نظر گرفته و مسئله را حل کرد.

ابتدا دورهٔ دستگاه با جرم m و ثابت k را به‌دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۲۰}=۳s$

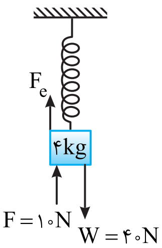
رابطهٔ دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و دوره در حالت دوم (T') را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\\ T'=۲\pi\sqrt{\frac{m'}{k'}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{m'}{m}}\times\sqrt{\frac{k}{k'}}\xrightarrow[k'=۳k]{m'=\frac{m}{۳}}$$

$$\frac{T'}{۳}=\sqrt{\frac{۱}{۳}}\times\sqrt{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow\frac{T'}{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow T'=۱s$$

بسامد خواهد شد: $f'=\frac{۱}{T'}\Rightarrow f'=\frac{۱}{۱}\Rightarrow f'=۱Hz$

C ۱۲۳۳ ۳



۱ نیروهای وارد بر وزنه وقتی که ساکن است متوازن است. نیروها را رسم کرده به کمک آن ثابت فنر را حساب می‌کنیم.

طول فنر از طول طبیعی‌اش بیشتر شده بنابراین نیروی کشسانی فنر رو به بالا است.

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_e+F=W\Rightarrow k\Delta\ell+۱۰=۴۰\xrightarrow{\Delta\ell=۳cm}$$

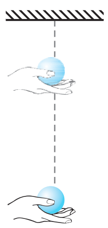
$$۳۰=k\times\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow k=۱۰۰۰N/m$$

۲ با حذف F وزنه شروع به نوسان کرده و دورهٔ حرکت آن خواهد شد:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰۰}}\Rightarrow T=۲\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰}}$$

$$T=۲\times۰/۲=۰/۴s$$

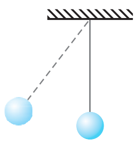
B ۱۲۳۴ ۱



خط فکری صورت سؤال را مجدداً بخوانید. گلوله را می‌گیریم و در امتداد قائم تا محل آویز می‌بریم و از آن‌جا رها می‌کنیم. در این صورت گلوله با شتاب گرانش g پایین می‌آید و زمان پایین آمدن آن را باید از معادلهٔ جابه‌جایی زمان حرکت با شتاب ثابت به‌دست بیاورید. اما در حالت دوم آونگ را از راستای قائم رها می‌کنیم تا نوسان کند. در این حالت مدت زمان برگشت آونگ از دامنه به حالت تعادل (راستای قائم) $\frac{۱}{۴}$ دوره است و باید دوره آونگ را حساب کرد و $\frac{۱}{۴}$ آن را به‌دست آورد و با حالت اول مقایسه کرد.

گلوله را از ارتفاع L (طول آونگ) رها کرده‌ایم. زمان رسیدن گلوله به حالت اولیه خواهد شد:

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow\ell=\frac{۱}{۲}gt_۱^۲\Rightarrow t_۱=\sqrt{\frac{۲\ell}{g}}$$



زمان برگشت آونگ از انتهای مسیر به حالت قائم $\frac{۱}{۴}$ دورهٔ آن است.

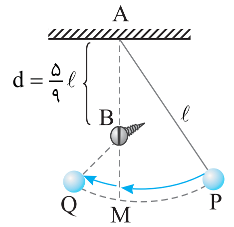
$$t_۲=\frac{T}{۴}=\frac{۲\pi}{۴}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow t_۲=\frac{\pi}{۲}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow t_۲=\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}\frac{\ell}{g}}$$

$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\sqrt{\frac{۲\ell}{g}}}{\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}\frac{\ell}{g}}}=\sqrt{\frac{۸}{\pi^۲}}\xrightarrow{\pi^۲\approx۱۰}\frac{t_۱}{t_۲}\approx\sqrt{۰/۸}\approx۰/۹<۱$$

بنابراین آونگ اول زودتر به حالت اولیه برمی‌گردد.

C ۱۲۳۵ ۳

خط فکری دقت کنید وقتی ریسمان آونگ به مانع گیر می‌کند قسمت پایین آونگ، خودش یک آونگ جدید با طول $\frac{۴}{۹}\ell$ می‌شود. یعنی مسیر رفت و برگشت PM و MP را با یک آونگ به طول ℓ و دورهٔ $T=۲\pi\sqrt{\ell/g}$ در نظر بگیرید، اما مسیر رفت و برگشت MQ و QM را آونگی به طول $\frac{۴\ell}{۹}$ و دورهٔ $T'=۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۴\ell}{۹}}{g}}$ سروکار دارید. اکنون با توجه به این مطالب به سراغ حل مسئله می‌رویم.



۱ از P تا M و از M تا P بازهٔ زمانی نوسان $۲\times\frac{T}{۴}$ است و از M تا Q و Q تا M بازهٔ زمانی نوسان $۲\times\frac{T'}{۴}$ است.

۲ زمان یک نوسان کامل این آونگ ترکیبی، جمع این دو بازهٔ زمانی است.

$$T_۲=۲\times\frac{T}{۴}+۲\frac{T'}{۴}=\frac{T}{۲}+\frac{T'}{۲}\Rightarrow T_۲=\frac{۱}{۲}(T+T')\Rightarrow$$

$$T_۲=\frac{۱}{۲}(۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}+۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۴}{۹}\ell}{g}})\Rightarrow T_۲=\frac{۱}{۲}\times۲\pi(\sqrt{\frac{\ell}{g}}+\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{\ell}{g}})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۳}\times۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\Rightarrow T_۲=\frac{۵}{۶}T$$

B ۱۲۳۶ ۱

قبل از حل مسئله باید با هم یک مقداری ریاضی تمرین کنیم. به جواب هریک از پرانتزها دقت کنید.

$$(۱+۰/۰۱)^۲=۱+۰/۰۲+۰/۰۰۰۱=۱/۰۲۰۱\sim۱/۰۲=[۱+۲(۰/۰۱)]$$

$$(۱+۰/۰۱)^۳=۱+۳(۰/۰۱)+۳(۰/۰۰۰۱)+(۰/۰۰۰۰۰۱)=۱/۰۳۰۳۰۱\sim۱/۰۳$$

مثل این است که هرگاه یک عدد کمتر از (۱) را با یک جمع کنیم و به توان برسانیم با تقریب خوبی می‌توانیم بنویسیم: $(۱+\varepsilon)^n\sim۱+n\varepsilon$

در حل این مسئله باید از این تقریب استفاده کنید.

۱ طول ثانویه را برحسب طول اولیه به‌دست می‌آوریم.

$$\ell_۲=\ell_۱(۱+\alpha\Delta\theta)\Rightarrow\ell_۲=\ell_۱(۱+۱/۱\times۱۰^{-۵}\times۴۰)$$

$$\Rightarrow\ell_۲=\ell_۱(۱+۴/۴\times۱۰^{-۴})=۱/۰۰۰۴۴\,\ell_۱$$

۲ دورهٔ آونگ در حالت اول ۲s است دوره را در حالت دوم به‌دست می‌آوریم.

$$\left\{\begin{array}{l}T_۲=۲\pi\sqrt{\frac{\ell_۲}{g}}\\ T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{\ell_۱}{g}}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{۱/۰۰۰۴۴\ell_۱}{\ell_۱}}\Rightarrow T_۲=T_۱\sqrt{۱/۰۰۰۴۴}$$

$$\Rightarrow T_۲=T_۱(۱+۰/۰۰۰۴۴)^{\frac{۱}{۲}}$$

اکنون از تقریب بالا استفاده می‌کنیم. $T_۲=۲(۱+\frac{۱}{۲}\times۰/۰۰۰۴۴)=۲/۰۰۰۴۴\Rightarrow$

تغییر دوره خواهد شد: $\Delta T=T_۲-T_۱=۲/۰۰۰۴۴-۲=۰/۰۰۰۴۴s$

پنجره ۲

A ۱۲۳۷ ۳

بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$ و در حرکت سامانهٔ جرم فنر نیروی خالص وارد بر نوسانگر $F=kx$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|ma|=k|x|\Rightarrow|a|=\frac{k}{m}|x|\Rightarrow|a|=|\frac{۲۰۰}{۰/۰۸}\times(\frac{-۲}{۱۰۰})|=۵۰m/s^۲$$

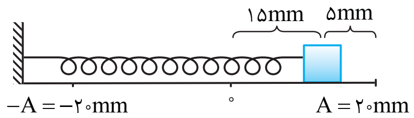
میانبر معادلهٔ شتاب - مکان نوسانگر به‌صورت $a=-\omega^۲x$ است.

B ۱۲۳۸ ۴

نکته نوسانگر در هر دوره، دو بار از مرکز نوسان خود عبور می‌کند.

۱ نوسانگر در هر دقیقه $\frac{۳۰}{۲}=۱۵$ نوسان کامل انجام می‌دهد.

۲ فاصلهٔ دو انتهای مسیر از هم برابر ۴cm داده شده پس دامنهٔ حرکت برابر $A=۲cm=۲۰mm$ است.



۳ دوره را به‌دست می‌آوریم. $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۱۵}=۴s$

۴ بسامد زاویه‌ای برابر است با: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۴}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}rad/s$

۵ فاصلهٔ نوسانگر از انتهای مسیر $۵mm=۰/۵cm$ بوده بنابراین مکان متحرک خواهد شد: $x=۱۵mm=۱/۵cm$

۶ اندازهٔ شتاب خواهد شد: $|a|=|-\omega^۲x|\Rightarrow a=\frac{\pi^۲}{۴}\times۱/۵=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵\,cm/s^۲$

B ۱۲۳۹ ۱

خط فکری شتاب حرکت را در یک مکان معین باید به‌دست بیاوریم بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای و مکان نوسانگر را دقیقاً مشخص کنید و با استفاده از رابطهٔ $|a|=\omega^۲x$ مسئله را حل کنید.

۱ ابتدا بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۱۸۰}{۰/۲}}\Rightarrow\omega=۳۰rad/s$

نکته هرگاه وزنه را از حالت تعادل منحرف و رها کنیم، مقدار انحراف برابر دامنهٔ نوسان است.

۲ چون وزنه از فاصلهٔ ۵cm حالت تعادل رها شده است، دامنهٔ نوسانگر ۵cm است. فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادل وقتی پس از رها شدن ۲cm بالا رفته، برابر $x=۳cm$ است. شتاب در مکان $x=۳cm$ برابر است با:

$$|a|=\omega^۲x\Rightarrow a=۹۰۰\times۰/۰۳=۲۷m/s^۲$$

B ۱۲۴۰ ۱

خط فکری رابطهٔ $a+۴x=۰$ را به‌صورت $a=-۴x$ نوشته و آن را با معادلهٔ شتاب - مکان $a=-\omega^۲x$ مقایسه می‌کنیم. با مقایسهٔ دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\left\{\begin{array}{l}a=-۴x\\ a=-\omega^۲x\end{array}\right.\Rightarrow\omega^۲=۴\Rightarrow\omega=۲rad/s$$

دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۲=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\pi s$

A ۱۲۴۱ ۳

یادآوری در حرکت هماهنگ ساده، بیشینه شتاب نوسانگر از رابطهٔ $a_m=A\omega^۲$ به‌دست می‌آید که در آن A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای است.

نوسانگر در هر ۰/۴ ثانیه ۲ نوسان کامل انجام می‌دهد، بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{۰/۴}{۲}=۰/۲s$$

بسامد زاویه را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۰/۲}\Rightarrow\omega=۱۰\pi\,rad/s$

با توجه به رابطهٔ شتاب بیشینه داریم:

$$a_{max}=A\omega^۲=A\times۱۰۰\pi^۲\Rightarrow A\times۱۰^۳=۲۰\Rightarrow A=۲\times۱۰^{-۲}m=۲cm$$

چون N و M دو سر پاره‌خط نوسان هستند پس طول MN برابر است با:

$$MN=۲A=۴cm$$

A ۱۲۴۲ | ۴

با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ و قانون هوک $F=-kx$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}F_{max}=ma_m\\ |F|=kx\end{cases}\Rightarrow ma_m=kA\Rightarrow a_m=\frac{k}{m}A\Rightarrow ۲=\frac{۱۰}{m}\times\frac{۸}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow m=\frac{۸}{۲۰}kg=۴۰۰g$$

C ۱۲۴۳ | ۱

نکته تمام روابطی که در بررسی سامانهٔ جرم - فنر به دست آورده شده در حرکت آونگ ساده نیز صادق است از جمله رابطهٔ بین شتاب نوسانگر با مکان آن یعنی $a=-\omega^2x$

در این صورت ابتدا بسامد زاویه‌ای را به دست می‌آوریم: $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\omega=\sqrt{۱۰}\,rad/s$

طول مسیر ۶cm است بنابراین دامنهٔ حرکت $A=\frac{۶}{۲}=۳cm$ است و وقتی آونگ در فاصلهٔ ۱cm از انتهای مسیرش است، مکان آن $x=۲cm$ خواهد بود. بنابراین:

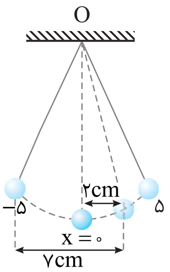
$$a=-\omega^2x\Rightarrow|a|=+(۱۰)(۲\times۱۰^{-۲})=۰/۲m/s^2$$

بازی با سؤال **گلوله‌ای به جرم ۱۵۰g به انتهای نخی سبک به طول ۱۵cm آویخته شده و روی مسیری به طول ۱۰cm نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که گلوله در فاصله ۷cm از یک انتهای مسیر قرار دارد، اندازه شتاب چند متر بر مجذور ثانیه است؟ $(g=۱۰m/s^2)$**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ **دامنه نوسان آونگ نصف طول مسیر آن است.** $A=\frac{۱۰}{۲}=۵cm$

وقتی گلوله آونگ در فاصله ۷cm از یک انتهای مسیر است باید فاصله آن از حالت تعادل مطابق شکل ۲cm باشد. $(x=۲cm)$



اکنون بسامد زاویه‌ای را به دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۰/۱۵}}=\sqrt{\frac{۱۰۰۰}{۱۵}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۲۰۰}{۳}}rad/s$$

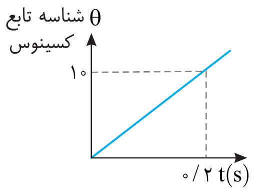
اندازه شتاب خواهد شد. $|a|=\omega^2x\Rightarrow|a|=\frac{۲۰۰}{۳}\times\frac{۲}{۱۰۰}\Rightarrow a=\frac{۴}{۳}m/s^2$

گزینه ۲

A ۱۲۴۴ | ۱

دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر است. $A=\frac{۴}{۲}=۲cm$

یادآوری کمان مثلثاتی در معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ را شناسهٔ تابع کسینوس یا فاز (ωt) گویند.



با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۰/۲s$، شناسهٔ تابع کسینوس (فاز) ۱۰ رادیان است. بنابراین بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega t=۱۰\Rightarrow\omega\times۰/۲=۱۰\Rightarrow\omega=۵۰rad/s$$

اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^2x\Rightarrow|a|=(۵۰)^2\times\frac{\sqrt{۲}}{۱۰۰}\Rightarrow|a|=۲۵\sqrt{۲}m/s^2$$

بازی با سؤال **شناسه تابع کسینوسی نوسانگری در لحظهٔ t برابر π است، اگر دامنهٔ حرکت ۲cm و دورهٔ آن π ثانیه باشد، پس از گذشت $\frac{T}{۶}$ ثانیه از لحظهٔ t، اندازهٔ شتاب نوسانگر چند متر بر مجذور ثانیه است؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲}{۲۵}$

پاسخ **لحظه‌ای که شناسهٔ تابع کسینوسی برابر π است را به‌دست می‌آوریم:**

$$\omega t=\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\times t=\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{\pi}\times t=\pi\Rightarrow t=\frac{\pi}{۲}s$$

مکان در $\frac{T}{۶}$ بعد از t را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲\,rad/s$$

$$x=۰/۰۲\cos\omega(t+\frac{T}{۶})\Rightarrow x=۰/۰۲\cos۲(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{۴\pi}{۳}=-۰/۰۱m$$

اندازهٔ شتاب برابر است با: $|a|=|\omega^2x|=۴\times۰/۰۱=\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۵}m/s^2$

گزینه ۳

A ۱۲۴۵ | ۲

خط فکری معادلهٔ شتاب - مکان حرکت هماهنگ ساده به‌صورت $|a|=\omega^2x$ است. بنابراین از روی معادلهٔ حرکت $x=۰/۰۲\cos\pi t$ بسامد زاویه‌ای نوسانگر و مکان نوسانگر در $t=\frac{۱}{۳}s$ به‌دست می‌آوریم و اندازهٔ شتاب را حساب می‌کنیم.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ $x=۰/۰۲\cos\pi t$ با $x=A\cos\omega t$ مشخص است که بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\pi rad/s$ است.

۲ مکان در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۳}s$ خواهد شد:

$$x=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۰/۰۲\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۰/۰۱m$$

۳ اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$|a|=\omega^2x\Rightarrow|a|=\pi^2\times۰/۰۱\xrightarrow{\pi^2=۱۰}|a|=۰/۱m/s^2=۱۰cm/s^2$$

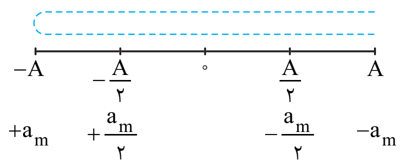
یادآوری در حرکت هماهنگ ساده مکان و شتاب هم‌علامت نیستند.

۴ مکان مثبت است از این رو شتاب باید منفی باشد: $a=-۱۰cm/s^2$

B ۱۲۴۶ | ۱

خط فکری در نقاط بازگشت یعنی $x=A$ و $x=-A$ شتاب نوسانگر بیشینه است $(a_m=A\omega^2)$. اندازهٔ شتاب با مکان نوسانگر نسبت مستقیم دارد $|a|=\omega^2x$. بنابراین در لحظه‌هایی که اندازهٔ شتاب نصف اندازهٔ شتاب بیشینه است، مکان نوسانگر $x=\pm\frac{A}{۲}$ خواهد بود. بنابراین شما کافی است در معادلهٔ حرکت به‌جای x مقدار $\pm\frac{A}{۲}$ را قرار داده و زمان را به‌دست بیاورید.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\pm\frac{A}{۲}=A\cos\frac{۲\pi}{T}t\Rightarrow\cos\frac{۲\pi}{T}t=\pm\frac{۱}{۲}$$



یادآوری ریاضی هرگاه $\cos\alpha=\pm\frac{۱}{۲}$ باشد در یک دوره برابر $\frac{\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ است.

با توجه به یادآوری ریاضی:

$$\frac{۲\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_1=\frac{T}{۶}\quad,\quad\frac{۲\pi}{T}t_2=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow t_2=\frac{T}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{T}t_3=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow t_3=\frac{۲T}{۳}\quad,\quad\frac{۲\pi}{T}t_4=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow t_4=\frac{۵T}{۶}$$

A ۱۲۴۷ ۱

نکته بزرگی شتاب بر حسب مکان نوسانگر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|a|=\omega^{۲}|x|$$

مکان متحرک در نقطهٔ M، ۱cm است:

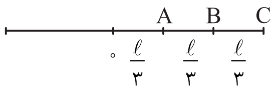
$$|a|=\omega^{۲}|x|\Rightarrow ۴=\omega^{۲}\times\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\omega^{۲}=۴۰۰\Rightarrow\omega=۲۰\,rad/s$$

یادآوری بسامد زاویه‌ای سیستم جرم - فنر برابر $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ است:

بسامد زاویه‌ای سیستم جرم - فنر ۲۰rad/s و جرم آن ۲kg است:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega^{۲}=\frac{k}{m}\Rightarrow ۴۰۰=\frac{k}{۲}\Rightarrow k=۸۰۰\,N/m$$

بازی با سؤال **در شکل زیر نوسانگری روی پاره‌خط نشان داده شده در حال نوسان می‌باشد. شتاب در نقاط A، B و C را به ترتیب با a_A، a_B و a_C نشان می‌دهیم. کدام گزینه در مورد شتاب در این سه نقطه درست است؟**



۱) $|a_A|=|a_B|=|a_C|$
۲) $|a_C|=۳|a_B|=۱/۵|a_A|$
۳) $|a_C|=\frac{۳}{۲}|a_B|=۳|a_A|$
۴) $|a_C|=۳|a_A|=۲|a_B|$

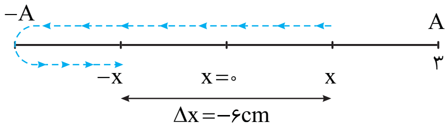
پاسخ **با توجه به معادلهٔ شتاب - مکان حرکت هماهنگ ساده ($|a|=\omega^{۲}x$) شتاب با مکان نسبت مستقیم دارد. شتاب در مکان‌های A، B و C را به‌دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم.** $|a|=\omega^{۲}x$

$$|a_A|=\omega^{۲}\frac{\ell}{۳}\ ,\ |a_B|=\omega^{۲}\frac{۲\ell}{۳}\ ,\ |a_C|=\omega^{۲}\ell\Rightarrow|a_C|=\frac{۳}{۲}|a_B|=۳|a_A|$$

گزینهٔ ۳

B ۱۲۴۸ ۲

خط فکری نصف دوره ۰/۲s است ($T=۰/۴s$). در مدت $\frac{T}{۲}$، مکان و سرعت متحرک قرینه می‌شود و وقتی جابه‌جایی −۶cm است، مطابق شکل متحرک از مکان +۳cm به مکان −۳cm رفته است. با توجه به این مطلب اندازهٔ شتاب قابل محاسبه است.



۱ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم. $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۴}\Rightarrow\omega=۵\pi\,rad/s$

۲ اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^{۲}|x|\Rightarrow|a|=(۵\pi)^{۲}(\frac{۳}{۱۰۰})\Rightarrow|a|=۷/۵\,m/s^{۲}$$

۳ در ابتدای این بازه مکان نوسانگر مثبت است، بنابراین شتاب آن منفی است یعنی $a=-۷/۵\,m/s^{۲}$ است.

C ۱۲۴۹ ۴

خط فکری ابتدا باید مکان نوسانگر در لحظه‌ای که شتاب $۸\pi^{۲}\sqrt{۲}\,m/s^{۲}$ است را به‌دست بیاورید. در بازهٔ $t=\frac{۱}{۶۰}s$ تا $t=\frac{۱}{۱۰}s$ مکان نوسانگر را مشخص کنید تا بتوانید تعیین کنید چه مدت شتاب از $۸\pi^{۲}\sqrt{۲}\,m/s^{۲}$ کوچکتر است.

۱ با توجه به معادلهٔ حرکت $x=۰/۰۴\cos ۲۰\pi t$ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. $\omega=۲۰\pi\,rad/s$

۲ مکان نوسانگر وقتی شتاب $۸\pi^{۲}\sqrt{۲}\,m/s^{۲}$ است را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^{۲}x\Rightarrow ۸\pi^{۲}\sqrt{۲}=(۲۰\pi)^{۲}x\Rightarrow ۸\pi^{۲}\sqrt{۲}=۴۰۰\pi^{۲}x$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱۰۰}m=۲\sqrt{۲}\,cm$$

۳ مکان نوسانگر در لحظه‌های $t=\frac{۱}{۶۰}s$ و $t=\frac{۱}{۱۰}s$ خواهد شد:

$$x=۰/۰۴\cos ۲۰\pi t\begin{cases}\xrightarrow{t=\frac{۱}{۶۰}s}x_{۱}=۰/۰۴\cos ۲۰\pi\times\frac{۱}{۶۰}=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۳}\\ \xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۰}s}x_{۲}=۰/۰۴\cos ۲۰\pi\times\frac{۱}{۱۰}\end{cases}$$

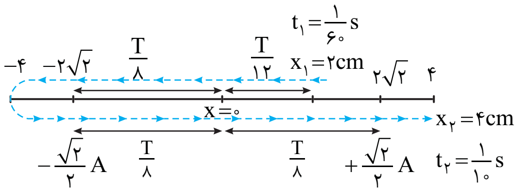
$$\Rightarrow\begin{cases}x_{۱}=۰/۰۲m=۲cm\\ x_{۲}=۰/۰۴\cos ۲\pi\Rightarrow x_{۲}=۰/۰۴m=۴cm\end{cases}$$

۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و مکان‌های $x_{۱}$ و $x_{۲}$ را روی آن نشان می‌دهیم.

۵ دوره را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۲۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۱s$

۶ در مکان‌هایی که $-۲\sqrt{۲}<x<۲\sqrt{۲}$ شتاب از $۸\pi^{۲}\sqrt{۲}\,m/s^{۲}$ کمتر است. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۸}+\frac{T}{۸}+\frac{T}{۸}+\frac{T}{۱۲}+\frac{۳T}{۸}=\frac{۲T+۹T}{۲۴}=\frac{۱۱T}{۲۴}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱۱}{۲۴}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۱}{۲۴۰}s$$



C ۱۲۵۰ ۴

خط فکری بیشینهٔ شتاب نوسانگر $a_m=A\omega^{۲}$ است از این رو شما باید بسامد زاویه‌ای ($\omega=\sqrt{g/\ell}$) را در ارتفاع R_e از سطح زمین پیدا کنید. اما ابتدا باید میدان گرانش در آن ارتفاع را برحسب میدان گرانش در سطح زمین بیابید.

۱ با توجه به رابطه میدان گرانش خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\text{سطح زمین}: g_e=G\frac{M_e}{{R_e}^{۲}}\\ \text{در ارتفاع } R_e: g_h=G\frac{M_e}{(R_e+R_e)^{۲}}\end{cases}\Rightarrow\frac{g_h}{g_e}=\frac{({R_e}^{۲})}{(۲R_e)^{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

۲ نسبت بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\omega_h}{\omega_e}=\frac{\sqrt{\frac{g_h}{\ell}}}{\sqrt{\frac{g_e}{\ell}}}=\sqrt{\frac{g_h}{g_e}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow\frac{\omega_h}{\omega_e}=\frac{۱}{۲}$$

۳ اکنون نسبت بیشینه شتاب‌ها را می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

$$\frac{a_h}{a_e}=\frac{A\omega_h^{۲}}{A\omega_e^{۲}}\xrightarrow{\text{دامنه‌ها یکسان}}\frac{a_h}{a_e}=(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

A ۱۲۵۱ ۱

یادآوری بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر از رابطهٔ $F=mA\omega^{۲}$ به‌دست می‌آید که در آن A دامنه، m جرم نوسانگر و ω بسامد زاویه‌ای است.

۱ دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر نوسانگر است. بنابراین $A=\frac{۱۰}{۲}=۵cm$

۲ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{T=\frac{۱}{۲}s}\omega=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\omega=۴\pi\,rad/s$$

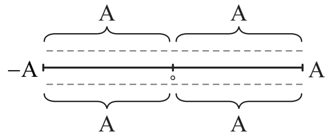
۳ اکنون بیشینه نیروی وارد بر ذره را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{max}=mA\omega^{۲}\xrightarrow{m=۰/۵kg}F_m=۰/۵\times۰/۰۵\times۱۶\pi^{۲}\Rightarrow F_m=۴N$$

A ۱۲۵۲ ۱

۱ در هر دقیقه ۱۲۰ نوسـان کامل انجام شـده بنابراین دوره و بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}=\frac{۶۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۲}s \xrightarrow{\omega=۲\pi/T} \omega=۴\pi\ rad/s$$



۲ در هر دوره مسافت طی شده برابر $۴A$ است از این رو دامنه برابر است با:

$$۴A=۱۶ \Rightarrow A=۴cm$$

۳ شتاب را در مکان $x=-\frac{A}{۲}=-\frac{۴}{۲}=-۲cm$ به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^۲|x| \Rightarrow |a|=(۴\pi)^۲\times(\frac{۲}{۱۰۰}) \Rightarrow |a|=۱۶\times۱۰\times\frac{۲}{۱۰۰} \Rightarrow |a|=۳/۲m/s^۲$$

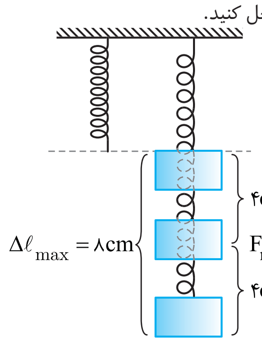
۴ نیروی خالص وارد بر نوسانگر خواهد شد:

$$F=ma \xrightarrow{m=۲\times۱۰^{-۳}kg} F=۲\times۱۰^{-۳}\times۳/۲ \Rightarrow F=۶/۴\times۱۰^{-۳}N$$

میانبر معادلهٔ نیرو - مکان نوسانگر $|F|=m\omega^۲x$ است.

C ۱۲۵۳ ۲

خط فکری در حالت تعادل نیروها متوازن است. به کمک دینامیک باید ثابت فنر را بیابید. بیشـترین نیروی کشسـانی فنر وقتی اسـت که طول فنر به بیشـینه مقدار خود برسـد. بنابراین شـما باید بیشـینه طول فنر را هنگام نوسـان پیدا کنید و به کمک قانون هوک $F=k\Delta\ell$ مسئله را حل کنید.



۱ ابتدا ثابت فنر را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=۰ \Rightarrow mg=k\Delta\ell \Rightarrow ۵=k\frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow k=\frac{۵۰۰}{۴}=۱۲۵N/m$$

۲ در محـل تعادل طول فنـر ۴cm افزایش یافته اگر در ایـن حالت با دامنهٔ ۴cm وزنه را به نوسـان درآوریم، وزنه تا طول طبیعی فنر بالا می‌رود و وقتی به پایین‌ترین نقطهٔ مسـیر مـی‌رود افزایش طول فنـر مطابق شـکل $\Delta\ell_{max}=۸cm$ می‌شـود. از این رو بیشینهٔ نیرو خواهد شد:

$$F_{max}=k\Delta\ell_{max}=۱۲۵\times\frac{۸}{۱۰۰}=۱۰N$$

A ۱۲۵۴ ۳

یادآوری ۱ بسامد زاویه‌ای آونگ برابر $\omega=\sqrt{g/\ell}$ است.

۲ بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر برابر است با $F_{max}=mA\omega^۲$ که در آن A دامنه و m جرم نوسانگر است. بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}} \xrightarrow{\ell=۱m} \omega=\sqrt{۱۰}\ rad/s$$

بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$F_{max}=mA\omega^۲ \xrightarrow[A=۰/۰۱cm]{m=۰/۲kg} F_{max}=۰/۲\times۰/۰۱\times۱۰=۰/۰۲N$$

بازی با سؤال **گلولهٔ یک آونگ ساده با دامنهٔ ۵ میلی‌متر نوسان می‌کند و بیشینهٔ شتاب آن ۲ سـانتی‌متر بر مربع ثانیه است. طول آونگ چند متر است؟** $(g=۱۰m/s^۲)$

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۴

پاسخ **تمام روابطی که برای سـامانهٔ جرم - فنر به‌دسـت آورده‌ایم دربارهٔ آونگ نیز صادق اسـت از جمله بیشـینهٔ شتاب برابر $a_{max}=A\omega^۲$ می‌باشد. از این می‌توان بسامد زاویه‌ای آونگ را حساب کرد.**

$$\frac{۲}{۱۰۰}=۵\times۱۰^{-۳}\times\omega^۲ \Rightarrow \omega^۲=۴ \Rightarrow \omega=۲rad/s$$

همچنین می‌دانیم بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است از این رو:

$$\omega^۲=\frac{g}{\ell} \Rightarrow \frac{g}{\ell}=۴ \Rightarrow \ell=۲/۵m \Rightarrow \ell=۲/۵m$$

گزینهٔ ۳

B ۱۲۵۵ ۲

خط فکری بیشـینه نیرو در دو حالت یکسـان اسـت. از طرفی فنر تغییر نکرده و ثابت فنر k ثابت مانده اسـت. از این مطلب اسـتفاده کنید و نسـبت دامنه‌ها را به‌دست بیاورید سپس باید بسامد زاویه‌ای جدید را حساب کنید تا بتوانید معادله را بنویسید.

۱ با توجه به قانون هوک $F=kx$ بیشینهٔ نیرو در مکان $x=\pm A$ خواهد بود یعنی $|F_{max}|=kA$ است. بنابراین:

$$F_{max_۱}=F_{max_۲} \Rightarrow k_۱A_۱=k_۲A_۲ \xrightarrow{k_۱=k_۲} A_۱=A_۲ \xrightarrow{A_۱=۰/۱m} A_۲=۰/۱m$$

۲ بسامد زاویه را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_۲}}}{\sqrt{\frac{k}{m_۱}}} \xrightarrow{\omega_۱=۵\pi} \frac{\omega_۲}{۵\pi}=\sqrt{\frac{m_۱}{۴m_۱}} \Rightarrow \omega_۲=\frac{۵\pi}{۲}rad/s$$

۳ معادلهٔ حرکت در حالت دوم خواهد شد:

$$x=A_۲\cos\omega_۲t \Rightarrow x=۰/۱\cos\frac{۵\pi}{۲}t \Rightarrow x=۰/۱\cos۲/۵\pi t$$

بازی با سؤال **جسـمی به جـرم ۵۰ گرم کـه از یک فنر آویخته اسـت، نوسان می‌کند، معادلهٔ مکان نوسانگر در SI به‌صورت $x=۰/۰۱\cos۲۰t$ است، بیشترین نیروی وارد بر جسم چند نیوتون است؟**

مشابه کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ **با توجه به معادلهٔ داده شده $A=۰/۰۱m$ و $\omega=۲۰rad/s$ است.**

$$F_{max}=mA\omega^۲ \Rightarrow F_{max}=۰/۰۵\times۰/۰۱\times(۲۰)^۲$$
$$\Rightarrow F_{max}=۰/۰۵\times۰/۰۱\times۴۰۰=۰/۲N$$

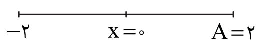
گزینهٔ ۲

A ۱۲۵۶ ۳

خط فکری در یـک حرکت هماهنگ سـاده، طول پاره‌خط مسیر نوسـان دو برابر دامنه است و بازهٔ زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر طول پاره‌خط را طی کند برابر نصف دوره $(\frac{T}{۲})$ اسـت. بنابراین کافی اسـت ابتدا دامنه و دوره و سـپس بیشـینهٔ سـرعت را حساب کنید.

۱ دامنهٔ نوسان یک حرکت هماهنگ ساده نصف طول مسیر آن است.

$$A=\frac{۴}{۲}=۲cm$$



۲ نوسانگر در مدت $\frac{T}{۲}$ (نصف دوره) یک‌بار طول پاره‌خط را طی می‌کند، با توجه به صورت سؤال $\frac{T}{۲}=۱s$ است، بنابراین $T=۲s$ خواهد بود.

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\frac{rad}{s}$$

۴ بیشینه سرعت نوسانگر برابر است با:

$$v_m=A\omega \Rightarrow v_m=۰/۰۲\times\pi=۰/۰۲\pi m/s=۲\pi cm/s$$

A ۱۲۵۷ ۲

خط فکری دوباره گرفتار بیشینه طول و کمینه طول فنر شدیم. البته طول مسیر راحت به‌دست می‌آید $(\ell_{max}-\ell_{min})$ و به کمک طول مسیر، دامنه در دسترس بوده و با داشتن ثابت فنر و جرم، بسامد زاویه‌ای را می‌توان حساب کرد و مسئله تمام است.

۱ طول پاره‌خطی که نوسانگر در آن نوسان می‌کند برابر ۲A است.

$2A=۵۲-۴۲=۱۰\Rightarrow A=۵cm$

۲ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{m=۰/۱kg,\,F=۱۶۰N}\omega=\sqrt{\frac{۱۶۰}{۰/۱}}\Rightarrow\omega=۴۰rad/s$

۳ تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۰/۰۵\times۴۰\Rightarrow v_m=۲m/s$

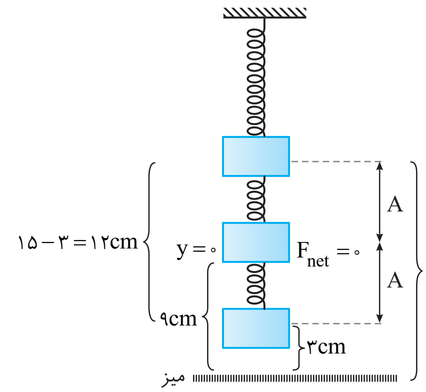
B ۱۲۵۸ ۲

خط فکری باید یک نقاشی مثل شکل زیر رسم کنید و به کمک آن طول مسیر و دامنه و مکان وزنه را وقتی فاصلهٔ آن از میز ۹ cm است به‌دست آورید، تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ با توجه به صورت مسئله بالاترین نقطه از سطح میز ۱۵cm و پایین‌ترین فاصله وزنه از سطح میز ۳cm بوده، بنابراین طول مسیر ۱۵−۳=۱۲cm و دامنه $A=\frac{۱۲}{۲}=۶cm$ است.

۲ بسامد زاویه‌ای سامانه جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=۰/۴N/m,\,m=۰/۱kg}\omega=\sqrt{\frac{۰/۴}{۰/۱}}\Rightarrow\omega=۲\ rad/s$



۳ به شکل مجدداً نگاه کنید. فاصلهٔ وزنه وقتی از سطح میز ۹cm است نوسانگر در حال گذر از حالت تعادل خود بوده، در حالت تعادل شتاب صفر و تندی بیشینه است. تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۶\times۲=۱۲\,cm/s\Rightarrow v_m=۰/۱۲m/s$

B ۱۲۵۹ ۴

خط فکری هنگام گذر از حالت تعادل تندی نوسانگر بیشینه و برابر $v_m=A\omega$ است. وقتی با دادن تندی اولیه دامنه از ۴cm به ۹cm افزایش می‌یابد شما باید تندی بیشینه با دامنهٔ ۴cm و تندی بیشینه با دامنهٔ ۹cm را پیدا کرده و از هم کم کنید تا تندی اولیه داده شده به نوسانگر را بیابید.

به کمک رابطهٔ سرعت بیشینه، در دو حالت v_m را به‌دست آورده و مقدارهای به‌دست آمده را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_m=A\omega=۴\times\frac{۲\pi}{\pi}=۸cm/s\\ v'_m=A'\omega=۹\times\frac{۲\pi}{\pi}=۱۸cm/s\end{cases}\Rightarrow ۱۸-۸=۱۰\ cm/s=۰/۱\ m/s$$

B ۱۲۶۰ ۲

در لحظهٔ t که فنر نه کشیده و نه فشرده است، وزنه در نقطهٔ تعادل خود قرار دارد و در نقطهٔ تعادل نیرو و شتاب صفر اما تندی بیشینه است. بنابراین تندی بیشینه نوسانگر ۱۲m/s است.

بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=۹۰۰N/m,\,m=۴kg}\omega=\sqrt{\frac{۹۰۰}{۴}}=\frac{۳۰}{۲}\Rightarrow\omega=۱۵rad/s$

به کمک تندی بیشینه، دامنه را به دست می‌آوریم.

$v_m=A\omega\Rightarrow۱۲=A\times۱۵\Rightarrow A=۰/۸m$

بنابراین معادلهٔ مکان - زمان وزنه به صورت زیر در می‌آید:

$x=A\cos(\omega t)\Rightarrow x=۰/۸\cos ۱۵t$

B ۱۲۶۱ ۲

خط فکری برای نوشتن معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر $(x=A\cos\omega t)$ باید دامنه و بسامد زاویه‌ای را داشته باشیم. معادلهٔ حرکت نوسانگر A، $x=۰/۱\cos\pi t$ بوده و بسامد زاویه‌ای آن $\omega_A=\pi\ rad/s$ است. با توجه به داده‌های مسئله ω_B و A_B را به‌دست بیاورید.

۱ دورهٔ نوسانگر A برابر است با: $\omega_A=\frac{۲\pi}{T_A}\Rightarrow\pi=\frac{۲\pi}{T_A}\Rightarrow T_A=۲s$

۲ دورهٔ B، ۲s از دورهٔ A بیشتر است. بنابراین:

$T_B=T_A+۲\Rightarrow T_B=۲+۲=۴s$

۳ بسامد زاویه‌ای B خواهد شد: $\omega_B=\frac{۲\pi}{T_B}=\frac{۲\pi}{۴}\Rightarrow\omega_B=\frac{\pi}{۲}rad/s$

۴ بیشینه تندی A دو برابر بیشینه تندی B است، از این رو:

$v_{m_A}=۲v_{m_B}\Rightarrow A_A\omega_A=۲A_B\omega_B\xrightarrow{A_A=۰/۱m}۰/۱\times\pi=۲A_B\times\frac{\pi}{۲}$

$\Rightarrow A_B=۰/۱m$

۵ در نتیجه معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر B به صورت زیر است:

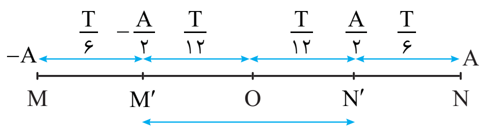
$x=A_B\cos(\omega_B t)\Rightarrow x=۰/۱\cos(\frac{\pi}{۲}t)$

C ۱۲۶۲ ۳

تندی بیشینه برابر Aω است، دوره را حساب می‌کنیم.

$v_m=A\omega\xrightarrow{v_m=۳\pi\ cm/s}۳\pi=۳\omega\Rightarrow\omega=\pi\ rad/s$

$\xrightarrow{\omega=۲\pi/T}\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲s$



دامنهٔ نوسانگر $A=\frac{۶}{۲}=۳cm$ بنابراین $x_{N'}=۱/۵cm$ و $x_{M'}=-۱/۵cm$ یعنی نقاط N′ و M′ به‌ترتیب در مکان $+\frac{A}{۲}$ و $-\frac{A}{۲}$ قرار دارند. مدت زمان حرکت از $-\frac{A}{۲}$ تا مرکز نوسان و از مرکز نوسان تا $+\frac{A}{۲}$ خواهد شد:

$t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۱۲}=\frac{T}{۶}\xrightarrow{T=۲s}t=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}s$

A ۱۲۶۳ ۱

خط فکری در نقاط بازگشت شتاب و نیرو بیشینه و در نقطهٔ تعادل شتاب و نیرو صفر است.

در نقاط بازگشت تندی صفر بوده و در نقطهٔ تعادل تندی نوسانگر بیشینه است. تندی بیشینه برابر Aω و شتاب بیشینه برابر $A\omega^2$ است.

۱ با توجه به سؤال تندی بیشینه و شتاب بیشینه داده شده است:

$$\begin{cases}v_{max}=A\omega=۰/۲\pi\\a_{max}=A\omega^2=۰/۸\pi^2\end{cases}\xrightarrow{\frac{a_m}{v_m}=\frac{A\omega^2}{A\omega}=\omega}\omega=\frac{۰/۸\pi^2}{۰/۲\pi}=۴\pi$$

۲ بزرگی شتاب نوسانگر در هر مکان از رابطهٔ $|a|=|\omega^2|x$ به‌دست می‌آید:

$|a|=(۴\pi)^2\times\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow|a|=۰/۱۶\pi^2$

A ۱۲۶۴ ۴

خط فکری تمام روابط حرکت هماهنگ ساده را می‌توانید در مورد آونگ به کار ببرید، بنابراین با نوشتن رابطه سرعت بیشینه و شتاب بیشینه مسئله را حل کنید.

ابتدا با استفاده از سرعت بیشینه و شتاب بیشینه، ω را حساب می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} a_m = A\omega^۲ \\ v_m = A\omega \end{array}\right. \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را بر هم}} a_m = v_m\omega$$

$$\xrightarrow[v_m = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}m/s]{a_m = ۰/۲m/s^۲} \frac{۲}{۱۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{۲}rad/s$$

بسامد زاویه‌ای را داریم. بنابراین طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \sqrt{۲} = \sqrt{\frac{۱۰}{\ell}} \Rightarrow \ell = ۵\,m$$

A ۱۲۶۵ ۲

یادآوری بیشینه تندی نوسانگر $v_m = A\omega$ و شتاب نوسانگر $|a| = \omega^۲ x$ است.

۱ با استفاده از اندازهٔ شتاب $|a| = ۸cm/s^۲$ در مکان $x = ۲cm$ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$|a| = \omega^۲ x \Rightarrow ۸ = \omega^۲(۲) \Rightarrow \omega = ۲rad/s$$

۲ تندی بیشینه خواهد شد:

$$v_m = A\omega \Rightarrow v_m = ۵ \times ۲ = ۱۰\,cm/s$$

A ۱۲۶۶ ۳

۱ ابتدا باید مشخص کنیم وقتی جرم ۵۰٪ افزایش می‌یابد با ثابت بودن فنر، بسامد زاویه‌ای چند برابر می‌شود.

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_۲}}}{\sqrt{\frac{k}{m_۱}}} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}} \xrightarrow{m_۲ = m_۱ + ۰/۵m_۱ = ۱/۵m_۱}$$

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \sqrt{\frac{m_۱}{۱/۵m_۱}} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۲ نسبت بیشینه تندی خواهد شد:

$$\frac{v_{۲,max}}{v_{۱,max}} = \frac{A\omega_۲}{A\omega_۱} \Rightarrow \frac{v_{۲,max}}{v_{۱,max}} = \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۳ نسبت بیشینه شتاب برابر است با:

$$\frac{a_{۲,max}}{a_{۱,max}} = \frac{A\omega_۲^۲}{A\omega_۱^۲} = \left(\frac{\omega_۲}{\omega_۱}\right)^۲ = \frac{۲}{۳}$$

B ۱۲۶۷ ۳

خط فکری برای به‌دست آوردن شتاب متوسط باید تغییرات سرعت را به‌دست آوریم $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t})$. برای به‌دست آوردن سرعت، ابتدا مکان نوسانگر در $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۲s$ را بررسی می‌کنیم. اگر نوسانگر در انتهای مسیر قرار داشت $x = \pm A$ (نقاط بازگشت) سرعت متحرک صفر و اگر در مرکز نوسان $x = ۰$ قرار داشت، اندازهٔ سرعت بیشینه است $(|v| = A\omega)$.

ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t = ۱s$ تا $t = ۲s$، مکان متحرک را در این دو لحظه به‌دست می‌آوریم و تندی متحرک در این مکان را حساب می‌کنیم.

$$x = ۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۱) = ۰ \xrightarrow{\text{مرکز نوسان}}$$

$$|v_۱| = A\omega = ۰/۰۲ \times \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۱۰۰}m/s \Rightarrow v_۱ = \pi cm/s$$

$$x = ۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۲) = -۰/۰۲ \xrightarrow{\text{درنقاط بازگشت}} v_۲ = ۰$$

اندازهٔ شتاب متوسط برابر است با:

$$|\bar{a}| = |\frac{\Delta v}{\Delta t}| = |\frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t}| = \frac{\pi}{۲-۱} = \pi\,cm/s^۲$$

B ۱۲۶۸ ۱

یادآوری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم در سرعت است $(\vec{P} = m\vec{v})$. تکانه وقتی بیشینه است که تندی بیشینه $(v_m = A\omega)$ باشد.

$$P = mv_m \Rightarrow P = mA\omega \Rightarrow ۲۰ \times A \times \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۱۰}} = ۱۶gm/s \Rightarrow ۲۰ \times ۲۰ \times A = ۱۶$$

$$\Rightarrow A = ۰/۰۴m \Rightarrow \text{طول پاره‌خط} = ۲A = ۸cm$$

دقت کنید که واحد تکانه $g.m/s$ است پس m را نیز با واحد گرم قرار دادیم.

B ۱۲۶۹ ۱

۱ معادلهٔ نیرو - مکان داده شده $|F| = ۱۶۰\pi^۲ x$ را با معادلهٔ نیرو - مکان حرکت هماهنگ ساده $|F| = m\omega^۲ x$ مقایسه می‌کنیم.

$$m\omega^۲ = ۱۶۰\pi^۲ \xrightarrow{m = ۰/۱kg} ۰/۱\omega^۲ = ۱۶۰\pi^۲ \Rightarrow \omega = ۴۰\pi\ rad/s$$

۲ دامنه نصف پاره‌خط مسیر است.

$$A = \frac{۱}{۲}cm = ۰/۵cm = ۵ \times ۱۰^{-۳}m$$

۳ بیشینه تندی خواهد شد:

$$v_m = A\omega \Rightarrow v_m = ۵ \times ۱۰^{-۳} \times ۴۰\pi \Rightarrow v_m = ۰/۲\pi\ m/s$$

B ۱۲۷۰ ۳

خط فکری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه سرعت $v = ۰$ باشد شتاب ماکزیمم $(a_m = \pm A\omega^۲)$ بوده و هرگاه سرعت بیشینه $(v_m = A\omega)$ باشد، شتاب صفر است.

بنابراین کافی است که در معادله شتاب - سرعت $\frac{a^۲}{۲۵} + \frac{v^۲}{۴} = \pi^۲$ یکبار $v = ۰$ و شتاب را a_m و بار دیگر سرعت را v_m و شتاب را صفر قرار دهید.

۱ سرعت را در معادله برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{a_m^۲}{۲۵} + ۰ = \pi^۲ \Rightarrow a_m = ۵\pi m/s^۲$$

۲ شتاب را در معادله صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{۰}{۲۵} + \frac{v_m^۲}{۴} = \pi^۲ \Rightarrow v_m = ۲\pi$$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} a_m = A\omega^۲ \\ v_m = A\omega^۲ \end{array}\right. \Rightarrow \omega = \frac{a_m}{v_m} \Rightarrow \omega = \frac{۵\pi}{۲\pi} \Rightarrow \omega = ۲/۵rad/s$$

۴ دوره خواهد شد:

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲/۵} \Rightarrow T = \frac{۴\pi}{۵}s$$

میانبر رابطهٔ دوره با تندی بیشینه و شتاب بیشینه $T = ۲\pi\frac{v_m}{a_m}$

A ۱۲۷۱ ۲

خط فکری در حل این مسئله نکات مهمی که از حرکت هماهنگ ساده باید برای خود یادآوری کنید این است که در حالت تعادل یعنی $x = ۰$، تندی بیشینه است یعنی اگر در معادلهٔ $v^۲ = ۲۵۰۰z^۲ - ۲۵۰۰x^۲$، x را برابر صفر قرار دهیم تندی بیشینه می‌شود و در نقاط بازگشت $(x = \pm A)$ تندی صفر است. یعنی اگر تندی را صفر قرار دهیم x همان $\pm A$ خواهد شد. با این مطالب کافی است در معادلهٔ سرعت - مکان به جای v صفر قرار دهید و z را بررسی کنید.

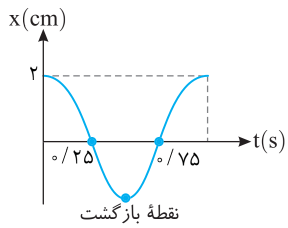
در نقاط بازگشت $x = \pm A$ سرعت صفر است بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x = \pm A \\ v = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۰ = ۲۵۰۰z^۲ - ۲۵۰۰A^۲ \Rightarrow z = A$$

B ۱۲۷۲ ۲

با توجه به نمودار $\frac{T}{۴}=۰/۲۵s$ است پس دوره حرکت $T=۱s$ می‌باشد و در مدت $\frac{T}{۲}=۰/۵s$ ابتدایی متحرک از $x=A$ به $x=-A$ می‌رسد پس ابتدا نوسانگر به مرکز نوسان $(x=۰)$ که تندی بیشینه دارد نزدیک شده و حرکت آن تندشونده است و پس از آن از مرکز نوسان در حال دور شدن بوده و حرکت آن کندشونده است از این‌رو گزارهٔ (الف) نادرست است.

در بازهٔ $t=\frac{T}{۴}=۰/۲۵$ تا $t=\frac{۳T}{۴}=۰/۷۵$ مطابق شکل روبه‌رو یک‌بار متحرک به نقطهٔ بازگشت خود رسیده است و گزارهٔ (ب) درست است.



بیشینهٔ تندی نوسانگر برابر $A\omega$ است.

$$A\omega=\frac{۲}{۱۰۰}\times\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow A\omega=\frac{۲}{۱۰۰}\times\frac{۲\pi}{۱}=\frac{۴\pi}{۱۰۰}m/s=۴\pi cm/s$$

گزارهٔ (پ) درست است.

B ۱۲۷۳ ۳

۱ با توجه به نمودار دوره و بسامد حرکت هر دو نوسانگر برابر است:

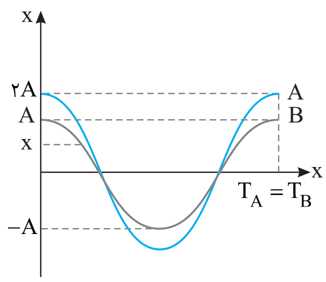
$$T_A=T_B\Rightarrow f_A=f_B\Rightarrow\omega_A=\omega_B$$

۲ تندی بیشینه $v_m=A\omega$ است از این‌رو:

$$\begin{cases}v_{m_A}=A_A\omega_A\\ v_{m_B}=A_B\omega_B\end{cases}\Rightarrow\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{۲A}{A}=۲$$

بنابراین تندی بیشینهٔ آن‌ها برابر نیست.

۳ شتاب در حرکت هماهنگ ساده $|a|=\omega^۲x$ است. در مکان x با توجه به یکسان بودن بسامد زاویه‌ای، شتاب برابر است، بنابراین دو کمیت بسامد و شتاب در مکان x برای دو نوسانگر یکسان است.



B ۱۲۷۴ ۴

خط فکری در نقاط بازگشت $x=\pm A$ تندی نوسانگر صفر $(v=۰)$ است. یعنی اگر در معادلهٔ سرعت - مکان $\frac{۲۵}{\pi^۲}v^۲+۲۵۰۰x^۲=۱$ به جای x، $\pm A$ قرار دهیم، تندی صفر و اگر در معادله به جای v، تندی بیشینه $(v_m=A\omega)$ قرار دهیم $x=۰$ خواهد بود بنابراین شما یک بار $x=۰$ و بار دیگر $v=۰$ را در معادله قرار دهید.

۱ تندی بیشینه را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۲۵}{\pi^۲}v^۲+۲۵۰۰x^۲=۱\xrightarrow{x=۰,\ v=v_m}\frac{۲۵}{\pi^۲}v_m^۲+۰=۱\Rightarrow v_m=\frac{\pi}{۵}m/s$$

۲ دامنه را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۲۵}{\pi^۲}v^۲+۲۵۰۰x^۲=۱\xrightarrow{v=۰,\ x=A}۰+۲۵۰۰A^۲=۱\Rightarrow A=۰/۰۲m=۲cm$$

بنابراین نمودارهای (۱) و (۲) نادرست هستند.

۳ دوره را به‌دست آورده، $\frac{T}{۴}$ را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow\frac{\pi}{۵}=۰/۰۲(\frac{۲\pi}{T})\Rightarrow T=۰/۲s=\frac{۲}{۱۰}s\Rightarrow\frac{T}{۴}=\frac{۱}{۲۰}s$$

بنابراین نمودار (۳) نادرست و نمودار (۴) درست است.

B ۱۲۷۵ ۴

در این تست در معادلهٔ شتاب - مکان یک علامت منفی مشاهده می‌کنید که علت آن همان قانون هوک $F=-kx$ است* که در درسنامه بیان شده است و با توجه به قانون هوک معادلهٔ شتاب - مکان نوسانگر به‌صورت $a=-\omega^۲x$ است، بنابراین ضریب $x^۲$ همان $\omega^۲$ است و بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

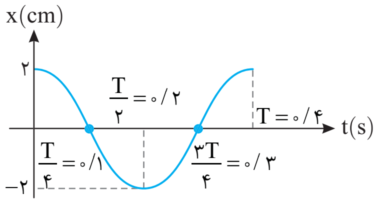
$$\begin{cases}a=-۲۵\pi^۲x\\ a=-\omega^۲x\end{cases}\Rightarrow\omega^۲=۲۵\pi^۲\Rightarrow\omega=۵\pi\ rad/s$$

دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=۵\pi\Rightarrow T=۰/۴s$$

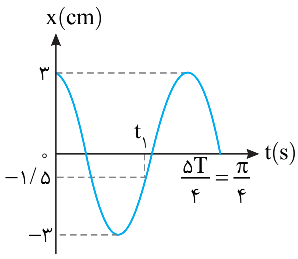
تندی بیشینهٔ نوسانگر برابر $A\omega$ است. به کمک v_m دامنه را حساب می‌کنیم.

$$v_{max}=A\omega\xrightarrow{v_{max}=۱۰\pi\ cm/s}۱۰\pi=A\times۵\pi\Rightarrow A=۲cm$$



B ۱۲۷۶ ۲

قبل از حل مسئله، به یادآوری‌های زیر دقت کنید.



یادآوری ۱ بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر نوسانگر برابر $F=ma$ است.

یادآوری ۲ در حرکت هماهنگ ساده رابطهٔ بین شتاب و مکان به صورت زیر است:

$$|a|=\omega^۲x\xrightarrow{F=ma}|F|=m\omega^۲|x|$$

اولین کاری که باید بکنیم، به‌دست آوردن دوره حرکت به کمک نمودار است.

$$۵\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow T=\frac{\pi}{۵}s$$

بسامد زاویه‌ای نوسانگر خواهد شد: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۵}}\Rightarrow\omega=۱۰rad/s$

نیروی وارد بر نوسانگر در لحظهٔ $t=t_۱$ خواهد شد:

$$|F|=m\omega^۲|x|\xrightarrow[m=۰/۲kg]{|x|=۱/۵\times۱۰^{-۲}m}$$

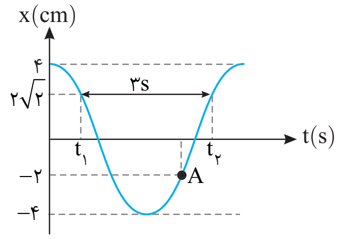
$$|F|=۰/۲\times(۱۰)^۲\times۱/۵\times۱۰^{-۲}\Rightarrow|F|=۰/۳N$$

* قانون هوک در کتاب درسی بیان نشده است با آنکه علت اصلی حرکت هماهنگ ساده است.

C | ۱۲۷۷ | ۱

ابتدا با توجه به بازهٔ زمانی $3s$، بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. در t_1 نوسانگر برای نخستین بار از مکان $2\sqrt{2}cm$ عبور کرده و در t_2 نیز نوسانگر برای دومین بار از مکان $2\sqrt{2}cm$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t\begin{cases}\cos\omega t_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\omega t_1=\frac{\pi}{4}\\ \cos\omega t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\omega t_2=\frac{7\pi}{4}\end{cases}$$



تفاضل شناسه‌های تابع کسینوسی برابر است با:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega(t_2-t_1)=\frac{3\pi}{2}\xrightarrow{t_2-t_1=3s}\omega(3)=\frac{3\pi}{2}$$

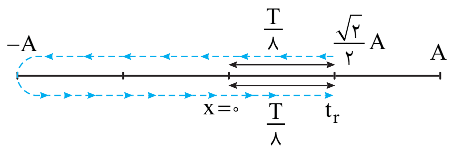
$$\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}rad/s$$

شتاب نوسانگر برابر است با:

$$a=-\omega^2x\Rightarrow a=-(\frac{\pi^2}{4})\times(-2)=\frac{\pi^2}{2}cm/s^2\Rightarrow a=\frac{10}{2}=5cm/s^2$$

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده: $\frac{x}{A}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.



از مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا $-A$ و برگشت به $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ بازهٔ زمانی برابر است با:

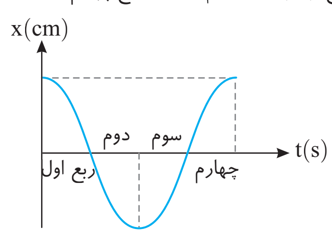
$$t_2-t_1=\frac{T}{2}+\frac{T}{8}+\frac{T}{8}\Rightarrow 3=\frac{6T}{8}\Rightarrow T=4s$$

بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}rad/s$

ادامهٔ مسئله مانند روش قبلی است.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

شناسه تابع کسینوس (فاز) حرکت در لحظهٔ t_1 و t_2 را روی دایره نمایش می‌دهیم. در لحظهٔ t_1 فاز در ربع اول و در لحظهٔ t_2 فاز در ربع چهارم است.

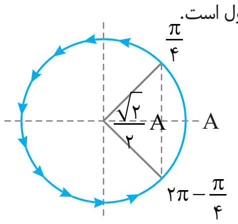


تغییر فاز از t_1 تا t_2 مطابق شکل خواهد شد:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

$$\omega(t_2-t_1)=\frac{3\pi}{2}\xrightarrow{t_2-t_1=3}\omega\times 3=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}rad/s$$

ادامهٔ مسئله مانند روش اول است.

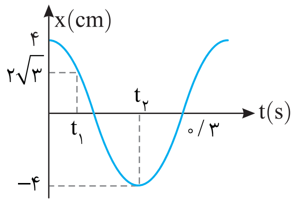


B | ۱۲۷۸ | ۱

خط فکری: به نمودار نگاه کنید و در لحظهٔ $t=0$ و $t=t_2$ مکان نوسانگر را مشخص کنید تا بتوانید به کمک آن سرعت در دو لحظه را به‌دست آورده و شتاب متوسط در این بازه را حساب کنید.

۱ در لحظهٔ $t=0$ و $t=t_2$ نوسانگر در نقطهٔ بازگشت خود قرار دارد بنابراین سرعت در این دو لحظه برابر صفر است و شتاب متوسط نیز صفر است.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[t=0\ \text{در}\ \Rightarrow v=0]{t=t_2\ \text{در}\ \Rightarrow v=0}a_{av}=\frac{0}{\Delta t}=0$$



۲ با توجه به نمودار دوره را حساب می‌کنیم: $\frac{3T}{4}=0/3\Rightarrow T=0/4s$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{4}{10}}=5\pi\ rad/s$

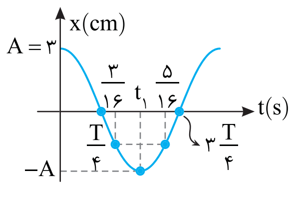
۴ در لحظهٔ t_1 مکان نوسانگر $x=+2\sqrt{3}cm$ است. به کمک معادلهٔ شتاب - مکان، شتاب را حساب می‌کنیم.

$$|a|=+\omega^2|x|\Rightarrow|a|=+25\pi^2\times\frac{2\sqrt{3}}{100}=+5\sqrt{3}m/s^2$$

B | ۱۲۷۹ | ۴

۱ با توجه به تقارن نمودار در دو طرف لحظهٔ t_1 که نوسانگر در مکان $-A$ قرار دارد می‌توان نتیجه گرفت t_1 در وسط $\frac{3}{16}$ و $\frac{5}{16}$ و t_1 برابر $\frac{T}{2}$ است، از این‌رو:

$$t_1=\frac{\frac{3}{16}+\frac{5}{16}}{2}=\frac{1}{4}s\xrightarrow{t_1=\frac{T}{2}}\frac{1}{4}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$



۲ لحظهٔ $t=\frac{3}{8}s$ را برحسب دوره مشخص می‌کنیم. $\frac{t}{T}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow t=\frac{3}{4}T$

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\ rad/s$

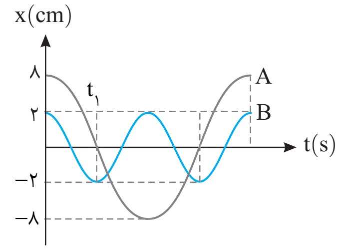
۴ با توجه به نمودار در لحظهٔ $\frac{3}{4}T$ نوسانگر در مکان $x=0$ و دارای تندی بیشینه است در نتیجه:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/03\times 4\pi\Rightarrow v_m=0/12\pi\ m/s\Rightarrow v_m=12\pi\ cm/s$$

B ۱۲۸۰ ۲

۱ با توجه به نمودار بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ برای نوسانگر A برابر $\frac{T_A}{۴}$ و برای نوسانگر B برابر $\frac{T_B}{۴}$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} t_۱=\frac{T_A}{۴} \\ t_۱=\frac{T_B}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_A}{۴}=\frac{T_B}{۲} \Rightarrow T_A=۲T_B$$



۲ بسامد زاویه‌ای A و B را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega_A=\frac{۲\pi}{T_A},\quad \omega_B=\frac{۲\pi}{T_B} \Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \omega_B=۲\omega_A$$

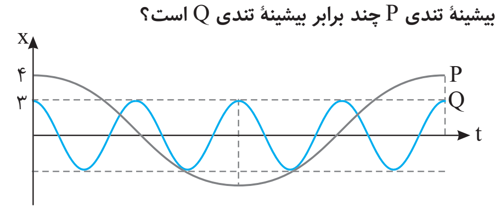
۳ بیشینه نیروی خالص وارد بر نوسانگر از رابطهٔ $F_{max}=mA\omega^۲$ به‌دست می‌آید. از این رو:

$$\frac{|F_{max_A}|}{|F_{max_B}|}=\frac{(m\omega^۲A)_A}{(m\omega^۲A)_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{\omega^۲_A}{\omega^۲_B}\times\frac{A_A}{A_B}=۴\times(\frac{۱}{۲})^۲\times(\frac{۸}{۲})=۴$$

۴ اکنون نسبت بیشینه تندی A به بیشینه تندی B را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{A_A\omega_A}{A_B\omega_B} \Rightarrow \frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{۸}{۲}\times\frac{۱}{۲}=۲$$

بازی با سؤال **نمودار مکان - زمان دو نوسانگر P و Q مطابق شکل زیر است. بیشینهٔ تندی P چند برابر بیشینهٔ تندی Q است؟**



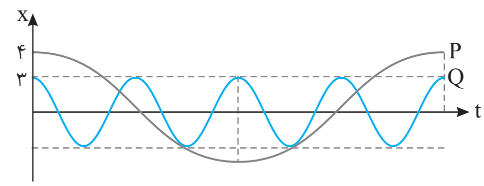
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳   ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ **با توجه به شکل دورهٔ P چهار برابر دورهٔ Q است.**

$$T_P=۴T_Q \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} \omega_P=\frac{۱}{۴}\omega_Q$$

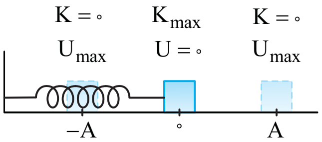
نسبت تندی بیشینه P و Q خواهد شد:

$$\frac{v_{max\,P}}{v_{max\,Q}}=\frac{A_P\omega_P}{A_Q\omega_Q}=\frac{۴\times\frac{۱}{۴}\omega_Q}{۳\times\omega_Q}=\frac{۱}{۳}$$



گزینهٔ ۱

A ۱۲۸۱ ۴

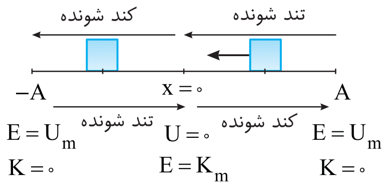


با توجه به شکل روبه‌رو در مرکز تعادل انرژی جنبشی بیشینه و انرژی پتانسیل صفر است. در دو انتهای مسیر انرژی پتانسیل بیشینه و انرژی جنبشی صفر است، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. بنابر قانون پایستگی انرژی $E=U+K$ همواره ثابت است، پس گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است. بنا به پایستگی انرژی مکانیکی نوسانگر در تمام نقاط مسیر یکسان است و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۲۸۲ ۳

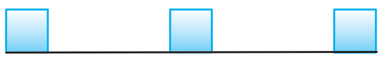
می‌دانیم تندی در مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل) بیشینه است. پس اگر نوسانگر در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل باشد حرکت آن تندشونده است. در نقطهٔ تعادل شتاب و نیرو صفر می‌باشد و با نزدیک شدن به نقطهٔ تعادل شتاب کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است و در طول مسیر انرژی مکانیکی ثابت و برابر $\frac{۱}{۲}kA^۲$ بوده. پس گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست است.

در دو انتهای مسیر $(x=\pm A)$ فنر بیشینه تغییر طول را دارد، پس در دامنه‌ها انرژی پتانسیل بیشینه است و در مرکز نوسان که فنر نه کشیده و نه فشرده شده انرژی پتانسیل صفر است، بنابراین در حرکت به سمت مرکز تعادل انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.



A ۱۲۸۳ ۱

نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است و در این نقاط، اندازهٔ نیرو، شتاب و مکان بیشینه است.

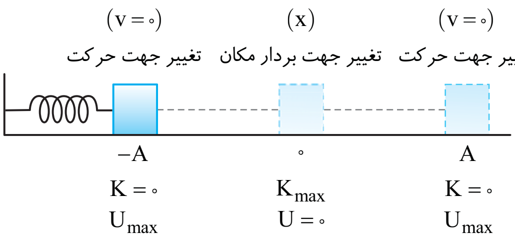


$x=-A$	$x<۰$	$x=۰$	$x>۰$	$x=A$
$v=۰$	$v>۰$ ، $v<۰$	v_m	$v>۰$ ، $v<۰$	$v=۰$
a_m	$a>۰$	$a=۰$	$a<۰$	a_m
F_m	$F>۰$	$F=۰$	$F<۰$	F_m

بازی با سؤال **برای نوسانگری که روی پاره‌خطی در حال نوسان است، هنگام تغییر جهت حرکت آن بیشینه و هنگام تغییر جهت بردار مکان .... آن بیشینه می‌شود.**

۱) انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل   ۲) انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی
۳) انرژی جنبشی، انرژی جنبشی   ۴) انرژی پتانسیل، انرژی پتانسیل

پاسخ **در دو انتهای مسیر حرکت نوسانگر تغییر جهت می‌دهد پس هنگام تغییر جهت حرکت در انتهای مسیر $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل بیشینه است و هنگام گذر از $x=۰$ بردار مکان نوسانگر تغییر جهت می‌دهد و در این مکان $x=۰$ انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه است.**



گزینهٔ ۲

A ۱۲۸۴ ۱

انرژی مکانیکی یک نوسانگر ساده از رابطهٔ $E=2\pi^2mA^2f^2$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم نوسانگر، A دامنه و f بسامد است، در نتیجه انرژی مکانیکی با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد.

A ۱۲۸۵ ۱

یادآوری انرژی مکانیکی یک نوسانگر برابر با $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ است که در آن m جرم نوسانگر، A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر است.

بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow[m=2\times10^{-3}kg,\ A=\frac{10}{\pi}\times10^{-2}m]{E=0/004J}$$

$$0/004=\frac{1}{2}\times2\times10^{-3}\times(\frac{10}{\pi}\times10^{-2})^2\times\omega^2$$

$$\Rightarrow 0/004=\frac{10^{-3}\times10^{-2}}{\pi^2}\omega^2\Rightarrow10^{-2}\omega^2=4\pi^2$$

$$\Rightarrow\omega^2=\frac{4\pi^2}{10^{-2}}\Rightarrow\omega=2\pi\times10rad/s=20\pi\ rad/s$$

دوره خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow20\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/1s$$

B ۱۲۸۶ ۴

خط فکری مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در هر نقطه از مسیر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است، بنابراین کافی است U و K را با هم جمع کرده و بعد از به‌دست آوردن انرژی مکانیکی جرم جسم را حساب کنید.

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر با انرژی مکانیکی است.

$$E=K+U\Rightarrow E=0/12+0/06\Rightarrow E=0/18J$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow{\omega=150rad/s,\ A=4\times10^{-2}m}$$

$$0/18=\frac{1}{2}\times m\times(4\times10^{-2})^2(150)^2\Rightarrow m=10^{-2}kg\Rightarrow m=10g$$

B ۱۲۸۷ ۱

در لحظهٔ عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل، تندی آن بیشینه (v_m) است. در این نقطه انرژی پتانسیل نوسانگر صفر $(U=0)$ و انرژی جنبشی آن بیشینه و برابر انرژی مکانیکی جسم است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$K_m=E\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=E\Rightarrow v_m^2=(\frac{2E}{m})$$

$$\Rightarrow v_m=\sqrt{\frac{2E}{m}}\Rightarrow v_m=(\frac{2E}{m})^{\frac{1}{2}}$$

A ۱۲۸۸ ۲

انرژی جنبشی نوسانگر در مبدأ نوسان بیشینه و برابر با انرژی مکانیکی نوسانگر است، بنابراین کافی است انرژی مکانیکی را حساب کنیم.

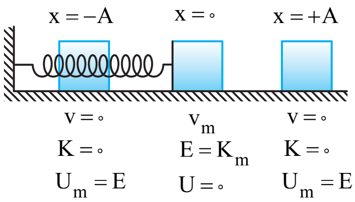
$$K_m=E=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow{k=100N/m,\ A=4\times10^{-2}m}$$

$$E=\frac{1}{2}\times100\times(4\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow K_m=50\times16\times10^{-4}=8\times10^{-2}=0/08J$$

B ۱۲۸۹ ۲

خط فکری در حل مسائل انرژی نوسانگر بهتر است که شکل زیر را در ذهن خود مرور کنید و به خودتان بگویید که بیشینه انرژی جنبشی و بیشینه انرژی پتانسیل همان انرژی مکانیکی جسم است البته باید یادتان باشد که انرژی مکانیکی مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر $(E=K+U)$ است.



۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر $0/8mJ$ بیان شده که این مقدار برابر انرژی مکانیکی آن است از این‌رو:

$$E=K_m=0/8mJ$$

۲ با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی نوسانگر را وقتی که $U=0/4mJ$ است به‌دست می‌آوریم:

$$E=U+K\Rightarrow0/8=0/4+K\Rightarrow K=0/4mJ$$

۳ حال می‌توان سرعت نوسانگر را به‌دست آورد.

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow0/4\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times100\times10^{-3}v^2\Rightarrow v^2=\frac{0/8}{100}$$

$$v^2=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}\Rightarrow v=\frac{1}{5\sqrt{5}}m/s$$

$$\Rightarrow v=\frac{20}{\sqrt{5}}cm/s=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}cm/s$$

بازی با سؤال **انرژی مکانیکی نوسانگری به جرم $100g$ برابر $20mJ$ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر $15mJ$ است، بزرگی سرعت نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟** ریاضی - ۹۶

۱) $10\sqrt{10}$ ۲) $20\sqrt{10}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{20}$

پاسخ خط فکری **انرژی مکانیکی نوسانگر برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن $(E=U+K)$ در هر نقطه از مسیر است، بنابراین اگر به شما U و E را بدهند می‌توانید انرژی جنبشی را حساب کرده و تندی نوسانگر در آن لحظه را به‌دست بیاورید.**

۱ **انرژی جنبشی نوسانگر در لحظهٔ مورد نظر برابر است با:**

$$E=U+K\Rightarrow K=E-U=20-15\Rightarrow K=5mJ=5\times10^{-3}J$$

۲ **سرعت نوسانگر خواهد شد:**

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow5\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times0/1\times v^2\Rightarrow v^2=10^{-1}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{10}}{10}m/s$$

$$\Rightarrow v=10\sqrt{10}cm/s$$

گزینهٔ ۱

A ۱۲۹۰ ۳

۱ زمان حرکت از مرکز نوسان به انتهای مسیر $\frac{1}{4}$ دوره و دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر است. دامنه را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\frac{20}{2}=10cm$$

۲ دوره و بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow T=1s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=2\pi\ rad/s$$

۳ انرژی جنبشی در مرکز نوسان بیشینه (K_m) و برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو:

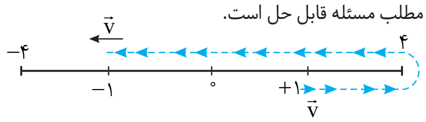
$$K_m=E\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times0/1\times(0/1)^2\times(2\pi)^2$$

$$\Rightarrow K=0/02J=20mJ$$

A ۱۲۹۱ ۳

نکته هرگاه در یک حرکت هماهنگ ساده مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود کوتاه‌ترین زمانی که این اتفاق می‌افتد برابر $\frac{T}{2}$ است.

خط فکری مسیر حرکت زیر از مکان $x_1=+1cm$ در جهت مثبت محور تا رسیدن برای اولین بار به مکان $x_2=-1cm$ مشخص می‌کند که هم مکان و هم سرعت نوسانگر قرینه شده است. بنابراین این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{2}$ است. اکنون با دانستن این مطلب مسئله قابل حل است.



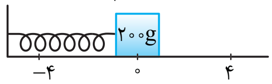
۱ با توجه به سؤال $\frac{T}{2}$ برابر $2s$ است: $\frac{T}{2}=2s\Rightarrow T=4s$

۲ بسامد زاویه‌ای برابر است با: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}\frac{rad}{s}$

۳ انرژی مکانیکی نوسانگر برابر خواهد شد با:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[A=4cm=4\times10^{-2}m]{m=200g=0/2kg}E=\frac{1}{2}\times0/2\times(4\times10^{-2})^2\times(\frac{\pi}{2})^2$$

$$\xrightarrow{\pi^2=10}E=0/1\times16\times10^{-4}\times\frac{10}{4}\Rightarrow E=4\times10^{-4}J$$



نکته هر ژول برابر ۱۰۰۰ میلی‌ژول است:

$$E=4\times10^{-4}J=4\times10^{-1}mJ=0/4mJ$$

B ۱۲۹۲ ۲

خط فکری در کتاب درسی رابطهٔ مستقلی برای انرژی پتانسیل نوسانگر گفته نشده است، پس در این سؤالات که انرژی پتانسیل خواسته می‌شود، باید ابتدا انرژی مکانیکی و انرژی جنبشی را حساب کرده و در نهایت با توجه به $E=K+U$، انرژی پتانسیل را حساب کنیم.

۱ نوسانگر در مدت یک دقیقه یا ۶۰s، ۱۵۰ نوسان کامل انجام داده است:

$$\frac{N}{1}=\frac{t}{T}\Rightarrow T=\frac{60}{150}=\frac{2}{5}=0/4s$$

۲ طول پاره‌خط نوسان دو برابر دامنهٔ حرکت نوسانگر است پس $A=2cm$ است.

۳ انرژی مکانیکی نوسانگر که برابر مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل یک جسم $(E=U+K)$ است ثابت بوده و برابر $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ است. ابتدا $\omega=\frac{2\pi}{T}$ را حساب کرده و سپس انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}$$

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times\frac{200}{1000}\times(\frac{2}{100})^2\times(\frac{2\pi}{0/4})^2$$

$$\Rightarrow E=0/1\times4\times10^{-4}\times\frac{4\pi^2}{0/16}E=0/1\times10^{-2}\times\pi^2\xrightarrow{\pi^2=10}E=10^{-2}J=10mJ$$

۴ انرژی جنبشی در لحظه‌ای که بزرگی سرعت نوسانگر $5\sqrt{2}\pi\ cm/s$ بوده، برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times0/2\times(5\sqrt{2}\pi\times10^{-2})^2$$

$$K=0/1\times50\pi^2\times10^{-4}=5\times10^{-3}J=5mJ$$

۵ در نهایت با توجه به داشتن انرژی جنبشی و انرژی مکانیکی، انرژی پتانسیل را به‌دست می‌آوریم:

$$E=K+U\Rightarrow10=5+U\Rightarrow U=5mJ$$

B ۱۲۹۳ ۱

خط فکری تندی متحرک ۱۰cm/s کمتر از تندی در مرکز نوسان یعنی $v=v_m-10$ است زیرا در مرکز نوسان تندی بیشینه است. بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای و دامنه، سپس تندی بیشینه را بیابید تا بتوانید با داشتن تندی (v)، انرژی جنبشی در آن لحظه را بیابید.

۱ دامنهٔ حرکت نصف طول مسیر حرکت نوسانگر است. $A=\frac{10}{2}=5cm$

۲ انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow{k=20N/m}E=\frac{1}{2}\times20\times(5\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow E=10\times25\times10^{-4}=25mJ$$

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{m=0/2kg}\omega=\sqrt{\frac{20}{0/2}}\Rightarrow\omega=10\,rad/s$$

۴ تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=5\times10=50\,cm/s$

۵ تندی در لحظهٔ مورد نظر برابر است با:

$$v=v_m-10=50-10\Rightarrow v=40cm/s=0/4m/s$$

۶ انرژی جنبشی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times0/2\times(0/4)^2\Rightarrow K=0/1\times0/16$$

$$\Rightarrow K=16\times10^{-3}J=16mJ$$

۷ اکنون می‌توان انرژی پتانسیل را حساب کرد.

$$E=K+U\Rightarrow25=16+U\Rightarrow U=9mJ$$

B ۱۲۹۴ ۱

دامنه ابتدا ۴cm و سپس ۴+۱=۵ cm است. بنابراین کافی است رابطهٔ انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}kA^2$ را در دو حالت بنویسیم و بر هم تقسیم کنیم و انرژی مکانیکی را در حالتی که دامنه ۵m است به‌دست بیاوریم.

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{\frac{1}{2}kA_2^2}{\frac{1}{2}kA_1^2}\xrightarrow[A_1=4\times10^{-2}m,\,A_2=5\times10^{-2}m]{E_1=16J}\frac{E_2}{16}=\frac{A_2^2}{A_1^2}$$

$$\Rightarrow\frac{E_2}{16}=\frac{(5\times10^{-2})^2}{(4\times10^{-2})^2}\Rightarrow E_2=25J$$

بنابراین باید به نوسانگر $25-16=9J$ انرژی داده شود.

B ۱۲۹۵ ۱

خط فکری باید در جواب این مسئله به این فکر کنید که انرژی مکانیکی سامانهٔ جرم - فنر به چه عواملی بستگی دارد. با توجه به رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$، ثابت فنر و دامنهٔ حرکت انرژی مکانیکی نوسانگر را تعیین می‌کنند.

در این مسئله دامنهٔ نوسان (A) و ثابت فنر (k) ثابت مانده است، بنابراین انرژی مکانیکی در دو حالت یکسان بوده و $\frac{E_2}{E_1}=1$ است.

B ۱۲۹۶ ۴

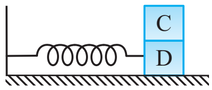
خط فکری با یک تست به شدت مفهومی سروکار داریم. اولاً انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ به‌دست می‌آید، بنابراین اگر ثابت فنر و دامنه ثابت بماند، انرژی مکانیکی تغییر نمی‌کند. ثانیاً در وسط مسیر نوسان انرژی مکانیکی نوسانگر تماماً انرژی جنبشی است $(K_m=\frac{1}{2}mv_m^2)$ و اگر به هر نحوی بتوان جرم وزنه را کاهش داد، قطعاً انرژی مکانیکی تغییر می‌کند (کاهش می‌یابد).

حالت اول: اگر در نقاط بازگشت که سامانه به‌طور لحظه‌ای ساکن است وزنهٔ m_2 را برداریم، دامنهٔ نوسان همچنان بدون تغییر می‌ماند $(A'=A)$ از طرفی ثابت فنر نیز ثابت است. بنابراین انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

حالت دوم: اگر هنگام گذر نوسانگر از وسط مسیر (حالت تعادل) وزنهٔ m_2 را بتوان از روی m_1 برداشت، جرم سامانه کاهش می‌یابد و انرژی جنبشی نوسانگر $(\downarrow K_m=\frac{1}{2}\underset{\downarrow}{m}v_m^2)$ که همان انرژی مکانیکی است کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ درست است.

C ۱۲۹۷ ۳

در انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) نوسانگر به‌طور لحظه‌ای ساکن است و وقتی وزنه دیگری روی آن قرار می‌دهیم، نوسانگر از انتهای مسیر به حرکت درمی‌آید و دامنهٔ حرکت تغییری نمی‌کند. از طرفی فنر نیز تغییر نکرده یعنی فنر ثابت بوده بنابراین انرژی مکانیکی $E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}$ تغییری نمی‌کند و نوسانگر با همان انرژی مکانیکی اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به مرکز نوسان می‌رسد. در اینجا وزنهٔ m را از روی نوسانگر برمی‌داریم، در اینجا تمام انرژی نوسانگر، انرژی جنبشی $(K=\frac{۱}{۲}mv_m^{۲})$ است و با برداشتن نیمی از جرم، انرژی جنبشی یا همان انرژی مکانیکی نصف می‌شود.



بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، وزنهٔ C بر روی وزنهٔ D قرار دارد. جرم دو وزنه برابر است و دستگاه با دامنهٔ A و دورهٔ T دارای حرکت هماهنگ ساده است. اگر در انتهای مسیر وزنهٔ C را از روی وزنهٔ D برداریم، انرژی مکانیکی و دورهٔ حرکت دستگاه به ترتیب از راست به چپ چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییر نمی‌کند، کاهش می‌یابد ۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۳) تغییر نمی‌کند، افزایش می‌یابد ۴) کاهش می‌یابد، تغییر نمی‌کند

پاسخ با برداشتن وزنهٔ C، جرم کاهش می‌یابد به همین دلیل دوره $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ کاهش می‌یابد. اما دربارهٔ انرژی مکانیکی باید بگوییم در انتهای مسیر تمام انرژی مکانیکی جسم به صورت انرژی پتانسیل $E=U_m=\frac{۱}{۲}kA^{۲}$ است که با برداشتن وزنهٔ C، دامنه و ثابت فنر هیچگونه تغییر نمی‌کند بنابراین انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است. گزینهٔ ۱

B ۱۲۹۸ ۱

۱ دامنهٔ حرکت را حساب می‌کنیم. $A=\frac{۲۰}{۲}=۱۰\,cm=۰/۱\,m$

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}\xrightarrow{k=۱۰۰N/m}E=\frac{۱}{۲}\times۱۰۰\times(۰/۱)^{۲}=۰/۵J$$

۳ با توجه به صورت مسأله در یک لحظه انرژی جنبشی نوسانگر ۰/۱J بیشتر از انرژی پتانسیل است و مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌توان نوشت و U و K را حساب کرد.

$$\begin{cases}K-U=۰/۱\,J\\ E=K+U=۰/۵J\end{cases}\Rightarrow ۲K=۰/۶\Rightarrow K=۰/۳J\ ,\ U=۰/۲J$$

۴ نسبت $\frac{U}{K}$ خواهد شد:

$$\frac{U}{K}=\frac{۰/۲}{۰/۳}=\frac{۲}{۳}$$

بازی با سؤال یک سامانهٔ جرم - فنر با دامنهٔ ۱۰cm در حال نوسان است. در یک لحظه انرژی پتانسیل نوسانگر ۰/۶J از انرژی جنبشی آن کمتر است. اگر ثابت فنر ۲۰۰N/m باشد، در این لحظه انرژی جنبشی نوسانگر چند ژول است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

پاسخ ۱ انرژی مکانیکی نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times(۰/۱)^{۲}\Rightarrow E=۱J$$

۲ بنا به فرض مسئله داریم: $U=K-۰/۶$

۳ انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E=U+K\Rightarrow ۱=K-۰/۶+K\Rightarrow ۱/۶=۲K\Rightarrow K=۰/۸J$$

گزینهٔ ۴

B ۱۲۹۹ ۴

۱ ابتدا انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{۱}{۲}mA^{۲}\omega^{۲}\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}mA^{۲}\frac{۴\pi^{۲}}{T^{۲}}\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}m\times(\frac{۵}{۱۰۰})^{۲}\times\frac{۴\pi^{۲}}{(\frac{۱}{۱۰})^{۲}}$$

$$\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}m(\frac{۲۵}{۱۰^{۴}})\times۴\pi^{۲}\times۱۰۰\Rightarrow E=\frac{\pi^{۲}}{۲}m$$

۲ انرژی مکانیکی برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر است و از طرفی مسئله تندی نوسانگر را در لحظه‌ای که انرژی جنبشی برابر انرژی پتانسیل است $(U=K)$ از شما خواسته است بنابراین:

$$E=K+U\xrightarrow{K=U}\frac{\pi^{۲}}{۲}m=۲K$$

$$\xrightarrow{K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}}\frac{\pi^{۲}}{۲}m=mv^{۲}\Rightarrow v^{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۲}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\pi\,m/s$$

$$m/s\xrightarrow{\times۱۰۰}cm/s\longrightarrow v=۵۰\sqrt{۲}\pi\,cm/s$$

B ۱۳۰۰ ۱

۱ انرژی جنبشی در وسط مسیر بیشینه است. در یک لحظه تندی نصف تندی بیشینه است. در این لحظه باید مشخص کنیم که انرژی جنبشی چه کسری از انرژی جنبشی بیشینه است.

$$\begin{cases}K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}\\ K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{K}{K_m}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow K=\frac{۱}{۴}K_m$$

۲ با توجه به فرض مسئله در این لحظه انرژی پتانسیل ۲۰ ژول است، بنابراین انرژی مکانیکی خواهد شد: $E=K+U\Rightarrow E=K+۲۰$

۳ انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی است.

$$E=K_m\Rightarrow K+۲۰=K_m\xrightarrow{K=\frac{۱}{۴}K_m}\frac{۱}{۴}K_m+۲۰=K_m$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}K_m=۲۰\Rightarrow K_m=\frac{۸۰}{۳}J$$

A ۱۳۰۱ ۱

۱ انرژی پتانسیل ۸ برابر انرژی جنبشی $(U=۸K)$ است، بنابراین انرژی مکانیکی خواهد شد:

$$E=U+K\Rightarrow E=۸K+K=۹K\Rightarrow E=۹K\quad(I)$$

۲ انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر است، از این‌رو:

$$K_m=E\xrightarrow{(I)}K_m=۹K\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_m^{۲}=۹(\frac{۱}{۲}mv^{۲})\Rightarrow v_m=۳v$$

۳ با توجه به فرض مسئله در این لحظه $v=۲m/s$ است، در نتیجه v_m خواهد شد:

$$v_m=۳\times۲=۶m/s$$

B ۱۳۰۲ ۲

۱ انرژی مکانیکی برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$E=U+K\xrightarrow{U=۳K}E=۳K+K\Rightarrow E=۴K$$

۲ انرژی مکانیکی، برابر با انرژی جنبشی بیشینهٔ نوسانگر است، بنابراین:

$$K_m=۴K\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_m^{۲}=۴(\frac{۱}{۲}mv^{۲})\Rightarrow v_m=۲v\Rightarrow v=\frac{v_m}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵m/s$$

B ۱۳۰۳ ۴

انرژی پتانسیل در $x=A$ بیشینه و در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی پتانسیل است، از این‌رو:

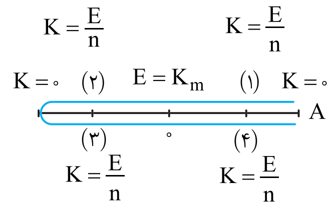
$$E=U_m=۰/۳۶J\xrightarrow{E=K_m}K_m=۰/۳۶J$$

انرژی جنبشی خواهد شد:

$$\begin{cases}K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}\\ K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^{۲}\end{cases}\xrightarrow{v=\frac{\sqrt{۳}}{۲}v_m}\frac{K}{۰/۳۶}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow K=۰/۲۷J$$

B ۱۳۰۴ ۴

انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی $(E=K_m)$ است. وقتی گفته می‌شود انرژی جنبشی $\frac{۱}{n}$ انـرژی مکانیکی باشـد، یعنی $K=\frac{۱}{n}K_m$ شـود. در حالت تعـادل انرژی جنبشی بیشینه است، بنابراین وقتی که نوسانگر از $x=A$ به سوی $x=۰$ می‌رود و انرژی جنبشی از صفر به K_m می‌رسد حتماً در این مسیر یک بار انرژی جنبشی $\frac{۱}{n}K_m$ خواهد شـد. همچنین در مسـیر از $x=۰$ تا $x=A$ نیز یکبار این اتفاق می‌افتد. در برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد و جمعاً چهار بار انرژی جنبشی $\frac{۱}{n}K_m$ خواهد شد:



نکته در یـک حرکـت هماهنگ سـاده در مدت یک دوره، چهار بار تندی $\frac{۱}{n}$ تندی بیشـینه، چهار بار شـتاب $\frac{۱}{n}$ شـتاب بیشـینه، چهار بار انرژی جنبشی $\frac{۱}{n}$ انرژی جنبشی بیشینه و ... خواهد بود.

B ۱۳۰۵ ۲

۱ انرژی جنبشی نوسانگر ۱۲/۵ درصد انرژی پتانسیل است، بنابراین:

$$K=\frac{۱۲/۵}{۱۰۰}U\Rightarrow U=۸K$$

۲ مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است.

$$E=U+K\Rightarrow E=۸K+K\Rightarrow E=۹K$$

۳ بیشـینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر بوده از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$K_m=۹K\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_m^۲=۹(\frac{۱}{۲}mv^۲)\Rightarrow v_m=۳v\Rightarrow v=\frac{v_m}{۳}\ (I)$$

۴ با توجه به فرض مسـئله در لحظهٔ مورد نظر تندی نوسـانگر $۳m/s$ از بیشـینه تندی کمتر است، بنابراین:

$$v=v_m-۳\xrightarrow{(I)}\frac{v_m}{۳}=v_m-۳\Rightarrow ۳=\frac{۲}{۳}v_m\Rightarrow v_m=۴/۵m/s$$

۵ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

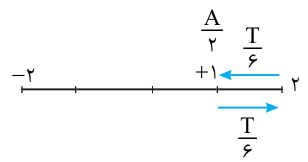
$$v_m=A\omega\xrightarrow{A=۰/۰۲m}۴/۵=۰/۰۲\omega\Rightarrow\omega=\frac{۴۵۰}{۲}=۲۲۵rad/s$$

۶ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۲۲۵=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲۲۵}s$$

۷ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. کمترین زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر دو بار از مکان $+۱cm$ بگذرد وقتی است که نوسانگر از مکان $+۱cm$ به $+۲cm$ رفته و این مسیر را برمی‌گردد بنابراین Δt خواهد شد:

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۶}=\frac{T}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{\frac{۲\pi}{۲۲۵}}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{۲}{۲۲۵}s$$



A ۱۳۰۶ ۲

با توجه به معادلهٔ مکان - زمان $x=۰/۰۵\cos ۲۰t$، دامنهٔ حرکت برابر $A=۰/۰۵m$ خواهد شـد. از طرفی بیشـینه انرژی جنبشـی نوسـانگر برابر انرژی مکانیکی آن اسـت، بنابراین می‌توان نوشت:

$$K_m=E=\frac{۱}{۲}kA^۲\Rightarrow ۶\times۱۰^{-۲}=\frac{۱}{۲}k(۰/۰۵)^۲\Rightarrow k=۴۸N/m$$

A ۱۳۰۷ ۳

خط فکری انرژی پتانسـیل یک نوسانگر در دو انتهای مسـیر یعنی نقاط بازگشت بیشـینه می‌شـود، بنابراین شـما باید در معادلهٔ حرکت به جای $x=\pm A$ را قرار داده و لحظاتی که مکان بیشـینه می‌شـود را حساب کنید و مشـخص کنید در بازهٔ بیان شده در صورت مسئله چند بار $x=\pm A$ شده است.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲s$$

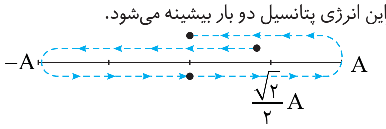
۲ در لحظهٔ ابتدایی بازهٔ $t_۱=۰/۲۵s$ مکان نوسانگر را مشخص می‌کنیم.

$$x=۰/۰۲\cos\pi t\Rightarrow x_۱=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x_۱=۰/۰۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی ارائه شده چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۲/۵-۰/۲۵}{۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۹T}{۸}$$

۴ مسـیر را رسم می‌کنیم. Δt برابر $T+\frac{T}{۸}$ شده یعنی نوسانگر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ شروع بـه حرکت کـرده و دوباره به همین نقطـه برمی‌گـردد (T) و سـپس در مدت $\frac{T}{۸}$ از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ بـه صفـر می‌رسـد و در طول مسـیرش یک بـار از $-A$ و بـار دیگر از $+A$ می‌گذرد، بنابراین انرژی پتانسیل دو بار بیشینه می‌شود.



روش اسـتفاده از معادلـهٔ حرکـت: در نقاط بازگشـت $(x=\pm A)$ انرژی پتانسـیل بیشـینه است، بنابراین بررسی می‌کنیم در بازهٔ خواسته شده چند بار نوسانگر در انتهای مسیر بوده است.

$$x=۰/۰۲\cos\pi t\Rightarrow x=\pm۰/۰۲m\Rightarrow\cos\pi t=\pm۱\Rightarrow\pi t=k\pi\Rightarrow t=k$$

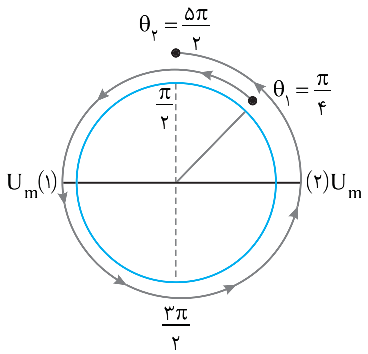
$$k=۰\Rightarrow t=۰\ ,\ k=۱\Rightarrow t=۱s\ ,\ k=۲\Rightarrow t=۲s\ ,\ k=۳\Rightarrow t=۳s$$

بازهٔ زمانی داده شـده $۰/۲۵s$ تا $۲/۵s$ که $t=۱s$ و $t=۲s$ در این بازه اسـت بنابراین دو بار انرژی پتانسیل بیشینه می‌شود.

روش اسـتفاده از دایـرهٔ مثلثاتی: در لحظه‌هـای $t_۱=۰/۲۵s$ و $t_۲=۲/۵s$، کمان ωt (فاز) را به‌دست می‌آوریم.

$$\theta_۱=\omega t_۱\Rightarrow\theta_۱=\pi(۰/۲۵)=\frac{\pi}{۴}\quad,\quad\theta_۲=\pi(۲/۵)=\frac{۵}{۲}\pi$$

روی دایـرهٔ مثلثاتـی در جهـت مثلثاتـی می‌چرخیـم در عبـور از $\theta=۰$ و $\theta=\pi$ انرژی پتانسـیل بیشینه است و تعداد گذر از این نقاط را می‌شماریم که با توجه به دایره مثلثاتی ۲ بار انرژی پتانسیل بیشینه می‌شود.



B ۱۳۰۸ ۲

راه‌حل اول: ۱ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$x=A\cos ۴۰\pi t\Rightarrow \omega=۴۰\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=۴۰\pi\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰}s$$

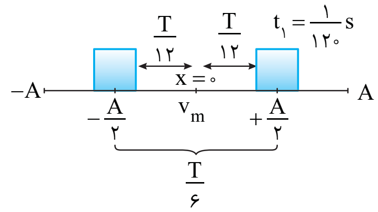
۲ مکان نوسانگر در ابتدای بازه را به‌دست می‌آوریم.

$$t=\frac{۱}{۱۲۰}s\Rightarrow x=A\cos\frac{۴۰\pi}{۱۲۰}\Rightarrow x_۱=A\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x_۱=+\frac{A}{۲}$$

۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۶۰}-\frac{۱}{۱۲۰}}{\frac{۱}{۲۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۱۲۰}}{\frac{۱}{۲۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

۴ مسیر حرکت را با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مطابق شکل زیر است.

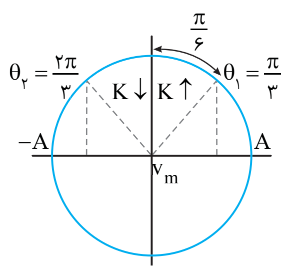


۵ بنابراین در بازهٔ $\frac{T}{۱۲}$ ابتدایی حرکت تندشونده و انرژی جنبشی در حال افزایش است.

$$\frac{T}{۱۲}=\frac{\frac{۱}{۲۰}}{۱۲}=\frac{۱}{۲۴۰}s$$

راه‌حل دوم: کمان (فاز) را در لحظه‌های $t_۱=\frac{۱}{۱۲۰}s$ و $t_۲=\frac{۱}{۶۰}s$ روی دایرهٔ مثلثاتی (مرجع) مشخص می‌کنیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\theta_۱=۴۰\pi\times\frac{۱}{۱۲۰}=\frac{\pi}{۳}\\ \theta_۲=۴۰\pi\times\frac{۱}{۶۰}=\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$



با توجه به دایره مرجع در مدتی که کمان (فاز) از $\frac{\pi}{۳}$ به $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند انرژی جنبشی در حال افزایش است.

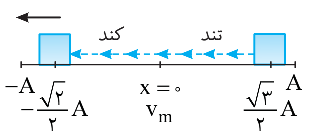
$$\Delta\theta=\omega t\Rightarrow\frac{\pi}{۶}=۴۰\pi t\Rightarrow t=\frac{۱}{۲۴۰}s$$

B ۱۳۰۹ ۱

مکان نوسانگر را در دو حالت مشخص می‌کنیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A,\ x=A\cos\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$$

روی مسیر مطابق شکل مشخص است که نوسانگر ابتدا در حال حرکت به سوی مرکز نوسان بوده و سرعت و انرژی جنبشی در حال افزایش و پس از گذر از نقطهٔ تعادل، سرعت و انرژی جنبشی در حال کاهش است و گزینهٔ (۱) درست است.



A ۱۳۱۰ ۱

نکته: در یک تابع کسینوس مانند $y=A\cos x$ یا $y=A\cos^۲ x$ بیشینه مقدار تابع برابر ضریب cos یعنی A است.

۱ در معادلهٔ داده شده $K=K_۰\cos^۲\omega t$، $K_۰$ همان بیشینه مقدار انرژی جنبشی است $(K_۰=K_m)$.

نکته: در حرکت هماهنگ ساده بیشینه انرژی جنبشی بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر مقدار یکسانی داشته و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر هستند $U_m=K_m=E$.

۲ با توجه به نکتهٔ بالا بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر $K_۰$ است $U_m=K_m=K_۰$.

B ۱۳۱۱ ۱

خط فکری: در معادله‌های این‌چنینی $(K=۰/۱۶-۴۰۰x^۲)$ باید شما یادتان باشد که اگر $x=۰$ باشد، K بیشینه است (مرکز نوسان) و اگر $K=۰$ باشد یعنی نوسانگر در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ قرار دارد، یعنی اگر به جای K صفر قرار دهیم باید به جای x، A را قرار داده و مسئله را حل کنید.

انرژی جنبشی هنگامی صفر می‌شود که نوسانگر در نقطهٔ بازگشت یعنی $x=\pm A$ باشد از این‌رو:

$$K=۰/۱۶-۴۰۰x^۲\xrightarrow[K=۰]{x=\pm A}۰=۰/۱۶-۴۰۰A^۲\Rightarrow A^۲=\frac{۰/۱۶}{۴۰۰}$$

$$\Rightarrow A=۰/۰۲m\Rightarrow A=۲cm$$

B ۱۳۱۲ ۳

۱ بیشینه انرژی جنبشی برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است.

$$K_m=E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲(۱)$$

۲ بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر برابر است با: $F_m=mA\omega^۲(۲)$

۳ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم و به جای F_m مقدار که مسئله داده یعنی ۱۲N را قرار می‌دهیم. $\frac{K_m}{F_m}=\frac{۱}{۲}A\Rightarrow\frac{K_m}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\times۰/۰۸\Rightarrow K_m=۰/۴۸J=۴۸۰mJ$

میانبر: انرژی مکانیکی نوسانگر (E یا K_m یا U_m) برابر است با:

$$E=K_m=U_m=\frac{۱}{۲}F_mA$$

A ۱۳۱۳ ۲

۱ با مقایسهٔ $F=-۲۰۰x$ با توجه به قانون هوک $F=-kx$ مشخص می‌شود که ثابت فنر $k=۲۰۰N/m$ است.

۲ مسافتی که نوسانگر در مدت یک دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه است. از این‌رو دامنه خواهد شد: $۴A=۲۰\Rightarrow A=۵cm$

۳ انرژی مکانیکی را حساب می‌کنیم.

$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times(۵\times۱۰^{-۲})^۲=۱۰۰\times۲۵\times۱۰^{-۴}\Rightarrow E=۰/۲۵J$$

۴ بیشینهٔ انرژی جنبشی برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو: $E=K_m=۰/۲۵J$

۵ انرژی جنبشی $\frac{۱}{۵}$ انرژی مکانیکی است از این‌رو:

$$K=\frac{۱}{۵}E\Rightarrow K=\frac{۱}{۵}\times۰/۲۵\Rightarrow K=۰/۰۵J$$

۶ انرژی پتانسیل در این لحظه خواهد شد:

$$E=K+U\Rightarrow۰/۲۵=۰/۰۵+U\Rightarrow U=۰/۲J$$

بازی با سؤال: **معادلهٔ نیرو - مکان نوسانگر ساده‌ای به جرم ۲۰۰ گرم در SI به صورت $F=-۱۸۰x$ است. اگر بیشینهٔ انرژی جنبشی این نوسانگر ۲۲۵ میلی‌ژول باشد، معادلهٔ مکان - زمان این نوسانگر در SI، کدام است؟** (خارج ریاضی - ۹۷)

۱) $x=۰/۰۵\cos۳۰t$ ۲) $x=۰/۰۳\cos۳۰t$

۳) $x=۰/۰۵\cos۳۰\pi t$ ۴) $x=۰/۰۳\cos۳۰\pi t$

پاسخ: **با توجه به رابطهٔ $F=-۱۸۰x$ و مقایسهٔ آن با $F=-kx$ مشخص است که $k=۱۸۰N/m$ است از این‌رو:** $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۱۸۰}{۰/۲}}=۳۰\ rad/s$

بیشینهٔ انرژی جنبشی برابر است با:

$$K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^۲=\frac{۱}{۲}m(A\omega)^۲=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲=۲۲۵\times۱۰^{-۳}J$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۰/۲\times A^۲\times۹۰۰=۲۲۵\times۱۰^{-۳}\Rightarrow A^۲=۲۵\times۱۰^{-۴}\Rightarrow A=۰/۰۵m$$

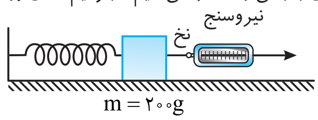
حال معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=۰/۰۵\cos۳۰t$$

گزینهٔ ۱

B ۱۳۱۴ ۱

خط فکری وقتی وزنهٔ ۱، ۲cm از حالت تعادل منحرف کرده و رها می‌کنیم دامنهٔ حرکت $A=۲cm$ است. در این حالت نیروی فنر برابر ۵N بوده است، $(F_m=۵N)$.
با توجه به این داده‌ها، انرژی مکانیکی را پیدا می‌کنیم سپس با داشتن آن، انرژی پتانسیل را به‌دست آورده و انرژی جنبشی را حساب می‌کنیم تا بتوانیم تندی وزنه را به‌دست بیاوریم.



۱ انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با: $E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲ \quad (I)$

۲ بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر برابر است با: $F_m=mA\omega^۲ \quad (II)$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{E}{F_m}=\frac{\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲}{mA\omega^۲}\Rightarrow\frac{E}{F_m}=\frac{۱}{۲}A\xrightarrow[A=۰/۰۲m]{F_m=۵N}E=۵\times\frac{۱}{۲}(۰/۰۲)$$
$$\Rightarrow E=۰/۰۵J=۵۰mJ$$

۴ انرژی جنبشی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$E=U+K\Rightarrow ۵۰=۳۴+K\Rightarrow K=۱۶mJ$$

۵ تندی را حساب می‌کنیم:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow ۱۶\times۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۲}\times۰/۲\times v^۲\Rightarrow v^۲=۱۶\times۱۰^{-۲}\Rightarrow v=۰/۴m/s$$

B ۱۳۱۵ ۳

۱ طول پاره‌خط برابر ۱۰cm است پس دامنهٔ حرکت $\frac{۱۰}{۲}=۵cm$ است.

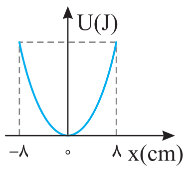
۲ انرژی مکانیکی که در طول مسیر ثابت است و برابر است با:

$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲=۲۵\times۱۰^{-۳}J=۲۵mJ$$

۳ در $x=۰$ تندی نوسانگر بیشینه است پس در $x=۰$ انرژی جنبشی بیشینه و انرژی پتانسیل صفر است و در $x=\pm A$ که انتهای مسیر است، تندی متحرک صفر است پس انرژی جنبشی صفر و انرژی پتانسیل بیشینه می‌باشد. با این اطلاعات نمودار گزینهٔ (۳) پاسخ مسئله است.

A ۱۳۱۶ ۱

خط فکری بیشینه انرژی جنبشی همان انرژی مکانیکی است. $(E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲)$
بنابراین شما از روی شکل دامنه را مشخص کنید و با استفاده از اطلاعات مسئله ω را بیابید تا مسئله حل شود.



۱ با توجه به نمودار دامنه $A=۸cm$ است.

۲ در هر دقیقه نوسانگر ۱۲۰ نوسان انجام می‌دهد بنابراین دوره برابر است با:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۱۲۰}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

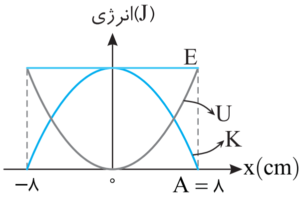
$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi\,rad/s$$

۴ انرژی جنبشی بیشینه را حساب می‌کنیم.

$$K_m=E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۸\times۱۰^{-۲})^۲\times(۴\pi)^۲=۶۴\times۱۰^{-۴}\times۱۴۴$$
$$K_m=۹۲۱۶\times۱۰^{-۴}J=۹/۲۱۶\times۱۰^{-۱}J$$

A ۱۳۱۷ ۳

نکته در حرکت هماهنگ ساده مسیر بدون اتلاف بوده و انرژی مکانیکی جسم ثابت است و در طول مسیر اگر انرژی جنبشی کاهش یابد، به همان اندازه انرژی پتانسیل افزایش خواهد یافت و بالعکس:

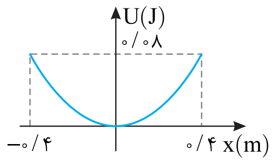


با توجه به نمودار انرژی مکانیکی نوسانگر ۴۰J و دامنهٔ نوسان آن ۸cm است. انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید بنابراین:

$$E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲\xrightarrow{\omega=۲\pi f}E=۲m\pi^۲A^۲f^۲$$
$$\Rightarrow ۴۰=۲\times(۰/۵)\times(\sqrt{۱۰})^۲\times(\frac{۸}{۱۰۰})^۲\times f^۲$$
$$۴۰=۱۰\times\frac{۶۴}{۱۰۰۰۰}\times f^۲\Rightarrow\frac{۱۰^۴}{۱۶}=f^۲\Rightarrow f=\frac{۱۰۰}{۴}=۲۵Hz$$

بازی با سؤال **نمودار انرژی پتانسیل نوسانگر ساده‌ای به جرم ۴۰ گرم بر حسب مکان مطابق شکل روبه‌رو است. دورهٔ نوسان این نوسانگر چند ثانیه است؟**

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۵}$
۳) $\frac{۴\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۵}$



پاسخ دامنهٔ نوسانگر $A=۰/۴m$ است.

با توجه به رابطهٔ $E=U_{max}=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲$، بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$۰/۰۸=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱۰۰}\times(۰/۴)^۲\times\omega^۲\Rightarrow\omega^۲=۲۵\Rightarrow\omega=۵rad/s$$

دوره را حساب می‌کنیم:

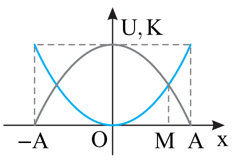
$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۵=\frac{۲\times\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۵}s$$

گزینهٔ ۴

A ۱۳۱۸ ۳

به نمودار با دقت نگاه کنید. در نقطهٔ M انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر است از این‌رو:

$$E=U+K\Rightarrow E=K+K\Rightarrow E=۲K$$



به جای انرژی مکانیکی، بیشینه انرژی جنبشی $K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^۲$ را قرار می‌دهیم.

$$E=۲K\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_m^۲=۲(\frac{۱}{۲}mv^۲)\Rightarrow v=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_m$$

B ۱۳۱۹ ۱

۱ با توجه به نمودار انرژی جنبشی در نقطهٔ x انرژی جنبشی نوسانگر ۲۰mJ از انرژی جنبشی بیشینه کمتر است.

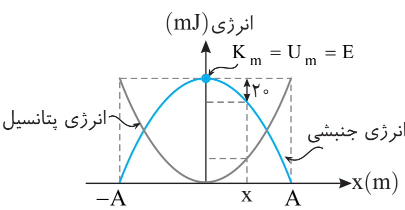
$$K=K_m-۲۰$$

۲ انرژی جنبشی بیشینه برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است. از این‌رو:

$$K=E-۲۰ \quad (I)$$

۳ مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی است.

$$E=U+K\xrightarrow{(I)}E=U+E-۲۰\Rightarrow U=۲۰mJ$$



B ۱۳۲۰ | ۱

۱ مطابق نمودار انرژی جنبشی در مکان x_2 (K_2) با انرژی پتانسیل در نقطهٔ x_1 (U_1) برابر است. $U_1=K_2$

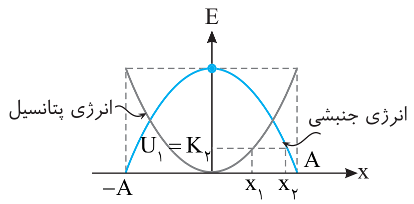
۲ انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E_1=U_1+K_1 \xrightarrow{U_1=K_2} E_1=K_2+K_1 \Rightarrow E=K_2+K_1$$

۳ بنابراین کافی است برای به‌دست آوردن انرژی مکانیکی نوسانگر K_1 و K_2 را حساب کرده با هم جمع کنیم.

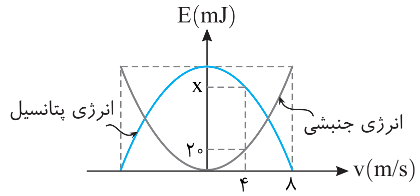
$$E=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow{m=0.01kg} E=\frac{1}{2}\times0.01(2\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times0.01(2\sqrt{6})^2$$

$$E=\frac{1}{2}\times0.01\times8+\frac{1}{2}\times0.01\times24\Rightarrow E=0.16J$$



B ۱۳۲۱ | ۳

خط فکری نمودار انرژی برحسب سرعت آن را با نمودار انرژی برحسب مکان اشتباه نکنید. تندی بیشینه $v_m=8m/s$ و وقتی تندی $v=4m/s$ است انرژی جنبشی ۲۰mJ است. به کمک این مطلب انرژی جنبشی بیشینه (K_m) یعنی انرژی مکانیکی نوسانگر $(E=K_m)$ را به‌دست بیاورید. سپس به کمک پایستگی انرژی مکانیکی مقدار x یعنی انرژی پتانسیل را حساب کنید.



با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}K_m=\frac{1}{2}mv_m^2\\K=\frac{1}{2}mv^2\end{cases}\Rightarrow\frac{K_m}{K}=\frac{v_m^2}{v^2}\Rightarrow\frac{K_m}{20}=(\frac{8}{4})^2\Rightarrow K_m=80mJ$$

بنابراین انرژی مکانیکی نوسانگر $E=K_m=80mJ$ است. در این صورت انرژی پتانسیل x خواهد شد: $E=K+U\Rightarrow80=20+U\Rightarrow U=60mJ$

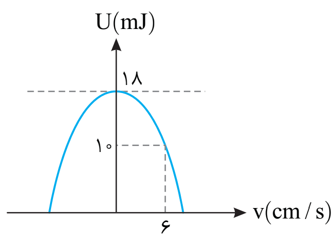
B ۱۳۲۲ | ۱

نکته بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است.

انرژی مکانیکی نوسانگر $E=18mJ$ و ثابت فنر $k=1000N/m$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{E=U_m} 18\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times10^{3}\times A^2$$

$$\Rightarrow A=6\times10^{-3}m=0.6cm\Rightarrow \text{طول پاره‌خط}=1.2cm$$



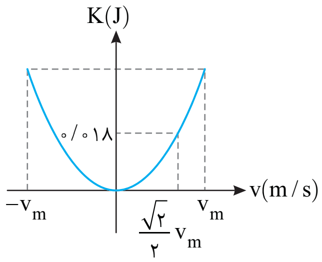
بازی با سؤال نمودار انرژی جنبشی بر حسب سرعت نوسانگر ساده‌ای مطابق شکل است. انرژی مکانیکی نوسانگر چند ژول است؟

۱) ۰/۰۲۴

۲) ۰/۰۳۶

۳) $0.018\sqrt{2}$

۴) $0.018\sqrt{3}$



پاسخ انرژی مکانیکی برابر انرژی جنبشی بیشینه است، از این‌رو انرژی جنبشی بیشینه را حساب می‌کنیم:

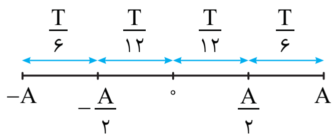
$$\begin{cases}K=\frac{1}{2}mv^2\\K_m=\frac{1}{2}mv_m^2\end{cases}\Rightarrow\frac{K}{K_m}=\frac{v^2}{v_m^2}\Rightarrow\frac{0.018}{K_m}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}v_m)^2}{v_m^2}$$

$$\Rightarrow K_m=0.036J\Rightarrow E=0.036J$$

گزینهٔ ۲

B ۱۳۲۳ | ۴

۱ طول پاره‌خط برابر ۲۰cm است بنابراین دامنه برابر $A=\frac{20}{2}=10cm$ است.



۲ نوسانگر در مدت ۰/۵s به $+\frac{A}{2}$ می‌رسد که با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم:

$$\frac{T}{6}=0.5s\Rightarrow T=3s$$

۳ بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}$$

۴ انرژی مکانیکی همواره ثابت و برابر $E=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ است، بنابراین نمودارهای (۱) و (۲) نادرست هستند. از طرفی دقت کنید که تندی همواره مثبت است و قسمت منفی در نمودار (۳) نادرست است و مقدار E نیز خواهد شد:

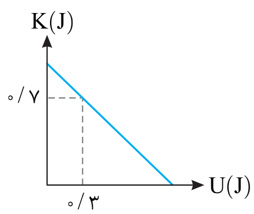
$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}\times0.9\times(0.1)^2\times(\frac{2\pi}{3})^2=\frac{1}{2}\times0.9\times0.01\times\frac{4\pi^2}{9}$$
$$=0.02J=20mJ$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۱۳۲۴ | ۱

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر با انرژی مکانیکی است. با توجه به اینکه روی نمودار در لحظه‌ای که $U=0.3J$ بوده، انرژی جنبشی برابر ۰/۷J است، خواهیم داشت:

$$E=K+U\Rightarrow E=0.7+0.3=1J$$

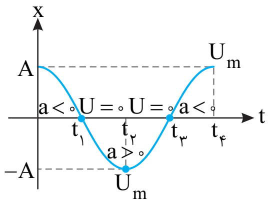


انرژی مکانیکی از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow1=\frac{1}{2}(k)(0.2)^2\Rightarrow k=\frac{2}{0.04}=50N/m$$

A ۱۳۲۵ ۴

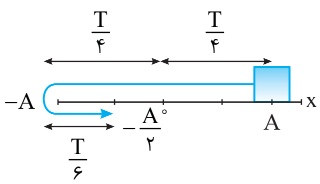
به نمودار روبه‌رو با دقت بنگرید. در حرکت به سمت انتهای مسیر انرژی پتانسیل نوسانگر رو به افزایش است یعنی از $t_۱$ تا $t_۲$ و یا از $t_۳$ تا $t_۴$. می‌دانیم که علامت شتاب نوسانگر مخالف علامت مکان نوسانگر می‌باشد* و چون شتاب منفی مدنظر می‌باشد پس باید مکان مثبت باشد یعنی از $t_۳$ تا $t_۴$ هم شتاب منفی و هم انرژی پتانسیل در حال افزایش است.



A ۱۳۲۶ ۲

خط فکری از روی محور افقی (t) نمودار $x-t$ باید دورهٔ نوسان را به‌دست آورد و با توجه به محور قائم دامنه و مکان نوسانگر مشخص خواهد شد. در گام اول دوره را حساب کرده و در گام دوم با توجه به رابطهٔ $E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲$ انرژی مکانیکی را حساب می‌کنیم.

در لحظهٔ $t_۱=\frac{۲}{۱۵}$ برای دومین بار مکان نوسانگر به $-۲cm$ یا $-\frac{A}{۲}$ رسیده است:



$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۶}=\frac{۸T}{۱۲}=\frac{۲T}{۳}$$

$$\Delta t=t_۱=\frac{۲}{۱۵}s\Rightarrow\frac{۲T}{۳}=\frac{۲}{۱۵}\Rightarrow T=\frac{۱}{۵}s$$

با داشتن T و محاسبهٔ ω انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

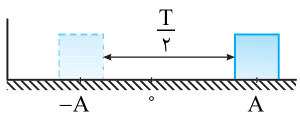
$$E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲\xrightarrow[\omega=\frac{۲\pi}{T}=۱۰\pi]{m=۵۰g,A=۴cm}$$

$$E=\frac{۱}{۲}\times(۵۰\times۱۰^{-۳})(۱۶\times۱۰^{-۴})(۱۰۰\times\pi^۲)$$

$$\xrightarrow{\pi^۲=۱۰}E=\frac{۱}{۲}(۸۰\times۱۰^{-۳})=۴۰\times۱۰^{-۳}J\Rightarrow E=\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۵}J$$

B ۱۳۲۷ ۳

خط فکری بیشینه جابه‌جایی یک نوسانگر در مدت نیم دوره همواره وقتی رخ می‌دهد که نوسانگر از مکان A به −A و یا از −A به +A برود. در این صورت مقدار جابه‌جایی برابر ۲A است. با این توضیحات شما می‌توانید دامنهٔ حرکت را بیابید و با داشتن دامنهٔ حرکت و انرژی مکانیکی، دوره را حساب کرده و نمودار مورد نظر را تشخیص دهید.



۱ بیشینه جابه‌جایی در مدت $\frac{T}{۲}$، ۱۰cm است، بنابراین دامنه خواهد شد:

$$۲A=۱۰\Rightarrow A=\frac{۱۰}{۲}\Rightarrow A=۵cm$$

۲ رابطهٔ انرژی مکانیکی را نوشته و بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲\xrightarrow[A=۵\times۱۰^{-۲}m]{E=۱/۲۵\times۱۰^{-۲}\pi^۲J,\ m=۰/۱kg}$$

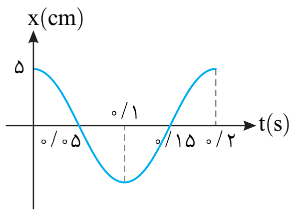
$$E=۱/۲۵\times۱۰^{-۲}\times\pi^۲=\frac{۱}{۲}\times۰/۱\times۲۵\times۱۰^{-۴}\times\omega^۲\Rightarrow\omega^۲=۱۰^۲\pi^۲\Rightarrow\omega=۱۰\pi\,rad/s$$

* هم‌علامت نبودن شتاب و مکان در کتاب درسی به‌طور مشخص بیان نشده است.

۳ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۱۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۲s$$

۴ بنابراین نمودار مکان – زمان به صورت روبه‌رو می‌باشد:

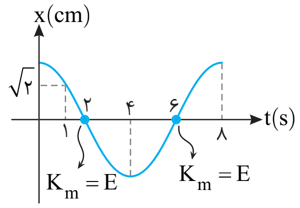


B ۱۳۲۸ ۴

۱ با توجه به نمودار $x-t$ در $t=۱s$ برای اولین بار مکان نوسانگر برابر $x=\sqrt{۲}$ می‌شود، بنابراین می‌توان دوره را حساب کرد.

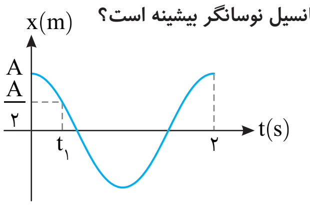
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\sqrt{۲}=۲\cos\frac{۲\pi}{T}t\xrightarrow{t=۱s}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{T}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow T=۸s$$



۲ هنگام گذر نوسانگر از حالت تعادل یعنی در لحظه‌هایی که نمودار مکان – زمان محور زمان را قطع می‌کند، تمام انرژی مکانیکی جسم به صورت انرژی جنبشی است که باتوجه به نمودار در لحظهٔ $t=۲s$ برای اولین بار و در $t=۶s$ برای دومین بار این اتفاق می‌افتد.

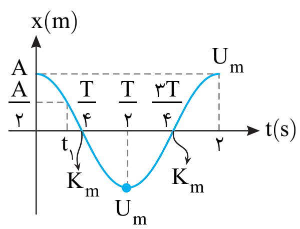
بازی با سؤال **نمودار مکان – زمان نوسانگری مطابق شکل روبه‌رو است. چند ثانیه پس از $t_۱$، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است؟**



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ **با توجه به نمودار $T=۲s$ می‌باشد و $t_۱$ اولین لحظه‌ای است که متحرک به مکان $x=\frac{A}{۲}$ رسیده است:**

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\pi\,rad/s,\ \frac{A}{۲}=A\cos\omega t_۱\Rightarrow\cos\pi t_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\pi t_۱=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۱=\frac{۱}{۳}s$$



در انتهای مسیر $x=\pm A$، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است پس از $t_۱$ در $t=\frac{T}{۲}$ انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه می‌شود.

$$\frac{T}{۲}-t_۱=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}s$$

گزینهٔ ۲

B ۱۳۲۹ | ۱

۱ با توجه به نمودار، دو دورهٔ نوسانگر B برابر نصف دورهٔ A است، بنابراین:

$$۲T_B = \frac{T_A}{۲} \Rightarrow T_A = ۴T_B \quad (I)$$

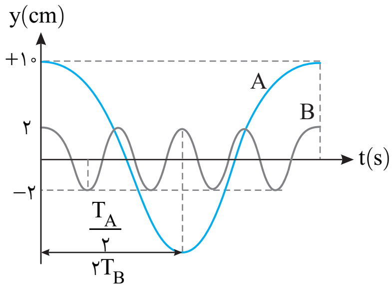
۲ نسبت بسامد زاویه‌ای دو نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{\frac{۲\pi}{T_B}}{\frac{۲\pi}{T_A}} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{T_A}{T_B} \xrightarrow{(I)} \frac{\omega_B}{\omega_A} = ۴ \Rightarrow \omega_A = \frac{۱}{۴}\omega_B$$

۳ دامنهٔ A، ۱۰cm و دامنهٔ B برابر ۲cm است.

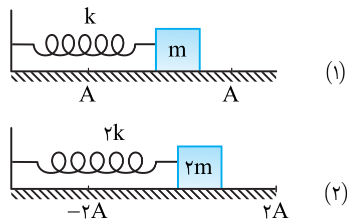
۴ انرژی مکانیکی نوسانگر A و B را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{۱}{۲} m_A A_A^۲ \omega_A^۲}{\frac{۱}{۲} m_B A_B^۲ \omega_B^۲} \xrightarrow{m_B=۵m_A} \frac{E_A}{E_B} = \frac{۱}{۵}\times\left(\frac{۱۰}{۲}\right)^۲\times\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ \Rightarrow \frac{E_A}{E_B} = \frac{۵}{۱۶}$$



C ۱۳۳۰ | ۴

خط فکری ابتدا به کمک نوشته‌های روی دو شکل نسبت انرژی مکانیکی آن‌ها را به‌دست آورید سپس به سراغ حل مسئله بروید.



انرژی مکانیکی یک نوسانگر از رابطهٔ $E=\frac{۱}{۲}kA^۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$\frac{E_۲}{E_۱} = \frac{\frac{۱}{۲}k_۲A_۲^۲}{\frac{۱}{۲}k_۱A_۱^۲} = \frac{(۲k)(۲A)^۲}{k(A)^۲} \Rightarrow E_۲ = ۸E_۱$$

بنابراین $E_۲$ بزرگ‌تر از $E_۱$ است. اکنون $E_۱$ و $E_۲$ برحسب انرژی جنبشی و پتانسیل نوشته شده از هم کم می‌کنیم.

$$E_۱=U_۱+K_۱ \,,\, E_۲=U_۲+K_۲ \Rightarrow E_۲-E_۱=(U_۲-U_۱)+(K_۲-K_۱)$$

با فرض مسئله $U_۲-U_۱=۴۶mJ$ و $K_۲-K_۱=۱۰mJ$ است. از این رو:

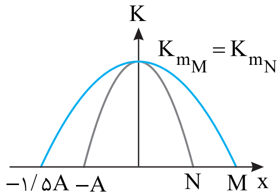
$$۸E_۱-E_۱=۴۶+۱۰ \Rightarrow ۷E_۱=۵۶ \Rightarrow E_۱=۸mJ \,,\, E_۲=۸\times۸=۶۴mJ$$

B ۱۳۳۱ | ۳

خط فکری با توجه به نمودار بیشینه انرژی جنبشی نوسانگرهای M و N با هم برابر و دو نوسانگر هم‌جرم بوده و دامنهٔ نوسان M، ۱/۵ برابر دامنهٔ نوسان N است $(A_M=۱/۵A_N)$، بنابراین همه چیز برای حل مسئله آماده است کافی است انرژی جنبشی بیشینه را با هم برابر قرار دهید.

۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر N و M با هم برابر است.

$$K_{m_M}=K_{m_N} \Rightarrow \frac{۱}{۲}m_M v_{m_M}^۲ = \frac{۱}{۲}m_N v_{m_N}^۲ \xrightarrow{m_N=m_M} v_{m_M}=v_{m_N}$$



۲ تندی بیشینه برابر $v_m=A\omega$ است. بنابراین:

$$v_{m_M}=v_{m_N} \Rightarrow A_M\omega_M=A_N\omega_N \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} ۱/۵\left(\frac{۲\pi}{T_M}\right)=\frac{۲\pi}{T_N}$$

$$\frac{T_M}{T_N}=۱/۵$$

A ۱۳۳۲ | ۲

هرگاه بر جسمی که می‌تواند با دوره یا بسامد خاصی (دورهٔ طبیعی) نوسان کند، یک نیروی دوره‌ای با همان دوره وارد شود، جسم شروع به نوسان می‌کند و دامنهٔ نوسان تا مقدار بیشینه‌ای افزایش می‌یابد و از آن پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. این پدیده را تشدید می‌گویند.

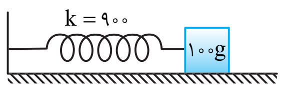
در حالتی هم که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر برابر نباشد، انرژی به نوسانگر منتقل می‌شود و نوسانگر را به حرکت درمی‌آورد اما بیشترین انرژی در حالت تشدید به نوسانگر منتقل می‌شود. با توجه به گفته‌های بالا گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۳۳۳ | ۲

یادآوری هرگاه با اعمال نیروی خارجی نوسانگری را به نوسان درآوردیم چنین نوسانی را نوسان واداشته گویند.

خط فکری هرگاه بسامد نوسان‌های واداشته با بسامد نوسانگر برابر باشد، تشدید رخ می‌دهد و دامنهٔ نوسانگر افزایش می‌یابد. اما اگر نوسانگر را با بسامدهایی بیشتر یا کمتر از بسامد طبیعی آن به نوسان درآوریم، دامنهٔ نوسان کوچک‌تر از حالت تشدید است، بنابراین شما باید بسامد طبیعی سامانهٔ جرم - فنر را حساب کرده با بسامدهای داده شده در مسئله مقایسه کنید.

بسامد طبیعی سامانهٔ جرم و فنر را به‌دست می‌آوریم:

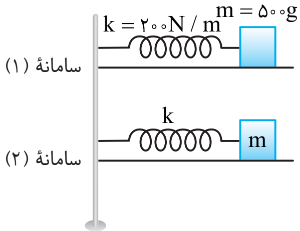


$$f_۰=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۹۰۰}{۰/۱}}=۱۵Hz$$

بسامد $f_۲=۱۵Hz$ با بسامد طبیعی $f_۰$ سامانه برابر است. بنابراین دامنهٔ نوسان برای بسامد (فرکانس) $f_۲$ از دو فرکانس دیگر بزرگ‌تر است.

A ۱۳۳۴ | ۳

بسامد سامانهٔ جرم - فنر اول را حساب می‌کنیم.



$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{f=\frac{۱}{T}}$$

$$f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow f_۲=f_۱=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۲۰۰}{۰/۵}}=\frac{۲۰}{۲\pi}Hz$$

هنگامی تشدید رخ می‌دهد که بسامد طبیعی دو سامانه با هم برابر باشند، بنابراین بسامد سامانهٔ (۲) نیز برابر است با:

$$f_۲=\frac{۲۰}{۲\pi}Hz$$

بسامد زاویه‌ای سامانهٔ (۲) را حساب می‌کنیم.

$$\omega_۲=۲\pi f_۲ \Rightarrow \omega_۲=۲\pi\times\frac{۲۰}{۲\pi} \Rightarrow \omega_۲=۲۰rad/s$$

تنها گزینه‌ای که در آن بسامد زاویه‌ای $۲۰rad/s$ است، گزینهٔ (۳) است.

۱۳۳۵ B ۲

هنگامی بین دو سامانه تشدید رخ می‌دهد که بسامد (دوره) آن‌ها با هم برابر باشد.

در حالت اول: $T_{فنر}=T_{آونگ}\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow \frac{m}{k}=\frac{\ell}{g}$

در حالت دوم: طول آونگ $\ell'=2\ell$ شده است. در این صورت دورهٔ آونگ خواهد شد:

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}\Rightarrow \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow \frac{T'}{T}=\sqrt{2}$$

باید دورهٔ سامانه جرم فنر نیز $\sqrt{2}$ برابر $(T'_{فنر}=\sqrt{2}T_{فنر})$ باشد تا مجدداً تشدید رخ دهد، بنابراین $2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}=\sqrt{2}(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})\Rightarrow k'=\frac{1}{2}k$

۱۳۳۶ B ۳

طول آونگ (۱) و آونگ (۴) با هم برابر است، بنابراین دورهٔ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ هر دو آونگ یکی است.

$$T_1=T_4\Rightarrow f_{o_1}=f_{o_4}$$

از این رو هرگاه آونگ (۱) را به نوسان درآوریم چون بسامد طبیعی آونگ‌های (۱) و (۴) با هم برابر است، برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد و دامنهٔ نوسان آونگ (۴) از بقیه بیشتر است و گزینهٔ (۳) درست است. دقت کنید با حرکت آونگ (۱) انرژی به همهٔ آونگ‌ها منتقل می‌شود و همه می‌جنبند اما برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد و دامنه‌اش از بقیه بیشتر است.

۱۳۳۷ B ۲

خط فکری هرگاه طول دو آونگ برابر باشد بسامد طبیعی (دورهٔ طبیعی) آن‌ها یکسان بوده و می‌توانند با هم تشدید انجام دهند. در حل این تست باید دقت کنید در اثر افزایش دما که طول آونگ‌ها افزایش می‌یابد و سپس بررسی کنید طول کدام‌ها با هم برابر می‌شود.

طول آونگ‌های (۱) و (۴) با هم برابر است و بسامد طبیعی آونگ‌های (۱) و (۴) $(f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}})$ با هم برابر است در نتیجه با نوسان آونگ (۱)، برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد.

با افزایش دما، طول آونگ‌های (۲) و (۳) و (۴) افزایش می‌یابد و با افزایش دما ممکن است طول آونگ (۳) با آونگ (۱) برابر شده و با نوسان آونگ (۱)، آونگ (۳) شروع به تشدید می‌کند اما با افزایش طول آونگ (۴) بسامد آن دیگر با بسامد آونگ (۱) برابر نیست و برای آن تشدید رخ نمی‌دهد.

طول آونگ (۲) که در هر دو حالت از طول آونگ (۱) بیشتر است و تشدید برای آونگ (۲) رخ نمی‌دهد.

۱۳۳۸ B ۳

خط فکری میله با بسامد زاویه‌ای در گسترهٔ $1\,rad/s$ تا $2\,rad/s$ نوسان می‌کند یعنی تمام بسامد بین این دو مقدار را می‌تواند ایجاد کند بنابراین اگر بسامد آونگ‌ها بین این دو مقدار باشد برای آن‌ها تشدید رخ می‌دهد اما ما به جای اینکه بسامد تک تک آونگ‌ها را حساب کنیم مسیر دیگری را انتخاب کرده‌ایم، محدودهٔ طول آونگ‌ها بین این دو بسامد زاویه‌ای را به‌دست آورده و طول آونگ‌ها را با این محدوده مقایسه می‌کنیم.

یادآوری بسامد زاویه‌ای آونگ برابر $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است.

بسامد زاویه‌ای (ω) در گسترهٔ $1\,rad/s$ تا $2\,rad/s$ می‌باشد و با توجه به $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ خواهیم داشت:

$$1\le\omega\le 2\Rightarrow 1\le\sqrt{\frac{g}{\ell}}\le 2\Rightarrow 1\le\frac{g}{\ell}\le 4\Rightarrow\frac{1}{4}\le\frac{\ell}{g}\le 1\xrightarrow{g\approx 10}2/5\le\ell\le 10$$

بنابراین اگر طول آونگ در بازهٔ $2/5\,m$ تا $10\,m$ باشد، آونگ تشدید می‌کند یعنی آونگ‌های به طول‌های $2/8\,m$، $3/6\,m$ و $8/2\,m$ دچار تشدید می‌شوند.

۱۳۳۹ B ۴

خط فکری با توجه به متن کتاب برای اینکه نوسان نامیرا باشد باید یک نیروی دوره‌ای مناسب که دامنه را عوض نکند در انتهای مسیر به آونگ وارد شود و چون آونگ را به سمت راست کشیده و رها می‌کنیم، این نیرو باید در انتهای راست مسیر وارد شود، بنابراین در هر دوره (T) یک بار این نیرو وارد می‌شود.

۱ دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{24/5\times 10^{-2}}{9/8}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{2/5\times 10^{-2}}$$

$$\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}}T=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{2/5\times 10^{-2}}\Rightarrow T=2\sqrt{25\times 10^{-2}}\Rightarrow T=1\,s$$

۲ بنابراین در لحظه‌های $t=1s$، $t=2s$، $t=3s$، $t=4s$، $t=5s$ و ... باید آونگ تحت تأثیر این نیرو قرار گیرد.

۱۳۴۰ B ۳

وقتی یک نیروی خارجی با بسامدی برابر بسامد طبیعی نوسانگر به آن وارد می‌شود، نوسانگر شروع به نوسان کرده و دامنهٔ آن افزایش می‌یابد. بنابراین دامنه باید در نمودار در حال افزایش باشد اما دوره و بسامد نوسانگر به دامنه بستگی ندارد و ثابت می‌ماند.

۱۳۴۱ A ۲

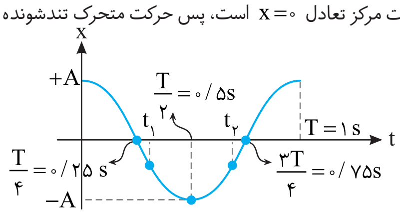
با توجه به رابطهٔ شتاب، $a=-kx$ است و با توجه به فرض مسأله که k یک مقدار ثابت است، شتاب متحرک و در نتیجه نیروی خالص وارد بر متحرک ثابت است، درحالی که می‌دانیم حرکت هماهنگ ساده حرکت با شتاب متغیر است پس حرکت هماهنگ ساده نیست.

۱۳۴۲ B ۴

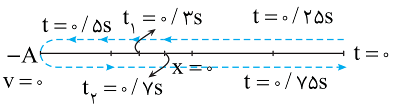
با توجه به رابطهٔ $a=-\omega^2x$ ابتدا بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega^2=4\pi^2\Rightarrow\omega=2\pi\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}=2\pi\Rightarrow T=1s$$

نمودار $x-t$ نوسانگر را رسم می‌کنیم. در t_1 نوسانگر در حال حرکت به سمت انتهای مسیر $(x=-A)$ است، پس حرکت متحرک کندشونده است. در t_2 نوسانگر در حال حرکت به سمت مرکز تعادل $x=0$ است، پس حرکت متحرک تندشونده است.



روش دیگر: مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. مطابق شکل در $t_1=0/3s$ حرکت کندشونده و در $t_2=0/7s$ حرکت تندشونده است.



۱۳۴۳ A ۱

خط فکری ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون $(F=ma)$، قانون هوک $(F=-kx)$ و بسامد زاویه‌ای $(\omega=\sqrt{k/m})$ معادلهٔ کلی شتاب - زمان در حرکت هماهنگ ساده را به‌دست می‌آوریم، سپس معادلهٔ شتاب - زمان داده شده در مسئله را با آن مقایسه می‌کنیم و به کمک آن بسامد زاویه‌ای، دامنه و دوره را به‌دست می‌آوریم، سپس بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه کرده با رسم مسیر حرکت و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمانی که حرکت کندشونده است را به‌دست می‌آوریم.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ و قانون هوک $(F=-kx)$ معادلهٔ شتاب - زمان را در حالت کلی به‌دست می‌آوریم.

$$ma=-kx\Rightarrow ma=-kA\cos\omega t\Rightarrow a=-\frac{k}{m}A\cos\omega t$$

$$\xrightarrow{\omega^2=\frac{k}{m}}a=-A\omega^2\cos\omega t$$

۲ معادلهٔ شتاب - زمان داده شده را با حالت کلی مقایسه کرده بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}a=-۱۰۰\pi^۲\cos ۵۰\pi t\\ a=-A\omega^۲\cos\omega t\end{array}\right\}\Rightarrow\omega=۵۰\pi rad/s$$

$$۱۰۰\pi^۲=A\omega^۲\Rightarrow ۱۰۰\pi^۲=A(۵۰\pi)^۲\Rightarrow A=۰/۰۴m=۴cm$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۵۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۰۴s$

۴ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم. $x=۰/۰۴\cos ۵۰\pi t$

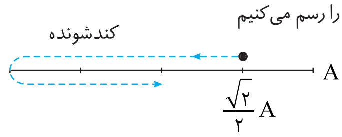
۵ بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۱}{۲۰۰}s$ تا $t_۲=\frac{۳}{۱۰۰}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۳}{۱۰۰}-\frac{۱}{۲۰۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۵}{۲۰۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵}{۸}T$$

۶ مکان متحرک در $t_۱=\frac{۱}{۲۰۰}s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$x_۱=۰/۰۴\cos ۵۰\pi\times\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow x_۱=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۰/۰۴)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

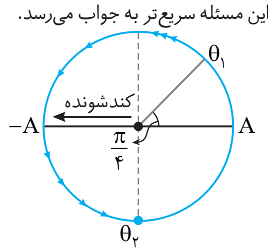
۷ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم



در مدت $\frac{T}{۴}$ حرکت کندشونده است، یعنی $\frac{T}{۴}=\frac{۰/۰۴}{۴}=۰/۰۱s$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: این روش در این مسئله سریع‌تر به جواب می‌رسد.

کمان متناظر با $t_۱=\frac{۱}{۲۰۰}s$ و $t_۲=\frac{۳}{۱۰۰}s$ روی دایرهٔ مثلثاتی را مشخص می‌کنیم.



$$\theta_۱=\omega t_۱=۵۰\pi\times\frac{۱}{۲۰۰}=\frac{\pi}{۴}$$

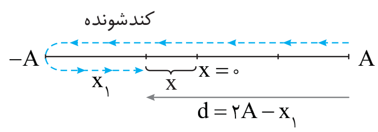
$$\theta_۲=\omega t_۲=۵۰\pi\times\frac{۳}{۱۰۰}=\frac{۳\pi}{۲}$$

می‌دانیم که با حرکت به سمت دامنه‌ها حرکت کندشونده است، پس در حرکت از $\theta_۱$ تا $\theta_۲$ تنها در بازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ تا π ($x=۰$ تا $x=-A$) حرکت کندشونده است که این بازه برابر $\frac{T}{۴}=۰/۰۱s$ است.

C ۱۳۴۴ | ۱

خط فکری از لحظهٔ صفر تا t برای اولین بار تندی متوسط دو برابر بزرگی سرعت متوسط شده است. یعنی مسافت طی شده دو برابر جابه‌جایی است. تا لحظه‌ای که نوسانگر در یک جهت در حرکت است، تندی متوسط و سرعت متوسط یکسان است، بنابراین بعد از تغییر جهت در مکان $-۴cm$ اتفاق می‌افتد. مسیر حرکت را به‌طور فرضی از صفر تا t رسم می‌کنیم و مسافت را دو برابر جابه‌جایی می‌نویسیم. به حل دقت کنید.

با توجه به مسیر اگر فاصلهٔ محل مورد نظر از $-A$ برابر $x_۱$ قرار دهیم، مسافت طی شده خواهد شد: $\ell=۲A+x_۱$



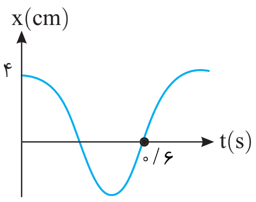
و جابه‌جایی خواهد شد: $d=۲A-x_۱$

با توجه به فرض مسئله:

$$s_{av}=۲v_{av}\Rightarrow\ell=۲d\Rightarrow ۲A+x_۱=۲(۲A-x_۱)\Rightarrow ۲A+x_۱=۴A-۲x_۱$$

$$\Rightarrow x_۱=\frac{۲}{۳}A$$

مکان نوسانگر یعنی فاصله نوسانگر از مبدأ مکان، بنابراین مکان در لحظهٔ t (x) خواهد شد: $x_۱+x=A\Rightarrow\frac{۲}{۳}A+x=A\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}A=\frac{۱}{۳}\times۴=\frac{۴}{۳}cm$



دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۳T}{۴}=۰/۶\Rightarrow T=۰/۸s$$

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۸}\Rightarrow\omega=\frac{۵\pi}{۲}rad/s$$

شتاب حرکت خواهد شد:

$$|a|=\omega^۲|x|\Rightarrow|a|=(\frac{۵\pi}{۲})^۲\times(\frac{۴}{۳}\times۱۰^{-۲})\Rightarrow|a|=\frac{۲۵\pi^۲}{۴}\times\frac{۴}{۳}\times۱۰^{-۲}$$

$$\Rightarrow|a|=\frac{۵}{۶}m/s^۲$$

B ۱۳۴۵ | ۱

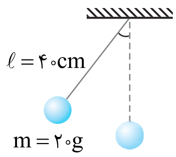
خط فکری صورت مسئله کمی گنگ است. شتاب تکرار شونده یعنی چی؟ به‌نظر می‌رسد با یک قطعهٔ الکترونیکی در حال نوسان روبه‌رو هستیم که شتاب آن می‌تواند حداکثر ۱۶g شود و اگر شتاب از این مقدار بیشتر شود قطعه آسیب می‌بینند. در حرکت هماهنگ ساده بیشینه شتاب در نقاط بازگشت خواهد بود ($a_m=A\omega^۲$) بنابراین شما باید شتاب بیشینه را برابر ۱۶g قرار داده مسئله را حل کنید.

در صورت سؤال بیشینهٔ شتاب قابل تحمل ۱۶g بیان شده است از این‌رو:

$$a_m=۱۶g\Rightarrow A\omega^۲=۱۶g\Rightarrow\frac{۴}{۱۰۰}\omega^۲=۱۶g\Rightarrow\omega^۲=۴۰۰g\Rightarrow(۲\pi f)^۲=۴۰۰g$$

$$\Rightarrow ۲\pi f=۲۰\sqrt{g}\xrightarrow{g=\pi^۲}۲\pi f=۲۰\pi\Rightarrow f=۱۰Hz$$

B ۱۳۴۶ | ۱



۱ بسامد زاویه‌ای آونگ را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۱۰}{۰/۴}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۴}}=۵rad/s$$

۲ نیروی خالص در نقطهٔ بازگشت یا محل رهاشدن آونگ همان بیشینه نیرو در حرکت هماهنگ ساده است. $F_{max}=mA\omega^۲$

۳ تندی هنگام گذر از نقطهٔ تعادل یعنی تندی بیشینه نوسانگر: $v_m=A\omega$ (II)

رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم. $\frac{v_m}{F_m}=\frac{A\omega}{mA\omega^۲}\Rightarrow\frac{v_m}{F_m}=\frac{۱}{m\omega}$

۴ اکنون داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم. $\frac{v_m}{۰/۱}=\frac{۱}{۰/۰۲\times۵}\Rightarrow v_m=۱m/s$

B ۱۳۴۷ | ۲

خط فکری وقتی وزنه به فنر برخورد می‌کند، آن را فشرده کرده و متوقف می‌شود. سرعت v در لحظهٔ برخورد همان تندی بیشینهٔ $v_m=A\omega$ در حرکت هماهنگ ساده است و فاصلهٔ محل توقف از محل برخورد نیز برابر دامنه است. بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای را حساب کنید تا بتوانید دامنه‌ها را با هم مقایسه کنید.

بسامد زاویه‌ای فنر A: $\omega_A=\sqrt{\frac{k}{m}}$

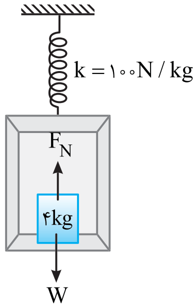
بسامد زاویه‌ای فنر B: $\omega_B=\sqrt{\frac{k}{۲m}}$

نسبت ω_A/ω_B خواهد شد: $\frac{\omega_A}{\omega_B}=\sqrt{\frac{۲m}{m}}=\sqrt{۲}$

تندی بیشینه A و B را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}v_{m_A}=A_A\omega_A\\ v_{m_B}=A_B\omega_B\end{array}\right\}\xrightarrow[v_{m_B}=۲v]{v_{m_A}=v}\frac{۱}{۲}=\frac{A_A}{A_B}\times\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{A_B}{A_A}=۲\sqrt{۲}$$

C ۱۳۴۸ ۴



خط فکری بر وزنه دو نیرو یکی نیروی وزن $(W=mg)$ و دیگری نیروی عمودی سطح (F_N) وارد می‌شود. یعنی نیروی خالص وارد بر وزنه برایند این دو نیرو است. در پایین‌ترین نقطه مسیر (نقطهٔ بازگشت) بیشینه نیروی خالص به وزنه وارد می‌شود که برابر $F_{max}=mA\omega^2$ است.

۱ بسامد زاویه‌ای سامانه را حساب می‌کنیم.

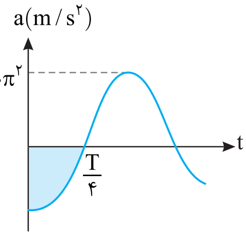
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{1000}{6+4}}\Rightarrow\omega=10\,rad/s$$

۲ برایند نیروهای F_N و ω را برابر F_{max} قرار می‌دهیم.

$$F_N-mg=mA\omega^2\xrightarrow{A=2cm}F_N-40=4\times2\times10^{-2}\times10^2\Rightarrow F_N=48N$$

C ۱۳۴۹ ۲

یادآوری مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است.



۱ در بازه صفر تا $\frac{T}{4}$، تغییر سرعت $2\pi m/s$ است. در این صورت در لحظهٔ $\frac{T}{4}$ که نوسانگر از مکان $x=0$ می‌گذرد، سرعت بیشینه و در $t=0$ سرعت صفر است.

بنابراین بیشینه سرعت خواهد شد: $\Delta v=v-v_0\Rightarrow2\pi=v_m-0\Rightarrow v_m=2\pi$

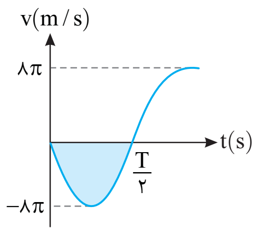
۲ شتاب بیشینه برابر $a_m=400\pi^2 m/s^2$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{matrix}v_m=A\omega\\a_m=A\omega^2\end{matrix}\Rightarrow\frac{v_m}{a_m}=\frac{1}{\omega}\Rightarrow\frac{2\pi}{400\pi^2}=\frac{1}{\omega}\Rightarrow\omega=200\pi\,rad/s$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow200\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/01s$

B ۱۳۵۰ ۱

یادآوری مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است.



۱ در بازهٔ صفر تا $\frac{T}{2}$ سطح زیر نمودار ۰/۰۴ واحد SI بوده یعنی جابه‌جایی برابر ۰/۰۴m است.

۲ در مدت صفر تا $\frac{T}{2}$ نوسانگر از مکان $+A$ به مکان $-A$ می‌رود و جابه‌جایی آن برابر $2A$ است. از این‌رو می‌توان نوشت: $2A=0/04\Rightarrow A=0/02m$

۳ با توجه به نمودار $v-t$، بیشینه تندی برابر $8\pi m/s$ است. در نتیجه خواهیم داشت: $v_m=A\omega\Rightarrow8\pi=0/02\omega\Rightarrow\omega=400\pi\,rad/s$

۴ بسامد را حساب می‌کنیم. $\omega=2\pi f\Rightarrow400\pi=2\pi f\Rightarrow f=200Hz$

B ۱۳۵۱ ۲

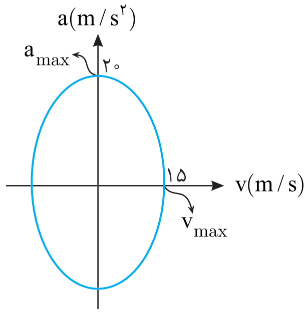
خط فکری مسئلهٔ سختی نیست از روی شکل می‌توانید شتاب بیشینه a_m و سرعت بیشینه آونگ را مشخص کنید سپس روابط a_m و v_m را نوشته، بسامد زاویه‌ای و از آن‌جا طول آونگ را حساب کنید.

با توجه به نمودار:

$$\begin{cases}a_{max}=20\xrightarrow{a_{max}=A\omega^2}A\omega^2=20\\v_{max}=15\xrightarrow{v_{max}=A\omega}A\omega=15\end{cases}\Rightarrow\omega=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}rad/s$$

بنابراین:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}\Rightarrow\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{10}{L}}\Rightarrow\frac{16}{9}=\frac{10}{L}\Rightarrow L=\frac{90}{16}\Rightarrow L=\frac{45}{8}m$$



B ۱۳۵۲ ۴

خط فکری با استفاده از انرژی مکانیکی A و B، ثابت فنر هر یک را حساب کرده سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و ثابت فنر جدید را به‌دست می‌آوریم و انرژی مکانیکی در حالت جدید را حساب می‌کنیم.

با توجه به رابطهٔ انرژی مکانیکی دستگاه جرم - فنر $(E=\frac{1}{2}kA^2)$ ثابت فنر k_A و k_B را حساب می‌کنیم.

۱ با استفاده از

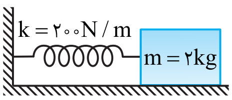
$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow\begin{cases}E_A=\frac{1}{2}\times k_A\times(10\times10^{-2})^2\Rightarrow5=\frac{1}{2}\times k_A\times10^{-2}\\\Rightarrow k_A=1000N/m\\E_B=\frac{1}{2}\times k_B\times(10\times10^{-2})^2\Rightarrow10=\frac{1}{2}\times k_B\times10^{-2}\\\Rightarrow k_B=2000N/m\end{cases}$$

۲ ثابت فنر جدید خواهد شد: $k_T=k_A+k_B=1000+2000=3000N/m$

۳ انرژی مکانیکی سامانه جرم و فنر جدید را به‌دست می‌آوریم

$$E=\frac{1}{2}k_TA^2=\frac{1}{2}\times3000\times(10\times10^{-2})^2=\frac{1}{2}\times3000\times10^{-2}=15J$$

B ۱۳۵۳ ۳



خط فکری با توجه به این‌که برای جابه‌جا کردن جسم ۴J کار انجام شده است، بنابر قانون پایستگی انرژی این کار به انرژی مکانیکی جسم تبدیل می‌شود، بنابراین انرژی مکانیکی جسم برابر با ۴J است.

۱ با توجه به رابطهٔ انرژی مکانیکی $(E=\frac{1}{2}kA^2)$ داریم:

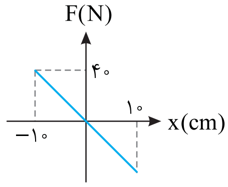
$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow4=\frac{1}{2}\times200\times A^2\Rightarrow100A^2=4\Rightarrow A=0/2m=20cm$$

۲ دورهٔ حرکت، تنها به جرم جسم و ثابت فنر بستگی دارد و از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ محاسبه می‌شود. بنابراین:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}=2\times\pi\times\frac{1}{10}=0/2\pi s$$

B ۱۳۵۴ | ۱

خط فکری دقت کنید که در مکان‌های $+۱۰cm$ و $-۱۰cm$، اندازهٔ نیرو بیشینه شده و برابر $F_m=۴۰$ است. بنابراین نوسانگر بین مکان‌های $+۱۰cm$ و $-۱۰cm$ در نوسان بوده و دامنه برابر $A=۱۰cm$ است.



در $x=۱۰cm$ یعنی در دامنه انرژی پتانسیل بیشینه و برابر انرژی مکانیکی $(E=U_m)$ است. از این‌رو شما باید به کمک نمودار، ثابت فنر را بیابید و انرژی مکانیکی را به‌دست آورید.

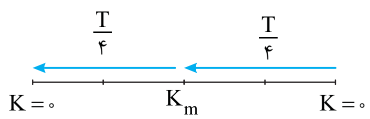
۱ با توجه به نمودار هرگاه $x=۱۰cm$ باشد، اندازهٔ $F=۴۰N$ است بنابراین می‌توان نوشت:
$|F|=k|x|\Rightarrow ۴۰=k|۰/۱|\Rightarrow k=۴۰۰N/m$

۲ انرژی پتانسیل نوسانگر در $x=۱۰cm$ بیشینه مقدار را دارد و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است بنابراین
$U_m=E=\frac{۱}{۲}kA^۲=\frac{۱}{۲}\times ۴۰۰\times(۰/۱)^۲=۲J$

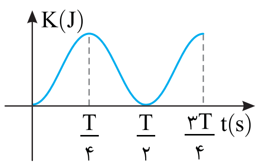
میانبر رابطهٔ بین انرژی مکانیکی، بیشینه نیرو و دامنه به‌صورت زیر است.
$E=\frac{۱}{۲}AF_m$

B ۱۳۵۵ | ۲

خط فکری به نمودار به دقت نگاه کنید. در مسیر حرکت نوسانگر در هر $\frac{T}{۴}$ انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به بیشینه و در $\frac{T}{۴}$ بعدی از بیشینه به صفر می‌رسد. بنابراین روی نمودار از $t=۰$ تا اولین بیشینه (max) برابر $\frac{T}{۴}$ است. با توجه به این مطلب می‌توانید دورهٔ نوسان را حساب کنید. در ضمن انرژی جنبشی همواره مثبت است و نمودار آن نمی‌تواند زیر محور زمان قرار گیرد.



با توجه به شکل پس از $t=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۴}=\frac{۳T}{۴}$ نوسانگر برای دومین بار به نقطهٔ تعادل خود رسیده که با توجه به نمودار $t=۰/۳s$ است.
$\frac{۳T}{۴}=۰/۳\Rightarrow T=۰/۴s$

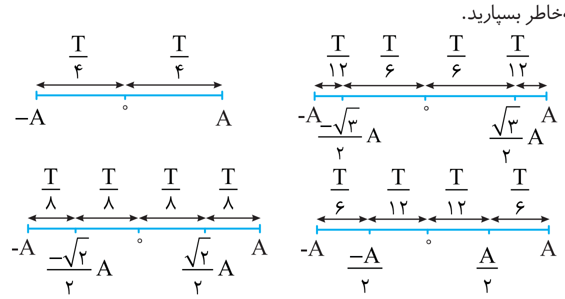


B ۱۳۵۶ | ۲

در ابتدای این تست به شما می‌گوییم که این تست با اطلاعات کتاب درسی قابل حل نیست. زیرا در کتاب درسی به صراحت بیان شده که نباید براساس رابطهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر $(U=\frac{۱}{۲}kx^۲)$ مسئله‌ای طرح شود.

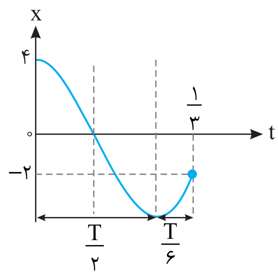
خط فکری در نمودار $x-t$ حرکت هماهنگ ساده، از محور افقی دوره و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید.

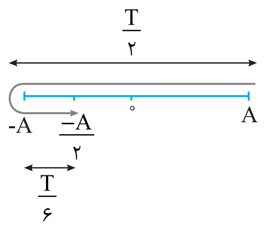
یادآوری باید بازه‌های زمانی شناخته شده مربوط به جابه‌جایی‌های معروف را به‌خاطر بسپارید.



با توجه به نمودار مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک برای دومین بار به $-۲cm$ یعنی $-\frac{A}{۲}$ برسد، $\frac{۱}{۳}$ ثانیه است:

مسیر را رسم می‌کنیم، بازه‌های شناخته شده را روی آن می‌نویسیم.





$$\Delta t=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۴T}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$$

بسامد زاویه‌ای خواهد شد:
$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\omega=۴\pi\frac{rad}{s}$$

معادلهٔ حرکت نوسانی را می‌نویسیم:
$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{A=۴cm=۰/۰۴m}x=۰/۰۴\cos ۴\pi t$$
$$\xrightarrow{t=\frac{۳}{۱۶}s}x=۰/۰۴\cos ۴\pi\times\frac{۳}{۱۶}\Rightarrow x=۰/۰۴\cos\frac{۳\pi}{۴}=-۰/۰۲\sqrt{۲}m$$

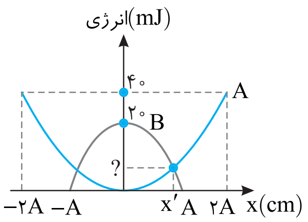
از اینجا به بعد شما باید از کتاب درسی خارج شوید و از رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}kx^۲$ استفاده کنید.

$$\frac{U}{E}=\frac{\text{انرژی پتانسیل کشسانی}}{\text{انرژی مکانیکی}}=\frac{\frac{۱}{۲}kx^۲}{\frac{۱}{۲}kA^۲}\Rightarrow\frac{U}{E}=\frac{x^۲}{A^۲}\xrightarrow[A=۰/۰۴m]{x=-۰/۰۲\sqrt{۲}m}$$
$$\frac{U}{E}=\frac{(-۰/۰۲\sqrt{۲})^۲}{(۰/۰۴)^۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow U=\frac{۱}{۲}E$$

با توجه به تعریف انرژی مکانیکی خواهیم داشت:
$$E=U+K\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}E+K\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}E$$

B ۱۳۵۷ | ۳

نکته در حرکت هماهنگ ساده بیشینه انرژی پتانسیل و بیشینه انرژی جنبشی یکسان و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر هستند. $(E=U_m=K_m)$



۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر B برابر $۲۰mJ$ است، یعنی انرژی مکانیکی نوسانگر B نیز $۲۰mJ$ است. در صورت مسئله انرژی پتانسیل نوسانگر B در مکان x' برابر $۱۵mJ$ بیان شده از این رو انرژی جنبشی نوسانگر B در مکان x' خواهد شد.
$E_B=K_B+U_B\Rightarrow ۲۰=K_B+۱۵\Rightarrow K_B=۵mJ$

۲ با توجه به نمودارها در مکان x'، انرژی جنبشی نوسانگر B برابر انرژی پتانسیل نوسانگر A است، از این‌رو خواهیم داشت.
$U_A=K_B=۵mJ$

۳ با توجه به نمودار انرژی پتانسیل A، بیشینه مقدار انرژی پتانسیل $U_{A\max}=۴۰mJ$ است، بنابراین انرژی مکانیکی A نیز $U_m=E=۴۰mJ$ بوده و می‌توان نوشت:
$E_A=K_A+U_A\Rightarrow ۴۰=K_A+۵\Rightarrow K_A=۳۵mJ$

C ۱۳۵۸ ۱

خط فکری پدیده تشدید وقتی اتفاق می‌افتد که دو سامانه دارای بسامد یکسان (بسامد زاویه‌ای یکسان) باشند. بنابراین وقتی بیان می‌شود که سامانهٔ (۱) تنها با سامانهٔ (۳) تشدید ایجاد می‌کند یعنی $\omega_1=\omega_3$ است. سامانهٔ (۲) نیز تنها با سامانهٔ (۴) تشدید ایجاد می‌کند $(\omega_2=\omega_4)$، شما باید به کمک این تساوی‌ها رابطه‌ای بین k_1 و k_2 با k به‌دست بیاورید. سپس در حالت جدید بسامدهای زاویه‌ای را حساب کرده و با هم مقایسه کنید. هر کدام که با هم برابر هستند تشدید ایجاد می‌کنند.

۱ وقتی سامانهٔ (۳) با به نوسان درآمدن سامانهٔ (۱)، به نوسان در می‌آید یعنی:

$$\omega_1=\omega_3\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{m_1}}=\sqrt{\frac{k_1}{m_3}}\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{k_1}{\frac{m}{2}}\Rightarrow k_1=\frac{1}{2}k$$

وقتی سامانهٔ (۲) با به نوسان در آمدن سامانهٔ (۴) به نوسان در می‌آید:

$$\omega_2=\omega_4\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{m_2}}=\sqrt{\frac{k_2}{m_4}}\Rightarrow\frac{k}{\frac{m}{2}}=\frac{k_2}{4m}\Rightarrow k_2=8k$$

۲ با تعویض جرم سامانهٔ (۳) $(m_3=\frac{m}{2})$ با جرم سامانهٔ (۱) $(m_1=m)$، بسامد زاویه‌ای سامانه‌ها به ترتیب خواهد شد:

$$\omega_1'=\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{2}}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{2}\omega_1\ ,\ \omega_2=\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{2}}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{2}\omega_1$$

$$\omega_3'=\sqrt{\frac{k_1}{m}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{m}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_1,\ \omega_4=\sqrt{\frac{k_2}{4m}}=\sqrt{\frac{8k}{4m}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{2}\omega_1$$

دقت کنید بسامد زاویه‌ای $\omega_1'=\omega_2$ و $\omega_4=\omega_1'$ است. بنابراین در این حالت با نوسان سامانه (۱) برای سامانه‌های (۲) و (۴) تشدید رخ می‌دهد.

B ۱۳۵۹ ۴

یادآوری تشدید هنگامی رخ می‌دهد که دو نوسانگر هم‌بسامد باشند.

۱ آونگ نوسانات سامانهٔ جرم فنر را تشدید کرده است بنابراین بسامد آن‌ها با هم برابر است. $f_{\text{ف}}=f_{\text{آ}}$

۲ با بردن آونگ به سیارهٔ دیگر دوره و بسامد آونگ تغییر می‌کند بنابراین

$$\frac{\text{دوره در سطح سیاره}\leftarrow T_P}{\text{دوره در سطح زمین}\leftarrow T_e}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_P}{g_P}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_e}{g_e}}}\Rightarrow\frac{T_P}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_P}}\times\sqrt{\frac{\ell_P}{\ell_e}}$$

$$\xrightarrow[\ell_P=\frac{1}{4}\ell_e]{g_P=\frac{1}{2}g_e}\frac{T_P}{T_e}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{T_P}{T_e}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow T_P=\frac{\sqrt{2}}{2}T_e$$

۳ بنابراین باید دورهٔ سامانهٔ جرم فنر نیز $\frac{\sqrt{2}}{2}$ حالت اول شود تا مجدداً تشدید رخ دهد.

$$\text{فنر}:\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{k}{k'}\Rightarrow k'=2k$$

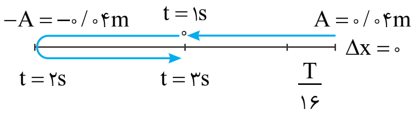
پنجره ۱ روبه‌روی ۲

A ۱۳۵۹ ۱

۱

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$

۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=2s$ تا $t=3s$، با توجه به دوره $T=4s$ مشخص است که اگر $\Delta t=1s$ باشد این مقدار ربع دوره است و نوسانگر در این مدت از مکان $+A$ به مکان $x=0$ می‌رود درواقع در لحظهٔ $t=1s$ ذره در مکان $x=0$ و در لحظهٔ $t=2s$ در مکان $x=-A$ و در لحظهٔ $t=3s$ در مکان $x=0$ است. بنابراین مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم همان $L=A=0/04m$.



۳ در بازهٔ $t=1s$ تا $t=3s$ برابر $\ell'=2A=0/08m$ است.

۴ تندی متوسط در دو حالت خواهد شد:

در ثانیهٔ سوم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{0/04}{1}=0/04m/s$

در بازهٔ ۱s تا ۳s: $s'_{av}=\frac{\ell'}{\Delta t'}=\frac{0/08}{2}=0/04m/s$

$$\Rightarrow\frac{s_{av}}{s'_{av}}=1$$

نمای ٤

A ۱۳۵۹ ۲

۲

خط فکری تکانه برابر $\vec{P}=m\vec{v}$ است، بنابراین به جای بررسی لحظه‌های تغییر جهت تکانه، لحظه‌های تغییرجهت حرکت (تغییر جهت سرعت) را بررسی می‌کنیم. در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ سرعت تغییر علامت می‌دهد. در معادلهٔ حرکت به‌جای x، $t=\frac{1}{15}s$ قرار دهید و مکان را در این لحظه بیابید سپس دوره را حساب کنید و مشخص کنید بازهٔ زمانی چه کسری از دوره است و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسیر حرکت را رسم کرده و تعداد دفعات تغییر جهت بردار تکانه را بیابید.

۱ در لحظهٔ $t=\frac{1}{15}s$ مکان نوسانگر خواهد شد.

$$x=0/02\cos 10\pi\times\frac{1}{15}\Rightarrow x=0/02\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=0/02(-\frac{1}{2})\Rightarrow x=-0/01m$$

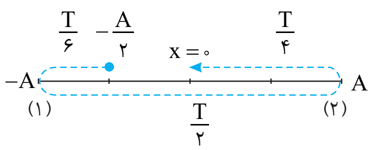
۲ نسبت $\frac{x}{A}$ را مشخص می‌کنیم: $\frac{x}{A}=\frac{-0/01}{0/02}\Rightarrow x=-\frac{A}{2}$

۳ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 10\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{10}s\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$

۴ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{15-4}{60}}{\frac{1}{5}}=\frac{11}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{11T}{12}$$

۵ مسیر حرکت را در بازهٔ $\frac{11T}{12}$ رسم می‌کنیم.



۶ دو بار تکانه تغییر جهت می‌دهد.

روش استفاده از معادله:

$$\pm A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\pm 1\Rightarrow\omega t=k\pi\quad,\quad 10\pi t=k\pi\Rightarrow t=\frac{k}{10}$$

می‌توان به جای k، مقدار ۱ و ۲ قرار داد که در بازهٔ $\frac{1}{15}s$ تا $\frac{1}{4}s$ است، بنابراین نوسانگر در این بازهٔ زمانی دوبار به نقاط بازگشت خود می‌رسد و تکانه تغییر جهت می‌دهد.

نمای ۵

A ۱۳۵۹ ۴ ۳

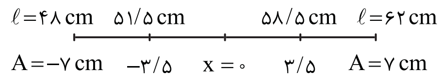
۱ دورهٔ نوسان دستگاه برابر است با:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۲}{۵۰۰}}\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲۵}s$$

۲ طول مسیر برابر فاصلهٔ بین بیشینهٔ طول ℓ_{max} و کمینهٔ طول ℓ_{min} نوسانگر بوده و دامنهٔ نوسان برابر نصف طول مسیر است:

$$۲A=\ell_{max}-\ell_{min}\Rightarrow ۲A=۶۲-۴۸=۱۴\Rightarrow A=۷cm$$

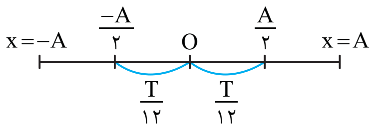
۳ مطابق شکل وقتی طول فنر از ۵۱/۵cm به ۵۸/۵cm می‌رسد، در واقع وزنه باید از مکان $\frac{-A}{۲}=-۳/۵cm$ برای نخستین بار به مکان $\frac{A}{۲}=۳/۵cm$ برود و چون جهت حرکت بیان نشده دو حالت ممکن است رخ دهد:



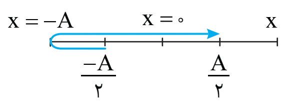
حالت اول: وزنه بدون تغییر جهت از مکان $\frac{-A}{۲}=-۳/۵cm$ به مکان $\frac{A}{۲}=۳/۵cm$ برود.

در این صورت زمان جابه‌جایی برابر خواهد بود با:

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۱۲}=\frac{T}{۶}=\frac{\frac{\pi}{۲۵}}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{\pi}{۱۵۰}s$$



حالت دوم: آن است که وزنه از مکان $\frac{-A}{۲}=-۳/۵cm$ به دامنه $-A$ یعنی به انتهای مسیر رفته و در بازگشت به مکان $\frac{+A}{۲}=۳/۵cm$ برود. در این صورت زمان جابه‌جایی برابر نصف دوره است.



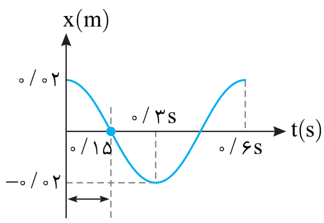
$$\Delta t=\frac{T}{۲}=\frac{\frac{\pi}{۲۵}}{۲}=\frac{\pi}{۵۰}s$$

بنابراین هر دو مقدار $\frac{\pi}{۵۰}s$ و $\frac{\pi}{۱۵۰}s$ می‌توانند جواب باشند.

نمای ۶

A ۱۳۵۹ ۴ ۴

۱ با توجه به نمودار دوره را حساب می‌کنیم. $\frac{T}{۴}=۰/۱۵\Rightarrow T=۰/۶s$



۲ معادلهٔ حرکت نوسانگر را می‌نویسیم:

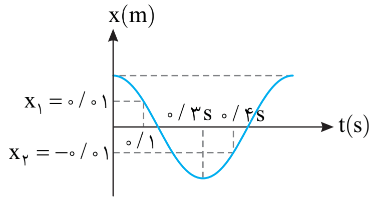
$$x=۰/۰۲\cos\omega t\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{۲\pi}{۰/۶}t\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{۱۰\pi}{۳}t$$

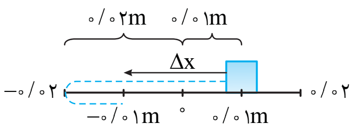
۳ حال با جای‌گذاری $t_۱=۰/۱s$ و $t_۲=۰/۴s$ مکان نوسانگر در این دو لحظه را به دست می‌آوریم.

$$x_۱=۰/۰۲\cos(\frac{۱۰\pi}{۳}\times۰/۱)\Rightarrow x_۱=۰/۰۱m$$

$$x_۲=۰/۰۲\cos(\frac{۱۰\pi}{۳}\times۰/۴)\Rightarrow x_۲=-۰/۰۱m$$

۴ دقت کنید که $t_۲=۰/۴s$ از $\frac{T}{۲}=۰/۳s$ بزرگ‌تر است و $t_۱=۰/۱s$ نیز از ۰/۱۵s کمتر است پس مکان نوسانگر روی نمودار در این دو لحظه به صورت زیر است:





۵ جابه‌جایی خواهد شد: $\Delta x=x_۲-x_۱=-۰/۰۲m$

۶ مسافت طی شده برابر است با: $\ell=۰/۰۱+۰/۰۲+۰/۰۱=۰/۰۴m$

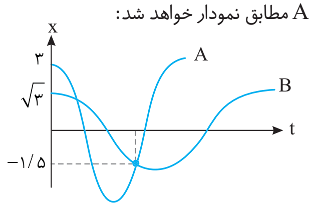
۷ نسبت $\ell/\Delta x$ را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\ell}{|\Delta x|}=\frac{۰/۰۴}{۰/۰۲}=۲$

نمای ۵ و ۱

A ۱۳۵۹ ۳ ۵

۱ نسبت x/A را برای نوسانگر A به دست می‌آوریم. $\frac{x}{A}=\frac{-۱/۵}{۳}\Rightarrow x=-\frac{A}{۲}$

۲ مسیر حرکت A مطابق نمودار خواهد شد:



۳ بازهٔ زمانی مسیر روی شکل را حساب می‌کنیم.

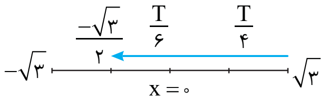
$$\Delta t_A=\frac{T_A}{۲}+\frac{T_A}{۶}\Rightarrow\Delta t_A=\frac{۲T_A}{۳}$$

۴ نسبت x/A را برای نوسانگر B به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{A}=\frac{-۱/۵}{\sqrt{۳}}=\frac{-۱/۵\sqrt{۳}}{۳}=\frac{x}{A}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵ مسیر حرکت B را رسم می‌کنیم و بازهٔ زمانی Δt_B را مشخص می‌کنیم.

$$\Delta t_B=\frac{T_B}{۴}+\frac{T_B}{۶}\Rightarrow\Delta t_B=\frac{۵T_B}{۱۲}$$



۶ با توجه به نمودار $\Delta t_A=\Delta t_B$ است. بنابراین: $\frac{۲T_A}{۳}=\frac{۵T_B}{۱۲}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{۵}{۸}$

۷ نسبت بیشینهٔ تندی خواهد شد:

$$\frac{v_{mA}}{v_{mB}}=\frac{A_A\omega_A}{A_B\omega_B}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}\times\frac{\frac{۲\pi}{T_A}}{\frac{۲\pi}{T_B}}\Rightarrow\frac{v_{mA}}{v_{mB}}=\sqrt{۳}\times\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{۳}\times\frac{۸}{۵}=\frac{۸\sqrt{۳}}{۵}$$

نمای ۱۳

A ۱۳۵۹ ۱

۶ خط فکری در گام اول انرژی مکانیکی نوسانگر را حساب می‌کنیم تا در گام بعدی با داشتن انرژی مکانیکی و براساس رابطهٔ $E=U+K$، با جایگذاری انرژی پتانسیل در نقطهٔ مورد نظر انرژی جنبشی نوسانگر و پس از آن سرعت نوسانگر را به‌دست آوریم.

۱ انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$K=۵N/cm=۵۰۰N/m\ ,\ E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}۵۰۰(۱۶\times ۱۰^{-۴})=۰/۴J$$

۲ انرژی پتانسیل نوسانگر در نقطهٔ مورد نظر $۰/۲J$ است، درنتیجه:

$$E=U+K\Rightarrow ۰/۴=۰/۲J+K\Rightarrow K=۰/۲J$$

۳ درنهایت براساس رابطهٔ انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}\Rightarrow ۰/۲=\frac{۱}{۲}\times ۱\times v^{۲}\Rightarrow v^{۲}=۰/۴$$

$$v^{۲}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow v=\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\xrightarrow{\text{عبارت را گویا می‌کنیم}}$$

$$v=\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۱۰}m/s$$

تندی برحسب سانتی‌متر بر ثانیه خواسته شده است:

$$v=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۱۰}\times ۱۰۰cm/s=۲۰\sqrt{۱۰}cm/s$$

نمای ۱۲

A ۱۳۵۹ ۱

۷ خط فکری بزرگی سرعت نوسانگر در لحظهٔ عبور از حالت تعادل (مکان $x=۰$) بیشینه و برابر $v_m=A\omega$ است بنابراین شما باید دامنه (A) و همچنین دوره $(\omega=\frac{۲\pi}{T})$ را به‌دست بیاورید. اما شما نمودار انرژی - مکان را در اختیار دارید پس با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی $(E=K+U)$ باید به کمک انرژی مکانیکی نوسانگر، دوره را حساب کنید.

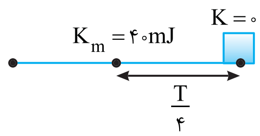
۱ با توجه به نمودار دامنه نوسانگر $A=۲cm$ است و در مکان $x=\sqrt{۲}cm$ انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر با هم برابر بوده و مقدار آن‌ها $۲۰mJ$ است، بنابراین انرژی مکانیکی نوسانگر خواهد شد:

$$E=U+K=۲۰+۲۰\Rightarrow E=۴۰mJ$$

نکته در حرکت هماهنگ ساده همواره بیشینه انرژی جنبشی، بیشینه انرژی پتانسیل و انرژی مکانیکی نوسانگر با هم برابرند $(E=K_m=U_m)$.

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر $۴۰mJ$ شده است بنابراین بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر نیز $K_m=۴۰mJ$ است. در صورت مسئله بازهٔ زمانی که انرژی جنبشی از $K=۰$ به $K=۴۰mJ$ می‌رسد را برابر $۰/۰۵s$ بیان کرده این یعنی نوسانگر از نقطهٔ بازگشت به مرکز نوسان رفته که این بازه برابر $\frac{T}{۴}$ است. از این‌رو:

$$\frac{T}{۴}=۰/۰۵\Rightarrow T=۰/۲s$$

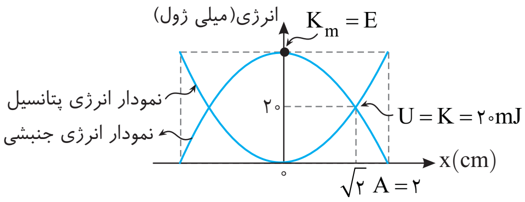


۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۰/۲}\Rightarrow\omega=۱۰\pi\ rad/s$$

۴ در لحظهٔ گذر از مرکز نوسان $(x=۰)$ تندی بیشینه و برابر است با:

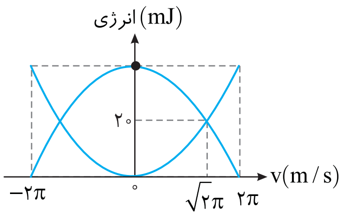
$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۰/۰۲\times ۱۰\pi=\frac{\pi}{۵}m/s$$



نمای ۱۳

بازی با سؤال شکل زیر، نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سامانهٔ جرم - فنر را برحسب سرعت نشان می‌دهد اگر حداقل زمانی که طول می‌کشد تا انرژی پتانسیل نوسانگر از $۴۰mJ$ به صفر برسد، برابر $۰/۰۵s$ باشد، دامنهٔ حرکت نوسانگر چند سانتی‌متر است؟

ریاضی – ۸۸

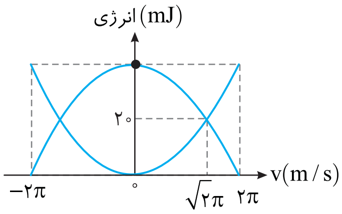


۱) ۷/۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

پاسخ در لحظه‌ای که سرعت نوسانگر $\sqrt{۲}\pi m/s$ است، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر است.
$K=U=۲۰mJ$

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است، از این‌رو:

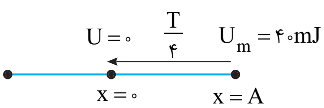
$$E=K+U\Rightarrow E=۲۰+۲۰\Rightarrow E=۴۰mJ$$



بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است
$U_m=E=۴۰mJ$

انرژی پتانسیل نوسانگر در نقاط بازگشت دو انتهای مسیر بیشینه است و وقتی در مسئله بیان می‌کند که حداقل بازهٔ زمانی که انرژی پتانسیل از $۴۰mJ$ به صفر می‌رسد $۰/۰۵s$ است یعنی مدت زمانی که نوسانگر از دامنه به مبدأ می‌رود برابر $\frac{T}{۴}$ است که این بازه زمانی برابر $۰/۰۵s$ است از این‌رو:

$$\frac{T}{۴}=۰/۰۵\Rightarrow T=۰/۲s$$



بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۲}\Rightarrow\omega=۱۰\pi\ rad/s$$

با توجه به نمودار بیشینه تندی نوسانگر $v_m=۲\pi\ m/s$ است بنابراین:

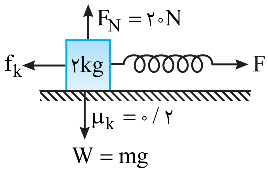
$$v_m=A\omega\Rightarrow ۲\pi=A(۱۰\pi)\Rightarrow A=۰/۲m=۲۰cm$$

گزینه ۴

B | ۱۳۵۹ | ۱

۸ **خط فکری** ابتدا نیروهای وارد بر وزنهٔ ۲ کیلوگرمی را رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون ثابت فنر را به‌دست آورید، سپس بسامد زاویه‌ای نوسان سامانه جرم - فنر را حساب کنید تا بتوانید شتاب بیشینه را به‌دست آورید.

یادآوری نیروی کشسانی فنر $F=k\Delta L$ و نیروی اصطکاک برابر $f_k=\mu_k F_N$ است.



۱ بنا به قانون دوم نیوتون:

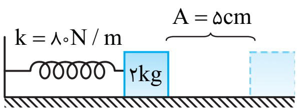
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow k\Delta L-\mu_k F_N=ma$$

$$\xrightarrow{\Delta L=۰/۱m} k(۰/۱)-۰/۲\times۲۰=۲\times۲\Rightarrow ۰/۱k=۸\Rightarrow k=۸۰N/m$$

۲ بسامد زاویه‌ای سامانهٔ جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۸۰}{۲}}\Rightarrow\omega=\sqrt{۴۰}\Rightarrow\omega=۲\sqrt{۱۰}\ rad/s$$

۳ مقدار انحراف وزنه از حالت تعادل و رها کردن وزنه برابر دامنه است، بنابراین: $A=۰/۰۵m$



۴ شتاب بیشینه نوسانگر خواهد شد:

$$a_m=A\omega^2\Rightarrow a_m=۰/۰۵\times۴۰\Rightarrow a_m=۲m/s^2$$

نمای ۹

A | ۱۳۵۹ | ۳

۹ دورهٔ آونگ را از رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ به‌دست می‌آوریم:

$$T_1=\frac{t}{N_1}\Rightarrow T_1=\frac{۷۲}{۴۰}=۱/۸s\ ,\ T_2=\frac{t}{N_2}\Rightarrow T_2=\frac{۷۲}{۴۵}=۱/۶s$$

دورهٔ آونگ برابر $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow ۱/۸=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{\pi^2}}\Rightarrow\sqrt{\ell_1}=۰/۹\Rightarrow\ell_1=۰/۸۱m=۸۱cm$$

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow ۱/۶=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{\pi^2}}\Rightarrow\sqrt{\ell_2}=۰/۸\Rightarrow\ell_2=۰/۶۴m=۶۴cm$$

بنابراین طول آونگ $۸۱-۶۴=۱۷cm$ کاهش می‌یابد. نمای ۷

A | ۱۳۵۹ | ۳

۱۰ **نکته** دورهٔ نوسان آونگ به جرم و جنس گلوله بستگی ندارد. $T=2\pi\sqrt{\ell/g}$

چون طول آونگ‌های A و B با هم برابر است، پس دورهٔ آن‌ها یکسان است و پدیدهٔ تشدید رخ می‌دهد.

نمای ۱۴

پنجره ۳

A | ۱۳۶۰ | ۳

یادآوری امواج دو دسته هستند: امواج مکانیکی - امواج الکترومغناطیسی

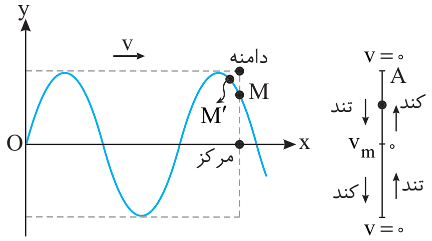
امواج رادیویی و نور مرئی از نوع امواج الکترومغناطیسی هستند و برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارد و گزارهٔ (الف) نادرست است.

امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی‌اند که برای انتشار به محیط مادی نیاز دارند و گزارهٔ (ب) نیز نادرست است.

منشأ امواج مکانیکی و امواج الکترومغناطیسی متفاوت است اما همگی آن‌ها مشخصه‌های یکسانی دارند و رفتار آن‌ها از قاعده‌های کلی پیروی می‌کند که در هر پدیدهٔ موجی برقرار است بنابراین گزاره‌های (پ) و (ت) درست هستند.

B | ۱۳۶۱ | ۴

نکته در انتشار موج سینوسی در یک محیط، تمام ذره‌های محیط دارای حرکت هماهنگ ساده‌اند و هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود را در راستای پیشروی موج تکرار می‌کند.

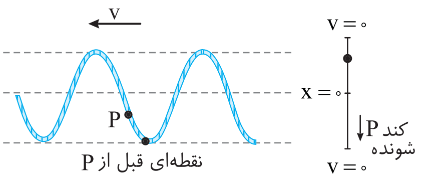


به ذرهٔ قبل از M (یعنی M′) روی شکل نگاه کنید، بالاتر از نقطهٔ M است، بنابراین نقطهٔ M رو به بالا در حرکت است و از مرکز نوسانش به سوی دامنه در حرکت است. هرگاه یک نوسانگر ساده از مرکز به سوی دامنه برود حرکتش کندشونده است، پس نقطهٔ M دارای حرکت کندشونده و رو به بالا است.

B | ۱۳۶۲ | ۴

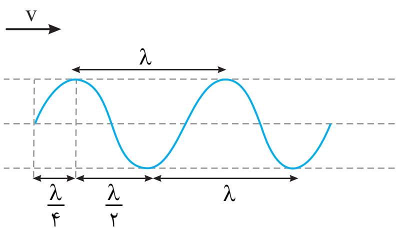
خط فکری باید در انتشار موج به جهت پیشروی موج دقت کنید تا بتوانید نقطهٔ قبل از P را تشخیص دهید.

پیشروی موج از راست به چپ است. در انتشار موج، هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود در راستای پیشروی موج را تکرار می‌کند. با توجه به شکل، ذرهٔ قبل از P پایین‌تر از P است بنابراین P رو به پایین حرکت می‌کند. از طرفی هر ذره از محیط دارای حرکت هماهنگ ساده است و P در حال حرکت به سوی انتهای مسیرش است، بنابراین دارای حرکت کندشونده است.



B | ۱۳۶۳ | ۱

نکته در انتشار موج در یک محیط، هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود را تکرار می‌کند و ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است. هرگاه ذره به سوی انتهای مسیرش در حرکت باشد حرکت آن کندشونده و هرگاه به سوی مرکز نوسانش در حرکت باشد حرکت آن تندشونده است.



به جهت پیشروی موج دقت کنید، جهت پیشروی در جهت مثبت محور x است.

با توجه به شکل نقطهٔ P′ قبل از نقطهٔ P پایین‌تر از P است از این‌رو ذرهٔ P در حال حرکت رو به پایین به سمت مرکز نوسان بوده و حرکتش تندشونده است.

نقطهٔ Q′ نقطهٔ قبل از Q بوده و بالاتر از Q است از این‌رو ذرهٔ Q در حال حرکت رو به بالا به سمت انتهای مسیرش بوده و حرکتش کندشونده است.

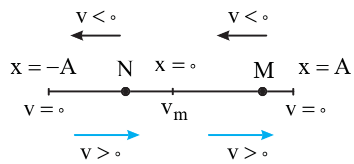
برای نقاط M و N با همین استدلال می‌توان گفت:

ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا به سمت مرکز نوسانش بوده و حرکتش تندشونده است. بنابراین نقطهٔ M پاسخ تست است.

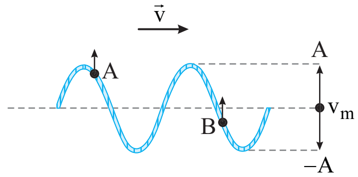
ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین به سمت انتهای مسیرش بوده و حرکتش کندشونده است.

B　۱۳۶۴　۲

یادآوری ذرات محیط دارای حرکت هماهنگ ساده هستند و هرچه نوسانگر به مبدأ (حالت تعادل) نزدیک‌تر باشد، تندی نوسان آن بزرگتر است و هرچه به نقطهٔ بازگشت نزدیک‌تر باشد تندی کمتر است به‌طور مثال: $(s_M < s_N)$



اگر ذره در حال حرکت رو به بالا باشد سرعت مثبت و اگر در حال حرکت رو به پایین باشد سرعت منفی است.

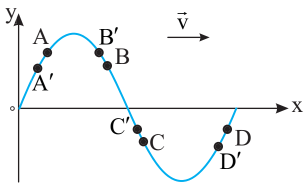


با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ A و ذرهٔ B هر دو در حال حرکت رو به بالا هستند و سرعت هر دو مثبت است. ذرهٔ B به مرکز نوسان نزدیک بوده و تندی آن بیشتر است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B　۱۳۶۵　۲

نکته هرگاه نقش موج رسم شده باشد، برای اظهار نظر کردن در مورد حرکت هر ذره از محیط، ابتدا به جهت پیشروی موج $(\vec{v})$ نگاه می‌کنیم، سپس حرکت نقطهٔ قبلی را بررسی می‌کنیم. اگر نقطهٔ قبلی پایین‌تر باشد، ذره در حال حرکت به سمت پایین و اگر نقطهٔ قبلی بالاتر باشد ذره در حال حرکت به سمت بالاست.

اگر ذره به سمت محور x حرکت کند حرکت آن تندشونده و اگر در حال دور شدن از محور x باشد حرکت آن کندشونده است و در نقاط بیشینه و کمینه تندی ذره صفر می‌شود.



نقطهٔ A : نقطهٔ قبل A (A') پایین‌تر از A است، بنابراین A در حال حرکت رو به پایین بوده و حرکت آن تندشونده است.

نقطهٔ B : نقطهٔ قبل B (B') بالاتر از B است، بنابراین B در حال حرکت رو به بالا بوده و حرکت آن کندشونده بوده و سرعت آن در حال صفر شدن است.

نقطهٔ C : نقطهٔ قبل C (C') بالاتر از C بوده و C در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به محور x بوده و تندی آن در حال افزایش است.

نقطهٔ D : نقطهٔ قبل D (D') پایین‌تر از D بوده و D در حال حرکت رو به پایین و دور شدن از محور افقی x بوده و حرکت آن کندشونده و سرعت آن در حال صفر شدن است، اما فاصلهٔ آن از نقطهٔ بیشینه بیشتر از فاصلهٔ نقطهٔ B از نقطهٔ بیشینه است. بنابراین تندی نقطهٔ B زودتر از بقیه صفر می‌شود.

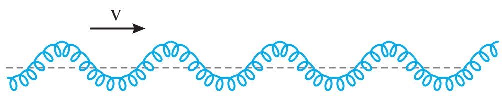
A　۱۳۶۶　۲

یادآوری امواج مکانیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱ امواج مکانیکی عرضی: در این امواج راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج عمود است، مانند امواج منتشر شده در یک طناب و یا یک فنر.

امواج عرضی دارای برآمدگی و فرورفتگی هستند.

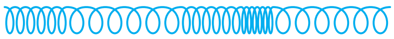
امواج مکانیکی عرضی تنها در جامدات منتشر می‌شوند.



۲ امواج مکانیکی طولی: در این امواج راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج منطبق است.

در امواج مکانیکی طولی، نوسان‌ها به صورت تپ‌های تراکمی و انبساطی در محیط منتشر می‌شوند.

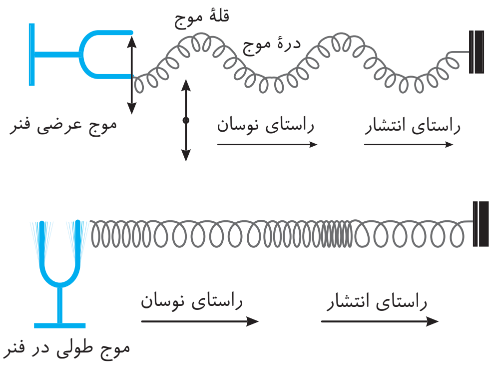
امواج مکانیکی طولی در هر سه محیط جامد، مایع و گاز پیشروی می‌کنند.



با توجه به تعاریف بیان شده گزینهٔ (۲) درست است.

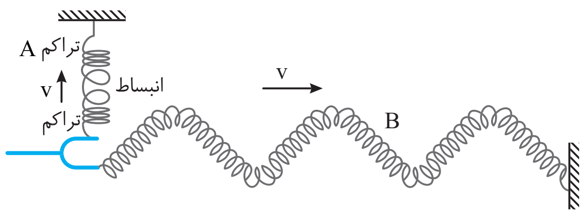
A　۱۳۶۷　۳

در یک فنر موج عرضی و همچنین موج طولی مطابق شکل‌های زیر منتشر می‌شود.



A　۱۳۶۸　۳

خط فکری باید بدانید که تیغه‌های دیاپازون در شکل هنگام نوسان بالا و پایین می‌روند (↕) و در امتداد قائم نوسان می‌کنند و موج در امتداد فنر پیشروی می‌کند. از این رو با توجه به شکل سؤال، نوسان ایجاد شده در فنر A در راستای محور قائم بوده یعنی حلقه‌های فنر A بالا و پایین می‌روند و راستای نوسان حلقهٔ A با راستای پیشروی موج یکی است، بنابراین موج منتشر شده در A طولی است. اما با بالا و پایین رفتن شاخه‌های دیاپازون، نوسان ذره‌های فنر B در راستای قائم و پیشروی موج در راستای افقی است بنابراین در فنر B موج عرضی است.



A　۱۳۶۹　۳

موج با تندی ثابت در یک محیط منتشر می‌شود. تجربه و محاسبات نظری نشان می‌دهد که تندی انتشار موج به جنس و ویژگی‌های محیط انتشار بستگی دارد و در یک محیط با ویژگی‌های ثابت تندی انتشار موج ثابت بوده و انتشار موج حرکت یکنواخت با تندی ثابت است.

A　۱۳۷۰　۲

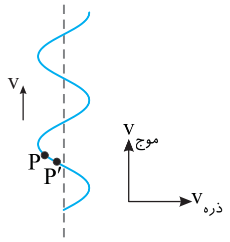
تندی انتشار موج به ویژگی‌های فیزیکی محیط انتشار موج بستگی دارد و در یک محیط همگن که شرایط فیزیکی در تمام جهت‌های آن یکسان است، تندی انتشار موج مقدار ثابتی است. تندی انتشار موج به ویژگی‌های چشمهٔ موج مانند بسامد، دوره، شدت، انرژی و ... بستگی ندارد. بنابراین با دو برابر شدن بسامد چشمه، تندی انتشار موج تغییر نمی‌کند.

A　۱۳۷۱　۲

تندی انتشار موج در یک محیط مقدار ثابتی است و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند، بنابراین نمودار آن برحسب زمان یک خط راست افقی است.

B ۱۳۷۲ | ۳

خط فکری به شکل دقت کردید، موج در حال حرکت رو به بالا در امتداد محور yهاست و راستای نوسان ذرات محیط در امتداد محور افقی و در جهت مثبت محور x هاست، یعنی شما باید ذره‌ای را شناسایی کنید که در لحظهٔ نشان داده شده به سمت راست در حرکت باشد.



در گزینهٔ (۱) و (۲) موج در حال پیشروی در امتداد محور افقی است که با توجه به فرض مسئله نادرست است.
در گزینه‌های (۳) و (۴) جهت پیشروی موج درست است بنابراین شما باید بررسی کنید که در کدام شکل نقطهٔ P در حال حرکت به سمت راست است.
با توجه به اینکه نقطهٔ P′ قبل از نقطهٔ P قرار دارد و در سمت راست P است، پس P به سمت راست می‌رود و گزینهٔ (۳) درست اما گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۳۷۳ | ۱

تندی انتشار موج در یک طناب برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است که در آن F نیروی کشش و μ چگالی خطی جرم $(\mu=\frac{m}{\ell})$ می‌باشد، بنابراین تندی انتشار موج در طناب با جذر چگالی خطی جرم طناب نسبت وارون دارد.

A ۱۳۷۴ | ۱

تندی انتشار موج در تار برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است، که در آن F نیروی کشش و μ چگالی خطی جرم $(\mu=\frac{m}{\ell})$ است.

چگالی خطی جرم را به دست می‌آوریم. $\mu=\frac{m}{\ell}\Rightarrow\mu=\frac{۰/۱۶}{۰/۸}=۰/۲\,kg/m$

تندی انتشار موج خواهد شد: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=۲۰N}v=\sqrt{\frac{۲۰}{۰/۲}}=۱۰\,m/s$

A ۱۳۷۵ | ۴

۱ ابتدا سرعت انتشار موج در ریسمان را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{\mu=\frac{m}{\ell}}v=\sqrt{\frac{F\ell}{m}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۳۲۰\times۱}{۸\times۱۰^{-۳}}}=\sqrt{۴\times۱۰^{۴}}=۲۰۰\,m/s$$

۲ سرعت انتشار موج ثابت است و زمان پیشروی موج در طول تار برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲۰۰=\frac{۱}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱}{۲۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰۰}=۰/۰۰۵s\Rightarrow\Delta t=۰/۰۰۵s$$

A ۱۳۷۶ | ۴

فاصله افقی A تا B برابر ۲۰m بوده و تپ این فاصله را در مدت ۴s طی کرده است،
بنابراین تندی پیشروی موج خواهد شد. $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۲۰}{۴}=۵\,m/s$

اکنون به کمک رابطهٔ تندی طناب، چگالی خطی جرم را حساب می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=۲۵N}۵=\sqrt{\frac{۲۵}{\mu}}\Rightarrow ۲۵=\frac{۲۵}{\mu}\Rightarrow\mu=۱\,kg/m$$

$$\Rightarrow\mu=\frac{۱kg}{m}\times\frac{۱۰^{۳}g}{۱kg}\times\frac{۱m}{۱۰^{۲}cm}\Rightarrow\mu=۱۰\,g/cm$$

بنابراین هر سانتی‌متر آن ۱۰g جرم دارد.

A ۱۳۷۷ | ۱

تندی انتشار موج عرضی در فنر از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

چگالی خطی $۴\times۱۰^{-۵}kg/cm$ بوده بنابراین:

$$\mu=۴\times۱۰^{-۵}kg/cm\Rightarrow\mu=۴\times۱۰^{-۵}\times۱۰۰\frac{kg}{m}\Rightarrow\mu=۴\times۱۰^{-۳}\frac{kg}{m}$$

تندی را حساب می‌کنیم: $v=\sqrt{\frac{۲۵۰}{۴\times۱۰^{-۳}}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۲۵۰۰۰۰}{۴}}\Rightarrow v=\frac{۵۰۰}{۲}=۲۵۰\,m/s$

A ۱۳۷۸ | ۱

رابطه تندی انتشار موج در یک سیم به صورت $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است. اکنون می‌خواهیم یک رابطه برای تندی انتشار موج برحسب چگالی و مساحت سطح مقطع پیدا کنیم و آن را به خاطر بسپاریم.

چگالی خطی جرم: $\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow{m=\rho V}\mu=\frac{\rho V}{\ell}$

$$\xrightarrow{V=A\ell}\mu=\frac{\rho Al}{\ell}\Rightarrow\mu=\rho A$$

اکنون به جای μ، حاصل‌ضرب ρA را قرار می‌دهیم. $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$

داده‌های مسئله را در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم (F=۴N ، $\rho=۶۴۰۰\frac{kg}{m^{۳}}$ و مساحت مقطع سیم $(۱۰^{-۶}m^{۲})$
بنابراین تندی انتشار موج در سیم برابر خواهد شد:

$$v=\sqrt{\frac{۴}{۶/۴\times۱۰^{۳}\times۱۰^{-۶}}}\Rightarrow v=۲۵\,m/s$$

B ۱۳۷۹ | ۲

ابتدا تندی انتشار موج در سیم را به‌دست می‌آوریم: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۰/۸}{۰/۰۲}\Rightarrow v=۴۰\,m/s$

تندی انتشار موج در یک سیم برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است.

$$\mu=\frac{m}{\ell}=\frac{\rho V}{\ell}=\frac{\rho Al}{\ell}=\rho A\Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

از طرفی سطح مقطع سیم برابر $A=\pi\frac{D^{۲}}{۴}$ است که در آن D قطر سیم می‌باشد و به جای A در تندی انتشار موج $\pi\frac{D^{۲}}{۴}$ را قرار داده و رابطه زیر را به دست می‌آوریم و آن را به خاطر می‌سپاریم. $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$

داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم: $۴۰=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{F}{۳\times۸\times۱۰^{۳}}}\Rightarrow F=۹/۶N$

B ۱۳۸۰ | ۱

یادآوری برای تندی انتشار موج عرضی در تار سه رابطه داریم که با توجه به داده‌های مسئله باید یکی را انتخاب کنیم. $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}},\ v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}},\ v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$

در این مسئله از سطح مقطع نام برده شده و گفته شده تندی انتشار موج در دو تار برابر است بنابراین خواهیم داشت:

$$v_{۱}=v_{۲}\Rightarrow\sqrt{\frac{F_{۱}}{\rho_{۱}A_{۱}}}=\sqrt{\frac{F_{۲}}{\rho_{۲}A_{۲}}}\xrightarrow{A_{۱}=A_{۲}}\frac{۲۰}{\rho_{۱}}=\frac{۱۵}{\rho_{۲}}\Rightarrow\frac{\rho_{۱}}{\rho_{۲}}=\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۴}{۳}$$

A ۱۳۸۱ | ۳

خط فکری کافی است ابتدا چگالی خطی جرم دو تار را با هم مقایسه کنید سپس نسبت تندی انتشار موج را به دست بیاورید.

۱ نسبت $\frac{\mu'}{\mu}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mu=\frac{m}{\ell},\ \mu'=\frac{m'}{\ell'}\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{m'}{\ell'}}{\frac{m}{\ell}}\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=\frac{m'}{m}\times\frac{\ell}{\ell'}$$

$$\xrightarrow[\ell'=\frac{۵}{۴}\ell]{m'=۰/۸m}\frac{\mu'}{\mu}=۰/۸\times\frac{۱}{\frac{۵}{۴}}\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=۰/۶۴$$

۲ نسبت تندی‌ها خواهد شد:

$$\begin{cases}v'=\sqrt{\frac{F'}{\mu'}}\\ v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\times\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}\xrightarrow{F'=F}\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}=\sqrt{\frac{\mu}{۰/۶۴\mu}}=\frac{۱}{۰/۸}=\frac{۵}{۴}$$

B ۱۳۸۲ ۱

در صورت مسئله چگالی و در شکل‌ها نیروی کشش و قطر سطح مقطع داده شده است، بنابراین از رابطه $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{\frac{۲}{D_B}\sqrt{\frac{F_B}{\pi\rho_B}}}{\frac{۲}{D_A}\sqrt{\frac{F_A}{\pi\rho_A}}}\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{F_B}{F_A}}\times\sqrt{\frac{\rho_A}{\rho_B}}\times\frac{D_A}{D_B}$$

$$\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{F}{۴F}}\times\sqrt{\frac{۴\rho_B}{\rho_B}}\times\frac{\frac{۳}{۲}D}{D}\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\frac{۳}{۲}$$

نکته تندی انتشار موج عرضی در ریسمان به طول ریسمان بستگی ندارد.

B ۱۳۸۳ ۲

رابطهٔ تندی انتشار موج در تار را در دو حالت می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\\ v'=\sqrt{\frac{F'}{\mu}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\xrightarrow[v_۲=۲۰۰m/s,\,F=۱۲۸N]{v_۱=۱۶۰m/s}\frac{۲۰۰}{۱۶۰}=\sqrt{\frac{F'}{۱۲۸}}$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۴}=\sqrt{\frac{F'}{۱۲۸}}\Rightarrow\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{F'}{۱۲۸}\Rightarrow F'=۲۰۰N$$

بنابراین مقدار افزایش نیروی کشش خواهد شد:

$$\Delta F=F'-F=۲۰۰-۱۲۸=۷۲N$$

A ۱۳۸۴ ۳

در صورت مسئله مساحت سطح مقطع تار داده شده بنابراین از سه رابطه تندی انتشار موج عرضی در تار، از رابطه $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ استفاده می‌کنیم.

مساحت سطح مقطع تار ۶۴ درصد کاهش یافته است بنابراین مساحت سطح مقطع در حالت جدید خواهد شد:

$$A_۲=A_۱-۰/۶۴A_۱\Rightarrow A_۲=۰/۳۶A_۱$$

$$\begin{cases}v_۱=\sqrt{\frac{F_۱}{\rho_۱A_۱}}\\ v_۲=\sqrt{\frac{F_۲}{\rho_۲A_۲}}\end{cases}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{F_۲}{F_۱}\times\frac{A_۱}{A_۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{۴F_۱}{F_۱}\times\frac{A_۱}{۰/۳۶A_۱}}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۲}{۰/۶}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۱۰}{۳}$$

B ۱۳۸۵ ۳

۱ نیروی کشش تار را ۶۹ درصد افزایش داده‌ایم بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_۲=F_۱+۰/۶۹F_۱\Rightarrow F_۲=۱/۶۹F_۱$$

۲ تندی انتشار موج عرضی در تار در اثر افزایش نیروی کشش $(\uparrow v=\sqrt{\uparrow F/\mu})$ افزایش می‌یابد و بنا بر فرض مسئله تندی $۳۰m/s$ زیاد می‌شود.

$$v_۲=v_۱+۳۰\qquad(I)$$

۳ نسبت تندی انتشار موج را در دو حالت به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}v_۲=\sqrt{\frac{F_۲}{\mu_۲}}\\ v_۱=\sqrt{\frac{F_۱}{\mu_۱}}\end{cases}\xrightarrow{\mu_۲=\mu_۱}\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{F_۲}{F_۱}}=\sqrt{\frac{۱/۶۹F_۱}{F_۱}}$$

$$\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=۱/۳\Rightarrow v_۲=۱/۳v_۱\qquad(II)$$

۴ از رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود که:

$$۱/۳v_۱=v_۱+۳۰\Rightarrow ۰/۳v_۱=۳۰\Rightarrow v_۱=۱۰۰m/s$$

B ۱۳۸۶ ۳

در این مسئله قطر مطرح شده بنابراین از سه رابطه تندی انتشار موج باید به سراغ $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ برویم.

$$\begin{cases}v_۲=\frac{۲}{D_۲}\sqrt{\frac{F_۲}{\pi\rho_۲}}\\ v_۱=\frac{۲}{D_۱}\sqrt{\frac{F_۱}{\pi\rho_۱}}\end{cases}\xrightarrow{F_۲=F_۱,\,\rho_۲=\rho_۱}\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{D_۲}{D_۱}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{D_۲}{۱/۲۵D_۲}$$

$$\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=۰/۸\Rightarrow v_۱=۰/۸v_۲$$

درصد اختلاف تندی انتشار صوت در دو ریسمان خواهد شد:

$$\frac{v_۱-v_۲}{v_۲}\times۱۰۰=\frac{۰/۸v_۲-v_۲}{v_۲}\times۱۰۰=-۲۰\%$$

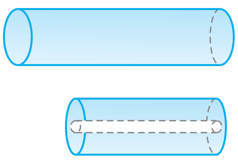
بنابراین تندی انتشار موج عرضی در ریسمان اول، ۲۰ درصد از تندی انتشار موج در ریسمان دوم کمتر است.

A ۱۳۸۷ ۱

وقتی از این تار، طولی برابر $\frac{\ell}{۳}$ انتخاب شود، جرم آن نیز $\frac{m}{۳}$ می‌شود و چگالی خطی جرم $\mu=m/\ell$ تغییر نمی‌کند. با توجه به فرض پرسش، نیروی کشش نیز یکسان است. بنابراین v تغییر نمی‌کند $(v=\sqrt{\frac{F}{\mu}})$ و نسبت $\frac{v_۱}{v_۲}$ برابر یک خواهد شد.

A ۱۳۸۸ ۳

خط فکری وقتی سیم را دولا می‌کنیم، مساحت سطح مقطع سیم دو برابر می‌شود و برای مقایسه تندی انتشار موج باید به سراغ رابطه $v=\sqrt{F/\rho A}$ برویم.



جنس ریسمان تغییر نکرده بنابراین چگالی نیز تغییر نکرده است $(\rho'=\rho)$. نیروی کشش بنا به فرض مسئله ثابت است $(F'=F)$ بنابراین تندی انتشار موج خواهد شد.

$$\begin{cases}v'=\sqrt{\frac{F'}{\rho'A'}}\\ v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\times\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\times\sqrt{\frac{A}{A'}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}=\sqrt{\frac{A}{۲A}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

B ۱۳۸۹ ۴

نکته اگر سیمی را از وسط دو لا کنیم سطح مقطع آن دو برابر می‌شود و اگر مجدداً سیم را دو لا کنیم سطح مقطع آن $۲^۲=۴$ برابر می‌شود و اگر n بار این عمل را تکرار کنیم و سیم را n بار از وسط تا کنیم، سطح مقطع آن ۲^n برابر سطح اولیه می‌شود. $(A'=۲^nA)$

یادآوری تندی انتشار موج از سه رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\quad,\quad v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\quad,\quad v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\rho'A'}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A}}}\xrightarrow{F=F',\,\rho=\rho'}\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{۲^nA}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{۱}{۲^n}}=\frac{۱}{\sqrt{۲^n}}$$

B ۱۳۹۰ ۳

نکته با عبور سیم از دستگاه، جرم سیم تغییر نکرده و با توجه به ثابت ماندن چگالی، حجم سیم ثابت می‌ماند بنابراین با افزایش طول سطح مقطع کاهش می‌یابد:

۱ طول جدید برابر است با:

$$\ell'=\ell+۰/۴۴\ell\Rightarrow\ell'=۱/۴۴\ell$$

۲ نسبت سطح مقطع در دو حالت خواهد شد:

$$\begin{cases}\rho=\rho'\\ m=m'\end{cases}\Rightarrow V=V'\Rightarrow A\ell=A'\ell'\xrightarrow{\ell'=۱/۴۴\ell}A\ell=A'\times(۱/۴۴\ell)$$

$$\Rightarrow\frac{A}{A'}=۱/۴۴$$

۳ تندی انتشار را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F}{\rho A'}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A}}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}=\sqrt{۱/۴۴}\Rightarrow\frac{v'}{v}=۱/۲\Rightarrow v'=۱/۲v$$

۴ درصد تغییر تندی انتشار خواهد شد:

$$\frac{v_۲-v_۱}{v_۱}\times۱۰۰\Rightarrow\frac{۱/۲v-v}{v}\times۱۰۰=۲۰٪$$

بنابراین تندی ۲۰ درصد افزایش می‌یابد.

B ۱۳۹۱ ۲

مرحله به مرحله باید تغییرات تار را بررسی کنید.

۱ $\frac{۲}{۳}$ تار را بریده و کنار گذاشته‌ایم بنابراین طول تار جدید $\frac{۱}{۳}$ طول اولیه است.

$$\ell_۲=\frac{۱}{۳}\ell_۱$$

۲ ایـن تـار جدید را از دسـتگاه گذرانده‌ایم تا مجـدداً طول آن برابر طول اولیه شـود $(\ell'_۲=\ell_۱)$ بنابراین طول تار ۳ برابر شده و مساحت سطح مقطع آن کاهش می‌یابد.

$$\text{حجم ثانویه}=\text{حجم اولیه}\Rightarrow V'_۲=V_۲\Rightarrow A'\ell'_۲=A\ell_۲\Rightarrow A'\times\ell_۱=A\times\frac{\ell_۱}{۳}\Rightarrow A'=\frac{۱}{۳}A$$

۳ جنس تار تغییر نکرده بنابراین چگالی آن ثابت می‌ماند. برای بررسـی تندی انتشار موج از سـه رابطـهٔ تندی، رابطهٔ $v=\sqrt{F/\rho A}$ را اسـتفاده می‌کنیم. قرار اسـت تندی انتشار موج تغییر نکند، از این رو:

$$v'=v\Rightarrow\sqrt{\frac{F'}{\rho'A'}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow{\rho'=\rho}\frac{F'}{\frac{۱}{۳}A}=\frac{F}{A}\Rightarrow F'=\frac{۱}{۳}F$$

B ۱۳۹۲ ۲

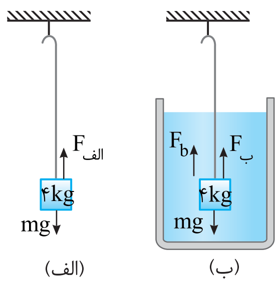
۱ نیروهای وارد بر ریسمان را در هر شکل به‌دست می‌آوریم:

الف) جسم در حال تعادل

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_{\text{الف}}=mg\xrightarrow{m=۴kg}F_{\text{الف}}=۴۰N$$

ب) جسم در حال تعادل

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_{\text{ب}}+F_b=mg\xrightarrow{m=۴kg}F_{\text{ب}}=۴۰-F_b$$



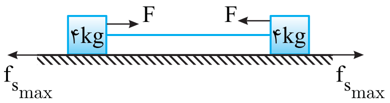
۲ تندی انتشار تار برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است و چون دو تار مشابه است پس چگالی خطی آن‌ها $(\mu=m/L)$ یکسان است.

$$\frac{v_{\text{الف}}}{v_{\text{ب}}}=\frac{\sqrt{\frac{F_{\text{الف}}}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F_{\text{ب}}}{\mu}}}\xrightarrow{\frac{v_{\text{الف}}}{v_{\text{ب}}}=۲}۲=\sqrt{\frac{F_{\text{الف}}}{F_{\text{ب}}}}\Rightarrow\frac{F_{\text{الف}}}{F_{\text{ب}}}=۴\xrightarrow[F_{\text{ب}}=۴۰-F_b]{F_{\text{الف}}=۴۰N}$$

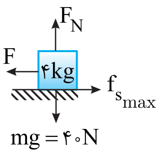
$$\frac{۴۰}{۴۰-F_b}=۴\Rightarrow۴۰=۱۶۰-۴F_b\Rightarrow۴F_b=۱۲۰\Rightarrow F_b=۳۰N$$

B ۱۳۹۳ ۱

خط فکری با توجه به رابطهٔ تندی تار $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$، این تندی زمانی بیشـینه اسـت که نیروی کشـش تار بیشـینه باشد. چون در سؤال گفته شده جعبه‌ها ساکن هستند پس بایـد نیروهـای وارد بر جعبه‌ها متوازن باشـد یعنی نیروی کشـش تار وارد بـر جعبه‌ها و نیروی اصطکاک ایستایی با هم برابر باشد و چون نیروی کشش تار بیشینه بوده پس باید نیروی اصطکاک ایستایی نیز بیشینه باشد.



۱ بـا توجه به خط فکری ابتدا نیروی کشـش تار را با توجه‌به‌نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه حساب می‌کنیم:



$$۱)F_N=mg\Rightarrow F_N=۴۰N$$

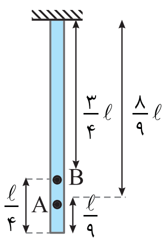
$$۲)f_{s_{max}}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵\times۴۰=۲۰N$$

$$۳)F=f_{s_{max}}\Rightarrow F=۲۰N$$

۲ حال تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۰/۲}{۲۰}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}\Rightarrow v=۰/۱m/s$$

B ۱۳۹۴ ۴



خط فکری وقتی که یک طناب سنگین را آویزان می‌کنیم، کـشـش در نقاط مختلف آن یکسـان نخواهد بود و هر چه از پایین طناب به سمت محل آویز برویم، کـشـش بیشتر می‌شـود و در هر نقطه از طناب، کشش طناب برابر وزن قسمت زیرین آن نقطه است. بنابراین شـما باید نیروی کشـش در نقاط A و B را بر حسـب وزن طنـاب پیدا کرده تا بتوانید تندی موج در نقاط A و B را با هم مقایسه کنید.

۱ نقطهٔ B وزن $\frac{\ell}{۴}$ طناب پایین‌تر از خود را تحمل می‌کند، بنابراین:

$$F_B=\frac{۱}{۴}W_{\text{طناب}}$$

۲ نقطهٔ A وزن $\frac{\ell}{۹}$ طناب پایین‌تر از خود را تحمل می‌کند، بنابراین:

$$F_A=\frac{۱}{۹}W_{\text{طناب}}$$

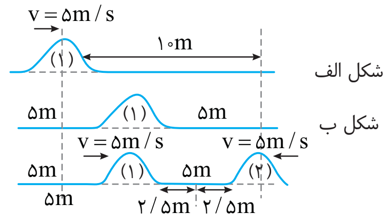
۳ در طـول طنـاب، چگالـی خطی جرم ثابت اسـت $(\mu_A=\mu_B)$ بنابراین نسـبت تندی‌ها خواهد شد:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{\frac{F_A}{\mu_A}}}{\sqrt{\frac{F_B}{\mu_B}}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{F_A}{F_B}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{\frac{mg}{۹}}{\frac{mg}{۴}}}=\frac{۲}{۳}$$

B | ۱۳۹۵ | ۲

۱ تندی انتشار موج در طناب مقدار ثابتی بوده و برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{5}{\frac{2}{10}}}\Rightarrow v=5\,m/s$$

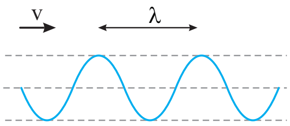


۲ جابه‌جایی آشفتگی اول پس از $1s$ برابر است با: $\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=5\times1=5m$

۳ وقتی تپ اول $5m$ جلو آمده تپ دوم با همان تندی $5m/s$ به راه می‌افتد. در این حالت فاصله دو تپ از هم $5m$ است و چون سرعت آن‌ها یکی است، هر دو آشفتگی در وسط فاصلهٔ $5m$ به هم می‌رسند. یعنی هر آشفتگی $2/5m$ پیشروی می‌کند. بنابراین آشفتگی (۱) جمعاً $5+2/5=7/5m$ و آشفتگی (۲) تنها $2/5m$ پیشروی کرده تا دو آشفتگی به هم برسند.

A | ۱۳۹۶ | ۴

یادآوری فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور، طول موج نامیده می‌شود. طول موج λ برابر مسافتی است که موج در مدت دورهٔ نوسان چشمه طی می‌کند.



$\lambda=vT$

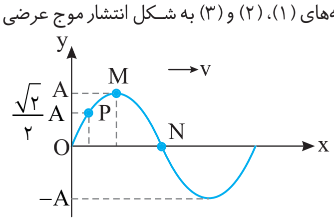
با توجه به یادآوری بالا، در مدت نیم‌دورهٔ نوسان هر ذره از محیط، موج مسافتی را به اندازهٔ نصف طول موج می‌پیماید.

B | ۱۳۹۷ | ۴

در انتشار موج در یک محیط، تمام ذرات محیط با یک دوره و یک بسامد به نوسان در می‌آیند. از این‌رو بسامد زاویه‌ای تمام ذرات $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$ یکسان است و گزینهٔ (۴) پاسخ تست است.

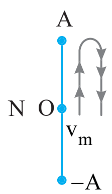
نکته در بررسی حرکت ذره‌های محیط انتشار موج هر ذره را به عنوان یک نوسانگر ساده فرض می‌کنیم.

برای بررسی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به شکل انتشار موج عرضی در طناب شکل زیر دقت کنید.



به‌طور مثل در بازه زمانی $\frac{T}{2}$، ذرهٔ M از دامنهٔ $+A$ به دامنهٔ $-A$ می‌رسد و جابه‌جایی آن $-2A$ و مسافت طی شدهٔ آن $\ell=+2A$ و شتاب متوسط آن صفر می‌شود. زیرا از یک نقطهٔ بازگشت که در آن سرعت صفر است به نقطهٔ بازگشت دیگری که سرعت آنجا نیز صفر است می‌رود، بنابراین Δv مساوی صفر شده و شتاب متوسط نیز صفر می‌شود.

اما نقطهٔ N در مدت $\frac{T}{2}$ از مرکز نوسان به نقطهٔ A رفته سپس به مرکز نوسان بر می‌گردد، یعنی جابه‌جایی آن صفر و مسافت طی شدهٔ آن $2A$ است و شتاب متوسط آن نیز برابر است با:



$$a_{av}=\frac{-v_m-v_m}{\frac{T}{2}}=\frac{-2v_m}{T}$$

بنابراین برای نقطه‌های N و M جابه‌جایی و شتاب متوسط یکسان نیست. برای مسافت‌های مختلف هم می‌توانید حرکت نقطهٔ P را با حرکت نقطهٔ M در مدت $\frac{T}{4}$ مقایسه کنید تا مشخص شود در بازهٔ زمانی معین، مسافت طی شده توسط ذرات محیط ممکن است یکسان نباشد.

A | ۱۳۹۸ | ۲

حالت اول: تندی انتشار موج در یک محیط (ریسمان) به بسامد چشمه بستگی ندارد. بنابراین در حالت اول وقتی بسامد (f) را افزایش می‌دهیم دوره $(\downarrow T=\frac{1}{f\uparrow})$ کاهش می‌یابد. با افزایش بسامد، بسامد زاویه‌ای $(\uparrow\omega=2\pi f\uparrow)$ و از آنجا بیشینهٔ تندی ذرات $(\uparrow v_m=A\omega\uparrow)$ افزایش می‌یابد. با ثابت بودن تندی انتشار موج و افزایش بسامد، طول موج $(\downarrow\lambda=\frac{v}{f\uparrow})$ کاهش می‌یابد بنابراین در حالت اول تنها تندی انتشار موج یعنی تنها یک کمیت بدون تغییر است.

حالت دوم: اگر نیروی کشش را افزایش دهیم $(\uparrow v=\sqrt{\uparrow F/\mu})$ تندی انتشار موج افزایش می‌یابد. با ثابت بودن بسامد نوسان‌ساز، طول موج افزایش می‌یابد $(\uparrow\lambda=\frac{v\uparrow}{f_{\text{ثابت}}})$ اما دوره $(T=\frac{1}{f})$ تغییر نمی‌کند. همچنین بیشینه تندی نوسان ذرات $(v=A\omega)$ ثابت می‌ماند یعنی دو کمیت بدون تغییر است.

A | ۱۳۹۹ | ۳

۱ طول موج مسافتی است که موج در مدت یک دوره طی می‌کند، بنابراین:

$$v=\frac{\lambda}{T}\xrightarrow{T=\frac{1}{f}}v=\lambda f\xrightarrow[f=100Hz]{\lambda=0/5m}v=0/5\times100=50m/s$$

۲ زمان طی $10m$ با تندی $v=50m/s$ خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow10=50(\Delta t)\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{5}s$$

A | ۱۴۰۰ | ۴

۱ فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش برابر نصف طول موج است بنابراین با توجه به فرض مسئله $\frac{\lambda}{2}=15cm$ و $\lambda=30cm$ است.

۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\lambda=vT\xrightarrow{v=6m/s}0/3=6T\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$

۳ هر ذره از محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده است و مدت زمانی که طول می‌کشد تا تندی یک نوسانگر برای نخستین بار از صفر به بیشینه مقدار برسد برابر $\frac{T}{4}$ است. از این‌رو: $\Delta t=\frac{T}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{80}s$

B | ۱۴۰۱ | ۲

خط فکری هر ذره از محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده است و تمام ویژگی‌های حرکت هماهنگ ساده در مورد آن صدق می‌کند. به عنوان نمونه، هر ذره از محیط در مدت یک دوره مسافتی چهار برابر دامنه $(4A)$ می‌کند، بنابراین با توجه به مسافت طی شده می‌توانید تعداد نوسان‌ها را پیدا کرده سپس دوره را به دست بیاورید و مسئله را حل کنید.

۱ دامنهٔ $2cm$ است و مسافت طی شده در هر دوره $4A=4\times2=8cm$ است.

۲ کل مسافت طی شده در $0/2s$ برابر $32cm$ بوده است بنابراین تعداد نوسان‌ها خواهد شد:

$$\begin{array}{c|c} 8cm & N=1 \\ \hline 32cm & N=? \end{array}\Rightarrow N=4\ \text{نوسان}$$

۳ دوره را به دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{0/2}{4}\Rightarrow T=0/05s$

۴ با توجه به تعریف طول موج، تندی انتشار موج را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{1/5}{0/05}=30m/s$$

۵ پیشروی موج در مدت $0/2s$ خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=30\times0/2\Rightarrow\Delta x=6m$$

B ۱۴۰۲ ۳

نکته تندی انتشار موج عرضی در طناب (تار) یا فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{FL}{m}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

۱ ابتدای تندی موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{250}{4\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{25}{4}\times10^{4}}=\frac{5}{2}\times10^{2}\Rightarrow v=250m/s$$

۲ با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{250}{312/5}=\frac{2500}{3125}=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}=0/8m$$

بازی با سؤال نیروی کشش طنابی $12N$ و چگالی خطی جرم آن $30g/m$ است. اگر سر این طناب را با دیاپازونی که بسامد آن $100Hz$ است، عمود بر راستای طناب به نوسان درآوریم، طول موج ایجاد شده در طناب چند سانتی‌متر خواهد بود؟

۱) ۰/۲ ۲) ۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ تندی پیشروی موج را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{12}{30\times10^{-3}}}\Rightarrow v=20m/s$$

در این صورت طول موج خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{20}{100}=0/2m=20cm$$

گزینهٔ ۳

B ۱۴۰۳ ۱

با توجه به تعریف طول موج، تندی انتشار موج در طناب را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{T=\frac{1}{f}}v=f\lambda\xrightarrow{f=600Hz,\ \lambda=0/2m}$$

$$v=600\times0/2\Rightarrow v=120m/s$$

نکته تندی انتشار موج عرضی در یک سیم (طناب) دارای سه رابطهٔ زیر است که با توجه به داده‌های مسئله یکی از آن‌ها را استفاده می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\ ,\quad v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\ ,\quad v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

$\mu=\frac{m}{\ell}$ چگالی خطی

$\rho=\frac{m}{V}$ چگالی سیم

مساحت سطح مقطع سیم

قطر سیم

تندی انتشار موج در سیم برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow[\rho=1000kg/m^3]{F=36N}120=\sqrt{\frac{36}{10000\times A}}\Rightarrow120\times120=\frac{36}{10000A}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{4000000}m^2=\frac{1}{4000000}\times10^{6}mm^2\Rightarrow A=0/25mm^2$$

A ۱۴۰۴ ۱

نکته تندی انتشار موج در یک محیط برای بسامدهای مختلف، یکسان است.

تندی انتشار موج‌های A و B با هم برابر است $(v_A=v_B)$ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$v_A=v_B\xrightarrow{v=f\lambda}f_A\lambda_A=f_B\lambda_B$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\xrightarrow{f_A=4f_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{1}{4}$$

میانبر در یک محیط برای دو موج با بسامدهای f_1 و f_2، طول موج با بسامد نسبت وارون دارد.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1}$$

B ۱۴۰۵ ۲

نکته بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و اگر چشمه تغییر نکند بسامد موج تغییر نمی‌کند. اما تندی انتشار موج از ویژگی‌های محیط است و چنانچه ویژگی‌های محیط تغییر کند، تندی و در نتیجه طول موج تغییر می‌کند.

۱ در این مسئله چشمه همان دیاپازون است بنابراین بسامد ثابت می‌ماند $(f'=f)$.

۲ با ۴ برابر شدن نیروی کشش $(F'=4F)$ تندی خواهد شد:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{4F}{F}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=2$$

۳ با توجه به تعریف طول موج خواهیم داشت:

$$\begin{cases}f=\frac{v}{\lambda}\\ f'=\frac{v'}{\lambda'}\end{cases}\xrightarrow{f'=f}\frac{v}{\lambda}=\frac{v'}{\lambda'}\Rightarrow\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{v'}{v}=2$$

B ۱۴۰۶ ۲

خط فکری دقت کنید، نیروی کشش تار تغییر کرده بنابراین تندی انتشار موج در تار تغییر می‌کند از طرفی بسامد چشمه تغییر کرده است در نتیجه طول موج تحت تأثیر دو عامل تغییر می‌کند. تغییرات تندی و بسامد را مشخص کنید تا تغییر طول موج را بتوانید حساب کنید.

۱ در مسئله فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی ۴ متر بیان شده بنابراین طول موج در ابتدا $\lambda=4m$ است.

۲ نیروی کشش ۵۱ درصد کاهش یافته بنابراین:

$$F_2=F_1-0/51F_1\Rightarrow F_2=0/49F_1$$

۳ تندی موج در حالت جدید را حساب می‌کنیم. البته چون تار تغییر نکرده است چگالی خطی جرم ثابت است $(\mu_2=\mu_1)$، پس:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}=\sqrt{\frac{0/49F_1}{F_1}}\Rightarrow v_2=0/7v_1$$

۴ طول موج جدید با بسامد چشمهٔ $100Hz$ را به‌دست می‌آوریم:

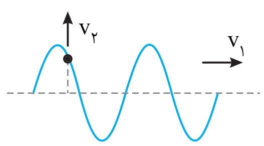
$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{v_1}{f_1}\\ \lambda_2=\frac{v_2}{f_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\times\frac{f_1}{f_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{4}=0/7\times\frac{50}{100}\Rightarrow\lambda_2=1/4m$$

۵ فاصلهٔ یک قله (ستیغ) از درهٔ (پاستیغ) مجاور برابر نصف طول موج است.

$$\frac{\lambda_2}{2}=0/7m$$

A ۱۴۰۷ ۱

سرعت v_1، سرعت انتشار موج در محیط است و v_2 تندی نوسان یک ذره از محیط در لحظهٔ نشان داده شده در شکل است و با گذشت زمان v_2 بین دو مقدار صفر و v_m تغییر می‌کند و جهت آن در نقاط بازگشت نیز عوض می‌شود. بنابراین گزاره‌های (الف) و (ب) نادرست هستند. سرعت انتشار موج (v_1) در یک محیط مقدار ثابتی است و به محیط انتشار موج بستگی دارد در حالی که تندی نوسان ذرات محیط (v_2) به بسامد نوسان چشمه بستگی دارد و گزارهٔ (پ) درست است.



A ۱۴۰۸ ۳

یادآوری ذرات محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده بوده و بیشینه تندی آن‌ها $v_m=A\omega$ است.

خط فکری تندی پیشروی موج در یک محیط ثابت و برابر $v=f\lambda$ است.

بیشینه تندی ذرات محیط $v'=A\omega$ است البته اگر به گزینه‌ها نگاه کنید در هیچ‌یک خبری از ω نیست بنابراین شما باید در حل مسئله از فرمول $\omega=2\pi f$ استفاده کنید تا بتوانید گزینهٔ مورد نظر را بیابید.

نسبت $\frac{v}{v'}$ را حساب می‌کنیم: $\frac{v}{v'}=\frac{f\lambda}{A\omega}\xrightarrow{\omega=2\pi f}\frac{v}{v'}=\frac{f\lambda}{A(2\pi f)}\Rightarrow\frac{v}{v'}=\frac{\lambda}{2\pi A}$

B ۱۴۰۹ ۱

۱ ابتدا دورهٔ تناوب نوسان‌ساز که در اینجا یک سامانهٔ جرم - فنر فرض شده است به‌دست می‌آوریم. $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow[k=100N/m]{m=1kg}T=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}\Rightarrow T=\frac{\pi}{5}s$

۲ تندی پیشروی موج در طناب را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow[\mu=20g/m=20\times10^{-3}kg/m]{F=200N}v=\sqrt{\frac{200}{20\times10^{-3}}}\Rightarrow v=100m/s$$

۳ طول موج خواهد شد: $\lambda=vT\Rightarrow\lambda=100\times\frac{\pi}{5}=20\pi m$

۴ فاصلهٔ بین قله (ستیغ) از دره (پاستیغ) مجاورش برابر $\frac{\lambda}{2}$ است بنابراین:

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{20\pi}{2}=10\pi m$$

B ۱۴۱۰ ۲

۱ چگالی خطی جرم را حساب می‌کنیم: $\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[L=6m]{m=1kg}\mu=\frac{1}{6}kg/m$

۲ تندی انتشار موج در فنر را به دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=6N}v=\sqrt{\frac{6}{\frac{1}{6}}}\Rightarrow v=6m/s$$

۳ بسامد موج همان بسامد چشمهٔ موج (دیاپازون) است، بسامد را به کمک طول موج به دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda\xrightarrow{\lambda=1/5cm}6=f(1/5\times10^{-2})\Rightarrow f=400Hz$$

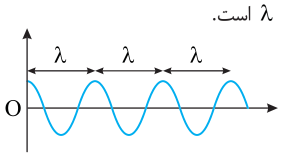
۴ تعداد نوسان‌های دیاپازون در هر دقیقه خواهد شد:

1s	400
60s	N

$\Rightarrow N=24000$

B ۱۴۱۱ ۳

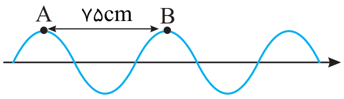
خط فکری فاصلهٔ هر دو برآمدگی متوالی برابر λ است و هرگاه فاصلهٔ دو نقطه از هم λ باشد، یعنی در هر لحظه دو نقطه در یک وضعیت قرار دارند. در لحظه‌ای که O در دامنهٔ مثبت است تمام نقاطی که در فاصلهٔ λ، 2λ، 3λ و ... (مضرب صحیح λ)، از O قرار دارند در دامنهٔ مثبت هستند، بنابراین شما باید گزینه‌ها را بررسی کنید و مشخص کنید کدام فاصله مضرب صحیح λ است.



با توجه به شکل گزینهٔ (۳) که فاصلهٔ صفر تا M، $\frac{6}{2}\lambda=3\lambda$ است درست می‌باشد.

B ۱۴۱۲ ۲

قرار است دو نقطهٔ A و B دو ستیغ (قله) متوالی باشند و فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی برابر یک طول موج است. بنابراین طول موج که در ابتدا $\lambda_1=50cm$ بوده است اکنون باید $\lambda_2=75cm$ شود تا A و B دو برآمدگی متوالی باشند.



از طرفی تندی انتشار موج در یک محیط (یک ریسمان) برای هر بسامدی مقدار یکسانی است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\frac{v_2}{\lambda_2}}{\frac{v_1}{\lambda_1}}\xrightarrow{v_2=v_1}\frac{f_2}{f_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{50}{75}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{2}{3}$$

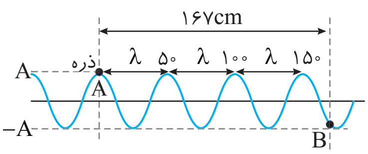
میانبر دقت کنید برای آن‌که طول موج افزایش یابد باید بسامد کاهش یابد و تنها گزینه‌ای که در آن بسامد کاهش یافته گزینهٔ (۲) است.

B ۱۴۱۳ ۳

خط فکری شکل موج را رسم کنید. نام یکی از قله‌های رسم شده را A بگذارید. حال اگر به اندازهٔ یک طول موج جلو بروید به قلهٔ بعدی می‌رسید. تعداد قله‌های مسیر را بشمارید. در این‌صورت تعداد ذره‌هایی که همزمان با A در دامنهٔ مثبت $(+A)$ قرار دارند به دست می‌آید. البته ابتدا باید طول موج را حساب کنید.

در انتشار موج وقتی ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت است مطابق شکل تمام ذره‌هایی که فاصلهٔ آن‌ها از A مضرب صحیح از طول موج است هم‌زمان در دامنهٔ مثبت قرار دارند.

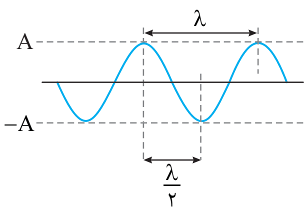
ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم. $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{100}{200}=0/5m=50cm$



بنابراین نقاطی که در فاصلهٔ 50cm، 100cm، 150cm و ... از A قرار دارند هم‌زمان با ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت قرار دارند، بنابراین سه ذره بین A و B هم‌زمان در دامنهٔ مثبت قرار دارند.

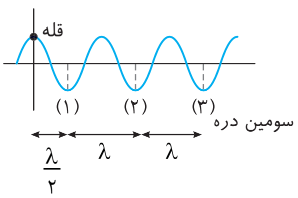
B ۱۴۱۴ ۱

مطابق شکل زیر نزدیک‌ترین فاصلهٔ دو نقطه که هم‌زمان یکی در دامنهٔ مثبت و دیگری در دامنهٔ منفی باشد یعنی یکی ستیغ (قله) و دیگری پاستیغ (دره) باشد $\frac{\lambda}{2}$ است. طول موج رابه‌دست‌آورده و $\frac{\lambda}{2}$ راحساب‌می‌کنیم: $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{4}{20}=0/2m\Rightarrow\frac{\lambda}{2}=0/1m$



B ۱۴۱۵ ۲

خط فکری در حل این مسائل لازم است شکل رسم کنیم. فاصلهٔ سومین دره از قلهٔ مورد نظر $\frac{5\lambda}{2}$ است بنابراین طول موج را می‌توانید به دست بیاورید و مسئله را حل کنید.



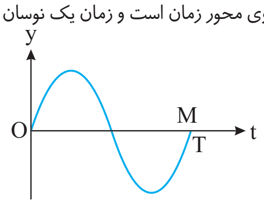
۱ با توجه به شکل می‌توان نوشت: $5\frac{\lambda}{2}=14\Rightarrow\lambda=\frac{28}{5}=5/6cm$

۲ بسامد موج همان بسامد چشمه است. بسامد چشمه را از معادلهٔ حرکت آن $x=0/05\cos 40\pi t$ حساب می‌کنیم: $\omega=40\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=40\pi\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$

۳ تندی انتشار موج خواهد شد: $v=\frac{\lambda}{T}=\frac{0/056}{\frac{1}{20}}\Rightarrow v=1/12m/s$

A ۱۴۱۶ ۲

دقت کنید که OM روی محور زمان است و زمان یک نوسان کامل برابر دوره است.



B ۱۴۱۷ ۳

نکته فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی برابر طول موج است. فاصلهٔ هر ذره از محیط تا حالت تعادلش برابر یک دامنه است.

۱ فاصلهٔ Δx همان طول موج بوده یعنی $\lambda=۴۰cm=۰/۴m$ است.

۲ فاصلهٔ Δy همان دامنه است یعنی $A=۱۵cm=۰/۱۵m$ است.

۳ تندی انتشار موج در محیط خواهد شد:

$$v=f\lambda \xrightarrow{f=۸Hz} v=۸\times۰/۴ \Rightarrow v=۳/۲m/s$$

۴ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=۲\pi f\Rightarrow\omega=۲\pi\times۸\Rightarrow\omega=۱۶\pi\,rad/s$$

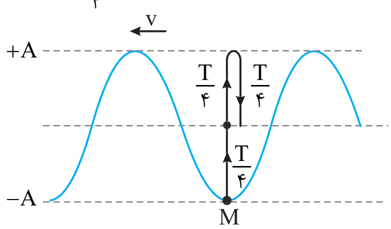
۵ بیشینه تندی نوسان ذرات محیط برابر است با:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۰/۱۵\times۱۶\pi\Rightarrow v_m=۲/۴\pi\,m/s$$

A ۱۴۱۸ ۱

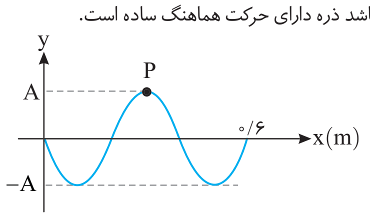
خط فکری هـر ذره از محیط انتشـار موج سینوسـی دارای حرکت هماهنگ سـاده اسـت. بنابراین وقتی از شـما دربارهٔ یک ذره از محیط پرسش می‌شـود، شما باید تنها به حرکت هماهنگ ساده فکر کنید. به طور مثال اگر ذره در $+A$ باشد بعد از $\frac{T}{۴}$ به حالت تعادل می‌رسد. $\frac{T}{۴}$ بعد به مکان $-A$ می‌رسد و تمام بازه‌های زمانی در مورد آن صدق می‌کند. با توجه به این مطلب، مسئله را بررسی کنید.

مطابق شـکل M در مکان $-A$ اسـت و پس از $\frac{T}{۴}$ به مرکز می‌رود، $\frac{T}{۴}$ بعد به $+A$ رفته و در $\frac{T}{۴}$ آخر به مرکز بر می‌گردد، بنابراین پس از $\frac{۳T}{۴}$ در مرکز نوسان است.



A ۱۴۱۹ ۴

خط فکری شما باید ابتدا مشخص کنید که ذرهٔ مورد نظر در لحظهٔ $t=۰$ در چه وضعیتـی اسـت؟ برای این منظور باید طول مـوج را پیدا کرده و به کمک آن محل ذره را بیابید. یادتان باشد ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است.

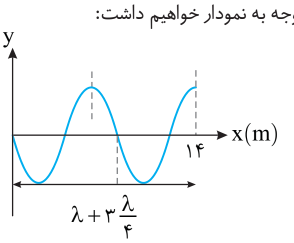


طول موج را به‌دست می‌آوریم: $۳\frac{\lambda}{۲}=۰/۶\Rightarrow\lambda=۰/۴m=۴۰cm$

ذره‌ای در فاصلهٔ ۳۰cm از چشـمه، نقطه‌ای مانند P اسـت که در $t=۰$ بُعد آن $+A$ است و این نقطه شبیه نوسانگر ساده‌ای است که از دامنهٔ مثبت شروع به حرکت کرده و نمودار مکان زمان آن یک نمودار کسینوسـی اسـت که گزینهٔ (۴) تنها گزینه‌ای است که این موضوع را نشان می‌دهد.

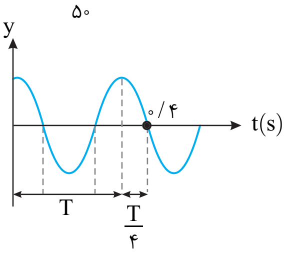
A ۱۴۲۰ ۳

۱ نمودار (۱) نقش موج در تار است و در نقش موج فاصلهٔ دوبرآمدگی برابر یک طول موج است. با توجه به نمودار خواهیم داشت: $\frac{۷\lambda}{۴}=۱۴\Rightarrow\lambda=۸m$



۲ نمودار (۲)، نمودار مکان - زمان، حرکت هماهنگ سـادهٔ یک ذره از محیط است و محور افقی، محور زمان است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$T+\frac{T}{۴}=۰/۴\Rightarrow\frac{۵T}{۴}=۰/۴\Rightarrow T=\frac{۱۶}{۵۰}s$$



۳ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم: $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۸}{\frac{۱۶}{۵۰}}\Rightarrow v=۲۵m/s$

۴ چگالی خطی جرم را به‌دست می‌آوریم: $\mu=\frac{m}{\ell}\Rightarrow\mu=\frac{۴\times۱۰^{-۳}}{۱۰\times۱۰^{-۲}}=۴\times۱۰^{-۲}kg/m$

۵ نیروی کشش تار خواهد شد:

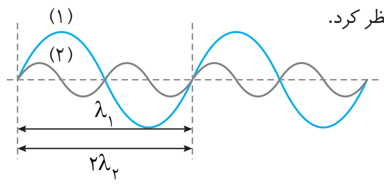
$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow۲۵=\sqrt{\frac{F}{۴\times۱۰^{-۲}}}\Rightarrow۶۲۵=\frac{F}{۴\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow F=۲۵N$$

A ۱۴۲۱ ۱

۱ با توجه به شکل طول موج $\lambda_۱$، دو برابر طول موج $\lambda_۲$ است و گزینهٔ (۱) الزاماً درست است.

۲ طناب‌هـا به دو چشـمهٔ مختلـف متصل هسـتند بنابراین در مورد بسـامد موجها نمی‌توان اظهارنظر کرد.

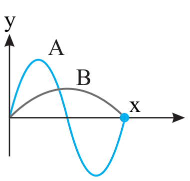
۳ دربارهٔ دو طناب اطلاعاتی نداریم بنابراین اگر دو طناب مشابه باشند تندی انتشار موج در آن‌ها یکی است و اگر مشابه نباشند تندی یکسان نیست یعنی دربارهٔ تندی آن‌ها نمی‌توان اظهارنظر کرد.



B ۱۴۲۲ ۴

خط فکری سرعت انتشار موج از ویژگی‌های محیطی است که موج در آن در حال انتشار است، چون هر دو موج در یک محیط منتشر می‌شوند پس $v_A=v_B$ است.

۱ در گام اول بـا توجه به نقش موج و محور افقی نسبت طول موج A و B را به‌دست می‌آوریم:

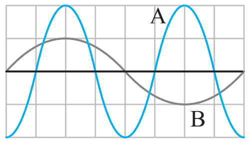


$$\begin{cases}x=\lambda_A\\ x=\frac{\lambda_B}{۲}\end{cases}\Rightarrow\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}\Rightarrow\lambda_B=۲\lambda_A$$

۲ از طرفی بنا به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ می‌توان نوشت:

$$\lambda_B=۲\lambda_A\xrightarrow{\lambda=vT}v_BT_B=۲v_AT_A\xrightarrow{v_A=v_B}T_B=۲T_A\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{۱}{۲}$$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو دو موج عرضی A و B نشان داده شده است. کدام رابطه در مورد دامنه و طول موج آن دو درست است؟ از کتاب درسی



۱) $A_A=A_B$ ، $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$ ۲) $A_A=A_B$ ، $\lambda_A=۲\lambda_B$

۳) $A_A=۲A_B$ ، $\lambda_A=\lambda_B$ ۴) $A_A=۲A_B$ ، $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$

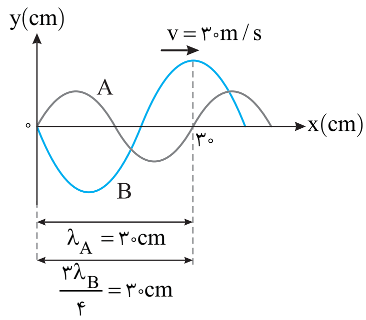
پاسخ با توجه به شکل فاصلهٔ دو ستیغ مجاور در موج A (λ_A) برابر فاصلهٔ ستیغ از پاستیغ مجاورش در موج B $(\frac{\lambda_B}{۲})$ است، بنابراین $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$ است. از طرفی ارتفاع ستیغ A دو برابر B است، بنابراین $A_A=۲A_B$ است.

گزینهٔ ۴

A ۱۴۲۳ ۴

۱ با توجه به شکل طول موج A برابر ۳۰cm است بنابراین دورهٔ A خواهد شد:

$$\lambda_A=۳۰cm=۰/۳m\xrightarrow{v=\lambda/T}۳۰=\frac{۰/۳}{T_A}\Rightarrow T_A=۰/۰۱\,s$$



۲ طول موج B برابر است با:

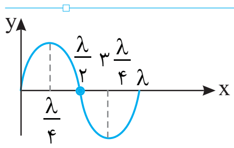
$$\frac{۳}{۴}\lambda_B=۳۰\Rightarrow\lambda_B=۴۰cm=۰/۴m\xrightarrow{v=\lambda/T}۳۰=\frac{۰/۴}{T_B}\Rightarrow T_B=\frac{۴}{۳۰۰}s$$

۳ حال با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$، تعداد نوسان‌های کامل A و B را در مدت ۲۰s به‌دست می‌آوریم:

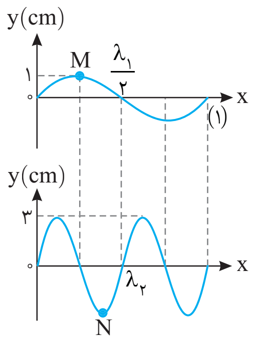
$$\begin{cases}۰/۰۱=\frac{۲۰}{N_A}\Rightarrow N_A=۲۰۰۰\\ \frac{۴}{۳۰۰}=\frac{۲۰}{N_B}\Rightarrow N_B=۱۵۰۰\end{cases}\Rightarrow N_A-N_B=۵۰۰\ \text{نوسان}$$

B ۱۴۲۴ ۴

یادآوری در نقش موج به کمک مؤلفهٔ افقی نمودار می‌توان طول موج را حساب کرد:



۱ با توجه به شکل دو نمودار، طول موج تار (۱) دو برابر طول موج تار (۲) است.



$$\frac{\lambda_۱}{۲}=\lambda_۲\Rightarrow\lambda_۱=۲\lambda_۲$$

۲ حال با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ می‌توان بسامد نوسان ذرات موج را حساب کرد و به کمک $f=\frac{۱}{T}$ دورهٔ نوسان آن‌ها را به‌دست آورد:

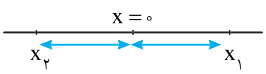
$$\begin{cases}\lambda_۱=\frac{v_۱}{f_۱}\\ \lambda_۲=\frac{v_۲}{f_۲}\end{cases}\xrightarrow{v_۱=v_۲}\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{f_۲}{f_۱}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=۲\Rightarrow\frac{\frac{۱}{T_۲}}{\frac{۱}{T_۱}}=۲\Rightarrow\frac{T_۱}{T_۲}=۲$$

۳ دورهٔ نوسان ذرات موج (۱) (مثل نقطهٔ M) دو برابر دورهٔ نوسان ذرات موج (۲) (مثل نقطهٔ N) است:

$$\begin{cases}T_M=\frac{t_M}{N_M}\\ T_N=\frac{t_N}{N_N}\end{cases}\xrightarrow[N_M=۲]{T_M=۲T_N}\frac{T_M}{T_N}=\frac{N_N}{N_M}\Rightarrow ۲=\frac{N_N}{۲}\Rightarrow N_N=۴$$

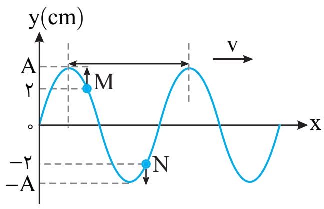
A ۱۴۲۵ ۲

یادآوری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان یکسان باشد، تندی نیز یکسان است.



$$|v_۱|=|v_۲|$$

با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) است بنابراین حرکت آن کندشونده است. هم‌چنین ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین و نزدیک شدن به نقطهٔ بازگشت بوده و حرکت آن کندشونده است بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست است.

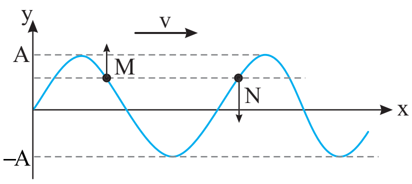


مکان دو ذرهٔ M و N از محیط نسبت به مرکز نوسانشان یکسان و قرینه است. پس تندی در آن نقطه‌ها برابر بوده و در نتیجه گزینهٔ (۲) درست است.

فاصلهٔ دو برآمدگی از هم λ است و M و N بین دو قله متوالی قرار دارند و فاصلهٔ آن‌ها از هم کمتر از λ است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۴۲۶ ۴

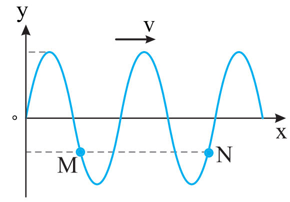
۱ نقطهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نقطهٔ N در حال حرکت رو به پایین است، بنابراین در یک لحظه از حالت تعادل نمی‌گذرند و گزینهٔ (۱) نادرست است.



۲ حرکت M رو به بالا و در حال دور شدن از حالت تعادلش بوده و کندشونده است اما N در حال نزدیک شدن به حالت تعادل بوده و دارای حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳ جهت حرکت هر دو، قرینهٔ هم (M رو به بالا و N رو به پایین) است و در یک مکان دو نوسانگر دارای تندی یکسان هستند اما سرعت آن‌ها قرینه است و گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال شکل روبه‌رو موج عرضی را در طناب نشان می‌دهد. کدام مورد دربارهٔ دو نقطهٔ M و N از طناب درست است؟ ریاضی - ۹۵



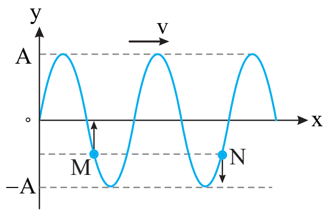
۱) سرعت آن‌ها در هر لحظه یکسان است.

۲) دامنه و بسامد یکسانی دارند.

۳) در هر لحظه فاصلهٔ آن‌ها از مرکز نوسان یکسان است.

۴) هر سه گزینه درست است.

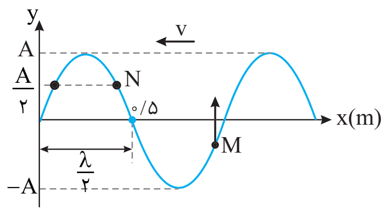
پاسخ با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به حالت تعادلش است اما ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین و در حال نزدیک شدن به نقطهٔ بازگشت است. با آن که در این لحظه تندی آن‌ها یکسان است اما در لحظه‌های بعدی تندی آن‌ها یکسان نخواهد بود. همچنین با گذشت زمان فاصلهٔ آن‌ها از مرکز نوسان تغییر خواهد کرد و گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست است.



بسامد تمام نقاط محیط یکسان است و دامنهٔ نقاط مختلف برای یک موج عرضی که در یک بُعد در حال انتشار است، با صرف‌نظر از اتلاف انرژی نیز برای تمام نقاط یکسان است و گزینهٔ (۲) درست است. گزینهٔ ۲

C ۱۴۲۷ ۴

بنا به فرض مسئله نقطهٔ M در حال حرکت رو به بالاست. به شکل نگاه کنید. برای آن که M رو به بالا در حرکت باشد باید قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M باشد و نقطهٔ قبل از M در مسیر موج باید بالاتر از M باشد. نقطهٔ سمت راست M بالاتر از M است یعنی نقطهٔ قبل از M در سمت راست آن قرار دارد بنابراین باید جهت پیشروی موج از راست به چپ باشد.



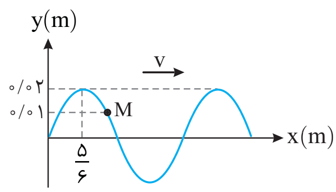
با توجه به نمودار $\frac{\lambda}{2}$ برابر $0/5m$ است بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{\lambda}{2}=0/5\Rightarrow\lambda=1\,m$$

A ۱۴۲۸ ۲

خط فکری ذرهٔ M در هر ثانیه چند نوسان انجام می‌دهد؟ یعنی بسامد موج را بیابید. به کمک محور افقی نقش موج طول موج را به دست می‌آوریم و با استفاده از تندی موج $(v=10m/s)$ بسامد را حساب می‌کنیم. بسامد موج برای تمام نقاط یکسان است.

۱ با توجه به نمودار طول موج خواهد شد: $\frac{\lambda}{4}=\frac{5}{6}\Rightarrow\lambda=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}m$



۲ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{\lambda}{v}=\frac{\frac{10}{3}}{10}\Rightarrow T=\frac{1}{3}s$

۳ تعداد نوسانات در هر ثانیه یعنی بسامد در این صورت: $f=\frac{1}{T}=3Hz$

A ۱۴۲۹ ۴

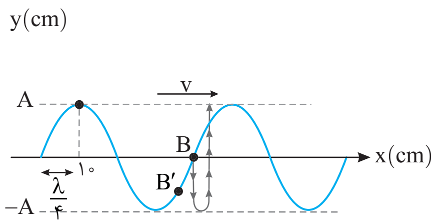
خط فکری در اغلب مسائل نقش موج دو کار را همان ابتدا باید انجام دهید:

۱ پیدا کردن طول موج از روی محور افقی

۲ به دست آوردن دوره به کمک تندی انتشار موج و هرگاه دربارهٔ رفتار یک ذره از محیط از شما سؤال شود شما باید جهت حرکت ذره را تشخیص دهید (بالا می‌رود یا پایین می‌آید) و سپس با ذره شبیه یک نوسان‌گر هماهنگ ساده برخورد کنید.

۱ با توجه به نقش موج طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$$



۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}=\frac{0/4}{10}=0/04s$

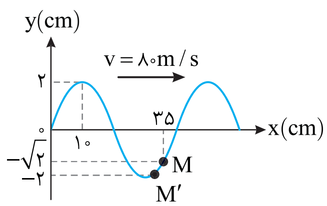
۳ با توجه به نقش موج درهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ B است و ذرهٔ قبل از B یعنی B′، از B پایین‌تراست پس B رو به پایین در حرکت است.

۴ ذرهٔ B از مرکز نوسان تا $-A$، $\frac{T}{4}$ و از $-A$ تا $+A$، $\frac{T}{2}$ یعنی جمعاً $\frac{3T}{4}$ در حال حرکت خواهد بود بنابراین مدت زمانی که طول می‌کشد تا ذرهٔ B برای اولین بار به مکان $+A$ برسد خواهد شد: $\Delta t=\frac{3T}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{4}\times0/04\Rightarrow\Delta t=0/03s$

B ۱۴۳۰ ۱

۱ گام اول: پیدا کردن طول موج از روی محور افقی:

$$\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$$

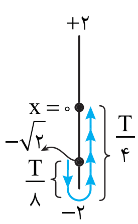


۲ گام دوم: پیدا کردن دوره به کمک تندی انتشار موج:

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{80}{0/4}\Rightarrow f=200Hz\Rightarrow T=\frac{1}{200}s$$

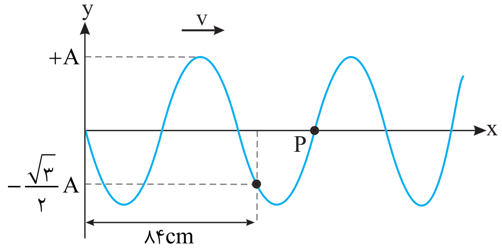
۳ گام سوم: تعیین جهت حرکت ذرهٔ M: با توجه به جهت پیشروی موج درهٔ موج در حال نزدیک شدن به ذرهٔ M است و ذرهٔ قبل از M از M پایین‌تر است بنابراین M از مکان $-\sqrt{2}cm$ در حال حرکت به سوی دامنهٔ منفی $A=-2cm$ است.

۴ اکنون با یک حرکت هماهنگ ساده سر و کار داریم که در آن نوسانگر از مکان $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به سوی $-A$ رفته سپس به مکان $x=0$ می‌رود. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان را به‌دست می‌آوریم:



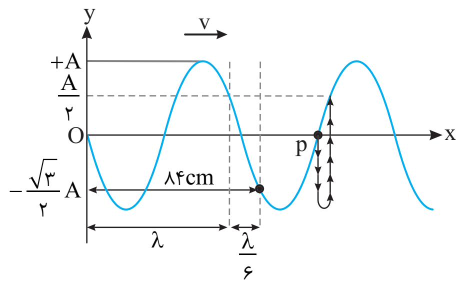
$$\Delta t=\frac{T}{8}+\frac{T}{4}=\frac{3T}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{8}\times\frac{1}{200}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{1600}s$$

بازی با سؤال مطابق شکل زیر یک موج عرضی با دامنهٔ A با تندی $50m/s$ در یک تار در حال پیشروی است. چند ثانیه پس از لحظهٔ نشان داده شده در شکل، نقطهٔ P از محیط برای نخستین بار به مکان $+\frac{A}{2}$ می‌رسد؟



۱) $8/4\times10^{-3}$ ۲) $1/2\times10^{-3}$ ۳) $8/4\times10^{-4}$ ۴) 7×10^{-3}

پاسخ با توجه به بازه‌های مکانی شناخته شده می‌توان نوشت.



$\lambda+\frac{\lambda}{6}=84\Rightarrow\frac{7\lambda}{6}=84\Rightarrow\lambda=72cm$

$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/72}{50}\Rightarrow T=1/44\times10^{-2}s$

اکنون به مسیر حرکت P دقت کنید. P در مدت $\frac{T}{4}$ از مرکز به دامنهٔ $-A$ می‌رود و پس از $\frac{T}{4}$ دیگر به تعادلش بازمی‌گردد و از محل تعادل در مدت $\frac{T}{12}$ به مکان $+\frac{A}{2}$ می‌رود از این‌رو:

$\Delta t=\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{7T}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{7}{12}\times1/44\times10^{-2}$

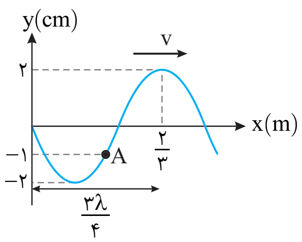
$\Rightarrow\Delta t=8/4\times10^{-3}s$

گزینهٔ ۱

B ۱۴۳۱ ۳

راه‌حل اول: ۱ گام اول: طول موج را از روی محور افقی حساب می‌کنیم:

$3\frac{\lambda}{4}=\frac{2}{3}\Rightarrow\lambda=\frac{8}{9}m$



۲ گام دوم: به کمک تندی انتشار موج دوره را به دست می‌آوریم.

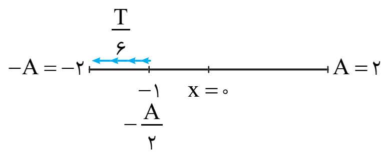
$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{\frac{8}{9}}{10}\Rightarrow T=\frac{8}{90}s$

۳ گام سوم: ذرهٔ A در حال حرکت به کدام جهت است؟ با توجه به جهت پیشروی موج ذرهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ A است و نقطهٔ قبل از A از A پایین‌تر است بنابراین A در حال حرکت به سمت پایین است.

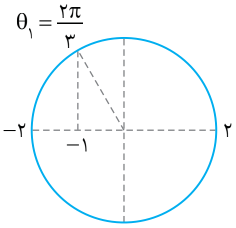
۴ اکنون با ذرهٔ A شبیه یک حرکت هماهنگ ساده برخورد می‌کنیم. ابتدا مشخص می‌کنیم که بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است.

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{2}{135}}{\frac{8}{90}}=\frac{2\times90}{135\times8}=\frac{2\times2}{3\times8}=\frac{1}{6}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}$

۵ یک نوسانگر وقتی در مکان $-\frac{A}{2}$ قرار دارد در مدت $\frac{T}{6}$ به مکان $-A$ می‌رسد بنابراین ذرهٔ A در این مدت به مکان $-2cm$ می‌رسد.



راه‌حل دوم: استفاده از دایرهٔ مثلثاتی برای حرکت هماهنگ ساده ذرهٔ A



$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1$

$\Rightarrow\theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{T}(\frac{2}{135})$

$\Rightarrow\theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{\frac{8}{90}}\times\frac{2}{135}$

$\Rightarrow\theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi\times90}{2\times135}$

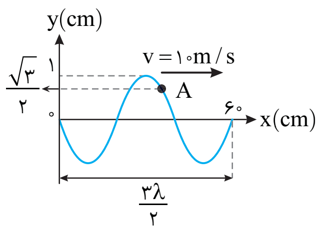
$\Rightarrow\theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta_2=\pi$

بنابراین ذرهٔ A به مکان $-2cm$ می‌رسد.

B ۱۴۳۲ ۳

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی نقش موج:

$3\frac{\lambda}{2}=60\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$



۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج:

$T=\frac{\lambda}{v}=\frac{0/4}{10}=\frac{1}{25}s$

۳ بسامد زاویه‌ای موج را به‌دست می‌آوریم:

$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{25}}=50\pi\,rad/s$

۴ اکنون ذرهٔ A یک نوسانگر هماهنگ ساده است که مکان آن $x=\frac{\sqrt{3}}{2}cm$ می‌باشد و روابط حرکت هماهنگ ساده در مورد آن صدق می‌کند.

یادآوری شتاب یک نوسانگر ساده برحسب مکان آن از رابطهٔ $|a|=\omega^2x$ به دست می‌آید.

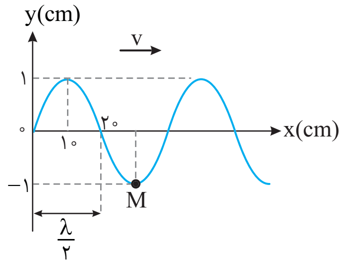
۵ شتاب ذرهٔ A در لحظهٔ نشان داده شده خواهد شد:

$|a|=\omega^2x\Rightarrow|a|=(50\pi)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times10^{-2}$

$\Rightarrow|a|=2500\pi^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times10^{-2}\Rightarrow|a|=125\sqrt{3}m/s^2$

C ۱۴۳۳ ۴

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی: $\frac{\lambda}{۲}=۲۰\Rightarrow \lambda=۴۰cm=۰/۴m$



۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج: $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۴}\Rightarrow T=۰/۱s$

۳ گام سوم: تعیین جهت حرکت ذرهٔ مورد نظر، ذرهٔ M در دامنهٔ $-A$ قرار دارد بنابراین یقیناً رو به بالا حرکت خواهد کرد.

۴ گام چهارم: مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۲۵}{۰/۱}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۴}$$

۵ ذرهٔ M دارای حرکت هماهنگ ساده است بنابراین در مدت $\frac{T}{۴}$ از مکان $-A$ به مرکز نوسان می‌رسد. بنابراین بعد از $\frac{T}{۴}$ تندی ذرهٔ M بیشینهٔ مثبت خواهد بود. اما ابتدا باید بسامد زاویه‌ای را حساب کنیم: $(v_m=+A\omega)$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۱}\Rightarrow\omega=۲۰\pi\ rad/s$$

$$v_m=+A\omega\xrightarrow{A=۱cm}v_m=+(۱\times۲۰\pi)\Rightarrow v_m=+۲۰\pi\ cm/s$$

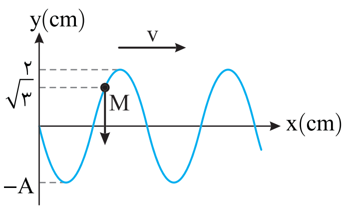
B ۱۴۳۴ ۳

خط فکری: این بار خوشبختانه نیازی به پیدا کردن طول موج نداریم. مسئله راجع به سرعت متوسط نقطهٔ M سؤال کرده و شما در حقیقت یک حرکت هماهنگ ساده را باید بررسی کنید که در آن دامنه ۲cm و مکان ذره $\sqrt{۳}cm$ یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ است. تنها نکتهٔ مهم تعیین جهت حرکت ذرهٔ M است.

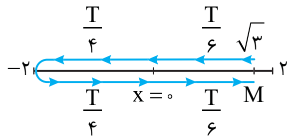
۱ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{۱}{f}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰}s$

۲ مشخص می‌کنیم که $\Delta t=\frac{۱}{۲۴}s$ چه کسری از دوره است: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۲۴}}{\frac{۱}{۲۰}}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵}{۶}T$

راه حل اول: با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به پایین است. اکنون مسیر حرکت آن را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده، مکان ذره را پس از $\frac{۵}{۶}T$ مشخص کرده و مسافت طی شده را از روی مسیر حرکت معین می‌کنیم.



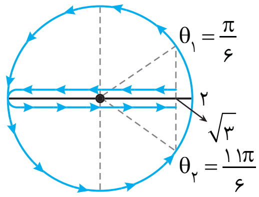
ذرهٔ M پس از $\frac{T}{۶}$ به مرکز می‌رسد و پس از $\frac{T}{۲}$ به مرکز برمی‌گردد و $\frac{T}{۶}$ بعد به M می‌رسد که جمعاً $\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}+\frac{T}{۶}=\frac{۵T}{۶}$ می‌شود و M به مکان اولیه باز می‌گردد و سرعت متوسط صفر است.



راه حل دوم: اکنون به کمک دایرهٔ مثلثاتی مجدداً قسمت آخر مسئله را حل می‌کنیم:

$$\theta_۲-\theta_۱=\omega t_۲-\omega t_۱=\omega(t_۲-t_۱)$$

$$\Rightarrow\theta_۲-\frac{\pi}{۶}=۲\pi\times(۲۰)(\frac{۱}{۲۴})\Rightarrow\theta_۲=\frac{۱۱\pi}{۶}$$



کمان $\frac{۱۱\pi}{۶}$ معادل مکان $\sqrt{۳}$ است و ذره به جای اول باز می‌گردد و سرعت متوسط صفر است.

B ۱۴۳۵ ۱

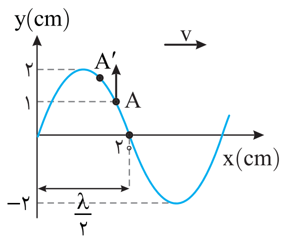
خط فکری: حل مسئله به همان شکل همیشگی است. حساب کردن طول موج، پیدا کردن دوره، بررسی جهت حرکت ذره و اینکه بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است، بنابراین مراحل بیان شده را طی کنید.

۱ گام اول: یافتن طول موج: $\frac{\lambda}{۲}=۲۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$

۲ گام دوم: یافتن دوره از روی تندی انتشار موج:

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۱۰}$$

$$\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۰۰}s$$

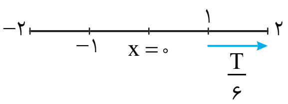


۳ مشخص کردن جهت حرکت ذرهٔ مورد نظر: با توجه به جهت انتشار موج، قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به ذرهٔ A بوده و ذرهٔ قبل از آن بالاتر از A قرار دارد بنابراین A در حال حرکت رو به بالاست.

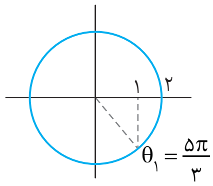
۴ مشخص می‌کنیم که $\Delta t=\frac{۱}{۱۵۰}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۱۵۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

۵ **راه حل اول:** ذرهٔ A از مکان $\frac{A}{۲}=۱\ cm$ در حال حرکت رو به بالاست. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شدهٔ ذرهٔ A در مدت $\frac{T}{۶}$ از مکان $\frac{+A}{۲}$ به $+A$ می‌رسد یعنی $x=۲cm$ می‌شود و ذره به اندازهٔ $۲-۱=۱cm$ جابه‌جا می‌شود.



راه حل دوم: این بار مجدداً مکان ذرهٔ A را به کمک رسم دایرهٔ مثلثاتی به‌دست می‌آوریم. ابتدا کمان معادل مکان را روی دایره مشخص می‌کنیم.



$$\theta_۲-\theta_۱=\omega(t_۲-t_۱)\Rightarrow\theta_۲-\theta_۱=\omega(\Delta t)=\frac{۲\pi}{T}(\Delta t)$$

$$\Rightarrow\theta_۲-\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{\frac{۴}{۱۰۰}}\times\frac{۱}{۱۵۰}\Rightarrow\theta_۲-\frac{۵\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\theta_۲=۲\pi$$

معادل مکانی ۲π، $x=+A=۲cm$ است.

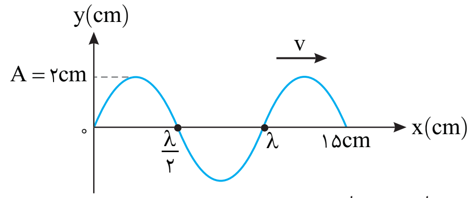
B ۱۴۳۶ ۴

تذکر دقت شود ذرات ریسمان فقط در جهت عمود بر پیشروی موج (یعنی در راستای محور y) ارتعاش (یا نوسان) می‌کنند و مسافت طی‌شدهٔ هر ذره ارتباطی به سرعت پیشروی موج در جهت x ندارد.

۱ تندی موج در ریسمان برابر است با: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۸۰}{۰/۲}}=۲۰m/s$

۲ با توجه به نقش موج داده شده طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda+\frac{\lambda}{۲}=۱۵cm\Rightarrow\frac{۳\lambda}{۲}=۱۵\Rightarrow\lambda=۱۰cm=۰/۱m$$



۳ دورهٔ نوسان موج خواهد شد:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow\lambda=vT\Rightarrow ۰/۱=۲۰T\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰۰}s=۰/۰۰۵s$$

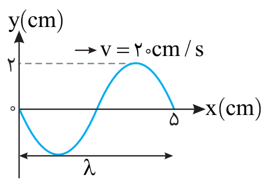
۴ در حل این نوع مسائل پس از به دست‌آوردن دوره، بازهٔ زمانی داده شده را با آن مقایسه می‌کنیم: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۱}{۰/۰۰۵}\Rightarrow\Delta t=۲T$

۵ بازهٔ ارائه‌شده دو دورهٔ کامل است و در هر دوره ذره مسافت $۴A$ را طی می‌کند بنابراین:

۱ نوسان کامل	$۴A=۸cm$
۲ نوسان کامل	۱۶cm

B ۱۴۳۷ ۳

خط فکری در مسائل مربوط به نقش موج معمولاً می‌توان از روی نمودار، طول موج و سپس دوره و بسامد را حساب کرد. سپس باید مشخص کنیم که بازهٔ زمانی که در مسئله بیان شده چه کسری از دوره است تا بتوانیم به کمک آن، مسئله را حل کنیم.

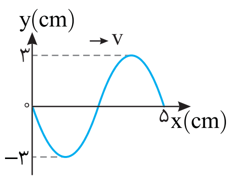


با توجه به نقش موج داده شده طول موج برابر ۵cm است:

$$\lambda=vT\Rightarrow ۵=۲۰\times T\Rightarrow T=\frac{۱}{۴}s$$

دوره $\frac{۱}{۴}s$ است و بازهٔ $\frac{۱}{۸}s$ برابر نصف دوره است و یک نوسانگر در مدت نصف دوره مسافتی دو برابر دامنه $(۲A)$ را طی می‌کند، با توجه به نمودار دامنه ۲cm است از این‌رو مسافت طی شده در مدت $\frac{۱}{۸}s$ برابر $۲\times۲=۴cm$ می‌شود.

بازی با سؤال **نقش یک موج عرضی که در یک طناب با تندی v درحال انتشار است، مطابق شکل مقابل است. مسافتی که یک ذره از طناب در مدت $\frac{۱}{۸}s$ طی می‌کند برابر ۱۸cm است. v چند m/s است؟**



۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

پاسخ **به نمودار نگاه کنید دامنهٔ نوسان ذره‌های طناب ۳cm است و هر ذره در مدت یک دوره (T) مسافتی برابر $(۴A=۴\times۳=۱۲cm)$ طی می‌کند. مسافت طی شده در مدت $\frac{۱}{۸}s$، برابر ۱۸cm است.**

مسافت ۱۸cm، برابر مسافتی است که یک ذره در مدت یک و نیم دوره $(\frac{۳T}{۲})$ طی می‌کند. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱۸}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۲}T$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $\frac{۳}{۲}T=\frac{۱}{۸}\Rightarrow T=\frac{۱}{۱۲}s$

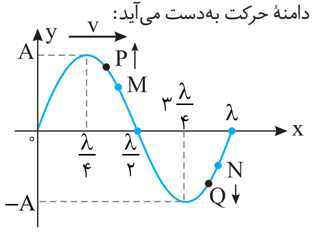
با توجه به نقش موج، طول موج برابر $\lambda=۵cm$ است در نتیجه تندی انتشار موج خواهد شد:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۵\times۱۰^{-۲}}{\frac{۱}{۱۲}}\Rightarrow v=۰/۶m/s$$

گزینهٔ ۱

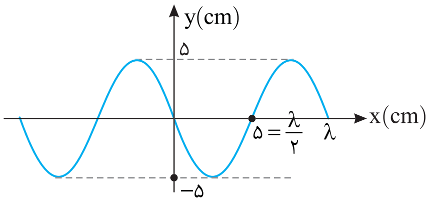
B ۱۴۳۸ ۳

خط فکری در نمودار $y-x$ یک موج که تصویر آن است، از محور افقی طول موج و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید:



جهت حرکت هر ذره از محیط با توجه به نقطهٔ قبل به‌دست می‌آید، به‌طور مثال وقتی موج به سمت راست حرکت می‌کند ذره P که قبل از M است بالاتر از M قرار دارد یعنی ذرهٔ M رو به بالا در حال حرکت است. ذرهٔ قبل از N یعنی ذرهٔ Q پایین‌تر از N بوده و نقطهٔ N در حال حرکت به سمت پایین است.

۱ با توجه به محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{۲}=۵\Rightarrow\lambda=۱۰cm$

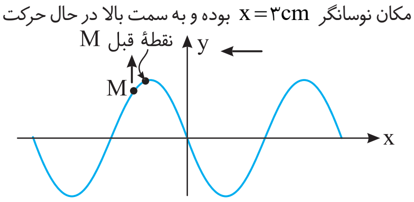


با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$، دورهٔ نوسان ذرات موج و بسامد نوسان ذرات موج به‌دست می‌آید:

$$\lambda=vT\Rightarrow ۱۰cm=۲۰\frac{cm}{s}\times T\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$$

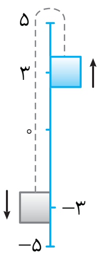
نکته در مدت T ذرات محیط یک نوسان کامل انجام داده و به مکان قبلی و در همان جهت نوسان قبلی باز می‌گردند و در مدت $\frac{T}{۲}$ مکان و جهت نوسان ذرات محیط قرینه می‌شوند.

۲ با توجه به مکان M و جهت انتشار موج نقطهٔ قبل M بالاتر از آن قرار دارد بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر $x=۳cm$ بوده و به سمت بالا در حال حرکت است.



۳ در مدت $\Delta t=t_۲-t_۱=\frac{۱}{۴}s$ باید دید نوسانگر چه مقدار جابه‌جا شده است. دقت کنید که $\frac{۱}{۴}s$ نصف دورهٔ نوسان $(T=\frac{۱}{۲}s)$ است. بنابراین مطابق شکل روبه‌رو مکان و جهت نوسانگر در این مدت قرینه می‌شود و جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$\Delta x=x_۲-x_۱\Rightarrow\Delta x=-۳-۳=-۶cm$$



یادآوری سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

۴ بزرگی سرعت متوسط ذرهٔ M را حساب می‌کنیم:

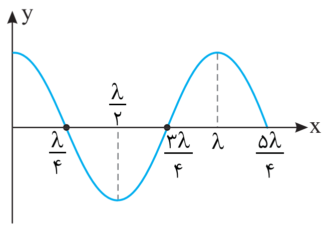
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۶cm}{\frac{۱}{۴}s}\Rightarrow v_{av}=-۲۴\frac{cm}{s}$$

$$\xrightarrow{\text{بزرگی سرعت متوسط خواسته شده } |v_{av}|}|v_{av}|=۲۴cm/s$$

B ۱۴۳۹ ۲

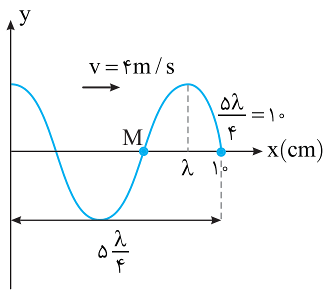
خط فکری در سؤالاتی مانند این سؤال که با تصویر موج یا به اصطلاح نقش موج سروکار داریم از محور قائم دامنهٔ موج و از محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید در یک موج ذرات محیط دارای حرکت نوسانی‌اند پس برای بررسی حرکت ذرات محیط باید از رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ دورهٔ نوسان را حساب کنید.

نکته برای به‌دست آوردن طول موج در یک نقش موج به شکل زیر دقت کنید:



۱ با توجه به شکل $\frac{5\lambda}{4}$ برابر ۱۰cm شده است، پس طول موج خواهد شد:

$$5\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=8cm$$



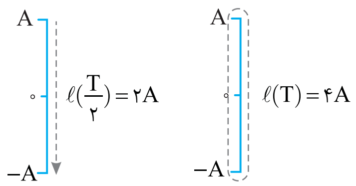
۲ با استفاده از رابطهٔ $\lambda=vT$ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/08}{4}\Rightarrow T=0/02s$$

۳ بازهٔ ۰/۲۵s را با دوره مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/25}{0/02}\Rightarrow\Delta t=12/5T\Rightarrow\Delta t=12T+\frac{T}{2}$$

نکته در هر دوره مسافتی که ذرهٔ M در حرکت هماهنگ ساده طی می‌کند برابر ۴A و در نصف دوره برابر ۲A است.



۴ بنابراین در مدت $12T+\frac{T}{2}$ مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=12(4A)+2A\Rightarrow\ell=50A$$

یادآوری تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

۵ تندی متوسط ذرهٔ M در این مدت برابر ۶m/s است از این‌رو خواهیم داشت:

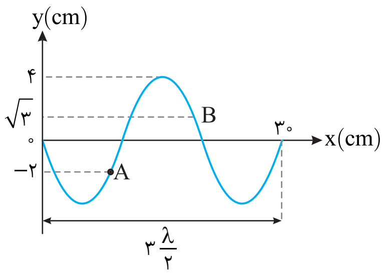
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 6=\frac{50A}{0/25}\Rightarrow A=0/03m\Rightarrow A=3cm$$

B ۱۴۴۰ ۲

خط فکری در این مسئله با دو ذره از محیط سر و کار دارید اما مهم نیست زیرا تمام مراحل حل مسئله مثل مسئلهٔ قبل است. نکتهٔ دیگر در حل این مسئله این است که مکان ذرهٔ B برحسب دامنه $\frac{x_B}{A}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ است که شناخته شده نیست. نگران نباشید حل را ببینید.

۱ گام اول: طول موج را از روی محور افقی نقش موج به‌دست می‌آوریم:

$$3\frac{\lambda}{2}=30\Rightarrow\lambda=20cm$$



۲ گام دوم: با استفاده از تندی انتشار موج، دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{0/2}{8}\Rightarrow T=\frac{1}{40}s$$

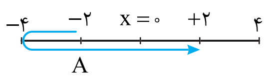
۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{40}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{2}$$

نکته در مدت $\frac{T}{2}$ مکان و سرعت نوسانگر قرینه می‌شود.

۴ ذرهٔ A در مکان −۲cm قرار دارد بنابراین بعد از $\frac{T}{2}$ مکان آن قرینه می‌شود یعنی مکانش +۲cm خواهد شد و جابه‌جایی آن از −۲cm تا +۲cm برابر +۴cm خواهد بود.

$$\Delta y_A=2+2=4cm$$



(مسیر A)

۵ ذرهٔ B در مکان $+\sqrt{3}cm$ قرار دارد و در مدت $\frac{T}{2}$ مکان آن قرینه شده و برابر $-\sqrt{3}cm$ می‌شود بنابراین جابه‌جایی آن از $+\sqrt{3}cm$ تا $-\sqrt{3}cm$ برابر $-2\sqrt{3}cm$ خواهد شد:

$$|\Delta y_B|=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}cm$$

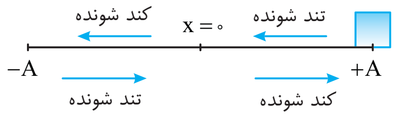
(مسیر B)

۶ نسبت جابه‌جایی‌ها برابر است با:

$$\frac{|\Delta y_B|}{\Delta y_A}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B ۱۴۴۱ | ۱

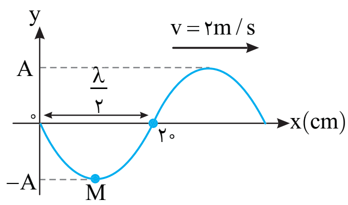
خط فکری در حل مسائل نقش موج، معمولاً شما باید از روی نمودار، طول موج سپس به کمک تندی انتشار موج، دورهٔ موج یعنی دورهٔ حرکت هماهنگ ساده ذرات محیط را حساب کنید.



از طرفی هر گاه در مورد رفتار یک ذره از محیط از شما سؤال شود، باید به سراغ حرکت هماهنگ ساده بروید و به کمک دانسته‌های خود در مورد حرکت هماهنگ ساده، حرکت آن ذره را بررسی کنید. اگر ذره از مرکز نوسان به سوی دامنه حرکت کند حرکت کندشونده و اگر از دامنه به‌سوی مرکز برود حرکت آن تندشونده است.

اکنون به سراغ حل مسئله بروید.

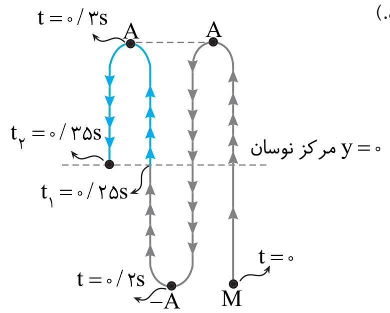
ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{2}=20\Rightarrow\lambda=40cm$



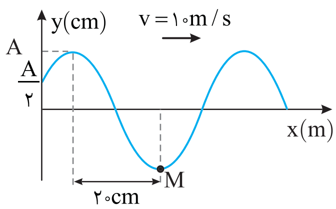
دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/4}{2}\Rightarrow T=0/2s$

دوره را $T=0/2s$ به‌دست آورده‌ایم. نمودار مربوط به لحظهٔ $t=0$ است اما طراح بازهٔ زمانی را از $t_1=0/25s$ شروع کرده است یعنی ابتدا شما باید بررسی کنید که ذرهٔ M در لحظهٔ t_1 در چه مکانی است. در مدت یک دوره یک نوسانگر به جای اولیهٔ خود باز می‌گردد، بنابراین در $t=0/2s$ نقطهٔ M در مکان $-A$ است. دقت کنید که $0/05s$ در این حرکت برابر $\frac{T}{4}$ دوره است و در $\frac{T}{4}$ متحرک از دامنه به مرکز نوسان و بالعکس می‌رود. اکنون ادامهٔ حرکت را بررسی می‌کنیم. در مدت $0/25-0/2=0/05s$ متحرک به محل تعادل خود می‌رسد $(y=0)$ و از آن جا به مدت $0/05s$ به انتهای مسیر (نقطهٔ A) می‌رود که حرکت کندشونده است $(t=0/3s)$ و در $0/05s$ باقیمانده از A به تعادل بر می‌گردد و حرکت تندشونده است.

(البته این مسیر روی خط راست است که برای درک بهتر آن به صورت شکل زیر نمایش داده شده است.)



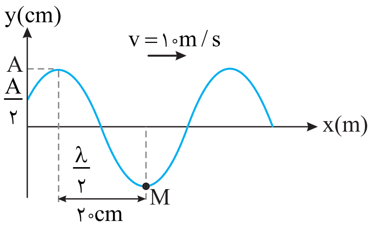
بازی با سؤال شکل زیر، نقش موج عرضی طنابی را در یک لحظه نشان می‌دهد. حرکت ذرهٔ M در بازهٔ زمانی $0\le t\le\frac{1}{100}s$ چگونه است؟ (ریاضی - ۹۰)



۱) کندشونده
۲) تندشونده
۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده
۴) ابتدا کندشونده و سپس تندشونده

پاسخ طول موج و سپس دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{2}=20cm\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m \quad , \quad T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/4}{10}\Rightarrow T=\frac{4}{100}s$$



مشخص می‌کنیم که $\frac{1}{100}s$ چه کسری از دوره است: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{4}{100}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{4}$

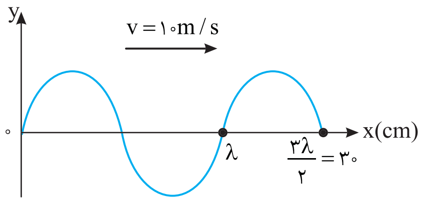
با توجه به شکل در مدت $\frac{T}{4}$، M از مکان $-A$ به مرکز نوسان می‌رود و حرکتش تندشونده است.

گزینهٔ ۲

B ۱۴۴۲ | ۳

خط فکری معمولاً در مسائل موج و نوسان لازم است نسبت $\frac{\Delta t}{T}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ با توجه به نمودار طول موج را حساب می‌کنیم: $\frac{3\lambda}{2}=30\Rightarrow\lambda=20cm=0/2m$

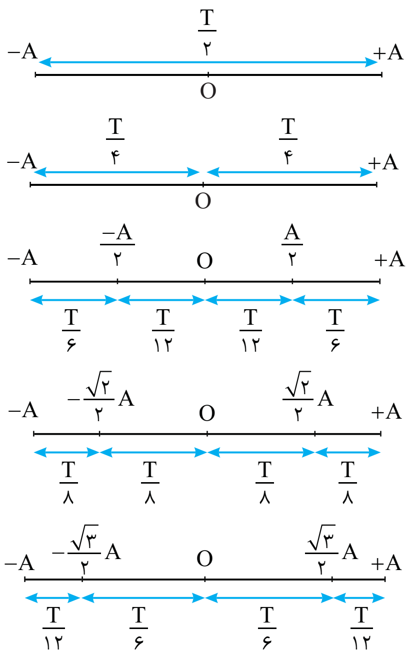


۲ حال دورهٔ موج را حساب می‌کنیم: $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow 10=\frac{0/2}{T}\Rightarrow T=0/02s=\frac{2}{100}s$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را بر حسب دوره به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta t=\frac{9}{400}, T=\frac{2}{100}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{9}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{8}T=T+\frac{T}{8}$$

نکته برای بررسی نوسان ذره‌های موج در هر لحظه لازم است بازه‌های زمانی زیر را به خاطر بسپارید:

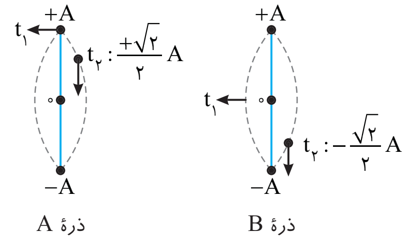


۴ حال حرکت ذره‌های A و B را بررسی می‌کنیم.

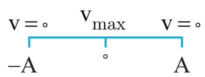
ذرات A و B روی ریسمان در حال نوسان‌اند.

نوسان A: ذرهٔ A ابتدا در دامنهٔ مثبت قرار دارد پس از یک دوره (T) مجدد به همان مکان می‌رسد و $\frac{T}{8}$ ثانیه بعد به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌رسد.

نوسان B: ذرهٔ B ابتدا در $x=0$ قرار دارد و با توجه به جهت انتشار موج، ذرهٔ B قبلی پایین‌تر از آن قرار داد و این ذره ابتدا به سمت پایین شروع به نوسان کرده و پس از T مجدد به همان مکان می‌رسد و در مدت $\frac{T}{8}$ به مکان $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌رسد:



نکته: برای یک نوسانگر تندی در دامنه‌ها صفر و در $x=0$ بیشینه است:



۵ مکان ذره‌های A و B در $x=0$ و $x=A$ نیست پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است.

۶ ذرهٔ A در حال حرکت به سمت $x=0$ است، پس ذرهٔ A در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی در آن بیشینه می‌شود و حرکت این ذره تندشونده است. ذرهٔ B در حال حرکت به سمت $x=-A$ است، پس ذرهٔ B در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی آن صفر می‌شود، پس حرکت این ذره کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

B ۱۴۴۳ ۱

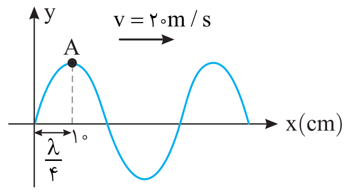
نکته: هنگام گذر نوسانگر از حالت تعادل $(y=0)$ جهت بردار مکان تغییر می‌کند.

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی:

$$\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$$

۲ گام دوم: یافتن دوره با استفاده از تندی انتشار موج:

$$\lambda=vT\Rightarrow 0/4=20T\Rightarrow T=0/02s$$



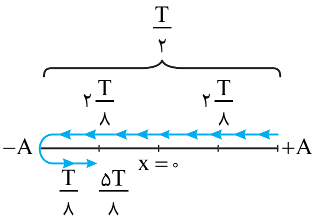
۳ گام سوم: نقطهٔ مورد نظر در چه جهتی حرکت خواهد کرد؟ نقطهٔ A در دامنه قرار دارد و قطعاً رو به پایین حرکت خواهد کرد و به مرکز نوسان نزدیک می‌شود.

۴ گام چهارم: مشخص می‌کنیم که $\frac{1}{80}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{80}}{\frac{2}{100}}=\frac{5}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{8}T$$

۵ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. نوسانگر در بازهٔ حرکت از +A تا -A یعنی $\frac{T}{2}$ یکبار از مرکز نوسان می‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

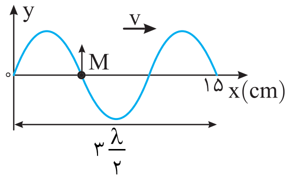
اما در ادامهٔ بازه یعنی $\frac{\Delta T}{8}-\frac{T}{2}=\frac{T}{8}$ نوسانگر دیگر به مرکز نوسان نمی‌رسد. بنابراین بردار مکان ذرهٔ A در مدت $\frac{1}{80}s$ تنها یک بار تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۴۴۴ ۳

خط فکری: از روی نمودار نقش موج، طول موج را به‌دست بیاورید و دورهٔ حرکت ذرات محیط را حساب کنید. در مسئله راجع به رفتار یک ذره از محیط (ذرهٔ M) از شما سؤال شده است بنابراین پس از پیدا کردن دوره، شما باید حرکت هماهنگ ساده ذره M را بررسی کنید و بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه کنید تا متوجه شوید در بازهٔ زمانی داده شده برای ذرهٔ M چه اتفاقی می‌افتد و از کجا به کجا می‌رود؟

۱ با توجه به شکل طول موج خواهد شد: $3\frac{\lambda}{2}=15\Rightarrow\lambda=10cm$

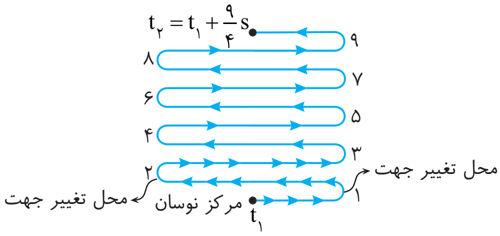


۲ بسامد موج را به‌دست می‌آوریم: $v=f\lambda\Rightarrow 20=f(10)\Rightarrow f=2Hz$

۳ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{1}{f}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$

۴ اکنون $\Delta t=\frac{9}{4}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{2}T$

۵ وقتی که در مسئله دربارهٔ حرکت یک ذره از محیط پرسش می‌شود، یعنی شما باید به سراغ حرکت هماهنگ ساده بروید. در حرکت هماهنگ ساده در هر دوره، نوسانگر به موقعیت قبلی خود باز می‌گردد یعنی مکان و سرعت خود را تکرار می‌کند. با توجه به جهت پیشروی موج نقطهٔ M در مرکز نوسانش در حال حرکت رو به بالاست و در هر بازهٔ $\frac{T}{2}$، یکبار جهت حرکتش عوض می‌شود بنابراین در مدت $9(\frac{T}{2})$، ۹ بار جهت حرکتش عوض می‌شود.



نکته: دقت کنید در صورت مسئله به جای تعداد تغییر جهت حرکت می‌توانست پرسش‌های زیر را مطرح کند:

۱) تندی نوسانگر چند بار صفر می‌شود؟ ۹ بار

۲) بزرگی شتاب نوسانگر چند بار بیشینه می‌شود؟ ۹ بار

۳) انرژی پتانسیل نوسانگر چند بار بیشینه می‌شود؟ ۹ بار

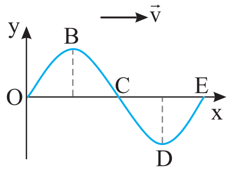
۴) انرژی جنبشی نوسانگر چند بار صفر می‌شود؟ ۹ بار

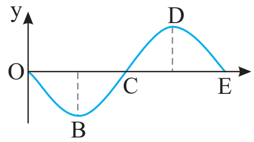
B ۱۴۴۵ ۱

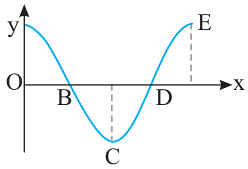
خط فکری: در حل این مسائل باید یک نقطه از محیط مثلاً نقطهٔ M را انتخاب کنید سپس با توجه به جهت حرکت آن مشخص کنید که در بازهٔ زمانی بیان شده نقطهٔ M به چه مکانی می‌رود. یک نقطهٔ دیگر را نیز انتخاب کنید سپس نمودارهای داده شده در گزینه‌ها را بررسی کنید و ببینید در کدام نمودار وضعیت دو نقطه‌ای که انتخاب کرده‌اید درست نشان داده شده است.

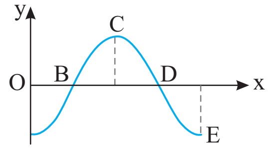
موج در حال حرکت به سمت چپ است بنابراین ذرهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M است و نقطهٔ قبل از M نیز پایین‌تر از M قرار دارد بنابراین M رو به پایین حرکت می‌کند و در مدت $\frac{T}{4}$ نقطهٔ M به دامنهٔ -A می‌رسد بنابراین نمودار گزینهٔ (۱) پاسخ مسئله است.

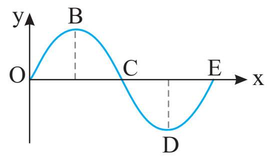
بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، شکل یک موج نشان داده شده است. پس از گذشت زمان $\frac{T}{4}$، کدام گزینه شکل موج را درست نشان می‌دهد؟



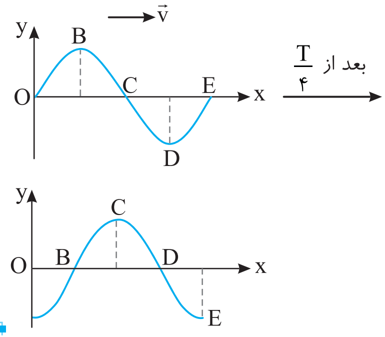
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

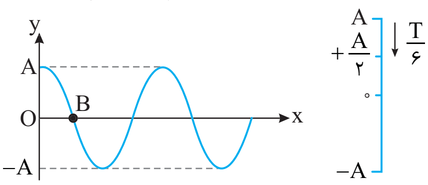
پاسخ نقطهٔ B را در نظر می‌گیریم. پس از $\frac{T}{4}$ نقطهٔ B از $+A$ به مرکز نوسان می‌آید بنابراین B باید روی محور x باشد. اما نقطهٔ C از مرکز نوسان در حال حرکت رو به بالاست و بعد از $\frac{T}{4}$ به $+A$ می‌رسد یعنی C باید در دامنهٔ $+A$ باشد. تنها گزینه‌ای که چنین است گزینهٔ (۳) است.



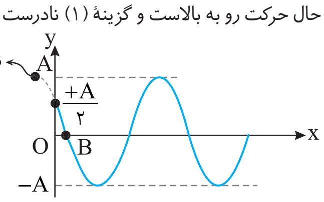
گزینهٔ ۳

C ۱۴۴۶ ۲

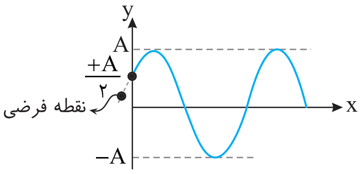
به مبدأ نمودار نگاه کنید. نقطهٔ مبدأ در دامنهٔ $+A$ قرار دارد و قطعاً با گذشت زمان باید به پایین بیاید اما یک نوسانگر ساده در مدت $\frac{T}{6}$ از مکان $+A$ به مکان $+\frac{A}{2}$ می‌رسد. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند زیرا مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ شده است. بعد از این لحظه همچنان ذرهٔ O باید رو به پایین در حرکت باشد.



در شکل گزینهٔ (۱) اگر نقطه‌ای قبل از مبدأ فرض کنید آن نقطه بالاتر از $+\frac{A}{2}$ است بنابراین O در حال حرکت رو به بالاست و گزینهٔ (۱) نادرست است.

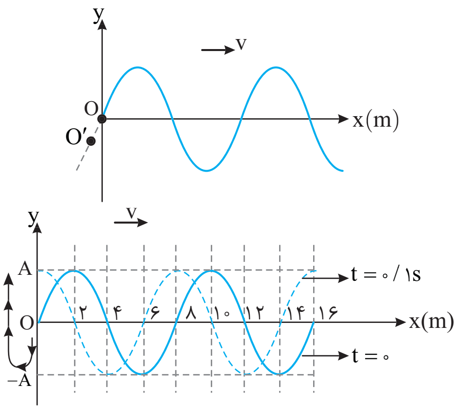


در شکل گزینهٔ (۲) نقطهٔ فرضی قبل از مبدأ در حال حرکت رو به پایین است و جواب مسئلهٔ گزینهٔ (۲) است.



A ۱۴۴۷ ۱

خط فکری سؤال عجیب و زیبایی است. نقش موج در دو لحظهٔ $t=0$ و $t=0/1s$ رسم شده است یعنی موج در $0/1s$ پیشروی کرده و جلو رفته است. باید به نمودار در لحظهٔ $t=0$ دقت کنید. نمودار را در قسمت منفی x ادامه دهید، خواهید دید که در لحظهٔ $t=0$ قلهٔ موج از O گذشته و نقطهٔ فرضی قبل از O پایین‌تر از O بوده یعنی O رو به پایین در حال حرکت است اما نمودار در لحظهٔ $t=0/1s$ نشان می‌دهد که O در این لحظه به مکان $+A$ رسیده است این چگونه ممکن است؟ مطابق شکل O باید به $-A$ رفته $(\frac{T}{4})$ و از $-A$ به $+A$ $(\frac{T}{2})$ رفته باشد یعنی $0/1s$ برابر $\frac{3T}{4}$ است. حال مسئله قابل حل است.



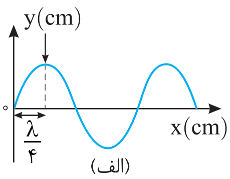
با توجه به جهت سرعت انتشار موج نقطهٔ O در حال پایین رفتن است و مطابق شکل $0/1\,s$ معادل $3\frac{T}{4}$ می‌باشد از این‌رو دوره خواهد شد:

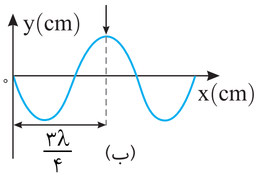
$$3\frac{T}{4}=0/1\Rightarrow T=\frac{4}{30}s\Rightarrow f=\frac{30}{4}=7/5Hz$$

با توجه به شکل $\lambda=8m$ است از این‌رو: $v=f\lambda\Rightarrow v=7/5\times 8=60m/s$

A ۱۴۴۸ ۳

خط فکری برای نمایش یک نقطه از موج که در حال پیشروی در یک محیط است، آن را با یک فلش مشخص می‌کنند. در شکل (الف)، نقطهٔ مورد نظر در فاصلهٔ $\frac{\lambda}{4}$ از مبدأ قرار دارد و در بازهٔ $\Delta t=t_2-t_1$ به فاصلهٔ $\frac{3\lambda}{4}$ از مبدأ رسیده است (شکل ب). در این مدت موج $\frac{3\lambda}{4}-\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}$ پیشروی می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد موج $\frac{\lambda}{2}$ پیشروی کند برابر $\frac{T}{2}$ است. با توجه به این نکته مسئله قابل حل است.


(الف)


(ب)

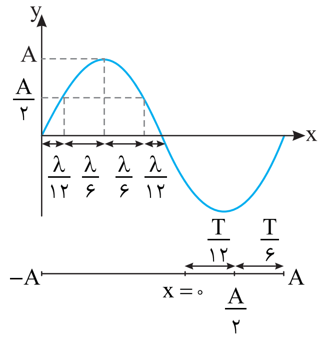
۱ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=50Hz}T=\frac{1}{50}=0/02s$

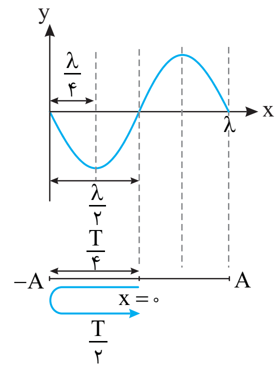
۲ بازهٔ زمانی t_2-t_1 برابر نصف دوره است بنابراین:

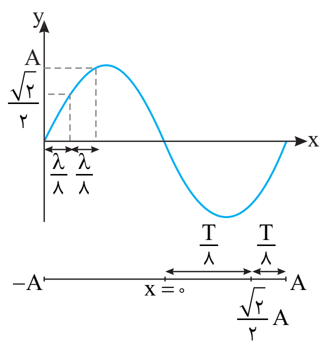
$$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{0/02}{2}=0/01s\Rightarrow \Delta t=10^{-2}s$$

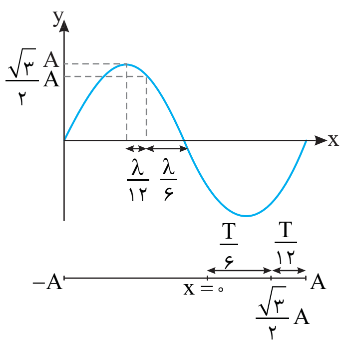
B ۱۴۴۹ ۳

خط فکری طول موج فاصله‌ای است (مسافتی) که موج در مدت یک دوره طی می‌کند. جالب است بدانید تمام تقسیمات در بازه‌های زمانی شناخته شده، عیناً در مورد بازه‌های مکانی برقرار است.





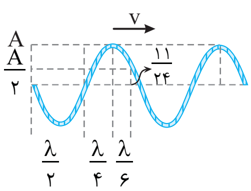




با توجه به شکل و بازه‌های مکانی شناخته شده می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{6}=\frac{11}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{6\lambda+3\lambda+2\lambda}{12}=\frac{11}{24}\Rightarrow \lambda=0/5m$$



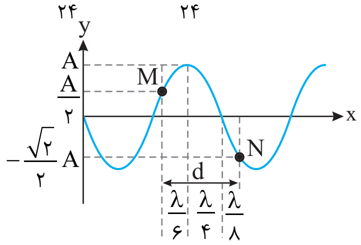
تندی انتشار موج برابر است با:

$$v=f\lambda=50\times 0/5=25m/s$$

B ۱۴۵۰ ۴

۱ با توجه به بازه‌های مکانی شناخته شده مسافت طی شده را بر حسب طول موج به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{\lambda}{6}+\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{8}=\frac{4\lambda+6\lambda+3\lambda}{24}\Rightarrow d=\frac{13}{24}\lambda$$



۲ نکتهٔ مهم این است که موج، مسافت λ را در مدت یک دوره (T) طی می‌کند بنابراین مسافت $\frac{13\lambda}{24}$ را در مدت $\frac{13}{24}T$ طی می‌کند از این‌رو:

$$\frac{13T}{24}=0/26\Rightarrow T=0/48s$$

۳ تعداد نوسانات در ۱/۶ دقیقه خواهد شد:

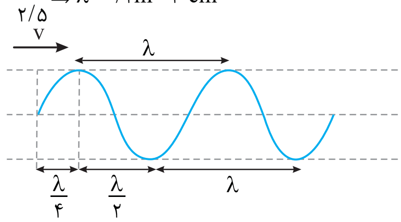
$$N=\frac{t}{T}\Rightarrow N=\frac{1/6\times 60}{0/48}=200$$

A ۱۴۵۱ ۲

یادآوری در موج عرضی، راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج عمود است و در شکل ظاهری موج عرضی، برآمدگی و فرورفتگی قابل مشاهده است.
در موج عرضی فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی متوالی برابر یک طول موج (λ) بوده و فاصلهٔ بین یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش $\frac{\lambda}{2}$ است.

در این پرسش، کافی است طول موج را به‌دست آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow \lambda=\frac{0/5}{2/5}\Rightarrow \lambda=0/2m=20cm$$



B ۱۴۵۲ ۲

خط فکری منظور از ضربهٔ موج بر ساحل، برخورد برآمدگی موج به ساحل است.
بنابراین وقتی اختلاف زمانی دو ضربهٔ متوالی 2s باشد، یعنی دورهٔ نوسان موج 2s است.
از طرفی فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی یعنی طول موج بنابراین به راحتی می‌توانید تندی انتشار موج را حساب کرده و زمانی که این موج مسافت 120m را طی می‌کند به دست بیاورید.

۱ تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\xrightarrow[T=2s]{\lambda=1m}v=\frac{1}{2}m/s$$

۲ زمان رسیدن موج از چشمه به نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۲۰ متری خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow 120=\frac{1}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta t=240s=4\,min$$

B ۱۴۵۳ ۴

نکته تندی امواج سطحی آب در آب‌های کم‌عمق به عمق بستگی دارد و هرچه عمق آب کمتر باشد، تندی انتشار موج سطحی کمتر می‌شود.
عمق ظرف (۲) از عمق ظرف (۱) کمتر است و تندی انتشار امواج سطحی در ظرف (۱) از ظرف (۲) بیشتر است. $(v'_2>v'_1)$

اما در مورد بیشینه تندی ذرات محیط $(v_m=A\omega)$ باید بسامد زاویه‌ای نوسان‌سازها را به‌دست بیاوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{k}{4}},\ \omega_2=\sqrt{\frac{k}{8}}\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}\Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنا به فرض مسئله دامنه‌ها یکسان است بنابراین:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{A\omega_2}{A\omega_1}\Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow v_2<v_1$$

A ۱۴۵۴ ۴

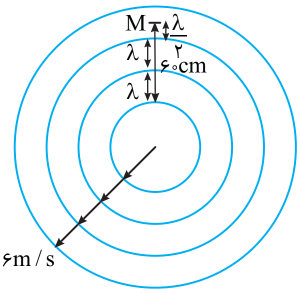
خط فکری نقطهٔ M وسط دو جبههٔ موج متوالی قرار دارد بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ M از جبههٔ موج مجاورش $\frac{\lambda}{2}$ است و فاصلهٔ دو جبههٔ متوالی λ است. با توجه به این نکته بررسی کنید ۶۰cm معادل چند λ است و λ را به‌دست آورده سپس با استفاده از تندی انتشار امواج، بسامد را حساب کنید.

۱ با توجه به شکل فاصلهٔ ۶۰cm معادل $\lambda+\lambda+\frac{\lambda}{2}=\frac{5\lambda}{2}$ است بنابراین طول موج خواهد شد:

$$5\frac{\lambda}{2}=0/6\Rightarrow\lambda=\frac{1/2}{5}\Rightarrow\lambda=0/24m$$

۲ بسامد را حساب می‌کنیم:

$$v=f\lambda\Rightarrow 0/6=f\times 0/24\Rightarrow f=2/5Hz$$



A ۱۴۵۵ ۲

۱ در شکل B، فاصلهٔ جبهه‌های موج بیشتر است بنابراین طول موج در تشت موج B از طول موج در تشت موج A بلندتر است. چشمه‌های موج مشابه بوده یعنی بسامد یکسان است از این‌رو:

$$\begin{cases}\lambda_B>\lambda_A\\ f_B=f_A\end{cases}\Rightarrow v_B>v_A$$

نکته تندی امواج در سطح آب به عمق آب بستگی دارد و در عمق بیشتر تندی امواج بیشتر است.

۲ تندی انتشار امواج سطحی در تشت موج B از تندی انتشار امواج در تشت موج A بیشتر است، بنابراین عمق تشت موج B از عمق تشت موج A بیشتر است.

A ۱۴۵۶ ۱

ثابت می‌شود مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی (توان متوسط) در یک موج سینوسی برای همهٔ انواع امواج مکانیکی با مربع دامنه (A^2) و نیز مربع بسامد (f^2) موج متناسب است.

A ۱۴۵۷ ۲

مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) متناسب است، بنابراین با دو برابر شدن دامنه و نصف شدن بسامد مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی تغییر نمی‌کند (دقت کنید با دو برابر شدن دوره بسامد نصف می‌شود.)

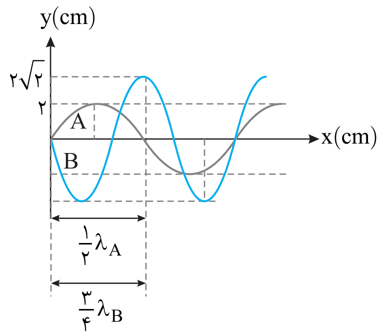
$$\frac{\overline{P}_2}{\overline{P}_1}=(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{A_2}{A_1})^2=(\frac{\frac{1}{2}f_1}{f_1})^2\times(\frac{2A_1}{A_1})^2\Rightarrow\frac{\overline{P}_2}{\overline{P}_1}=1$$

B ۱۴۵۸ ۲

یادآوری توان متوسط انتقال انرژی با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) موج متناسب است.

۱ با توجه به شکل مسئله، دامنهٔ نوسان ذرات محیط در موج A برابر ۲cm و دامنهٔ نوسان ذرات در موج B برابر $2\sqrt{2}$cm است، پس

$$\frac{A_B}{A_A}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$



۲ نصف طول موج A برابر $\frac{3}{4}$ طول موج B است. بنابراین:

$$\frac{1}{2}\lambda_A=\frac{3}{4}\lambda_B\Rightarrow\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{2}{3}$$

۳ با توجه به این‌که هر دو موج در طناب واحدی منتشر می‌شوند، بنابراین سرعت انتشار هر دو موج یکسان است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}v_A=\lambda_A f_A\\ v_B=\lambda_B f_B\end{cases}\xrightarrow{v_A=v_B}\lambda_A f_A=\lambda_B f_B\Rightarrow\frac{f_B}{f_A}=\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{3}{2}$$

۴ نسبت توان‌ها خواهد شد:

$$\frac{\overline{P}_B}{\overline{P}_A}=(\frac{A_B}{A_A})^2\times(\frac{f_B}{f_A})^2=(\sqrt{2})^2\times(\frac{3}{2})^2=2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

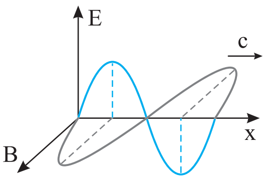
A ۱۴۵۹ ۲

یادآوری امواج الکترومغناطیسی از دو میدان الکتریکی و مغناطیسی هم‌بسامد، هم‌گام و عمود بر هم تشکیل شده‌اند که این میدان‌ها بر امتداد پیشروی موج عمودند.

با توجه به یادآوری گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۴۶۰ ۲

میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی، هم‌بسامد و همگام هستند یعنی در هر لحظه یکی از آن‌ها بیشینه باشد دیگری نیز بیشینه است. از طرفی این دو میدان بر هم عمودند بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



A ۱۴۶۱ ۴

موج الکترومغناطیسی از دو میدان الکتریکی و مغناطیسی هم‌بسامد و عمود بر هم تشکیل شده که این میدان‌ها بر مسیر حرکت عمود بوده و این امواج عرضی هستند و گزینهٔ (۱) درست است. تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ با سرعت $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ منتشر می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. بسامد نوسان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی یکسان بوده بنابراین تعداد نوسان‌های این دو میدان در واحد زمان (1s) برابر است و گزینهٔ (۳) درست است. طول موج میدان الکتریکی و مغناطیسی تمام امواج الکترومغناطیسی با هم برابرند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال کدام یک از گزینه‌های زیر جزء ویژگی‌های موج الکترومغناطیسی نیست؟ *از کتاب درسی*

۱) حامل انرژی و حامل بار الکتریکی هستند.

۲) عرضی بوده و در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منحرف نمی‌شود.

۳) تندی انتشار تمام طول موج‌های موج الکترومغناطیسی یکسان است.

۴) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی آن‌ها بر مسیر پیشروی موج عمود است.

پاسخ یادآوری ویژگی‌های امواج الکترومغناطیسی:

۱ موج‌های الکترومغناطیسی از یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی هم‌دوره، همگام و عمود بر هم تشکیل شده‌اند.

۲ این امواج حامل انرژی بوده و

۳ حامل بار الکتریکی نیستند و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۴ در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منحرف نمی‌شوند.

۵ این امواج عرضی هستند و گزینهٔ (۲) درست است.

۶ سرعت آن‌ها در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است و گزینهٔ (۳) درست است.

۷ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر مسیر پیشروی موج عمودند و گزینهٔ (۴) درست است.

گزینهٔ ۱

B ۱۴۶۲ ۳

در اطراف بار الکتریکی چه ساکن و چه متحرک میدان الکتریکی وجود دارد. از طرفی هرگاه میدان مغناطیسی در ناحیه‌ای از فضا تغییر کند، در آن ناحیه میدان الکتریکی القایی به‌وجود می‌آید و گزینهٔ (۱) درست است.

در اطراف آهن‌ربا و سیم حامل جریان الکتریکی، میدان مغناطیسی وجود دارد. از طرفی هر گاه میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا تغییر کند در آن ناحیه میدان مغناطیسی به وجود می‌آید و گزینهٔ (۲) درست است.

در موج‌های الکترومغناطیسی، میدان الکتریکی و مغناطیسی بر راستای انتشار موج عمودند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

امواج الکترومغناطیسی در هر سه محیط منتشر می‌شوند و بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **امواج الکترومغناطیسی در کدام یک از این مواد می‌توانند منتشر شوند؟**

۱) شیشه **۲)** آب

۳) آهن **۴)** هر سه گزینه درست هستند.

پاسخ **موج‌های الکترومغناطیسی در تمام محیط‌ها حتی در خلأ منتشر می‌شوند. برای مثال، نور مرئی از آب و شیشه می‌گذرد و امواج x و γ از آهن می‌گذرند.**

گزینهٔ ٤

A ۱۴۶۳ ۲

بنا به نظریهٔ ماکسول، تغییر هر کدام از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با زمان، میدان دیگری را ایجاد می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۴۶۴ ۴

بنابر قانون القای الکترومغناطیسی فاراده: تغییر شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار بسته سبب ایجاد نیروی محرکهٔ القایی می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۱) نظریهٔ فاراده بوده و نظریهٔ ماکسول نیست و گزینهٔ (۱) نادرست است.

نکته طبق نظریهٔ ماکسول، عامل ایجاد امواج الکترومغناطیسی حرکت شتاب‌دار ذرهٔ باردار است. در گزینهٔ (۲) تنها به حرکت بار اشاره شده و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۳) بنابر قانون لنز درست است، نه ماکسول، گزینهٔ (۴) بیان مستقیم ماکسول است. پس گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۴۶۵ ۳

تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است که در آن ε_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ و μ_0 قابلیت تراوایی مغناطیسی خلأ بوده یعنی $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ از جنس سرعت است.

A ۱۴۶۶ ۱

سرعت تمام موج‌های الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر با $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است. از این‌رو:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\Rightarrow c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Rightarrow \varepsilon_0\mu_0=c^{-2}$$

با توجه به فرض مسئله $\varepsilon_0\mu_0=c^k$ است. بنابراین:

$$c^{-2}=c^k\Rightarrow k=-2$$

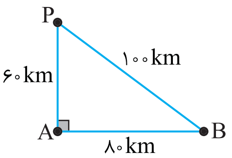
A ۱۴۶۷ ۱

سرعت انتشار موج در یک محیط مقدار ثابتی است و معادلهٔ انتشار موج همان معادلهٔ حرکت یکنواخت با سرعت ثابت روی خط راست است.

$$\Delta x=vt\xrightarrow[v=c]{\Delta x=300\times10^3\,m}300\times10^3=3\times10^8t\Rightarrow t=10^{-3}s$$

A ۱۴۶۸ ۱

خط فکری یک مسئلهٔ بسیار ساده حرکت‌شناسی است، شما باید زمان رسیدن موج از ایستگاه‌های A و B به گیرندهٔ P را حساب کرده از هم کم کنید.



۱ فاصلهٔ ایستگاه رادیویی B را از گیرندهٔ P حساب می‌کنیم:

$$PB^2=60^2+80^2\Rightarrow PB=100km$$

۲ زمان رسیدن سیگنال از ایستگاه A به گیرندهٔ P خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow 60\times10^3=3\times10^8t_A=t_A=20\times10^{-5}s$$

۳ زمان رسیدن سیگنال از ایستگاه B به گیرندهٔ P را حساب می‌کنیم.

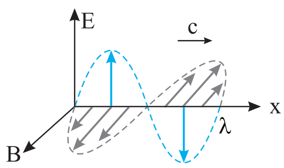
$$\Delta x=vt\Rightarrow 100\times10^{+3}=3\times10^8t_B\Rightarrow t_B=\frac{100}{3}\times10^{-5}s$$

۴ اختلاف زمانی خواهد شد:

$$\Delta t=t_B-t_A=\frac{100}{3}\times10^{-5}-20\times10^{-5}=\frac{100-60}{3}\times10^{-5}\Rightarrow \Delta t=\frac{4}{3}\times10^{-4}s$$

A ۱۴۶۹ ۳

در یک موج الکترومغناطیسی، نوسان‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی دارای بسامد یکسان بوده و سرعت انتشار آن‌ها یکی است، در نتیجه طول موج آن‌ها نیز برابر است.



A ۱۴۷۰ ۴

با توجه به رابطهٔ بین طول موج، بسامد و سرعت انتشار موج می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=c=3\times10^8,\ \lambda=0/6\times10^{-6}\,mm}f=\frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow f=\frac{3\times10^8}{0/6\times10^{-6}}\Rightarrow f=5\times10^{14}Hz$$

بازی با سؤال **در یک موج الکترومغناطیسی، طول موج 3×10^5nm است. دورهٔ تناوب موج در SI کدام است؟** $(c=3\times10^8m/s)$ کنکور دهه‌های گذشته

۱) 10^{-13} **۲)** 10^{-12} **۳)** $\frac{1}{3}\times10^{-13}$ **۴)** $\frac{1}{3}\times10^{-12}$

پاسخ **با توجه به تعریف طول موج، دوره را به‌دست می‌آوریم.**

$$\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}\xrightarrow[c=3\times10^8]{\lambda=3\times10^5\times10^{-9}}T=\frac{3\times10^5\times10^{-9}}{3\times10^8}\Rightarrow T=10^{-12}s$$

گزینهٔ ۲

A ۱۴۷۱ ۱

در صورت مسئله بیان شده که طول آنتن $\frac{۱}{۴}$ طول موج دریافتی است، بنابراین وقتی طول آنتن ۶/۵cm باشد، طول موج خواهد شد:

$$\text{طول آنتن}=\frac{۱}{۴}\lambda \Rightarrow ۶/۵=\frac{۱}{۴}\lambda \Rightarrow \lambda=۴\times۶/۵=۲۶cm$$

بسامد موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda \Rightarrow f=\frac{v}{\lambda} \Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۶\times۱۰^{-۲}} \Rightarrow f\approx۱۲\times۱۰^{۸}Hz \Rightarrow f=۱۲۰۰MHz$$

B ۱۴۷۲ ۲

۱ بسامد از ویژگی چشمهٔ موج بوده و با تغییر محیط ثابت می‌ماند. یعنی بسامد نور در هوا و در زجاجیه چشم باهم برابر است. تندی نور در هوا و طول موج نور در هوا را در اختیار داریم بنابراین می‌توانیم بسامد را حساب کنیم

$$\lambda_{هوا}=\frac{v_{هوا}}{f} \xrightarrow{v_{هوا}=۳\times۱۰^{۸}m/s,\ \lambda_{هوا}=۰/۶\mu m}$$

$$\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۰/۶\times۱۰^{-۶}} \Rightarrow f=\frac{۱۰^{۱۵}}{۲}=۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

۲ با در اختیار داشتن طول موج این پرتو در زجاجیه ($\lambda'=۰/۴۵\mu m$) و همچنین داشتن بسامد نور $f=۵\times۱۰^{۱۴}Hz$ به سادگی تندی انتشار نور در زجاجیه به‌دست می‌آید. $v=f\lambda \Rightarrow v=۵\times۱۰^{۱۴}\times۰/۴۵\times۱۰^{-۶} \Rightarrow v=۲/۲۵\times۱۰^{۸}m/s$

B ۱۴۷۳ ۳

۱ بنا به فرض مسئله طول موج پرتو A، ۱۲۰ نانومتر از طول موج پرتو B، کمتر است.
$\lambda_B=\lambda_A+۱۲۰$

۲ بسامد A، ۲۵ درصد از بسامد B بیشتر است، در نتیجه:

$$f_A=f_B+۰/۲۵f_B \Rightarrow f_A=۱/۲۵f_B \Rightarrow \frac{f_A}{f_B}=۱/۲۵ \quad (I)$$

۳ در یک محیط تندی انتشار موج ثابت است، از این‌رو نسبت طول موج‌های A و B عکس نسبت بسامدهای آن‌هاست.

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{\frac{v}{f_B}}{\frac{v}{f_A}} \Rightarrow \frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{f_A}{f_B} \xrightarrow{(I)} ۱/۲۵=\frac{\lambda_A+۱۲۰}{\lambda_A} \Rightarrow ۱/۲۵\lambda_A=\lambda_A+۱۲۰$$

$$\Rightarrow ۰/۲۵\lambda_A=۱۲۰ \Rightarrow \lambda_A=۴۸۰nm \Rightarrow \lambda_A=۰/۴۸\mu m$$

$$\lambda_B=\lambda_A+۱۲۰nm \Rightarrow \lambda_B=۶۰۰nm \Rightarrow \lambda_B=۰/۶\mu m$$

A ۱۴۷۴ ۲

یادآوری در امواج الکترومغناطیسی، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی همگام (همفاز) هستند، یعنی باهم بیشینه، باهم صفر و باهم کمینه می‌شوند و در هر لحظه‌ای که E بیشینه است در همان لحظهٔ B نیز بیشینه است.

خط فکری مانند حرکت هماهنگ ساده کمترین فاصله زمانی رسیدن نوسانگر از +A به صفر برابر $\frac{T}{۴}$ است، در اینجا نیز کمترین فاصله زمانی رسیدن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از حالت بیشینه به صفر $\frac{T}{۴}$ است، بنابراین شما باید دوره را حساب کنید. کمینه اختلاف زمانی بین $t_۱$ و $t_۲$، $\frac{T}{۴}$ است.

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم:

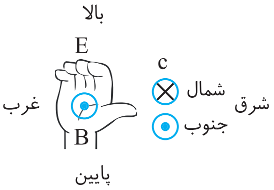
$$\lambda=vT \xrightarrow[v=c]{\lambda=۴۵۰m} ۴۵۰=۳\times۱۰^{۸}\times T \Rightarrow T=\frac{۴۵۰}{۳\times۱۰^{۸}}$$

$$\Rightarrow T=۱۵۰\times۱۰^{-۸}s=۱/۵\times۱۰^{-۶}s$$

۲ اختلاف زمانی $t_۲-t_۱$ خواهد شد:

$$t_۲-t_۱=\frac{T}{۴}=\frac{۱/۵\times۱۰^{-۶}}{۴} \Rightarrow \Delta t=۰/۳۷۵\times۱۰^{-۶}s=۳۷۵ns$$

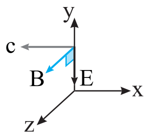
A ۱۴۷۵ ۳



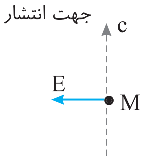
چهار انگشت دست راست خود را رو به بالا بگیرید (در جهت میدان الکتریکی) به گونه‌ای که انگشت شست دست راست شما در راستای انتشار موج (به سمت شرق (سمت راست بدنتان)) باشد، در این حالت کف دست شما در راستای میدان مغناطیسی (رو به جنوب (رو به پشت سر شما)) خواهد بود.

اگر جهت رو به شمال درونسو و جهت رو به جنوب برونسو باشد، جهت B رو به جنوب خواهد بود.

A ۱۴۷۶ ۱



با توجه به قانون دست راست برای موج الکترومغناطیسی باید انگشت شست در جهت پیشروی موج یعنی خلاف جهت محور xها باشد، به گونه‌ای که کف دست در جهت B یعنی محور zها باشد، در این حالت چهار انگشت باز دست راست به سمت yهای منفی است، یعنی جهت میدان الکتریکی در خلاف جهت محور yهاست.

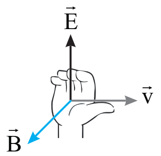


بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو، میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی گسیلی از یک آنتن فرستندهٔ رادیویی در نقطهٔ M در لحظهٔ نشان داده شده بیشینه است. در همان لحظه میدان مغناطیسی موج چگونه است؟**

۱) صفر است. ۲) بیشینه رو به بالاست.

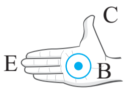
۳) بیشینه و برونسو است. ۴) بیشینه و درونسوست.

پاسخ **میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی هم‌بسامد و همگام هستند. بنابراین هنگامی که میدان الکتریکی بیشینه است، میدان مغناطیسی نیز بیشینه است.**



قاعدهٔ دست راست برای موج الکترومغناطیسی:

چهار انگشت: جهت میدان الکتریکی، انگشت شست: راستای پیشروی موج، کف دست: جهت میدان مغناطیسی. چهار انگشت باز دست راست را در جهت E به سمت چپ بگیرید به‌طوری که انگشت باز شست به سمت بالای صفحه کاغذ باشد (در جهت c). در این صورت کف دست شما به سمت خارج صفحه یعنی برونسوست. در نتیجه میدان مغناطیسی در این لحظه بیشینه و برونسوست.



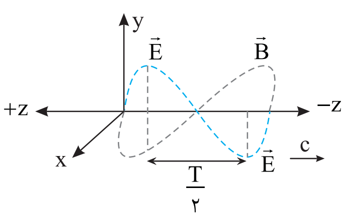
گزینهٔ ۳

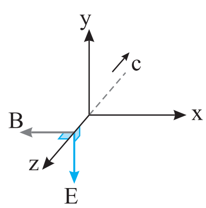
B ۱۴۷۷ ۳

خط فکری ابتدا جهت میدان الکتریکی E را بعد از $\frac{T}{۲}$ مشخص می‌کنیم، سپس به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی را معین می‌کنیم.

۱ در مدت $\frac{T}{۲}$ جهت بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرینه می‌شود، یعنی جهت میدان E که در جهت مثبت محور yهاست، قرینه شده و در جهت منفی محور yها می‌شود.

۲ چهار انگشت باز دست راست خود را در خلاف جهت محور yها به گونه‌ای بگیرید که انگشت باز شست در خلاف جهت محور z باشد، در این صورت کف دست شما در جهت منفی محور xها خواهد بود.





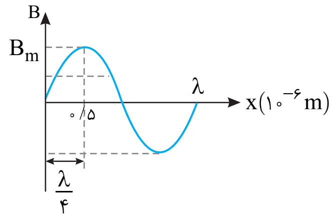
A ۱۴۷۸ ۲

خط فکری نمودار میدان مغناطیسی بر حسب مکان برای موج الکترومغناطیسی شبیه نمودار جابه‌جایی - مکان موج مکانیکی است. از روی محور افقی (xها) طول موج را به‌دست بیاورید، سپس بسامد را حساب کنید.

۱ طول موج را به دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{۴}=۰/۵\times۱۰^{-۶}\Rightarrow\lambda=۲\times۱۰^{-۶}m$

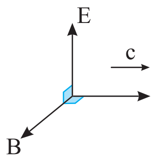
۲ بسامد میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی برابر است.

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow f=۱/۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

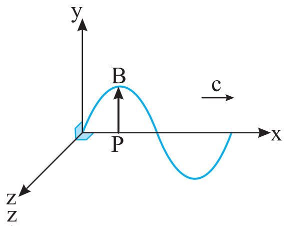


B ۱۴۷۹ ۱

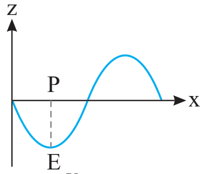
یادآوری در موج الکترومغناطیسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برهم عمود و این میدان‌ها بر جهت پیشروی موج نیز عمودند و از قاعده دست راست پیروی می‌کنند.



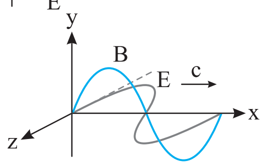
یک نقطه مانند P در نظر بگیرید. کف دست راست خود را رو به بالا در جهت مثبت محور yها بگیرید به گونه ای که انگشت شست باز دست راست شما در جهت مثبت محور xها باشد، در این صورت چهار انگشت باز شما به سمت منفی محور zها خواهد بود.



یعنی میدان الکتریکی موج در نقطهٔ P $(\frac{\lambda}{۴})$ باید در خلاف جهت محور zها باشد.



بنابراین نمودار $E-x$ به صورت شکل روبه‌روست.



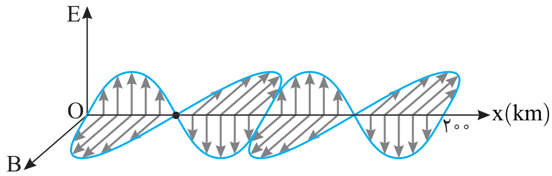
A ۱۴۸۰ ۲

۱ به شکل نگاه کنید و از روی محور افقی طول موج را حساب کنید.

$۲\lambda=۲۰۰\Rightarrow\lambda=۱۰۰km=۱۰^{۵}m$

۲ بسامد را به‌دست می‌آوریم.

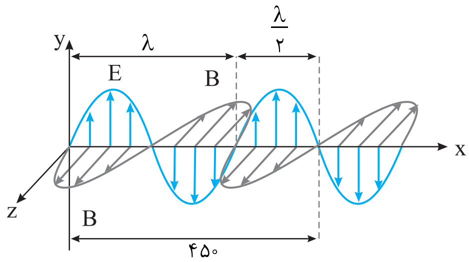
$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۰^{۵}}=۳\times۱۰^{۳}Hz$$



B ۱۴۸۱ ۱

۱ با توجه به نمودار می‌توان طول موج را حساب کرد.

$$۳\frac{\lambda}{۲}=۴۵۰\Rightarrow\lambda=۳۰۰nm$$



۲ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{v=c}T=\frac{\lambda}{c}\Rightarrow T=\frac{۳۰۰\times۱۰^{-۹}}{۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow T=۱۰^{-۱۵}s$$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۳ بسامد نوسان خواهد شد:

$$f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=۱۰^{۱۵}Hz$$

گزینهٔ (۲) نادرست است.

۴ تندی حرکت موج الکترومغناطیسی در خلأ ثابت و برابر $۳\times۱۰^{۸}m/s$ است:

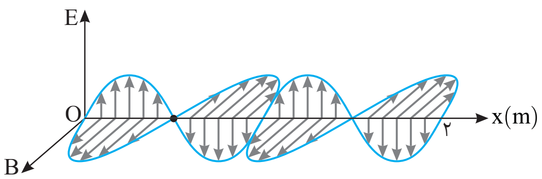
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱s]{v=۳\times۱۰^{۸}m/s}\Delta x=۳\times۱۰^{۸}m$$

بنابراین موج الکترومغناطیسی در مدت یک ثانیه، $۳\times۱۰^{۸}m$ طی می‌کند که برابر با $۳\times۱۰^{۱۷}nm$ است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

نکته طول موج‌های بین $۴۰۰nm$ (بنفش) تا $۷۰۰nm$ (قرمز) در محدودهٔ نور مرئی قرار دارند.

۵ طول موج این موج $۳۰۰nm$ است در حالی که محدوده تقریبی طول موج‌های مرئی بین $۴۰۰nm$ (بنفش) تا $۷۰۰nm$ (قرمز) است بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **نمودار میدان الکترومغناطیسی بر حسب مکان یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می‌شود، مطابق شکل زیر است. کدام مورد با توجه به نمودار درست است؟** $(c=۳\times۱۰^{۸}m/s)$ ریاضی - ۹۷ - با تغییر



۱) طول موج ۰/۵ متر است.

۲) دورهٔ موج یک ثانیه است.

۳) بسامد زاویه‌ای π رادیان بر ثانیه است.

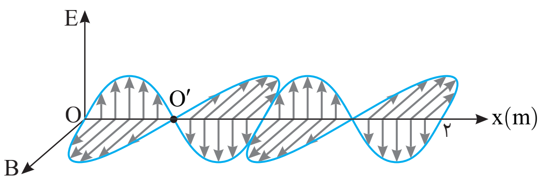
۴) بسامد موج $۳\times۱۰^{۸}Hz$ است.

پاسخ ۱ **با توجه به نمودار طول موج خواهد شد:**

$۲\lambda=۲\Rightarrow\lambda=۱m$

۲ **بسامد موج را حساب می‌کنیم:**

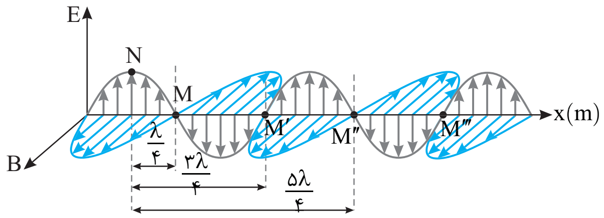
$v=f\lambda\Rightarrow۳\times۱۰^{۸}=f\times۱\Rightarrow f=۳\times۱۰^{۸}Hz$



گزینهٔ ٤

B ۱۴۸۲ ۲

خط فکری میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی هم‌گام هستند، یعنی با هم بیشینه و با هم صفر می‌شوند. در نقطهٔ N میدان الکتریکی بیشینه است، پس در نقطهٔ N میدان مغناطیسی نیز بیشینه است. در صورت مسأله بیان شده در همان لحظه میدان مغناطیسی نقطهٔ M صفر است. در این صورت اگر نقطهٔ N را روی نقش موج شکل زیر مشخص کنیم نقطهٔ M باید $\frac{\lambda}{4}$، $\frac{3\lambda}{4}$، $\frac{5\lambda}{4}$ و ... با N فاصله داشته باشد.



اکنون طول موج را حساب می‌کنیم.

۱ طول موج را به‌دست می‌آوریم. $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\times10^8}{100\times10^6}=3m$

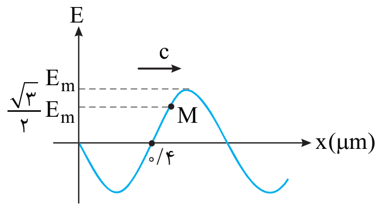
۲ فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ N خواهد شد.

$\frac{\lambda}{4}=\frac{3}{4}m\ ,\ \frac{3\lambda}{4}=\frac{9}{4}m\ ,\ \frac{5}{4}\lambda=\frac{15}{4}m\ ,\ ...$

که در گزینه‌ها $\frac{9}{4}m$ وجود دارد.

B ۱۴۸۳ ۴

خط فکری نمودار $E-x$ شبیه نمودار جابه‌جایی مکان (نقش موج) است. شما تمام گام‌های مربوط به نقش موج را باید طی کنید.



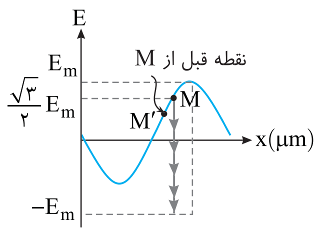
۱ گام اول: از روی محور افقی طول موج را حساب می‌کنیم

$\frac{\lambda}{2}=0/4\mu m\Rightarrow\lambda=0/8\mu m$

۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج

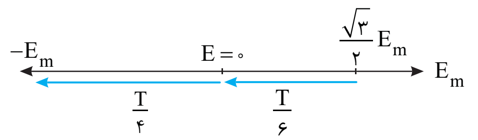
$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/8\times10^{-6}}{3\times10^8}\Rightarrow T=\frac{8}{3}\times10^{-15}s$

۳ گام سوم: بررسی جهت حرکت نقطهٔ M (بررسی جهت تغییر میدان در نقطهٔ M) با توجه به جهت پیشروی موج. به نقطهٔ M نگاه کنید. برآمدگی موج از این نقطه عبور کرده و نقطهٔ قبل از M، پایین‌تر از M است، یعنی میدان الکتریکی E در حال کاهش و صفر شدن است.



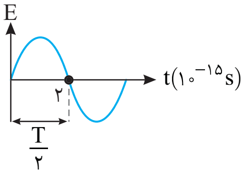
اکنون به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده در حرکت هماهنگ ساده و با توجه به اینکه میدان نقطهٔ M در حال صفر شدن (حرکت رو به پایین) است، مسأله را حل می‌کنیم.

$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{4}=\frac{5T}{12}=\frac{5}{12}\times\frac{8}{3}\times10^{-15}=\frac{10}{9}\times10^{-15}s$



A ۱۴۸۴ ۳

با توجه به نمودار:



۱ از روی محور زمان نمودار $E-t$ دوره را حساب می‌کنیم:

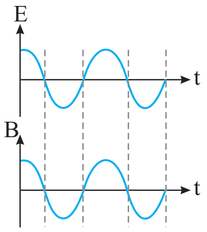
$\frac{T}{2}=2\times10^{-15}\Rightarrow T=4\times10^{-15}s$

۲ طول موج میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی برابر است. با توجه به تعریف طول موج، خواهیم داشت:

$\lambda=cT\Rightarrow\lambda=3\times10^8\times4\times10^{-15}=12\times10^{-7}m=1/2\mu m$

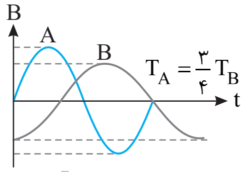
A ۱۴۸۵ ۲

یادآوری در موج‌های الکترومغناطیسی، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هم‌گام بوده و طول موج و دورهٔ یکسانی دارند.



میدان الکتریکی و مغناطیسی هم‌گام هستند و هر لحظه که میدان الکتریکی بیشینه است در همان لحظه میدان مغناطیسی بیشینه است و در هر لحظه‌ای که میدان الکتریکی صفر است میدان مغناطیسی صفر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

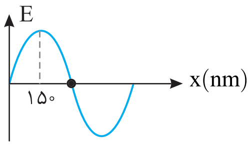
B ۱۴۸۶ ۱



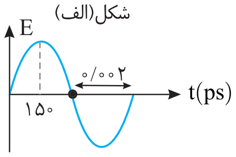
با توجه به شکل، رابطهٔ زیر بین دورهٔ موج الکترومغناطیسی B و دورهٔ موج الکترومغناطیسی A برقرار است:

$T_A=\frac{3}{4}T_B\xrightarrow{\lambda=cT}\lambda_A=\frac{3}{4}\lambda_B$

A ۱۴۸۷ ۱



شکل (الف)



شکل (ب)

۱ با توجه به شکل (الف) می‌توان طول موج را به‌دست آورد:

$\frac{\lambda}{4}=150\Rightarrow\lambda=600nm$

۲ با توجه به شکل (ب)، دوره به‌دست می‌آید:

$\frac{T}{2}=0/002\Rightarrow T=0/004ps$

۳ بنابراین سرعت انتشار موج در این محیط برابر است با:

$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{600\times10^{-9}}{0/004\times10^{-12}}\Rightarrow v=\frac{6\times10^{-7}}{4\times10^{-15}}\Rightarrow v=1/5\times10^8m/s$

B ۱۴۸۸ ۳

خط فکری همان‌گونه که برای هر ذره از محیط انتشار موج مکانیکی سینوسی که دارای حرکت هماهنگ ساده است، معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ نوشته می‌شود، می‌توان برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج معادله‌هایی شبیه معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده به صورت مقابل نوشت: $E=E_m\cos\omega t\ ,\ B=B_m\cos\omega t$

در این معادله‌ها ضریب کسینوس مقدار بیشینهٔ میدان‌ها است. با توجه به معادله داده شده، میدان الکتریکی بیشینه را مشخص کنید، سپس با توجه به تعریف میدان الکتریکی $E=\frac{F}{q}$ نیروی وارد بر بار را بیابید.

با توجه به معادلهٔ $E=2\times10^{-3}\cos\omega t$، بیشینهٔ میدان الکتریکی برابر $E=2\times10^{-3}N/C$ است. از این‌رو بیشینهٔ نیروی وارد بر بار الکتریکی خواهد شد:

$F_{max}=qE_{max}\Rightarrow F=2\times2\times10^{-3}=4\times10^{-3}N$

B | ۱۴۸۹ | ۱

بسامد و طول موج را به‌دست می‌آوریم:

۱ با توجه به معادلهٔ $B=B_m\cos\frac{3}{2}\pi\times10^{8}t$ بسامد زاویه‌ای موج برابر $\omega=\frac{3}{2}\pi\times10^{8}rad/s$ است. بنابراین بسامد خواهد شد.

$$\omega=2\pi f\Rightarrow\frac{3}{2}\times10^{8}\pi=2\pi f\Rightarrow f=7/5\times10^{7}Hz$$

۲ طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{3\times10^{8}}{7/5\times10^{7}}=4m$$

با توجه به شکل صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی دربارهٔ طیف امواج الکترومغناطیسی این طول موج در ناحیهٔ رادیویی است.

A | ۱۴۹۰ | ۱

سرعت تمام پرتوهای الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

البته طول موج و بسامد امواج الکترومغناطیسی مختلف، متفاوت بوده و گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است.

موج الکترومغناطیسی، موج عرضی است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A | ۱۴۹۱ | ۱

امواج الکترومغناطیسی از قوانین یکسانی پیروی کرده و سرعت انتشار آن‌ها در خلأ یکسان است و گزینهٔ (۱) درست است.

این امواج در محیط‌های شفاف غیر خلأ تندی انتشار یکسانی ندارند و گزینهٔ (۲) نادرست است.

نحوهٔ تولید این امواج متفاوت است، به‌طور مثال یک جسم داغ از خود نور مرئی و امواج فروسرخ گسیل می‌کند، منشأ پرتوهای گاما واکنش‌های هسته‌ای است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.
نحوهٔ آشکارسازی این امواج متفاوت است، مثلاً امواج رادیویی به کمک گیرنده رادیویی قابل آشکارسازی‌اند و یا نور مرئی توسط چشم دیده می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **موج‌های الکترومغناطیسی در کدام ویژگی با هم فرق می‌کنند؟**

۱) سرعت آن‌ها در خلأ ۲) ماهیت آن‌ها

۳) طولی یا عرضی بودن آن‌ها ۴) نحوهٔ تولید و آشکارسازی آن‌ها

پاسخ **نحوهٔ تولید و آشکارسازی پرتوهای الکترومغناطیسی با هم متفاوت است.**

گزینهٔ ۴

A | ۱۴۹۲ | ۳

پرتوهای ایکس و پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و این امواج حامل بار الکتریکی نیستند، بنابراین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر این پرتوها بی‌تأثیر است.

A | ۱۴۹۳ | ۳

با توجه به شکل صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی فیزیک (۳)، میکروموج‌ها در اجاق برای آشپزی کاربرد دارند.

A | ۱۴۹۴ | ۱

با توجه به طیف امواج الکترومغناطیسی در صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی فیزیک (۳)، امواج رادیویی در پخش تلویزیونی و رادیویی، یعنی در سیستم‌های مخابراتی کاربرد دارد.

A | ۱۴۹۵ | ۲

گسترهٔ امواج الکترومغناطیسی به ترتیب کاهش طول موج و افزایش بسامد به قرار زیر است:

رادیویی ← میکروموج ← فروسرخ ← نورمرئی ← فرابنفش ← پرتو ایکس ← پرتو گاما

بنابراین قسمت R مربوط به طیف فروسرخ است و گزاره (الف) درست است. بسامد طیف S، از بسامد طیف P (نورمرئی) کمتر است، و گزارهٔ (ب) نادرست است.
طیف T مربوط به امواج رادیویی است و بیشترین طول موج را دارد، بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

A | ۱۴۹۶ | ۴

یادآوری در طیف موج‌های الکترومغناطیسی به صورت زیر است که در آن از رادیویی به گاما بسامد افزایش و طول موج کاهش می‌یابد.

رادیویی ← میکروموج ← فروسرخ ← نورمرئی ← فرابنفش ← پرتو x ← پرتو گاما

امواج رادیویی بلندترین طول موج و اشعهٔ گاما بیشترین بسامد را دارد.

بازی با سؤال **در طیف امواج الکترومغناطیسی از فرابنفش تا فروسرخ، طول موج ... و بسامد ... می‌یابد.**

۱) افزایش، کاهش ۲) افزایش یافته، نیز افزایش

۳) کاهش، افزایش ۴) کاهش یافته، نیز کاهش

پاسخ **در طیف امواج الکترومغناطیسی (رادیویی، میکروموج، فروسرخ، نور مرئی، پرتو فرابنفش، پرتو X و پرتو γ) از راست به چپ بسامد افزایش و طول موج کاهش می‌یابد.**

گزینهٔ ۱

A | ۱۴۹۷ | ۱

در نور مرئی (قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی، بنفش) از راست به چپ، بسامد زیاد می‌شود.

B | ۱۴۹۸ | ۲

طیف امواج الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

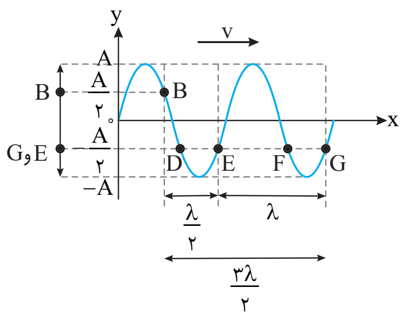
رادیویی ← میکروموج ← فروسرخ ← مرئی ← فرابنفش ← x ← γ

ELF−AM−FM

که از راست به چپ بسامد کاهش و طول موج افزایش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A | ۱۴۹۹ | ۳

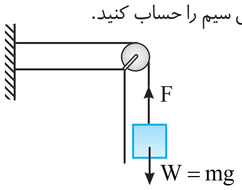
با توجه به جهت پیشروی موج نقطهٔ B در حال حرکت رو به بالا است و نقاط D و F هم در حال حرکت رو به بالا هستند وقتی B به دامنهٔ +A می‌رسد، قطعاً آن‌ها به دامنهٔ −A نمی‌رسند اما نقاط E و G هر دو در حال حرکت رو به پایین هستند و در بازهٔ زمانی که B از $\frac{+A}{2}$ به +A می‌رود قطعاً نقاط E و G نیز از $\frac{-A}{2}$ به −A می‌روند و گزینهٔ (۳) درست است.



A | ۱۵۰۰ | ۲

نکته در طول یک ریسمان همگن کشش یکسان است.

خط فکری وزنهٔ A ساکن است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.
نیروهای وارد بر وزنهٔ A را رسم کنید و نیروی کشش سیم را حساب کنید.



۱ نیروی کشش سیم برابر نیروی وزن وزنهٔ A است.

$F=mg$

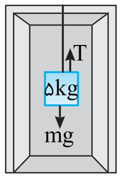
۲ در طول سیم، چگالی خطی جرم ثابت است، از این‌رو:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu'}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}\xrightarrow{\mu'=\mu}\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{F}}\xrightarrow{F=mg}\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{m'g}{mg}}$$

$$\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{100-75}{100}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{25}{100}}=\frac{1}{2}$$

B ۱۵۰۱ ۲

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشش تار در این حرکت را به‌دست می‌آوریم:



حرکت کندشونده بوده و a منفی است

$F_{net}=ma \Rightarrow T-mg=ma$

آسانسور در حال حرکت به سمت بالا

$T-۵۰=۵\times(-۲)\Rightarrow T=۴۰N$

۲ نیروی کشش تار برابر ۴۰N است و با توجه به رابطهٔ $v=\frac{۱}{۲D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

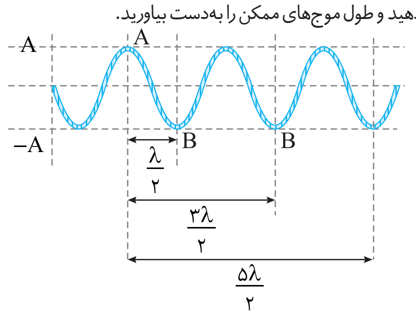
$D=۱mm=۱۰^{-۳}m \ , \ F=T=۴۰N \ , \ \rho=۳g/cm^{۳}=۳۰۰۰kg/m^{۳}$

$v=\frac{۱}{۲\times۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{۴۰}{۳۰۰۰\times۳}}\Rightarrow v=\frac{۱}{۲\times۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{۴}{۹۰۰}}$

$\Rightarrow v=\frac{۱}{۲\times۱۰^{-۳}}\times\frac{۲}{۳۰}\Rightarrow v=\frac{۱۰^{۳}}{۳۰}=\frac{۱۰۰}{۳}m/s$

B ۱۵۰۲ ۴

خط فکری شکل ساده‌ای از انتشار موج در طناب رسم می‌کنیم. در صورت مسئله بیان کرده که ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت $(+A)$ قرار دارد و در همان لحظهٔ ذرهٔ B در دامنهٔ منفی $(-A)$ قرار دارد. بنابراین با توجه به شکل، فاصلهٔ A تا B می‌تواند $\frac{\lambda}{۲}$، $\frac{۳\lambda}{۲}$، $\frac{۵\lambda}{۲}$ و ... یعنی مضارب فرد $\frac{\lambda}{۲}$ باشد. از این‌رو شما باید فاصلهٔ A تا B $(AB=۴۵cm)$ را برابر این مقدارها قرار دهید و طول موج‌های ممکن را به‌دست بیاورید.

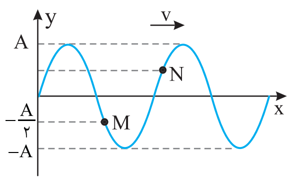


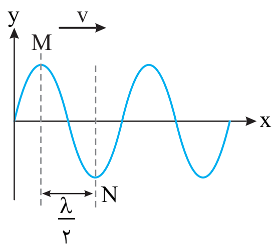
طول موج را حساب می‌کنیم:

$\frac{\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow\lambda=۹۰cm,\frac{۳\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow\lambda=۳۰cm,\frac{۵\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow\lambda=۱۸cm,...$

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند طول موج این موج باشد.

A ۱۵۰۳ ۲





اگر به نقش موج دقت کنید فاصله یک قله از دره $\frac{\lambda}{۲}$ است و وقتی M در حال حرکت به سوی بالا است نقطهٔ N در حال حرکت رو به پایین است و وقتی M از مرکز نوسانش می‌گذرد N نیز از مرکز نوسان می‌گذرد. اکنون به نقش موج مسئله نگاه کنید. M و N، $\frac{\lambda}{۲}$ از هم فاصله دارند و M در حال حرکت رو به بالا و N نیز در حال حرکت رو به پایین است و همان‌گونه که گفتیم باید با هم از مرکز نوسان بگذرند بنابراین اگر M در $\frac{-A}{۲}$ به سوی مرکز در حرکت باشد باید N در $\frac{+A}{۲}$ به سوی مرکز در حرکت باشد و گزینهٔ (۲) درست است.

میانبر هرگاه دو ذره از محیط دارای مکان و سرعت قرینه باشند، فاصلهٔ بین آن‌ها $\frac{\lambda}{۲}$ است و بالعکس.

B ۱۵۰۴ ۴

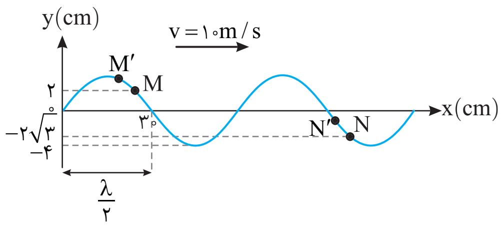
۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی $\frac{\lambda}{۲}=۳۰\Rightarrow\lambda=۶۰cm=۰/۶m$

۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۶}{۱۰}=۰/۰۶s$

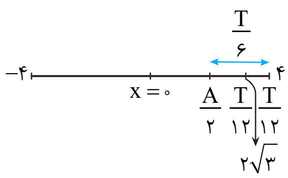
۳ گام سوم: مشخص می‌کنیم مدت زمان $\frac{۱}{۲۰۰}s$ چه کسری از دوره است.

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۲۰۰}}{\frac{۶}{۱۰۰}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۱۲}$

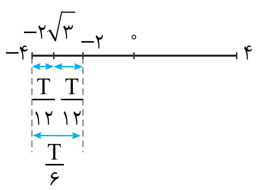
۴ اکنون مشخص می‌کنیم که ذرهٔ M و ذرهٔ N در کدام جهت در حال حرکت هستند. با توجه به جهت پیشروی موج قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M است و نقطهٔ M' نقطهٔ قبل از M بالاتر از M است. یعنی M در حال حرکت رو به بالاست. ذرهٔ موج از N گذشته و قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ N بوده و ذرهٔ N' که قبل از N قرار دارد، بالاتر از N بوده یعنی نقطهٔ N رو به بالا در حال حرکت است.



۵ باید مکان M و N را پس از گذشت $\frac{۱}{۲۰۰}s=\frac{T}{۱۲}$ تعیین کنید. ذرهٔ M در مکان $\frac{A}{۲}=۲cm$ قرار دارد و با توجه به بازه‌های زمان شناخته شده در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=۲\sqrt{۳}cm$ می‌رسد.



ذرهٔ N در مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=-۲\sqrt{۳}cm$ قرار دارد و در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $-\frac{A}{۲}=-۲cm$ می‌رسد.



۶ رابطهٔ شتاب - مکان در حرکت هماهنگ سادهٔ یک ذره از محیط به‌صورت $|a|=\omega^{۲}x$ است که در این مسئله ذرات در راستای محور yها نوسان می‌کنند، بنابراین خواهیم داشت:

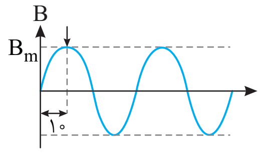
$|\frac{a_M}{a_N}|=|\frac{\omega^{۲}y_M}{\omega^{۲}y_N}|=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$

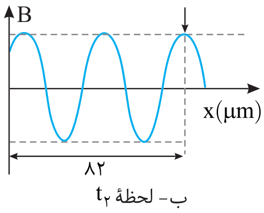
B ۱۵۰۵ | ۱

خط فکری علامت پیکان یک قله (ستیغ) موج را نشان می‌دهد که در حال حرکت در جهت مثبت محور x هاست و در مدت $0/36ps$ از $10cm$ مبدأ به $82cm$ مبدأ می‌رود. بنابراین شما می‌توانید تندی انتشار موج را حساب کنید. از روی شکل (الف) نیز طول موج را به‌دست بیاورید و سرانجام بسامد را حساب کنید.

۱ در مدت ۰/۳۶ پیکوثانیه، موج به اندازهٔ $82-10=72\mu m$ پیشروی کرده است، بنابراین سرعت انتشار موج در این محیط شفاف برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{72\times10^{-6}}{0/36\times10^{-12}}\Rightarrow v=2\times10^{8}m/s$$





۲ با توجه به شکل (الف)، طول موج برابر است با: $\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=40\mu m$

۳ اکنون می‌توان بسامد نور را به‌دست آورد:

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{2\times10^{8}}{40\times10^{-6}}\Rightarrow f=5\times10^{12}Hz$$

B ۱۵۰۶ | ۲

کمینه فاصلهٔ بین یک دره و یک قله $\frac{\lambda}{2}$ است، بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{\lambda}{2}=0/2\Rightarrow\lambda=0/4m$$

بسامد نوسان ذره‌های محیط را حساب می‌کنیم:

$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow{v=4m/s}f=\frac{4}{0/4}=10Hz$$

بسامد زاویه‌ای موج را به‌دست می‌آوریم:

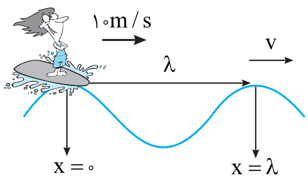
$$\omega=2\pi f=2\pi\times10=20\pi$$

در حرکت هماهنگ سادهٔ ذرات محیط، بیشینهٔ شتاب برابر است با:

$$a_m=A\omega^2\xrightarrow{a_m=320m/s^2}320=A(400\times10)\Rightarrow A=0/08m$$

$$\Rightarrow A=8cm$$

C ۱۵۰۷ | ۴

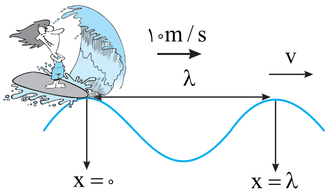


حالت اول: در این حالت موج با سرعت v و شخص با سرعت $10m/s$ در یک جهت در حال حرکت‌اند و این دو پس از $0/5s$ به هم می‌رسند. فاصلهٔ یک قله تا قلهٔ دیگر نیز که در $0/5s$ طی شده برابر طول موج است، حال با توجه به حرکت‌شناسی معادلهٔ حرکت قلهٔ موج و معادلهٔ حرکت شخص را می‌نویسیم، هنگام رسیدن این دو به هم یعنی لحظه‌ای است که $t=0/5$ مکان آن‌ها با هم برابر شود:

$$x_{قله}=v_{موج}t+x_0\Rightarrow x_{قله}=vt+\lambda$$
$$x_{شخص}=v_{شخص}t+x_0\Rightarrow x_{شخص}=10t+0$$
$$\xrightarrow[t=0/5s]{x_{قله}=x_{شخص}}0/3v+\lambda=5(I)$$

حالت دوم: در این حالت قله موج با سرعت v و شخص با سرعت $10m/s$ به سمت هم در حال حرکت بوده و پس از $0/3s$ به هم می‌رسند:

$$x_{قله}=-vt+\lambda\ ,\ x_{شخص}=10t$$
$$\xrightarrow[x_{قله}=x_{شخص}]{t=0/3s}-0/3v+\lambda=3(II)$$



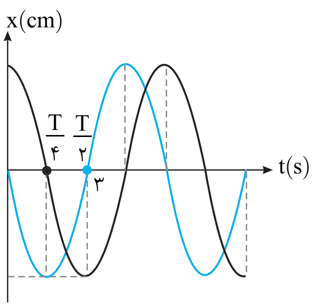
حال با توجه به معادلهٔ به‌دست آمده v و λ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}0/3v+\lambda=5\\-0/3v+\lambda=3\end{cases}\xrightarrow{+}2\lambda=8\Rightarrow\lambda=4m$$

C ۱۵۰۸ | ۱

ابتدا دقت کنید که نمودار داده شده نمودار $x-t$ است یعنی نمودار نوسان دو ذرهٔ A و B است. از روی محور زمان دورهٔ نوسان ذرات محیط را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T}{2}=3ms\Rightarrow T=6ms$$

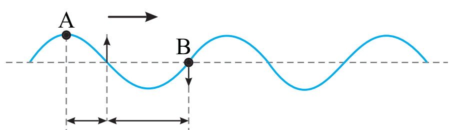


برای ادامهٔ حل ابتدا به دو نکته دقت کنید:

۱ فاصلهٔ دو ذره از محیط ۱۵cm است، چون بیشینه تندی موج خواسته شده است پس باید این دو ذره را دو ذرهٔ متوالی با مشخصات نوسانی داده شده در نظر گرفت تا طول موج بیشینه باشد. $v_{موج}=\frac{\lambda}{T}$

۲ ذرهٔ A از دامنهٔ مثبت در لحظهٔ $t=0$ نوسان می‌کند و ذرهٔ B از $x=0$ در لحظهٔ $t=0$ به سمت پایین شروع به نوسان می‌کند.

یک موج مطابق شکل در لحظهٔ $t=0$ می‌کشیم، جهت انتشار موج به سمت راست است. نقطهٔ A در مکان یکی از قله‌ها است تا از دامنهٔ مثبت شروع به نوسان کند، اما نقطهٔ B در $x=0$ بوده و به سمت پایین شروع به نوسان می‌کند پس این دو نقطه به صورت زیر می‌شود:



$$\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}=15cm$$

$$\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}=15\Rightarrow\frac{3\lambda}{4}=15cm\Rightarrow\lambda=20cm$$

حال با توجه به دوره و طول موج تندی انتشار را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{20\times10^{-2}}{6\times10^{-3}}\Rightarrow v=\frac{100}{3}m/s$$

B ۱۵۰۹ | ۴

یادآوری میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی هم‌بسامد و هم‌گام هستند. از این‌رو در هر نقطه شناسهٔ تابع کسینوس این میدان‌ها یکسان است.

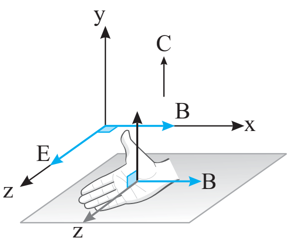
وقتی میدان الکتریکی موج به‌صورت $E=E_m\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$ باشد، میدان مغناطیسی آن نیز به‌صورت $B=B_m\cos\omega t$ است.

C ۱۵۱۰ ۲

یادآوری در امواج الکترومغناطیسی میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی هم‌گام هستند.

خط فکری هرگاه در یک مسئله مربوط به امواج الکترومغناطیسی در مورد میدان مغناطیسی (یا الکتریکی) به شما اطلاعاتی داده شود، با توجه به هم‌گام بودن این دو میدان، اطلاعات در مورد میدان دیگر صادق است. وقتی در مسئله بیان می‌شود که $B=\frac{\sqrt{2}}{2}B_m$ و در حال کاهش است، یعنی میدان الکتریکی در آن لحظه نیز $E=\frac{\sqrt{2}}{2}E_m$ و در حال کاهش است.

۱ جهت میدان الکتریکی در لحظهٔ t را مشخص می‌کنیم. با توجه به قاعدهٔ دست راست، کف دست خود را به سمت راست در جهت محور xها به گونه‌ای قرار دهید که انگشت شست رو به بالا در جهت محور yها نشان دهد. در این حالت چهار انگشت باز دست راست شما در جهت محور zها خواهد بود.



۲ بنابراین در لحظهٔ $t=0$، میدان الکتریکی $E=\frac{+\sqrt{2}}{2}E_m$ بوده و باید در حال کاهش باشد.

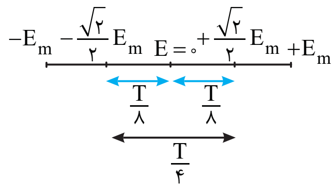
۳ دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{1}{f}\Rightarrow T=\frac{1}{2\times 10^{15}}s\Rightarrow T=5\times 10^{-16}s$$

۴ مشخص می‌کنیم که $1/25\times 10^{-16}s$ چه کسری از دوره است.

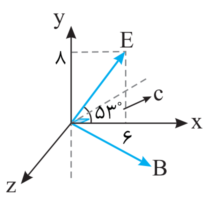
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{1/25\times 10^{-16}}{5\times 10^{-16}}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{4}$$

۵ در مدت $\frac{T}{4}$، میدان الکتریکی از $+\frac{\sqrt{2}}{2}E_m$ به $-\frac{\sqrt{2}}{2}E_m$ تغییر کرده و اندازهٔ آن در حال افزایش است.



C ۱۵۱۱ ۱

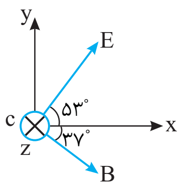
بردار میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی بر هم عمودند. بردار میدان الکتریکی $\vec{E}=6\vec{i}+8\vec{j}$ را روی دستگاه محورها نمایش می‌دهیم.



زاویهٔ بین میدان E با محور xها خواهد شد:

$$\tan\alpha=\frac{E_y}{E_x}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\Rightarrow \alpha=53°$$

انتشار موج در امتداد محور zها است، از این‌رو باید در هر دو میدان E و B در صفحهٔ xoy باشند و این دو میدان بر هم عمود باشند و در قاعدهٔ دست راست نیز صدق کنند، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.



A ۱۵۱۲ ۳

خط فکری بیشینه نیرویی که میدان الکترومغناطیسی بر یک ذرهٔ باردار متحرک می‌تواند وارد کند، جمع بیشینهٔ نیروی میدان الکتریکی وارد بر ذرهٔ $F_{E_m}=qE_m$ و بیشینهٔ نیروی میدان مغناطیسی وارد بر ذرهٔ $F_{B_m}=qvB$ است.

یعنی باید جهت حرکت بار به گونه‌ای باشد که این دو نیرو هم‌جهت شده و با هم جمع شوند. F_{E_m} و F_{B_m} را حساب کرده، با هم جمع کنید.

۱ بیشینهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره با بار $1\times 10^{-3}C$ را حساب می‌کنیم.

$$F_{E_m}=qE_{max}\xrightarrow{E_{max}=3000V/m}F_{E_m}=10^{-3}\times 3000\Rightarrow F_{E_m}=3N$$

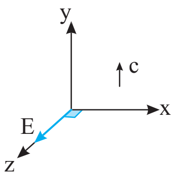
۲ بیشینهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را به‌دست می‌آوریم.

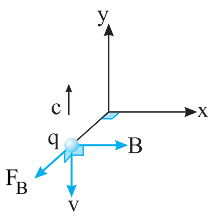
$$F_{E_m}=qvB_m\xrightarrow{v=4\times 10^{6}m/s,B_m=10^{-5}T}F_{B_m}=10^{-3}\times 4\times 10^{6}\times 10^{-5}$$

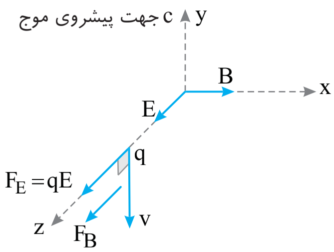
$$\Rightarrow F_{B_m}=0/04N$$

۳ نیروها را با هم جمع می‌کنیم: $F_m=F_{E_m}+F_{B_m}=3+0/04\Rightarrow F_m=3/04N$

ممکن است که شما سؤال کنید چگونه چنین حالتی ممکن است. فرض کنید موج در حال پیشروی در جهت مثبت محور yها است و ذرهٔ باردار در جهت منفی محور yها در حرکت باشد. اگر میدان الکتریکی موج در جهت محور zها باشد، نیرویی که بر بار وارد می‌کند، در جهت محور zها است. در این حالت میدان مغناطیسی موج قطعاً در جهت محور xها است. اکنون به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی میدان مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار را مشخص می‌کنیم: چهار انگشت دست راست در جهت v و کف دست در جهت B، انگشت شست در جهت F یعنی در جهت محور zها است.







بنابراین F_{E_m} و F_{B_m} هر دو در جهت مثبت محور zها بوده و با هم جمع می‌شوند: به شکل نهایی دقت کنید.

A ۱۵۱۳ ۴

ذرهٔ باردار که دارای حرکت شتابدار است، موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند. هنگام تخلیهٔ خازن، یک میدان الکتریکی متغیر با زمان ایجاد می‌شود که می‌تواند به‌طور لحظه‌ای موج الکترومغناطیسی گسیل کند. همچنین جریان متناوب با بسامد بالا نیز به‌دلیل تغییر دائمی میدان مغناطیسی آن با زمان می‌تواند موج الکترومغناطیسی ایجاد کند. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **از دیدگاه ماکسول عامل اصلی ایجاد موج‌های الکترومغناطیسی، ....**

۱) میدان‌های الکتریکی است.

۲) حرکت شتابدار ذرهٔ دارای بار الکتریکی است.

۳) میدان‌های مغناطیسی است.

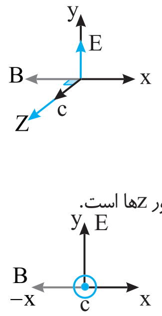
۴) حرکت یکنواخت بار الکتریکی است.

پاسخ **بنابر نظریهٔ ماکسول، هرگاه ذرهٔ باردار دارای حرکت شتابدار شود از خود موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند.** گزینه ۲

پنجره ۲ روبه‌روی ۳

B ۱۵۱۳ ۲

۱ اگر می‌توانید شکل محورهای x، y و z را مطابق شکل روبه‌رو تجسم کنید. با توجه به قاعدهٔ دست راست ابتدا چهار انگشت باز دست راست خود را در جهت مثبت محور yها رو به بالا به گونه‌ای قرار دهید که کف دست شما در جهت منفی محور xها (یعنی جهت میدان مغناطیسی) قرار گیرد. در این حالت انگشت باز شست شما در جهت مثبت محور zها است.



البته می‌توانید محورها را به صورت روبه‌رو نیز رسم کنید و محور z را به صورت برون‌سو نمایش دهید.

نمای ۲۳

B ۱۵۱۳ ۳

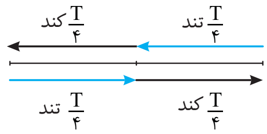
۲ ریسمان را از دستگاهی گذرانده‌ایم و قطر ریسمان نصف شده است. بنابراین از سه رابطهٔ تندی انتشار موج در ریسمان رابطهٔ $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\frac{۲}{D'}\sqrt{\frac{F'}{\pi\rho'}}}{\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}}\xrightarrow{F'=F,\ \rho'=\rho}\frac{v'}{v}=\frac{D}{D'}\xrightarrow{D'=\frac{۱}{۲}D}v'=۲v$$

نمای ۱۷

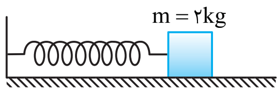
A ۱۵۱۳ ۴

۳ **نکته** در مدت یک دوره، جمعاً $\frac{T}{۲}$ حرکت کندشونده و $\frac{T}{۲}$ حرکت تندشونده است.



۱ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{T}{۲}=۰/۲\Rightarrow T=۰/۴s$$



۲ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۴}\Rightarrow\omega=۵\pi rad/s$$

۳ بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر خواهد شد:

$$F_m=mA\omega^۲\xrightarrow{A=۵\times۱۰^{-۲}m}F_m=۲\times۵\times۱۰^{-۲}\times(۵\pi)^۲$$

$$\Rightarrow F_m=۱۰^{-۱}\times۲۵\times\pi^۲\Rightarrow F_m=۲۵N$$

نمای ۹

B ۱۵۱۳ ۱

۴ **۱** بسامد زاویه‌ای نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=۹۰۰N/m,\ m=۲/۲۵kg}\omega=\sqrt{\frac{۹۰۰}{۲/۲۵}}=\frac{۳۰}{۱/۵}\Rightarrow\omega=۲۰rad/s$$

۲ با استفاده از بیشینه تندی، دامنهٔ نوسان را به‌دست می‌آوریم.

$$v_m=A\omega\xrightarrow{v_m=۱m/s}۱=A\times۲۰\Rightarrow A=\frac{۱}{۲۰}m=۰/۰۵m$$

۳ دوره خواهد شد:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۲۰=\frac{۲\times۳}{T}\Rightarrow T=۰/۳s$$

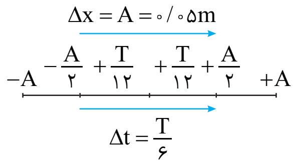
۴ مشخص می‌کنیم $\Delta t=۰/۰۵s$ چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۵}{۰/۳}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۵}{۳۰}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

۵ بیشینه تندی متوسط نوسانگر در یک مدت معین یعنی بیشینه جابه‌جایی، بنابراین باید حرکت نوسانگر در دو طرف حالت تعادل و در اطراف جایی که تندی بیشینه است را بررسی می‌کنیم.

۶ بازهٔ $\frac{T}{۶}$ را به دو قسمت مساوی $\frac{T}{۱۲}$ تقسیم می‌کنیم. در مدت $\frac{T}{۶}$ نوسانگر از مکان $-\frac{A}{۲}$ به مکان $+\frac{A}{۲}$ می‌رود.

$$|\Delta x_{max}|=A$$



۷ بیشینه تندی متوسط خواهد شد:

$$v_{av_m}=\frac{|\Delta x_m|}{\Delta t}=\frac{۰/۰۵}{۰/۰۵}\Rightarrow v_{av_m}=۱m/s$$

نمای ۱۰

B ۱۵۱۳ ۲

۵ **۱** مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است:

$$E=K+U$$

۲ سرعت در لحظه‌ای خواسته شده که انرژی جنبشی (K) و انرژی پتانسیل (U) با هم برابر است:

$$E=K+U\xrightarrow{K=U}E=۲K$$

۳ انرژی مکانیکی $۸mJ=۸\times۱۰^{-۳}J$ و انرژی جنبشی از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ به‌دست می‌آید:

$$۸\times۱۰^{-۳}=۲(\frac{۱}{۲}\times mv^۲)\Rightarrow۸\times۱۰^{-۳}=۰/۱\times v^۲$$

$$\Rightarrow v^۲=۸\times۱۰^{-۲}\Rightarrow v=۲\sqrt{۲}\times۱۰^{-۱}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۵}m/s$$

نمای ۱۱

B ۱۵۱۳ ۲

۶ **یادآوری** مسافتی که موج در مدت یک دوره طی می‌کند برابر طول موج است.

$$\lambda=vt$$

نکته مسافتی که هر ذره از محیط انتشار موج طی می‌کند چهار برابر دامنه $(۴A)$ است.

۱ با توجه به فرض مسئله طول موج چهار برابر دامنه است.

$$\lambda=۴A$$

۲ نسبت تندی بیشینهٔ نوسان به تندی انتشار موج خواهد شد:

$$\frac{v_m}{v}=\frac{A\omega}{\frac{\lambda}{T}}\xrightarrow{\lambda=۴A}\frac{v_m}{v}=\frac{A\frac{۲\pi}{T}}{\frac{۴A}{T}}\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{\pi}{۲}$$

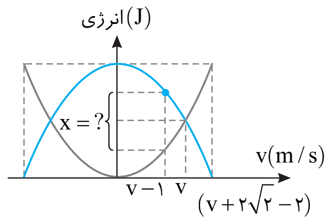
نمای ۱۸

B ۱۵۱۳ ۳

۷

۱ در سرعت v، انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر با هم برابر است و بنا به پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$E=U+K \xrightarrow{U=K} E=K+K \Rightarrow E=۲K \Rightarrow E=۲(\frac{۱}{۲}mv^۲)\ (I)$



۲ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است. با توجه به نمودار بیشینه تندی نوسانگر برابر $v_m=v+۲\sqrt{۲}-۲$ است. بنابراین انرژی مکانیکی نوسانگر خواهد شد:

$E=K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^۲ \Rightarrow E=\frac{۱}{۲}m(v+۲\sqrt{۲}-۲)^۲\ (II)$

۳ از رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$۲(\frac{۱}{۲}mv^۲)=\frac{۱}{۲}m(v+۲\sqrt{۲}-۲)^۲ \Rightarrow ۲v^۲=(v+۲\sqrt{۲}-۲)^۲$

$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}} \sqrt{۲}v=v+۲\sqrt{۲}-۲ \Rightarrow \sqrt{۲}v-v=۲(\sqrt{۲}-۱)$

$v(\sqrt{۲}-۱)=۲(\sqrt{۲}-۱)\Rightarrow v=۲m/s$

۴ تندی $v-۱$ برابر است با:

$v-۱=۲-۱=۱\,m/s$

۵ انرژی مکانیکی نوسانگر خواهد شد:

$\xrightarrow{(I)} E=۲(\frac{۱}{۲}\times ۰/۲\times(۲)^۲)\Rightarrow E=۰/۸J$

۶ انرژی جنبشی نوسانگر وقتی تندی $v-۱=۱m/s$ است برابر خواهد شد با:

$K=\frac{۱}{۲}m(v-۱)^۲=\frac{۱}{۲}\times ۰/۲(۱)\Rightarrow K=۰/۱J$

۷ انرژی پتانسیل در این لحظه برابر است با:

$E=U+K\Rightarrow ۰/۸=U+۰/۱\Rightarrow U=۰/۷J$

۸ اختلاف انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را به‌دست می‌آوریم.

$U-K=۰/۷-۰/۱=۰/۶J$

نمای ۱۲

B ۱۵۱۳ ۴

۸

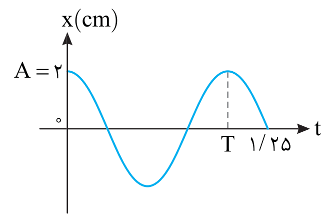
با توجه به نمودار داریم:

$\frac{۵T}{۴}=۱/۲۵\Rightarrow T=۱s\Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{T}=۲\pi$

انرژی مکانیکی برابر است با:

$E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲=\frac{۱}{۲}m(A\omega)^۲=\frac{۱}{۲}\times ۰/۱\times(۴\pi\times ۱۰^{-۲})^۲$

$=\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۱}\times ۱۶\pi^۲\times ۱۰^{-۴}=۸\pi^۲\times ۱۰^{-۵}J=۸\pi^۲\times ۱۰^{-۲}mJ=۰/۰۸\pi^۲mJ$



نمای ۱۲

B ۱۵۱۳ ۲

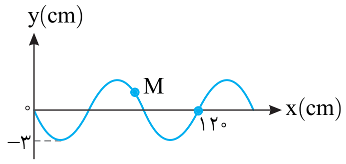
۹

نکته یک نوسانگر ساده در مدت‌زمان یک دوره مسافت ۴A و در مدت‌زمان نصف دوره مسافت ۲A را طی می‌کند. اما این تناسب برای مدت‌زمان یک‌چهارم دوره صدق نمی‌کند و مسافت الزاماً برابر A نخواهد بود. در این حالت میزان مسافت طی‌شده در مدت یک‌چهارم دوره بستگی به نقطهٔ شروع حرکت نوسانگر دارد.

با توجه به نمودار طول موج را حساب می‌کنیم:

$۳\frac{\lambda}{۲}=۱۲۰\Rightarrow\lambda=۸۰cm$

حال با داشتن طول موج و تندی، دوره را به‌دست می‌آوریم:



$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۸}{۱۰}=۰/۰۸s$

مدت‌زمان طی‌شده برابر $t_۲-t_۱=۰/۰۴s$ یعنی $\frac{T}{۲}=۰/۰۴s$ است.

بنابراین بازهٔ زمانی داده شده نصف دوره است و در نصف دوره یک نوسانگر ساده همواره مسافت ۲A را طی می‌کند، بنابراین $۲\times۳=۶cm$ مسافت طی‌شده است.

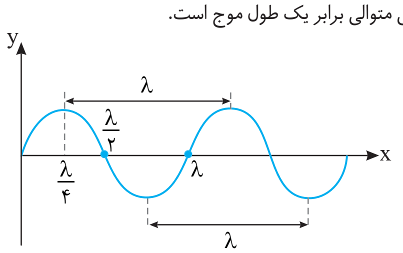
نمای ۱۹

A ۱۵۱۳ ۲

۱۰

یادآوری ۱ تندی انتشار موج در یک محیط به جنس و ویژگی‌های محیط بستگی دارد و تندی انتشار امواجی که در محیط یکسان منتشر می‌شوند باهم برابر است.

یادآوری ۲ در نمودار جابه‌جایی - مکان (نقش موج)، فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی و دو فرورفتگی متوالی برابر یک طول موج است.

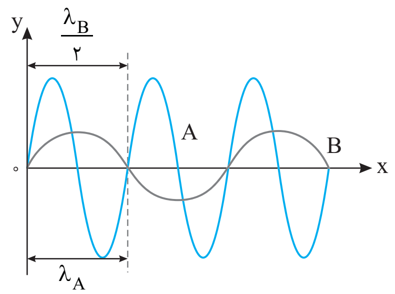


دو موج در یک محیط در حال انتشار هستند و تندی انتشار آنها باهم برابر است، بنابراین:

$\frac{v_A}{v_B}=۱$

با توجه به شکل، طول موج B دو برابر طول موج A است.

$\lambda_B=۲\lambda_A$



بنا به تعریف طول موج $\lambda=vT$ خواهیم داشت:

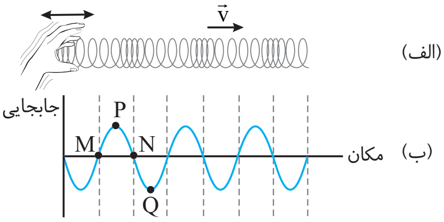
$v_BT_B=۲v_AT_A\xrightarrow{v_A=v_B}T_B=۲T_A\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{۱}{۲}$

نمای ۲۱

پنجره ۴

B ۱۵۱۴ ۴

در انتشـار موج طولی در یک فنر بلند کشـیده، موج به‌صورت جمع‌شدگی و بازشدگی در طول فنر منتشـر می‌شود. برای مدل‌سـازی این موج به ناحیه‌های جمع‌شدگی و بازشدگی بیشـتر دقت می‌کنیم. در مکان‌هایی که بیشـترین بازشدگی حلقه رخ می‌دهد، جابه‌جایی هـر جزء فنر از وضعیت تعادل صفر اسـت. (مانند نقـاط M و N در یک موج عرضی). در وسـط فاصلهٔ بین یک جمع‌شـدگی بیشـینه و یک بازشدگی بیشـینهٔ مجاور آن، اندازهٔ جابه‌جایی هر جزء فنر از وضعیت تعادل بیشینه است (مانند نقاط P و Q شبیه قله و درهٔ یک موج عرضی) با این توضیحات گزینهٔ (۲) و (۳) درست است.



B ۱۵۱۵ ۲

نکته فاصلهٔ بین دو تراکم متوالی یا دو انبساط متوالی برابر طول موج (λ) است.

۱ با توجه به شـکل فاصلهٔ بین تراکم و انبسـاط نشـان داده شـده در شـکل $۶۰cm$ است. از این رو:

$$\lambda+\frac{\lambda}{۲}=۶۰\Rightarrow\frac{۳}{۲}\lambda=۶۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm$$

۲ تندی انتشار موج را برحسب یکای m/s می‌نویسیم.

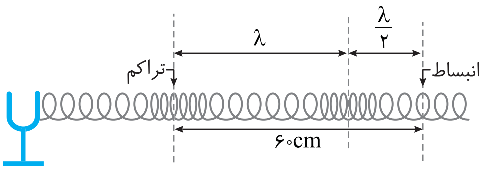
$$v=۵۴\frac{km}{h}\times\frac{۱۰۰۰m}{۱km}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\Rightarrow\frac{۵۴}{۳/۶}\Rightarrow v=۱۵m/s$$

۳ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۱۵}\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow T=\frac{۲}{۷۵}s$$

۴ تعداد نوسان‌های هر حلقه (ذره) را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow\frac{۲}{۷۵}=\frac{۶۰}{N}\Rightarrow N=۳۰\times۷۵\Rightarrow N=۲۲۵۰\,\frac{\text{نوسان}}{\text{دقیقه}}$$



B ۱۵۱۶ ۱

یادآوری در امواج طولی، طول موج برابر فاصلهٔ بین دو تراکم (برای فنر جمع‌شدگی) و یا دو انبساط (برای فنر، بازشدگی) متوالی است.

۱ طول موج با توجه به فرض مسئله برابر است با: $\lambda=۱۰m$

۲ دوره را حساب می‌کنیم. $T=\frac{۱}{f}\xrightarrow{f=۱۰Hz}T=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow T=۰/۱s$

۳ تندی انتشار موج در محیط خواهد شد:

$$v=f\lambda\Rightarrow v=۱۰\times۱۰\Rightarrow v=۱۰۰m/s$$

۴ مسافتی که موج در مدت $۰/۰۵s$ طی می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=۵۰\times۰/۰۵\Rightarrow\Delta x=۵m$$

۵ مشخص می‌کنیم $\Delta t=۰/۰۵s$ چه کسری از دوره $T=۰/۱s$ است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۵}{۰/۱}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۲}$$

نکته مسـافتی کـه یـک ذره دارای حرکت هماهنـگ سـاده در مدت $\frac{T}{۲}$ طی می‌کند دو برابر دامنه است.

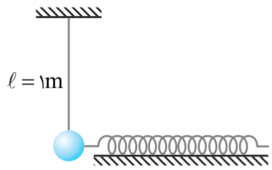
۶ مسافتی که در مدت $\frac{T}{۲}=۰/۰۵s$ هر ذره از محیط طی می‌کند خواهد شد:

$$\Delta x'=۲A\xrightarrow{A=۰/۰۴m}\Delta x'=۲\times۰/۰۴=۰/۰۸m$$

B ۱۵۱۷ ۴

۱ دوره و بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج هستند. در این مسئلهٔ آونگ چشمهٔ موج است، دورهٔ آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\pi^۲\sim g}T=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{\pi^۲}}\Rightarrow T=۲s$$

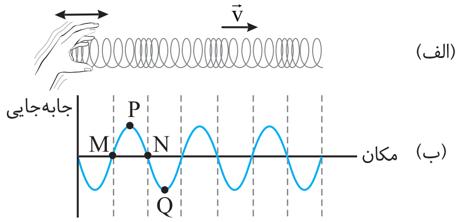


۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{v=۰/۲m/s}\lambda=۰/۲\times۲\Rightarrow\lambda=۰/۴m$$

۳ با توجه به مدل‌سازی موج طولی در فنر فاصلهٔ یک جمع‌شدگی بیشینه شبیه نقطهٔ N از وسط یک جمع‌شدگی و بازشدگی بیشینه مانند نقطهٔ P برابر $\frac{\lambda}{۴}$ است. بنابراین

$$\frac{\lambda}{۴}=\frac{۰/۴}{۴}=۰/۱$$



B ۱۵۱۸ ۲

نکته در امـواج لـرزه‌ای، (زمین‌لرزه‌ها)، معمولاً تندی انتشـار مـوج اولیهٔ P از تندی انتشار موج ثانویهٔ S بیشتر است. P امواج طولی و S امواج عرضی هستند.

۱ موجی که تندی آن $۹km/s$ اسـت و زودتر به مقصد رسـیده اسـت، موج طولی (P) بوده و زمان رسیدن آن به مقصد برابر است با:

$$t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t=\frac{۱۶۲۰}{۹}=۱۸۰s\Rightarrow t_۱=۳\min$$

۲ موج دیگر ۳ دقیقه دیرتر به این فاصله رسیده است بنابراین این موج عرضی بوده و زمان رسیدن آن $۳+۳=۶\min$ است و تندی آن خواهد شد.

$$v=\frac{\Delta x}{t}=\frac{۱۶۲۰}{۶\times۶۰}\Rightarrow v=۴/۵km/s$$

B ۱۵۱۹ ۴

تـندی امواج عرضـی در جامدات از تندی امـواج طولی در جامدات کمتر اسـت و زمان رسیدن موج عرضی به عقرب از زمان رسیدن موج طولی به عقرب بیشتر است.

زمان رسیدن موج از طعمه به عقرب برای موج طولی خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow d=v_Tt_T\Rightarrow t_T=\frac{d}{v_T}$$

زمان رسیدن موج از طعمه به عقرب برای موج عرضی خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow d=v_Lt_L\Rightarrow t_L=\frac{d}{v_L}$$

اختلاف زمانی رسیدن موج‌های طولی و عرضی به عقرب خواهد شد:

$$\Delta t=t_L-t_T\Rightarrow\Delta t=\frac{d}{v_L}-\frac{d}{v_T}\Rightarrow\Delta t=\frac{v_T-v_L}{v_Lv_T}d\Rightarrow d=\frac{v_Lv_T}{v_T-v_L}\Delta t$$

B ۱۵۲۰ ۴

خط فکری بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و برای هر دو موج S و P یکسان است. از این رو نمودار نقش موج طول موج S و P را پیدا کرده، تندی انتشار موج S و P را به‌دست بیاورید. با اختلاف زمانی رسیدن موج‌های S و P به مقصد فاصلهٔ محل مورد نظر تا مرکز زمین‌لرزه را حساب کنید.

۱ ابتدا طول موج هر موج را به‌دست می‌آوریم.

شکل (۱): $\frac{\lambda}{4}=15 \Rightarrow \lambda=60m$ ، شکل (۲): $\frac{\lambda}{4}=30 \Rightarrow \lambda=120m$

۲ تندی انتشار هر موج را حساب می‌کنیم.

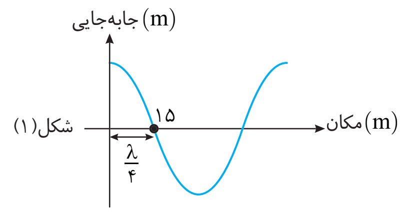
$v=f\lambda \Rightarrow v=100\times 60=6km/s \quad , \quad v=f\lambda \Rightarrow v=100\times 120=12km/s$

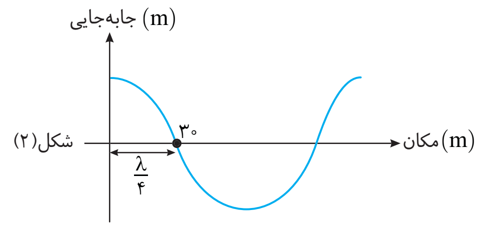
۳ موج شکل (۱) دارای تندی کمتری است بنابراین نمودار شکل (۱) مربوط به موج عرضی S است و نمودار شکل (۲) مربوط به موج طولی P است.

۴ اختلاف زمانی دو موج ۱۲۰s است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$t_S-t_P=120s \xrightarrow{t=\frac{\Delta x}{v}} \frac{\Delta x}{v_s}-\frac{\Delta x}{v_p}=120 \Rightarrow \frac{\Delta x}{6}-\frac{\Delta x}{12}=120$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{12}=120 \Rightarrow \Delta x=1440km$$





A ۱۵۲۱ ۳

موج صوتی یک موج مکانیکی و طولی است که به صورت لایه‌های تراکمی و انبساطی منتشر می‌شود. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست است، اما در مورد گزینهٔ (۳) عموماً در محیط‌های غلیظ‌تر سرعت انتشار صوت بیشتر است و در این مورد استثناهایی وجود دارد.

به‌طور مثال سرعت صوت در هیدروژن (گاز) از سرعت صوت در متیل الکل (مایع) (۲۵°C) بیشتر است. به جدول صفحهٔ ۷۱ کتاب درسی رجوع کنید.

A ۱۵۲۲ ۴

صوت موج است و در انتشار موج، ذره‌های محیط منتشر نمی‌شود و گزینهٔ (۱) نادرست است، بلکه ذرات محیط در مسیر حرکت موج، در جای خود مرتعش می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. از طرفی صوت، موج طولی است و به‌صورت لایه‌های تراکمی و انبساطی در هوا منتشر می‌شود، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) درست‌اند و جواب گزینهٔ (۴) می‌باشد.

A ۱۵۲۳ ۲

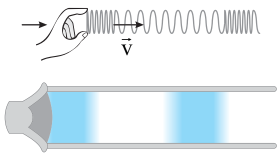
امواج الکترومغناطیسی که تلفن همراه با آن کار می‌کند از شیشه و خلأ درون جعبه می‌گذرند، بنابراین تماس برقرار می‌شود، اما صدای زنگ تلفن همراه که موج مکانیکی است و از خلأ نمی‌گذرد و صدای زنگ تلفن شنیده نمی‌شود.

A ۱۵۲۴ ۲

امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی و طولی هستند و در خلأ منتشر نمی‌شوند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست است و امواج فرابنفش از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و تندی آن‌ها برابر تندی انتشار نور است و از تندی صوت بسیار بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۲) درست است. البته هر دو موج بوده و انرژی را منتقل می‌کنند.

A ۱۵۲۵ ۱

در مدلسازی صوت درون لوله، جمع‌شدگی فنر معادل تراکم و بازشدگی فنر معادل انبساط در نظر گرفته می‌شود. در شکل در محل دست فنر جمع شده بنابراین باید در لوله کنار دیافراگم تراکم داشته باشیم. بنابراین گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۳) درست است. برای ایجاد تراکم باید دیافراگم به سمت راست شکل پیدا کرده و هوا را فشرده کند. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.



A ۱۵۲۶ ۴

دیافراگم دارای حرکت هماهنگ ساده است و مدت زمانی که طول می‌کشد تا از برآمدگی سمت راست ( ) (+A)، به فرورفتگی سمت چپ ( ) (−A) برود، به اندازهٔ $\frac{T}{2}$ طول می‌کشد.

بازهٔ زمانی داده شده $\Delta t=0/2s$ را با دوره $T=0/4s$ مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/2}{0/4}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{2}$$

در مدت $\frac{T}{2}$ باید تراکم به انبساط تبدیل شود. از طرفی در مدت $\frac{T}{2}$، موج به اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ جلو می‌رود و تنها باید در شکل یک تراکم و یک انبساط را شاهد باشیم، از این رو گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۵۲۷ ۳

امواج صوتی از نوع امواج طولی هستند و سرعت انتشار صوت معمولاً در جامدها از مایع‌ها بیشتر است.

B ۱۵۲۸ ۱

نکته بسامد یک موج از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و در هنگام انتشار موج تغییر نمی‌کند.

نکته سرعت صوت در آهن از سرعت صوت در آب بیشتر و سرعت صوت در آب از سرعت صوت در اکسیژن بیشتر است.

با توجه به نکات ارائه شده می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{v}{f_o}\Rightarrow\begin{cases}\text{آهن}:\lambda_1=\frac{v_1}{f}\\ \text{اکسیژن}:\lambda_2=\frac{v_2}{f}\xrightarrow{v_1>v_3>v_2}\lambda_1>\lambda_3>\lambda_2\\ \text{آب}:\lambda_3=\frac{v_3}{f}\end{cases}$$

A ۱۵۲۹ ۴

بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و هنگام پیشروی موج، بسامد موج ثابت می‌ماند، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. برای بررسی چگونگی تغییر طول موج باید چگونگی تغییر تندی انتشار موج را بررسی کنیم.

تندی انتشار صوت در یخ از تندی انتشار صوت در آب و تندی انتشار صوت در آب از تندی انتشار صوت در هوا بیشتر است.

$$v_{\text{یخ}}>v_{\text{آب}}>v_{\text{هوا}}\xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}}\lambda_{\text{یخ}}>\lambda_{\text{آب}}>\lambda_{\text{هوا}}$$

بنابراین وقتی صوت از هوا وارد یخ می‌شود طول موج ابتدا افزایش می‌یابد $(\lambda_{\text{یخ}}>\lambda_{\text{هوا}})$ و سپس وقتی از یخ وارد آب می‌شود، طول موج کاهش می‌یابد $(\lambda_{\text{یخ}}<\lambda_{\text{آب}})$.

بازی با سؤال هرگاه موج‌های صوتی از هوا وارد آب شوند ………

۱) طول موج و سرعت آن‌ها کاهش می‌یابد.
۲) طول موج کاهش و بسامد آن‌ها افزایش می‌یابد.
۳) طول موج و سرعت آن‌ها افزایش می‌یابد.
۴) طول موج کاهش و بسامد آن‌ها ثابت می‌ماند.

پاسخ سرعت انتشار صوت در آب از سرعت انتشار صوت در هوا بیشتر است و هنگام گذر صوت از هوا به آب، بسامد ثابت می‌ماند، اما با زیاد شدن سرعت انتشار صوت، طول موج نیز افزایش می‌یابد.
گزینهٔ ۳

A ۱۵۳۰ ۴

تندی انتشار موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و بسامد چشمهٔ موج نیز به دامنهٔ موج بستگی ندارد، از این رو تندی انتشار موج حاصل از دو چشمه با هم برابر است $(v'=v)$

بسامد دو موج یکسان نیست، بنابراین طول موج آن‌ها نیز یکسان نخواهد بود.

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{v}{f}\\ \lambda'=\dfrac{v'}{f'}\end{cases}\xrightarrow{v'=v}\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{f}{f'}\xrightarrow{f'=3f}\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{f}{3f}\Rightarrow\lambda'=\frac{\lambda}{3}$$

بازی با سؤال دو صوت با بسامدهای متفاوت در یک نقطه تولید و در هوا منتشر می‌شوند. طول موج آن‌ها در هوا ………

۱) با هم برابر است.
۲) متناسب با جذر بسامد آن‌ها است.
۳) متناسب با بسامد آن‌ها است.
۴) متناسب با عکس بسامد آن‌ها است.

پاسخ سرعت انتشار صوت در یک محیط به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد و به ویژگی‌های چشمهٔ صوت بستگی ندارد، بنابراین سرعت انتشار این دو صوت در محیط برابر است.

$$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{v}{f_1}\\ \lambda_2=\dfrac{v}{f_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1}$$

گزینهٔ ۴

A ۱۵۳۱ ۱

چشمهٔ تولید موج یکسان است، بنابراین بسامد صوت در آب و هوا با هم یکسان بوده و خواهیم داشت:

$$v=\lambda f\Rightarrow\begin{cases}v_{\text{آب}}=f\lambda_{\text{آب}}\\ v_{\text{هوا}}=f\lambda_{\text{هوا}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_{\text{آب}}}{v_{\text{هوا}}}=\frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوا}}}=5\Rightarrow v_{\text{آب}}=5v_{\text{هوا}}$$

B ۱۵۳۲ ۴

سرعت انتشار موج در یک محیط به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد و به ویژگی‌های چشمهٔ موج مانند بسامد، دوره، انرژی موج و ... بستگی ندارد، از این‌رو سرعت انتشار موج‌های صوتی A و B در یک محیط با هم برابرند. نسبت طول موج‌ها خواهد شد:

$$\begin{cases}\lambda_A=\dfrac{v}{f_A}\\ \lambda_B=\dfrac{v}{f_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{800}{600}=\frac{4}{3}$$

A ۱۵۳۳ ۴

با توجه به تعریف طول موج:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[v=330\,m/s]{\lambda=3.3\times10^{-3}\,m}f=\frac{v}{\lambda}=\frac{330}{3.3\times10^{-3}}=100000\,Hz$$

A ۱۵۳۴ ۲

خط فکری کافی است از روی معادلهٔ نوسان $x=A\cos 1.2\times10^{7}\pi t$ دوره را حساب کرده، سپس طول موج را به‌دست آورید.

۱ بسامد زاویه‌ای موج $\omega=1.2\times10^{7}\pi\,rad/s$ است. از این رو بسامد خواهد شد:

$$\omega=2\pi f\Rightarrow1.2\times10^{7}\pi=2\pi f\Rightarrow f=6\times10^{6}\,Hz$$

۲ طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{1500}{6\times10^{6}}=2.5\times10^{-4}\,m=2.5\times10^{-1}\,mm=0.25\,mm$$

A ۱۵۳۵ ۳

خط فکری علت شنیدن دو صدای مختلف، تفاوت تندی صوت در فلز و هوا است، یک صوت توسط فلز و با تندی بیشتر و صوت دیگر توسط هوا و با تندی کمتر منتقل می‌شود. بنابراین در حل این تست ابتدا باید زمان سیر صوت در هوا را به‌دست بیاورید. سپس با توجه به اختلاف زمانی رسیدن دو موج زمان پیشروی صوت در فلز را بیابید و سرانجام تندی انتشار موج در فلز را به‌دست بیاورید.

۱ زمان پیشروی صوت در هوا تا رسیدن به شخص را حساب می‌کنیم.

زمان انتشار صوت توسط هوا $\Delta x=v_1t_1\Rightarrow140=350t_{\text{هوا}}\Rightarrow t_{\text{هوا}}=0.4\,s$

۲ تندی صوت در فلز بیشتر و زمان حرکت صوت در فلز کوتاه‌تر است، بنابراین:

$$t_{\text{فلز}}=t_{\text{هوا}}-0.36=0.4-0.36\Rightarrow t_{\text{فلز}}=0.04\,s$$

۳ تندی انتشار صوت در فلز خواهد شد:

$$\Delta x=v_{\text{فلز}}t_{\text{فلز}}\Rightarrow140=v_{\text{فلز}}\times0.04\Rightarrow v_{\text{فلز}}=3500\,m/s$$

A ۱۵۳۶ ۴

خط فکری ابتدا سر شخص درون آب است. صدای انفجار به گوشش می‌رسد. این صدا از طریق آب منتقل شده است، شخص هیجان‌زده سر خود را از آب بیرون می‌آورد، اما مجدداً صدای انفجار می‌شنود و دوباره وحشت‌زده می‌شود، اما انفجار دومی در کار نیست، بلکه صدای همان انفجار اول است که با تندی کمتری و در زمان طولانی‌تری به گوش شخص رسیده است. محل انفجار تا شخص در هر دو حالت یکی است. اگر شما زمان حرکت صوت در آب را t_1 فرض کنید، زمان حرکت صوت در هوا بنا به داده‌های مسئله برابر $t_2=t_1+1.7$ ثانیه می‌شود. اکنون کافی است جابه‌جایی‌ها را برابر قرار داده و از حرکت‌شناسی مسئله را حل کنید.

جابه‌جایی‌ها را برابر قرار می‌دهیم.

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow v_1t_1=v_2t_2\xrightarrow[v_2=350\,m/s]{v_1=1540\,m/s}1540t_1=350(t_1+1.7)$$

$$\Rightarrow4.4t_1=t_1+1.7\Rightarrow t_1=0.5\,s$$

فاصلهٔ محل انفجار از شخص خواهد شد: $\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x=1540\times0.5\Rightarrow\Delta x=770\,m$

B ۱۵۳۷ ۲

سرعت نور در هوا حدود $3\times10^{8}\,m/s$ است و سرعت انتشار صوت در هوا بسیار کمتر از آن و حدود $340\,m/s$ است. بنابراین می‌توان گفت که نور حاصل از آذرخش بلافاصله به چشم می‌رسد، یعنی همین که شما نور را مشاهده کردید، می‌توانید با یک کرونومتر زمان شنیدن صدای رعد (تُندر) را حساب کرده و فاصلهٔ تقریبی ابر تا سطح زمین را به‌دست بیاورید.

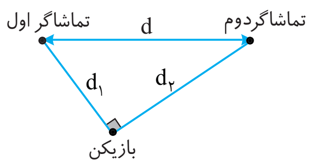
$$d=vt=340\times20=6800\,m\sim7\,km$$

A ۱۵۳۸ ۱

خط فکری با توجه به زمانی که طول می‌کشد تا تماشاگرها صدای ضربه را بشنوند، به کمک تندی انتشار صوت، فاصلهٔ هر شخص از بازیکن را حساب کنید. سپس به کمک رابطهٔ فیثاغورس فاصلهٔ دو تماشاگر را به‌دست بیاورید.

۱ فاصلهٔ هر تماشاگر از بازیکن را حساب می‌کنیم.

$$d_1=vt_1=360\times0.75=270\,m\quad,\quad d_2=vt_2=360\times1=360\,m$$



۲ فاصلهٔ دو تماشاگر از هم را به‌دست می‌آوریم.

$$d^2=d_1^2+d_2^2\Rightarrow d^2=270^2+360^2\Rightarrow d^2=90^2(3^2+4^2)\Rightarrow d_2=90^2(25)$$

$$\Rightarrow d_2=90\times5=450\,m$$

A ۱۵۳۹ ۳

بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود. بسامد صوت حاصل از ارتعاش سیم همان بسامد نوسانات سیم است. یعنی وجه مشترک این دو موج منتشر شده در سیم و هوا، بسامد است. اما تندی انتشار موج به محیط بستگی دارد و تندی انتشار آن‌ها یکی نیست. بنابراین طول موج آن‌ها هم یکی نیست.

B ۱۵۴۰ ۱

خط فکری نسبت طول موج در هوا به طول موج در تار از شما خواسته شده است. بسامد موج در هوا و تار یکسان است. بنابراین با توجه به رابطهٔ $v=f\lambda$ شما برای مقایسهٔ طول موجها باید سرعت انتشار موج در دو محیط را با هم مقایسه کنید. بنابراین تندی موج در تار را حساب کرده و مسئله را حل کنید.

۱ چگالی خطی جرم تار را حساب می‌کنیم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow{m=۲g, \ell=۰/۸m}\mu=\frac{۲\times۱۰^{-۳}}{۰/۸}\Rightarrow\mu=\frac{۱۰^{-۲}}{۴}\Rightarrow\mu=۲/۵\times۱۰^{-۳}\,kg/m$$

۲ تندی انتشار موج در تار را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۲/۵\times۱۰^{-۳}}}\Rightarrow v=\sqrt{۴\times۱۰^{۴}}\Rightarrow v=۲۰۰\,m/s$$

۳ بسامد موج عرضی ایجاد شده در تار و بسامد صوت حاصل از نوسان تار در هوا یکسان است، از این رو:

$$\left.\begin{array}{l} f_{\text{صوت}}=f_{\text{تار}}=f \\ \lambda=\frac{v}{f} \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\lambda_{\text{صوت}}}{\lambda_{\text{تار}}}=\frac{v_{\text{صوت}}}{v_{\text{تار}}}=\frac{۳۲۰}{۲۰۰}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

B ۱۵۴۱ ۲

نمودار داده شده نمودار جابه‌جایی - مکان است که محور افقی آن نشان‌دهندهٔ طول موج و محور قائم آن دامنه را نشان می‌دهد. بنابراین:

$$\lambda_B=۲\lambda_A\ ,\ A_A=۲A_B$$

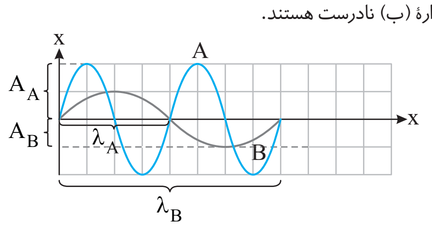
بنابراین گزاره (الف) $(A_A=۲A_B)$ و گزاره (ت) $(\lambda_B=۲\lambda_A)$ درست است.

دو موج در یک محیط منتشر شده‌اند، در این صورت تندی انتشار آن‌ها برابر است $(v_A=v_B)$ و گزارهٔ (پ) نادرست است.

نسبت بسامد دو موج خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v_A=v_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{f_B}{f_A}\Rightarrow f_A=۲f_B$$

بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست هستند.



A ۱۵۴۲ ۲

۱ با توجه به معادلهٔ ارتعاشی چشمه $x=A\cos ۱۷۰۰\pi t$ بسامد زاویه‌ای موج $\omega=۱۷۰۰\pi\,rad/s$ است. از این رو بسامد موج خواهد شد:

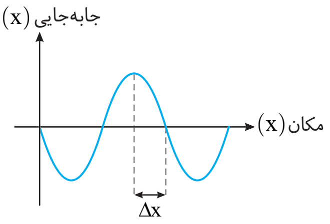
$$\omega=۲\pi f\Rightarrow ۱۷۰۰\pi=۲\pi f\Rightarrow f=۸۵۰Hz$$

۲ طول موج صوت را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{۳۴۰}{۸۵۰}=\frac{۲}{۵}=۰/۴m=۴۰cm$$

۳ با توجه به نمودار جابه‌جایی مکان، فاصلهٔ Δx نشان داده شده روی نمودار برابر $\frac{\lambda}{۴}$ است. در نتیجه:

$$\Delta x=\frac{\lambda}{۴}=۱۰cm$$



A ۱۵۴۳ ۱

بنا به تعریف مقدار انرژی صوتی را که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر راستای پیشروی صوت می‌گذرد شدت صوت می‌نامند.

A ۱۵۴۴ ۳

به مقدار انرژی صوتی گذرنده از یکای سطح عمود بر راستای پیشروی صوت در واحد زمان شدت صوت گویند، بنابراین رابطهٔ شدت صوت خواهد شد:

$$I=\frac{E}{A.t}\xrightarrow{P=\frac{E}{A}}I=\frac{P}{A}$$

یکای توان، وات و یکای مساحت متر مربع است، بنابراین یکای شدت صوت برابر $W/m^۲$ است

A ۱۵۴۵ ۴

یادآوری ۱ شدت صوت برابر مقدار انرژی‌ای است که در یکای زمان از یک سطح عمود بر راستای پیشروی موج می‌گذرد.

۲ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. $(I\propto\frac{۱}{r^۲})$

۳ شدت صوت با مجذور بسامد چشمه نسبت مستقیم دارد. $(I\propto f^۲)$

۴ شدت صوت با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد. $(I\propto A^۲)$

۵ شدت صوت به محیط انتشار صوت بستگی دارد.

شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد $(I\propto\frac{۱}{r^۲})$، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. شدت صوت برابر $I=\frac{E}{At}$ است و به انرژی امواج صوتی بستگی دارد، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

شدت صوت به محیط انتشار صوت بستگی دارد. به عنوان نمونه لولهٔ اگزوز اتومبیل شدت صوت صدای موتور را با جذب انرژی صوتی کاهش می‌دهد. همچنین هنگام انتشار صوت در هوا صداهایی که دارای بسامد بالا هستند، بیشتر جذب می‌شوند، پس شدت صوت به محیط بستگی دارد.

بازی با سؤال **اگر شدت صوت در فاصلهٔ $r_۱$ از چشمهٔ صوتی $I_۱$ و در فاصلهٔ $r_۲$ از چشمهٔ صوتی $I_۲$ باشد، در این صورت $\frac{I_۲}{I_۱}$ برابر است با ....**

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{r_۱}{r_۲}$ ۲) $\frac{r_۱^۲}{r_۲^۲}$ ۳) $\frac{r_۲^۲}{r_۱^۲}$ ۴) $\frac{r_۲}{r_۱}$

پاسخ **شدت صوت برابر مقدار انرژی‌ای است که در یکای زمان از یک سطح عمود بر راستای پیشروی صوت می‌گذرد.**

$$I=\frac{E}{At}=\frac{P}{A}\ (W/m^۲)$$

در رابطهٔ بالا A سطحی است که صوت در آن منتشر می‌شود. صوت به صورت امواج کروی در محیط منتشر می‌شود و سطح جبهه‌های کروی صوت با مجذور فاصله نسبت مستقیم دارد $(A=۴\pi r^۲)$، بنابراین شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

گزینهٔ ۲

A | ۱۵۴۶ | ۳

بنا بر تعریف شدت صوت:

$$I=\frac{E}{At}\xrightarrow[E=1/5\times10^{-11}J,\,t=5s]{A=3\times10^{-4}m^2} I=\frac{1/5\times10^{-11}}{3\times10^{-4}\times5}$$

$$\Rightarrow I=10^{-8}W/m^2=0/01\mu W/m^2$$

A | ۱۵۴۷ | ۱

خط فکری: چشمهٔ صوت به‌طور یکنواخت صوت را در همهٔ جهت‌ها منتشر می‌کند و جبهه‌های موج به صورت سطوح کروی شکل هستند که انرژی چشمه روی این سطوح پخش می‌شود، بنابراین در فاصلهٔ r از چشمه مساحت سطح جبهه برابر $A=4\pi r^2$ خواهد بود و این مقدار در رابطهٔ شدت صوت باید به جای A قرار گیرد.

با توجه به تعریف شدت صوت:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{4\pi r^2}\Rightarrow I=\frac{60}{4\times3\times10^6}=5\times10^{-6}W/m^2=5\mu W/m^2$$

A | ۱۵۴۸ | ۲

شدت صوت برابر مقدار انرژی است که در یکای زمان از یکای سطح عمود بر راستای انتشار موج می‌گذرد. $I=\frac{E}{At}\xrightarrow{P=\frac{E}{t}} I=\frac{P}{A}$

از طرفی، جبهه‌های موج صوتی، کروی هستند و مساحت این جبهه‌های صوت $A=4\pi r^2$ است که r برابر فاصله از چشمهٔ صوت است.

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}\Rightarrow 10^{-3}=\frac{4\pi\times10^{-3}}{4\pi r^2}\Rightarrow r=1m$$

A | ۱۵۴۹ | ۳

نکته: شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. $I\propto\frac{1}{r^2}$

شدت صوت در فاصلهٔ ۱۶۰ متری خواهد شد:

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\xrightarrow[I_1=0/1W/m^2]{r_1=640m,\,r_2=160m}\frac{I_2}{0/1}=\left(\frac{640}{160}\right)^2\Rightarrow I_2=0/1\times(4)^2$$

$$\Rightarrow I_2=1/6W/m^2$$

A | ۱۵۵۰ | ۲

نکته: شدت صوت با مجذور دامنه، نسبت مستقیم و با مجذور فاصله، نسبت وارون دارد.

کافی است در رابطهٔ زیر اطلاعات مسئله را قرار دهیم.

$$\frac{I'}{I}=\left(\frac{A'}{A}\right)^2\times\left(\frac{r}{r'}\right)^2\xrightarrow{\frac{A'}{A}=25,\,\frac{r'}{r}=\frac14}\frac{I'}{I}=(25\times4)^2=10^4$$

A | ۱۵۵۱ | ۳

شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

با توجه به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{I'}{I}=\left(\frac{r}{r'}\right)^2\xrightarrow{I'=\frac49 I,\,d'=d+3}\frac49=\frac{d^2}{(d+3)^2}\Rightarrow\frac23=\frac{d}{d+3}\Rightarrow 2d+6=3d$$

$$\Rightarrow d=6m$$

B | ۱۵۵۲ | ۴

۱ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{30}{10}\right)^2\Rightarrow I_2=9I_1\quad(I)$$

۲ با توجه به فرض مسئله: $I_2-I_1=1/6W/m^2\quad(II)$

۳ از رابطهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

$$9I_1-I_1=1/6\Rightarrow I_1=0/2W/m^2\Rightarrow I_2=9\times0/2=1/8W/m^2$$

۴ شدت صوت در فاصلهٔ $30cm$ چشمه برابر $0/2W/m^2$ شده است.

بنابراین شدت صوت در فاصلهٔ $1m$ منبع خواهد شد:

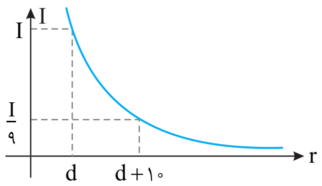
$$\frac{I_3}{I_1}=\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^2\Rightarrow\frac{I_3}{0/2}=\left(\frac{0/3}{1}\right)^2\Rightarrow I_2=0/2\times0/09\Rightarrow I_2=0/018W/m^2$$

B | ۱۵۵۳ | ۴

شدت صوت با مربع فاصله از منبع صوت نسبت وارون دارد بنابراین با توجه به نمودار خواهیم داشت:

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\Rightarrow\frac{\frac{I}{9}}{I}=\left(\frac{d}{d+10}\right)^2\Rightarrow\frac19=\left(\frac{d}{d+10}\right)^2\Rightarrow\frac{d}{d+10}=\frac13$$

$$\Rightarrow 3d=d+10\Rightarrow d=5m$$



اگر در فاصلهٔ d' از چشمهٔ صوت شدت صوت $I'=\frac{I}{25}$ شود داریم:

$$\frac{I'}{I}=\left(\frac{d}{d'}\right)^2\Rightarrow\frac{\frac{I}{25}}{I}=\left(\frac{d}{d'}\right)^2\Rightarrow\frac1{25}=\left(\frac{d}{d'}\right)^2\Rightarrow\frac{d}{d'}=\frac15\Rightarrow d'=5d$$

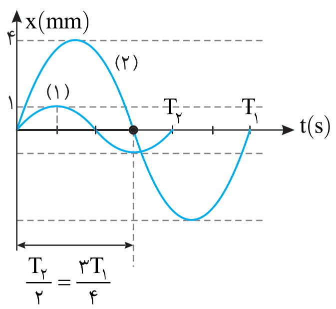
$$\Rightarrow d'=5\times5=25m$$

B | ۱۵۵۴ | ۴

خط فکری: شدت صوت چشمهٔ (۱)، $\frac94$ برابر شدت صوت چشمهٔ (۲) است. از طرفی شدت صوت با مجذور بسامد و مجذور دامنه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. از روی نمودار رابطهٔ دورهٔ T_1 و T_2 و همچنین دامنه‌های $A_1=1mm$ و $A_2=4mm$ را مشخص کنید سپس نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست آورید.

۱ با توجه به نمودار

$$\frac{T_2}{2}=\frac34T_1\Rightarrow T_2=\frac32T_1\Rightarrow f_2=\frac23f_1\Rightarrow f_1=\frac32f_2$$



۲ شدت صوت با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. از این‌رو:

$$\frac{I_1}{I_2}=\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2\times\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\times\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\Rightarrow\frac94=\left(\frac32\right)^2\times\left(\frac14\right)^2\times\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\Rightarrow\frac{d_2}{d_1}=4$$

A | ۱۵۵۵ | ۱

یادآوری: تراز شدت صوت به صورت $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ تعریف می‌شود که در آن I_0 شدت صوت مبنا است.

کافی است در رابطهٔ تراز شدت صوت داده‌های مسئله را قرار دهیم.

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow[I_0=10^{-12}W/m^2]{\beta=130dB}130=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\log\frac{I}{10^{-12}}=13$$

یادآوری ریاضی: $\log_{10}a=b\Rightarrow a=10^b$

بنابراین خواهیم داشت: $\frac{I}{10^{-12}}=10^{13}\Rightarrow I=10W/m^2$

B ۱۵۵۶ ۲

یادآوری تراز شدت صوت از رابطهٔ $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ و شدت صوت از رابطهٔ $I=P/A$ محاسبه می‌شود و نباید این دو مفهوم را با یکدیگر اشتباه گرفت.

۱ تراز شدت صوت برابر است با: $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$

$$80=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 8=\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 10^8=\frac{I}{I_0}\Rightarrow I=10^8 I_0=10^{-4}\frac{W}{m^2}$$

۲ شدت صوت از رابطهٔ $I=\frac{P}{A}$ به‌دست می‌آید که چون جبهه‌های موج صوتی کروی هستند، $A=4\pi r^2$ است:

$$10^{-4}=\frac{48}{A}\Rightarrow A=48\times10^4\Rightarrow 4\pi r^2=48\times10^4\xrightarrow{\pi=3}$$

$$12r^2=48\times10^4\Rightarrow r^2=4\times10^4\Rightarrow r=2\times10^2=200m$$

A ۱۵۵۷ ۳

۱ شدت صوت را در محل پردهٔ گوش شخص به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow[I_0=10^{-12}W/m^2]{\beta=50dB}50=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=10^{-7}W/m^2$$

۲ با توجه به تعریف شدت صوت، انرژی صوتی گذرنده از پردهٔ گوش شنونده در مدت $50s$ خواهد شد:

$$I=\frac{E}{At}\Rightarrow E=IAt\Rightarrow E=10^{-7}\times60\times10^{-6}\times50=3\times10^{-10}J=3\times10^{-4}\mu J$$

B ۱۵۵۸ ۴

یادآوری ریاضی $\log a\times b=\log a+\log b\,,\ \log a^n=n\log a$

ابتدا شدت صوت در محل میکروفون را به‌دست می‌آوریم:

$$I=\frac{E}{At}\xrightarrow[A=2\times10^{-4}m^2,t=2s]{E=8\times10^{-12}J}I=\frac{8\times10^{-12}}{2\times10^{-4}\times2}=2\times10^{-8}W/m^2$$

اکنون تراز شدت صوت را حساب می‌کنیم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta=10\log\frac{2\times10^{-8}}{10^{-12}}\Rightarrow\beta=10\log(2\times10^{+4})$$

$$\Rightarrow\beta=10[\log2+\log10^4]=10(0/3+4)=43dB$$

B ۱۵۵۹ ۴

خط فکری در اطلاعات مسئله $\log2=0/3$ داده شده است. بنابراین شما در محاسبهٔ تراز شدت صوت باید از این مطلب استفاده کنید، به حل دقت کنید.

بنا به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{I=3/2\times10^{-3}W/m^2}$$

$$\beta=10\log\frac{3/2\times10^{-3}}{10^{-12}}=10\log3/2\times10^9=10(\log32+\log10^8)$$

تکلیف $\log10^8$ معلوم است مقدار آن ۸ است اما $\log32$ را چکار باید کرد؟ ۳۲ را به صورت 2^5 بنویسید.

$$\beta=10(\log2^5+\log10^8)=10(5\log2+8)\Rightarrow\beta=10(5\times0/3+8)=10(9/5)$$

$$\Rightarrow\beta=95dB$$

A ۱۵۶۰ ۳

بنابرتعریف‌ترازشدت‌صوت‌داریم: $\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow15=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow1/5=\log\frac{I}{I_0}$

با توجه به اینکه $\log2=0/3$ است، عدد ۱/۵ را به صورت $5\times0/3$ می‌نویسیم و به جای ۰/۳، $\log2$ را قرار می‌دهیم.

$$5\times0/3=\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\log2=0/3}5\log2=\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\log2^5=\log\frac{I}{I_0}$$

$$\Rightarrow\frac{I}{I_0}=2^5\Rightarrow\frac{I}{I_0}=32$$

B ۱۵۶۱ ۲

با توجه به اینکه در صورت مسئله $\log3=0/5$ داده شده است، به سراغ حل مسئله بروید. بنا به تعریف تراز شدت صوت بنویسید:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=25dB,I_0=10^{-12}W/m^2}25=10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow2/5=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{2/5=2+0/5}2+0/5=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به جای ۲، $\log10^2$ و به جای ۰/۵، $\log3$ را قرار می‌دهیم.

$$\log10^2+\log3=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab}$$

$$\log3\times10^2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\frac{I}{10^{-12}}=3\times10^2\Rightarrow I=3\times10^{-10}W/m^2$$

B ۱۵۶۲ ۱

رابطهٔ تراز شدت صوت را می‌نویسیم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow66=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow6/6=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow6+0/6=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به جای ۶، $\log10^6$ و به جای ۰/۶، $2\log2$ قرار می‌دهیم.

$$\log10^6+2\log2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow4\times10^6=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=4\times10^{-6}W/m^2$$

دقت کنید در حل این تست نباید به جای عدد ۶/۶ مقدار $22\times0/3$ یا $22\times\log2$ را قرار داد زیرا خواهیم داشت: $22\log2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=2^{22}\times10^{-12}$

که در گزینه‌ها نیست و نیز در روش اول ما دو بار از تقریب $\log2=0/3$ استفاده کرده‌ایم در حالی که در روش دوم ۲۲ بار این تقریب به‌کار برده شده پس جواب در حالت اول به مقدار واقعی نزدیک‌تر است.

بازی با سؤال **تراز شدت صوتی ۲۶ دسی‌بل است. شدت این صوت، چند وات بر مترمربع است؟** $(\log2=0/3,I_0=10^{-12}W/m^2)$ ریاضی - ۹۰

۱) 4×10^{-10} ۲) 2×10^{-4} ۳) 4×10^{-4} ۴) 2×10^{-10}

پاسخ **تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل، بنا به تعریف برابر است با:**

$$\beta=\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow26=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow2/6=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow2+0/6=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به جای عدد ۲، $\log10^2$ و به جای عدد ۰/۶، $2\log2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\log10^2+2\log2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\log(2^2\times10^2)=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow2^2\times10^2=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=4\times10^{-10}W/m^2$$

گزینهٔ ۱

B ۱۵۶۳ ۳

خط فکری در حل این تست باید از $\log5=0/7$ استفاده کنید یعنی هرجا که ۰/۷ دیده شد، $\log5$ را به جای آن قرار دهید.

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا بر تعریف برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=37dB,I_0=10^{-12}W/m^2}37=10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow3/7=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow3+0/7=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به‌جای ۳، $\log10^3$ و به جای عدد ۰/۷، $\log5$ را قرار می‌دهیم.

$$\log10^3+\log5=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab}$$

$$\log(5\times10^3)=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=5\times10^{-9}W/m^2$$

بازی با سؤال تراز شدت صوتی ۳۷ دسی‌بل است. اگر شدت صوت مبنا $10^{-12}W/m^2$ باشد، شدت این صوت، چند وات بر متر مربع است؟ $(\log 2=0/3)$

۱) 7×10^{-5} ۲) 10^{-7} ۳) 5×10^{-9} ۴) $1/5\times10^{-9}$

پاسخ دقت کنید در فرض مسئله $\log 2=0/3$ داده شده است. بنابرین از آن استفاده می‌کنیم.

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 37=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 3/7=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به جای ۳/۷ مقدار ۴−۰/۳ را قرار می‌دهیم.

$$4-0/3=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{4=\log 10^4,\ \log 2=0/3}\log 10^4-\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\log\frac{10^4}{2}=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=5000\times10^{-12}$$

$$\Rightarrow I=5\times10^{-9}W/m^2$$

گزینهٔ ۳

B ۱۵۶۴ ۴

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=159dB}159=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 15/9=\log\frac{I}{I_0}$$

$$\Rightarrow 15+0/9=\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 15+3(0/3)=\log\frac{I}{I_0}$$

به جای عدد ۱۵، مقدار $\log 10^{15}$ و به جای عدد ۰/۳ مقدار $\log 2$ را قرار می‌دهیم.

$$\xrightarrow{I_0=10^{-12}W/m^2}\log 10^{15}+3\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\xrightarrow{n\log a=\log a^n}\log 10^{15}+\log 2^3=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 8\times10^{15}=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=8000W/m^2$$

B ۱۵۶۵ ۳

ابتدا شدت صوت دریافتی توسط شنونده را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=90dB,\ I_0=10^{-12}W/m^2}90=10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 10^9=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=10^{-3}W/m^2$$

امواج صوتی به صورت امواج کروی در محیط منتشر می‌شوند و سطح جبهه‌های کروی صوت $A=4\pi r^2$ است که r فاصله از چشمهٔ صوت است. بنا به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{4\pi r^2}\xrightarrow{P=120W,\pi=3}10^{-3}=\frac{120}{4\times3\times r^2}\Rightarrow r^2=10^4\Rightarrow r=100m$$

B ۱۵۶۶ ۱

در گام اول به کمک تعریف تراز شدت صوت، شدت صوت در مکان مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow[I_0=10^{-12}W/m^2]{\beta=96dB}96=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 9/6=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به سراغ ریاضی می‌رویم و عدد ۹/۶ را به صورت ۹+۰/۶ می‌نویسیم. به جای عدد ۹، $\log 10^9$ و به جای عدد ۰/۶، $2\log 2$ را قرار می‌دهیم. از این‌رو می‌نویسیم:

$$\log 10^9+2\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

یادآوری ریاضی $\log a^n=n\log a$, $\log a+\log b=\log ab$

به توجه به یادآوری ریاضی خواهیم داشت:

$$\log 10^9+\log 2^2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\log 2^2\times10^9=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 4\times10^9=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=4\times10^{-3}W/m^3$$

یادآوری شدت صوت برابر مقدار انرژیی است که در مدت 1s از سطحی به مساحت $1m^2$ می‌گذرد.

$$I=\frac{E}{A.t}$$

با توجه به تعریف شدت صوت، مقدار انرژی گذرنده از سطحی به مساحت $1mm^2$ خواهد شد:

$$E=IA.t\xrightarrow[t=60s]{A=10^{-6}m^2}E=4\times10^{-3}\times10^{-6}\times60$$

$$\Rightarrow E=0/24\times10^{-6}\Rightarrow E=0/24\mu J$$

B ۱۵۶۷ ۳

خط فکری تراز شدت صوت یک تابع لگاریتمی به صورت $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ است. اما یادتان باشد که اگر در مسئله برای دو حالت مختلف، تراز شدت صوت به شما داده شود معمولاً شما باید برای هر دو حالت رابطه تراز شدت صوت را بنویسید، سپس آن‌ها را از هم کم کنید. دقت کنید که از تقسیم دو رابطه برهم شما به تقسیم دو لگاریتم می‌رسید که کاربردی در حل مسئله ندارد. البته شما در ریاضی یاد گرفته‌اید که $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$.

شدت صوت ۱۰۰۰ برابر شده است از این‌رو برای هر دو حالت رابطه تراز شدت صوت به صورت زیر است و خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0})=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log 10^3\Rightarrow\Delta\beta=30dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۳۰ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

B ۱۵۶۸ ۳

خط فکری تراز شدت صوت‌ها را در دو حالت می‌نویسیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم و رابطهٔ بین I_2 و I_1 را به‌دست می‌آوریم.

یادآوری ریاضی $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

$$\begin{cases}\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

تراز شدت صوت‌ها را به ترتیب 27dB و 47dB را در رابطه قرار می‌دهیم و نسبت شدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$47-27=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow 20=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=100$$

A ۱۵۶۹ ۱

یادآوری ریاضی $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

اختلاف تراز شدت صوت این دو صوت برابر است با:

$$\beta_2-\beta_1=0/3\xrightarrow{\beta=10\log\frac{I}{I_0}}\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0}=0/3\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log 2$$

$$\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=2$$

بازی با سؤال تراز شدت صوتی از ۳۰ دسی‌بل به ۳۶ دسی‌بل می‌رسد. شدت صوت چند برابر شده است؟ $(\log 2=0.3)$ خارج ریاضی - ۹۷

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{36}{25}$

پاسخ تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا به تعریف برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$36-30=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=0.6$$

به جای ۰/۶، مقدار ۲×۰/۳ یعنی $2\log 2$ را قرار می‌دهیم.

$$\log\frac{I_2}{I_1}=2\times0.3=2\log 2\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log 2^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=4$$

گزینه ۱

A ۱۵۷۰ ۱

با توجه به تعریف تراز شدت صوت:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow12=10\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow1.2=\log\frac{I_1}{I_2}$$

$$\Rightarrow4\log2=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\log2^4=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}=16$$

B ۱۵۷۱ ۴

تراز شدت صوت را در دو حالت نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}=10\log\frac{500}{100}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log5$$

اکنون به جای ۵، $\frac{10}{2}$ را قرار می‌دهیم و به جای $\log\frac{10}{2}$ می‌نویسیم $\log10-\log2$

بنابراین:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{10}{2}=10(\log10-\log2)\xrightarrow{\log2=0.3}$$

$$\beta_2-\beta_1=10(1-0.3)=7\text{dB}$$

بازی با سؤال تراز شدت صوت دو چشمهٔ صوت در یک نقطه به ترتیب $\beta_1=90\text{dB}$ و $\beta_2=95\text{dB}$ است. نسبت شدت صوت دو چشمه در این نقطه $(\frac{I_2}{I_1})$ کدام است؟ $(\log3=0.5)$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ بنابه تعریف تراز شدت صوت، خواهیم داشت:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow95-90=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow0.5=\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow\log3=\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=3$$

گزینه ۱

A ۱۵۷۲ ۱

خط فکری با توجه به صورت مسئله $\beta_2=5\beta_1$ و $I_2=16I_1$ است. بنا به تعریف تراز شدت صوت به جای β_1 و β_2 قرار دهید و به کمک روابط لگاریتم مسئله را حل کنید.

با توجه به فرض مسئله:

$$\beta_2=5\beta_1\xrightarrow{\beta=10\log\frac{I}{I_0}}\log\frac{I_2}{I_0}=5\log\frac{I_1}{I_0}\xrightarrow{I_2=16I_1}$$

$$\log\frac{16I_1}{I_0}=5\log\frac{I_1}{I_0}\xrightarrow{n\log a=\log a^n}\log\frac{16I_1}{I_0}=\log(\frac{I_1}{I_0})^5$$

$$\Rightarrow\frac{16I_1}{I_0}=(\frac{I_1}{I_0})^5\Rightarrow16=(\frac{I_1}{I_0})^4\Rightarrow I_1=2I_0\Rightarrow I_1=2\times10^{-12}\,\text{W/m}^2$$

بازی با سؤال اگر شدت صوت چشمه‌ای را ۸ برابر کنیم، تراز شدت صوت برای شنونده‌ای که به فاصلهٔ معینی از چشمه قرار دارد، ۱/۳ برابر می‌شود، تراز شدت صوت اولیه برای شنونده چند دسی‌بل بوده است؟ $(\log2=0.3)$ ریاضی - ۹۵

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۹

پاسخ با توجه به رابطهٔ ریاضی $\log ab=\log a+\log b$ به جای $\log\frac{8I}{I_0}$ می‌نویسیم: $\log8+\log\frac{I}{I_0}$:

$$\log8+\log\frac{I}{I_0}=1.3\log\frac{I}{I_0}$$

$$\Rightarrow\log8=1.3\log\frac{I}{I_0}-\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\log8=0.3\log\frac{I}{I_0}$$

به جای $\log8$، $\log2^3$ می‌نویسیم.

$$\log2^3=0.3\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\log a^n=n\log a}3\log2=0.3\log\frac{I}{I_0}$$

$$\xrightarrow{\log2=0.3}3\times0.3=0.3\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\log\frac{I}{I_0}=3$$

تراز شدت صوت اولیه خواهد شد: $\beta=10\log\frac{I}{I_0}=10\times3=30\text{dB}$

گزینه ۳

B ۱۵۷۳ ۴

خط فکری هرگاه شدت صوت منبع صوتی I باشد و n منبع مشابه با این شدت صوت در کنار هم صوت تولید کنند شدت صوت حاصل از آن $I'=nI$ خواهد بود. از شما تغییر تراز شدت صوت خواسته شده است، بنابراین تراز شدت صوت را در دو حالت نوشته از هم کم کنید و به جای I_2، $5I_1$ قرار دهید.

با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\xrightarrow{I_2=5I_1}\beta_2-\beta_1=10\log\frac{5I_1}{I_1}=\log5$$

به جای $\log5$، $\log\frac{10}{2}$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{10}{2}=10(\log10-\log2)\xrightarrow{\log10=1,\ \log2=0.3}$$

$$\beta_2-\beta_1=10\times(1-0.3)=7\text{dB}$$

بنابراین تراز شدت صوت 7dB افزایش می‌یابد.

B ۱۵۷۴ ۴

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا به تعریف برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta_B-\beta_A=10\log\frac{I_B}{I_0}-10\log\frac{I_A}{I_0}=10\log\frac{\frac{I_B}{I_0}}{\frac{I_A}{I_0}}$$

$$\Rightarrow\beta_B-\beta_A=10\log\frac{I_B}{I_A}\quad(I)$$

از طرفی شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{r_A}{r_B})^2\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=(\frac{6}{3})^2\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=2^2$$

در رابطهٔ (I) به جای $\frac{I_B}{I_A}=2^2$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_B-\beta_A=10\log2^2=20\log2\xrightarrow{\log2=0/3}\beta_B-\beta_A=20\times0/3=6dB$$

B ۱۵۷۵ ۲

خط فکری نسبت دو شدت صوت با بسامد و دامنه رابطهٔ مستقیم و مجذوری و با فاصله رابطهٔ عکس و مجذوری دارد: $\frac{I_2}{I_1}=(\frac{f_2}{f_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{r_1}{r_2})^2$

اگر چشمه ثابت باشد و تنها فاصله تغییر کند بسامد و دامنه ثابت می‌ماند: $\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2$

با توجه به تعریف تراز شدت صوت، اختلاف تراز شدت صورت برابر با:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_0}-10\log\frac{I_2}{I_0}=10\log\frac{I_1}{I_2}=18\Rightarrow1/8=\log(\frac{I_1}{I_2})$$

در حالت کلی با توجه به عدد به‌دست آمده، مضاربی از ۰/۳ یا نزدیک‌ترین عدد صحیح را که بتوان با جمع و یا تفریق ۰/۳ یا مضاربی از آن به عدد مذکور رسید را پیدا می‌کنیم.

در این سؤال می‌توان ۱/۸ را به صورت ۶×۰/۳ نوشت:

$$6\times0/3=\log(\frac{I_1}{I_2})\xrightarrow{0/3=\log2}6\log2=\log(\frac{I_1}{I_2})\Rightarrow2^6=(\frac{I_1}{I_2})$$

شدت صوت با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{I_1}{I_2}=(\frac{d_2}{d_1})^2=2^6\Rightarrow\frac{d_2}{d_1}=2^3\Rightarrow\frac{d_2}{d_1}=8$$

بازی با سؤال **شنونده‌ای که در فاصلهٔ ۸ متری یک منبع صوت قرار دارد، چند متر به منبع صوت نزدیک شود تا صوت منبع را با تراز شدت ۱۲ دسی‌بل بیشتر از حالت قبل احساس کند؟** $(\log2=0/3)$ ریاضی - ۹۱

۱) ۷/۵ ۲) ۶ ۳) ۴/۵ ۴) ۲

پاسخ **با توجه به تعریف تراز شدت صوت:**

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow12=10\log(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow1/2=\log(\frac{d_1}{d_2})^2$$

$$\Rightarrow4\times0/3=\log(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow4\log2=\log(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow2^4=(\frac{d_1}{d_2})^2$$

$$\Rightarrow2^2=\frac{d_1}{d_2}\Rightarrow2^2=\frac{8}{d_2}\Rightarrow d_2=2m$$

بنابراین باید $8-2=6m$ به چشمه نزدیک شود. گزینهٔ ۲

B ۱۵۷۶ ۲

۱ امواج صوتی در یک فضای باز به صورت جبهه‌های کروی در محیط منتشر می‌شوند و سطح این جبهه‌ها $A=4\pi r^2$ است که در آن r فاصله از چشمهٔ صوت است. شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{100}$$

۲ تراز شدت صوت بنا به تعریف برابر $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ است.

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{1}{100}=10\log10^{-2}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=-20dB$$

تراز شدت صوت ۲۰dB کاهش می‌یابد.

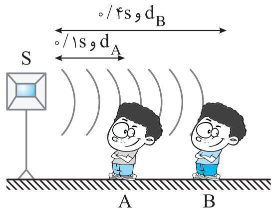
B ۱۵۷۷ ۴

یادآوری سرعت انتشار موج در یک محیط ثابت است: $v_{\text{موج}}=\frac{\Delta x_{\text{پیشروی}}}{\Delta t}$

۱ با توجه به سؤال شخص A زودتر صدا را شنیده و به منبع نزدیک‌تر است:

$$v_{\text{موج}}=\frac{\Delta x_{\text{پیشروی}}}{\Delta t}\Rightarrow v_{\text{صوت}}=\frac{d_A}{\Delta t_A}=\frac{d_A}{0/1}\quad,\quad v_{\text{صوت}}=\frac{d_B}{\Delta t_B}=\frac{d_B}{0/4}$$

$$\xrightarrow{v_{\text{صوت}}=v_{\text{صوت}}}\frac{d_A}{0/1}=\frac{d_B}{0/4}\Rightarrow\frac{d_A}{1}=\frac{d_B}{4}\Rightarrow d_B=4d_A$$



یادآوری اختلاف تراز شدت صوت برابر $\Delta B=10\log\frac{I_2}{I_1}$ است.

۲ نسبت شدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{f_A}{f_B})^2\times(\frac{A_A}{A_B})^2\times(\frac{d_B}{d_A})^2\xrightarrow[A_A=A_B]{f_A=f_B}\frac{I_A}{I_B}=(\frac{d_B}{d_A})^2\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=16$$

۳ اختلاف تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta B=10\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\Delta B=10\log16\Rightarrow\Delta B=10\log2^4$$

$$\Rightarrow\Delta B=40\log2\Rightarrow\Delta B=40\times0/3=12dB$$

B ۱۵۷۸ ۳

۱ با توجه به تعریف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_0}-10\log\frac{I_2}{I_0}\Rightarrow\beta_1-\beta_2=10\log\frac{\frac{I_1}{I_0}}{\frac{I_2}{I_0}}\Rightarrow\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_2}\quad(I)$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد. $\frac{I_1}{I_2}=(\frac{r_2}{r_1})^2\quad(II)$

۳ با توجه به فرض مسئله $\beta_1=54dB$ و $\beta_2=40dB$ است اکنون رابطهٔ (II) را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم: $54-40=10\log(\frac{r_2}{r_1})^2\Rightarrow1/4=\log(\frac{r_2}{r_1})^2$

به جای عدد ۱/۴ مقدار ۲−۰/۶ و به جای ۰/۶=۲×۰/۳ را قرار می‌دهیم.

$$2-0/6=\log(\frac{r_2}{r_1})^2\Rightarrow2-2\times0/3=\log(\frac{r_2}{r_1})^2\xrightarrow{\log10^2=2,\log2=0/3}$$

$$\log10^2-2\log2=\log(\frac{r_2}{r_1})^2\Rightarrow\frac{100}{4}=(\frac{r_2}{r_1})^2\Rightarrow r_2=5r_1$$

۴ با توجه به فرض $r_2-r_1=36m$ است. $5r_1-r_1=36\Rightarrow r_1=9m$

B ۱۵۷۹ ۳

۱ نسبت شدت صوت در محل سطح (۲) به شدت صوت در محل سطح (۱) برابر است با:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\frac{P_2}{A_2}}{\frac{P_1}{A_1}}\xrightarrow{P_2=P_1=\text{توان چشمه}}\frac{I_2}{I_1}=\frac{A_1}{A_2}\xrightarrow{A_2=5A_1}\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{5}$$

۲ تراز شدت صوت در دو محل را نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_0}-10\log\frac{I_2}{I_0}\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}$$

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{\frac{I_1}{I_0}}{\frac{I_2}{I_0}}\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\beta_1-\beta_2=10\log 5\xrightarrow{5=\frac{10}{2}}$$

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{10}{2}=10(\log 10-\log 2)\xrightarrow{\log 10=1,\ \log 2=0/3}$$

$$\beta_1-\beta_2=10(1-0/3)\Rightarrow\beta_1-\beta_2=7dB$$

بنابراین شنونده (۱) صوت را ۷ دسی‌بل بلندتر می‌شنوند.

B ۱۵۸۰ ۳

خط فکری حد پایین گسترهٔ شنوایی نزدیک $10^{-12}W/m^2$ است. یعنی اگر شدت صوت از این مقدار کمتر شود، شخص دیگر صدا را نمی‌شنود، بنابراین حداکثر فاصله‌ای که شخص از چشمه دور می‌شود تا جایی است که شدت صوت به $10^{-12}W/m^2$ برسد، بنابراین با استفاده از تعریف شدت صوت مسئله حل می‌شود.

دقت کنید بسامد چشمه در حل این مسئله نقشی ندارد.

با نوشتن رابطهٔ شدت صوت، فاصله از چشمه را به‌دست می‌آوریم.

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow[A=4\pi r^2]{P=\frac{\pi}{2/5}\times10^{-3}}10^{-12}=\frac{\frac{\pi}{2/5}\times10^{-3}}{4\pi r^2}\Rightarrow10^{-12}=\frac{10^{-3}}{10r^2}\Rightarrow r^2=10^8$$

$$\Rightarrow r=10^4m$$

B ۱۵۸۱ ۲

خط فکری جملهٔ «صدا به زحمت شنیده می‌شود» یعنی شدت صوتی که به گوش می‌رسد در حد آستانهٔ شنوایی یعنی $10^{-12}W/m^2$ است، بنابراین ابتدا شدت صوت را در حالتی که تراز شدت صوت 40dB را به‌دست بیاورید، سپس فاصله را حساب کنید.

۱ ابتدا شدت صوت را در فاصلهٔ ۲ متری چشمه به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow40=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\frac{I}{10^{-12}}=10^4\Rightarrow I=10^{-8}W/m^2$$

۲ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\Rightarrow\frac{10^{-12}}{10^{-8}}=(\frac{2}{r_2})^2\Rightarrow10^{-2}=\frac{2}{r_2}\Rightarrow r_2=200m$$

B ۱۵۸۲ ۴

۱ صوت A به اندازهٔ 5dB بلندتر از صوت B شنیده می‌شود، بنابراین:

$\beta_A-\beta_B=5dB$ (I)

۲ صوت A، 15dB از صوت C کوتاه‌تر شنیده می‌شود، در نتیجه:

$\beta_C-\beta_A=15dB$ (II)

۳ در مسئله از شما رابطهٔ بین شدت صوت C و شدت صوت B خواسته شده است بنابراین باید A را از روابط حذف کنیم. از این‌رو دو رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم.

$\beta_A-\beta_B+\beta_C-\beta_A=5+15\Rightarrow\beta_C-\beta_B=20dB$

۴ اکنون به کمک تعریف تراز شدت صوت، مسأله را پاسخ می‌دهیم.

$$\beta_C-\beta_B=10\log\frac{I_C}{I_0}-10\log\frac{I_B}{I_0}\Rightarrow\beta_C-\beta_B=10\log\frac{I_C}{I_B}$$

$$\Rightarrow20=10\log\frac{I_C}{I_B}\Rightarrow\frac{I_C}{I_B}=10^2=100$$

بنابراین شدت صوت C، ۱۰۰ برابر شدت صوت B است و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۱۵۸۳ ۱

خط فکری در سؤالاتی که تراز شدت صوت در چند نقطه داده می‌شود به نکات زیر دقت کنید:

الف) شدت صوت برابر $I=\frac{P}{A}$ است که در این رابطه $A=4\pi r^2$ و r فاصله از چشمهٔ صوت و P توان چشمه صوت است.

ب) اگر چشمهٔ صوت یکسان و فاصله‌ها در حال تغییر باشند، توان چشمه P در هر نقطه ثابت اما A با توجه به فاصله از چشمه در حال تغییر است.

پ) تراز شدت صوت برابر است:

$$\underbrace{\beta}_{\text{تراز شدت صوت برحسب دسی بل}}=10\log\frac{\overset{\text{شدت صوت در نقطه خواسته شده}}{I}}{\underset{\text{تراز شدت صوت مبنا}}{I_0}}$$

اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ دلخواه (۱) و (۲) برابر است:

$$\Delta\beta=\beta_2-\beta_1\Rightarrow\Delta\beta=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\Delta\beta=10(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0})\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\Delta\beta=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

ت) نسبت شدت صوت در دو نقطه برابر است با:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{P_2}{P_1}\times\underbrace{\frac{A_1}{A_2}}_{\text{مساحت سطح جبهه صوت}}\xrightarrow[A=4\pi r^2]{P\propto \overset{\text{بسامد چشمه موج}}{f^2},\ P\propto \overset{\text{دامنه چشمه موج}}{A^2}}\frac{I_2}{I_1}=(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{A_2}{A_1})^2\times(\frac{r_1}{r_2})^2$$

که اگر چشمه ثابت باشد: $\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2$

جمع‌بندی از نکات لگاریتم که در این بخش به آن نیاز داریم:

$\log a+\log b=\log ab$ $\qquad$ $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

$\log a^b=b\log a$ $\qquad$ $\log a=\log b\Rightarrow a=b$

$\log10^a=a\log10=a$

۱ اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\beta=\beta_A-\beta_B\xrightarrow[\beta_B=10\log\frac{I_B}{I_0}=\frac{5}{6}\beta_A]{\beta_A=10\log\frac{I_A}{I_0}=\beta}$$

$$\beta_A-\frac{5}{6}\beta_A=10(\log\frac{I_A}{I_0}-\log\frac{I_B}{I_0})\Rightarrow\frac{\beta_A}{6}=10\log\frac{I_A}{I_B}$$

۲ چشمه ثابت است و شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد یعنی $\frac{I_A}{I_B}$ برابر $(\frac{r_B}{r_A})^2$ است:

$$\frac{\beta_A}{6}=10\log(\frac{r_B}{r_A})^2\xrightarrow{r_B=2r_A}\frac{\beta_A}{6}=10\log(2)^2$$

$$\xrightarrow{\log a^b=b\log a}\frac{\beta_A}{6}=20\log2\xrightarrow{\log2=0/3}\frac{\beta_A}{6}=6\Rightarrow\beta_A=36d\beta$$

۳ حال اختلاف تراز شدت صوت بین A و C را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta_A-\beta_C=10\log\frac{I_A}{I_0}-10\log\frac{I_C}{I_0}\Rightarrow36-\beta_C=10(\log\frac{I_A}{I_C})$$

$$\xrightarrow[16=2^4]{\frac{I_A}{I_C}=(\frac{r_C}{r_A})^2=16}36-\beta_C=10\log2^4\xrightarrow{\log a^b=b\log a}$$

$$36-\beta_C=40\log2\xrightarrow{\log2=0/3}36-\beta_C=12\Rightarrow\beta_C=24d\beta$$

B ۱۵۸۴ ۳

۱ شـدت صوت، با مجذور دامنه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. با توجه به فرض مسئله نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲(\frac{r_۱}{r_۲})^۲=(۲۵)(۲)^۲=۱۰۰\quad (I)$$

۲ تراز شدت صوت به صورت $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ تعریف می‌شود. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}=۱۰\log\frac{\frac{I_۲}{I_۰}}{\frac{I_۱}{I_۰}}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\xrightarrow{(I)}\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log ۱۰۰=۱۰\log ۱۰^۲\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۲۰dB$$

بنابراین شدت صوت ۲۰ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

A ۱۵۸۵ ۲

۱ دامنه ۲۰٪ کاهش یافته است، بنابراین: $A_۲=A_۱-۰/۲A_۱\Rightarrow A_۲=۰/۸A_۱$

۲ شـدت صوت با مجذور دامنه نسـبت مسـتقیم دارد و نسبت شـدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم. $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{۰/۸A_۱}{A_۱})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۰/۶۴$

۳ تراز شدت صوت را در هر حالت نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰(\log\frac{I_۲}{I_۰}-\log\frac{I_۱}{I_۰})$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log ۰/۶۴=۱۰\log\frac{۶۴}{۱۰۰}$$

$$\xrightarrow{\log\frac{a}{b}=\log a-\log b}\beta_۲-\beta_۱=۱۰(\log ۶۴-\log ۱۰۰)$$

به جای ۶۴ مقدار $۲^۶$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰(\log ۲^۶-\log ۱۰^۲)\xrightarrow{\log a^n=n\log a}$$

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۶\log ۲-۲\log ۱۰)\xrightarrow{\log ۱۰=۱,\ \log ۲=۰/۳}$$

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۶\times ۰/۳-۲\times ۱)\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۱/۸-۲)=-۲dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۲dB کاهش می‌یابد.

B ۱۵۸۶ ۴

خط فکری ابتـدا باید مشـخص کنید وقتی دامنه ۴ برابر می‌شـود، شـدت صوت چند برابر می‌شـود و در نتیجه تراز شـدت صوت چند دسـی‌بل تغییـر می‌کند تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون و با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\xrightarrow{A_۲=۴A_۱}\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{۴A_۱}{A_۱})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۱۶$$

۲ تغییر تراز شدت صوت را حساب می‌کنیم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log ۱۶\xrightarrow{۱۶=۲^۴}\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log ۲^۴$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۴۰\log ۲\xrightarrow{\log ۲=۰/۳}\beta_۲-\beta_۱=۴۰\times ۰/۳$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۲dB\ (I)$$

۳ بنـا به فرض مسـئله $\beta_۲=۱/۳\beta_۱$ اسـت از این‌رو در رابطـهٔ (I) به جای $\beta_۲$، $۱/۳\beta_۱$ را قرار می‌دهیم.

$$۱/۳\beta_۱-\beta_۱=۱۲\Rightarrow ۰/۳\beta_۱=۱۲\Rightarrow\beta_۱=\frac{۱۲۰}{۳}=۴۰dB$$

۴ در صورت مسـئله بیان شـده که در این حالت «تراز شـدت صوت چند دسی‌بل» یعنی $\beta_۲$ چند دسی‌بل است. $\beta_۲=۱/۳\beta_۱=۱/۳\times ۴۰=۵۲dB$

C ۱۵۸۷ ۳

۱ شدت صوت با مجذور بسامد و مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد. از این‌رو:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\xrightarrow{f_۲=۳f_۱,A_۲=۳A_۱}\frac{I_۲}{I_۱}=(۳)^۲(۳)^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۳^۴$$

۲ تغییر تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\xrightarrow{\beta_۲=۳/۵\beta_۱}۳/۵\beta_۱-\beta_۱=۱۰\log ۳^۴\Rightarrow ۲/۵\beta_۱=۱۰\times ۴\log ۳$$

$$\xrightarrow{\log ۳=۰/۵}۲/۵\beta_۱=۱۰\times ۴\times ۰/۵\Rightarrow ۲/۵\beta_۱=۲۰\Rightarrow\beta_۱=\frac{۲۰}{۲/۵}\Rightarrow\beta_۱=۸dB$$

تراز شدت صوت $\beta_۲$ خواهد شد: $\beta_۲=۳/۵\beta_۱\Rightarrow\beta_۲=۳/۵\times ۸\Rightarrow\beta_۲=۲۸dB$

B ۱۵۸۸ ۱

نکته شدت صوت با مربع دامنه و مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله از چشمه نسبت وارون دارد: $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\times(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{d_۱}{d_۲})^۲$

۱ شرایط محیط ثابت است. بنابراین:

$$v=f_۱\lambda_۱\ ,\ v=f_۲\lambda_۲\Rightarrow f_۱\lambda_۱=f_۲\lambda_۲\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\xrightarrow{\lambda_۲=۴\lambda_۱}f_۲=\frac{۱}{۴}f_۱$$

۲ دامنه چهار برابر $(A_۲=۴A_۱)$ و فاصلهٔ نصف شـده $(d_۲=\frac{d_۱}{۲})$ و بسـامد نیز $\frac{۱}{۴}$ شده است، بنابراین نسبت شدت صوت خواهد شد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\times(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۴^۲\times(\frac{۱}{۴})^۲\times(۲)^۲=۲^۲$$

۳ باتوجه‌به‌تعریف‌ترازشدت‌صوت‌خواهیم‌داشت: $\beta'=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}\ ,\ \beta=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}$

$$\beta'-\beta=۱۰(\log\frac{I_۲}{I_۰}-\log\frac{I_۱}{I_۰})=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}=۱۰\log ۲^۲=۲۰\log ۲\Rightarrow\Delta\beta=۲۰\times ۰/۳=۶dB$$

B ۱۵۸۹ ۱

خط فکری بـا توجه بـه نمودارها ابتدا نسـبت دامنه‌ها و طول موج‌ها را مشخص کنیـد. تنـدی انتشـار موج در محیط برای دو موج A و B یکسـان اسـت. به کمک این مطلب، نسـبت بسـامدها را به‌دسـت بیاورید تا بتوانید نسبت شـدت صوت‌ها و از آنجا اختلاف تراز شدت صوت‌ها را حساب کنید.

$$\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$$

۱ دامنهٔ A دو برابر دامنهٔ B است. $A_A=۲A_B$

۲ طول موج A نصف طول موج B است، بنابراین:

$$\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}\xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}}\frac{v_A}{f_A}=\frac{۱}{۲}\frac{v_B}{f_B}\xrightarrow{v_A=v_B}f_A=۲f_B$$

۳ شدت صوت با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{A_A}{A_B})^۲\times(\frac{f_A}{f_B})^۲\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=(۲)^۲\times(۲)^۲\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=۲^۴$$

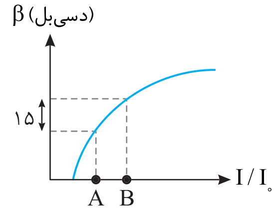
۴ اختلاف تراز شدت صوت خواهد شد:

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۱۰\log ۲^۴\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۴۰\log ۲$$

$$\xrightarrow{\log ۲=۰/۳}\beta_A-\beta_B=۱۲dB$$

B ۱۵۹۰ ۳

با توجه به نمودار و تعریف تراز شدت صوت می‌توانیم بنویسیم:



$$\beta_B-\beta_A=۱۰\log\frac{I_B}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}=۱۰\log\frac{\frac{I_B}{I_۰}}{\frac{I_A}{I_۰}}\Rightarrow\beta_B-\beta_A=۱۰\log\frac{I_B}{I_A}$$

داده‌های نمودار را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$۱۵=۱۰\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow ۱/۵=\log\frac{I_B}{I_A}\xrightarrow{۱/۵=۱+۰/۵}$$

$$۱+۰/۵=\log\frac{I_B}{I_A}\xrightarrow[\log ۳=۰/۵]{\log ۱۰=۱}\log ۱۰+\log ۳=\log\frac{I_B}{I_A}$$

$$\log ۱۰\times ۳=\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=۳۰$$

شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{r_A}{r_B})^۲\Rightarrow ۳۰=(\frac{r_A}{r_B})^۲\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=\sqrt{۳۰}$$

B ۱۵۹۱ ۴

خط فکری در حل این مسـئله باید دقت کنید که جذب انرژی صوتی توسـط هوا قابل ملاحظه است بنابراین با دورشدن از چشمه، شدت صوت به شدت کاهش می‌یابد یعنی اگر فاصلهٔ ۳ برابر شود، شدت صوت $\frac{۱}{۹}$ نمی‌شود و از $\frac{۱}{۹}$ نیز کمتر خواهد شد.

ابتـدا اختلاف تراز شـدت صوت در نقـاط A و B را بدون در نظر گرفتـن اتلاف انرژی به‌دسـت می‌آوریم. سـپس با توجه به اتلاف انرژی اختـلاف β_A و β_B از عددی که به‌دست آورده‌ایم بزرگ‌تر است.

شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد از این‌رو:

$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d_A}{d_B})^۲\xrightarrow{d_A=d,d_B=۳d}\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d}{۳d})^۲\Rightarrow I_A=۹I_B$$

اختلاف تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log(\frac{I_A}{I_B})=۱۰\log ۹=۱۰\log ۳^۲$$

$$\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۲۰\log ۳=۲۰\times ۰/۵=۱۰dB$$

بنابراین اگر اتلاف انرژی نبود، اختلاف β_A و β_B، ۱۰dB می‌شد، یعنی از β_A، ۱۰dB کاسته می‌شد اما چون جذب انرژی قابل ملاحظه است از β_A مقدار بیشتری کاسته می‌شود و اختلاف β_A و β_B از ۱۰dB بزرگ‌تر خواهد شد. $\beta_A-\beta_B>۱۰\,dB$

B ۱۵۹۲ ۲

خط فکری در محیط جذب انرژی صوتی وجود دارد. برای آنکه مشخص کنیم که چند درصد انرژی جذب شـده است، شـدت صوت در فاصلهٔ ۲۰ متری را به کمک تراز شـدت صوت شنیده شده در محل (۸۰dB) به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک شدت صوت، توان رسیده به فاصلهٔ ۲۰ متری را حساب می‌کنیم تا مشخص شود چه مقدار توان در مسیر جذب شده است.

۱ ابتدا شدت صوت دریافتی توسط شنونده را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow ۸۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۱۰^۸=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۱۰^{-۴}W/m^۲$$

۲ توان در محل شنونده را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{P'}{A}\Rightarrow I=\frac{P'}{۴\pi R^۲}\Rightarrow ۱۰^{-۴}=\frac{P'}{۴\times۳\times(۲۰)^۲}\Rightarrow P'=۴۸۰۰\times۱۰^{-۴}\times۱۰^۳mW$$

$$\Rightarrow P'=۴۸۰mW$$

۳ درصد اتلاف (جذب) توان در محیط برابر است با:

$$\text{درصد جذب توان}=\frac{P'-P}{P}\times۱۰۰=\frac{۴۸۰-۵۰۰}{۵۰۰}\times۱۰۰=-۴\%$$

۴ درصد توان جذب محیط می‌شود.

B ۱۵۹۳ ۳

خط فکری اختلاف تراز شـدت صوت در محل A و B را در اختیار داریم بنابراین می‌توانیـم نسـبت فاصلـهٔ d_B و d_A را به‌دسـت بیاوریـم و با اسـتفاده از آن SA را حساب کرده سپس به کمک رابطهٔ فیثاغورس AB را بیابیم.

۱ با توجه به تعریف تراز شدت صوت، اختلاف ترازها را حساب می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_B}{I_۰}\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\xrightarrow{\beta_A-\beta_B=۹dB}۹=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow ۰/۹=\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\xrightarrow{۰/۹=۳\times۰/۳=۳\log ۲}۳\log ۲=\log\frac{I_A}{I_B}\xrightarrow{n\log a=\log a^n}$$

$$\log ۲^۳=\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=۸$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{SB}{SA})^۲\Rightarrow ۸=(\frac{۲۴}{SA})^۲\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\frac{۲۴}{SA}\Rightarrow SA=۶\sqrt{۲}m$$

۳ فاصلهٔ AB را حساب می‌کنیم:

$$AB^۲=SA^۲+SB^۲\Rightarrow AB^۲=(۶\sqrt{۲})^۲+(۲۴)^۲\Rightarrow AB^۲=۶^۲[(\sqrt{۲})^۲+۴^۲]$$

$$\Rightarrow AB^۲=۶^۲(۱۸)\Rightarrow AB=۶\times۳\sqrt{۲}\Rightarrow AB=۱۸\sqrt{۲}m$$

B ۱۵۹۴ ۲

۱ شدت صوت چشمهٔ A در محل P برابر است با:

$$I_A=\frac{P_A}{A_A}=\frac{P_A}{۴\pi r_A^۲}\xrightarrow[r_A=۶m]{P_A=۳۶۰۰W}I_A=\frac{۳۶۰۰}{۴\pi(۶)^۲}\Rightarrow I_A=\frac{۲۵}{\pi}W/m^۲$$

۲ فاصلهٔ منبع B تا گیرندهٔ P را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم.

$$PB^۲=۶^۲+۸^۲\Rightarrow PB=۱۰m$$

۳ شدت صوت چشمهٔ B در محل گیرندهٔ P را حساب می‌کنیم.

$$I_B=\frac{P_B}{A_B}=\frac{P_B}{۴\pi r_B^۲}\xrightarrow{r_B=۱۰m}I_B=\frac{۱۰۰۰۰}{۴\pi(۱۰۰)}\Rightarrow I_B=\frac{۲۵}{\pi}W/m^۲$$

۴ شدت صوت دریافتی توسط گیرندهٔ موج

$$I_{\text{کل}}=I_A+I_B=\frac{۵۰}{\pi}W/m^۲$$

A ۱۵۹۵ ۳

شـدت صوت را می‌توان با یک آشکارسـاز اندازه گرفت. با اندازه‌گیری شدت صوت‌های مختلف درمی‌یابیم نسـبت شدت‌های صوت در گسترهٔ شنوایی انسان می‌تواند در حدود $۱۰^{۱۲}$ باشد بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

$I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲$ را شـدت صوت مرجع می‌نامند که نزدیک به حد پایین گسـترهٔ شنیداری انسان است. گزارهٔ (ب) نادرست می‌باشد.

وقتی دیاپازونی را با ضربه‌ای به ارتعاش وا می‌داریم، دیاپازون نوسـان‌هایی انجام می‌دهد که به دلیل میرایی کم، به حرکت هماهنگ ساده نزدیک است. به صوت حاصل از چنین چشمه‌هایی تُنِ موسیقی یا به اختصار تُن گفته می‌شود و گزارهٔ «پ» درست است.

A ۱۵۹۶ ۱

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند اما بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند. وقتی که در فاصله‌ای دورتر از چشمه قرار می‌گیریم بسامد صوت که توسط چشمه صوت تعیین می‌شود تغییر نمی‌کند بنابراین ارتفاع صوت ثابت می‌ماند. اما به دلیل این که شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد وقتی فاصلهٔ شخص از چشمه بیشتر می‌شود، بلندی صوت کمتر احساس می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

A ۱۵۹۷ ۲

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند و بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند بنابراین بلندی و ارتفاع صوت علاوه بر اینکه به چشمهٔ صوت بستگی دارند به حس شنوایی ما وابسته هستند. در واقع بلندی متفاوت با شدت است. شدت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت در حالی که بلندی چیزی است که شخص حس می‌کند و قابل اندازه‌گیری نیست، از این رو گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۵۹۸ ۱

بیشترین حساسیت گوش انسان به بسامدهایی در گسترهٔ $۲۰۰۰Hz$ تا $۵۰۰۰Hz$ است، در حالی که گوش انسان قادر به شنیدن تن‌های صدای $۲۰Hz$ تا $۲۰۰۰۰Hz$ است.

A ۱۵۹۹ ۴

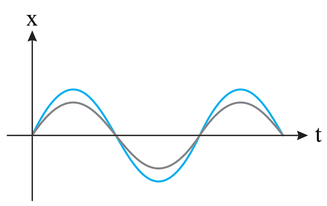
برای تقویت صوت از بلندگو استفاده می‌شود و بلندگو با افزایش دامنهٔ ارتعاش صوت، انرژی صوت (و همچنین شدت صوت) را افزایش می‌دهد و سبب می‌گردد که صدای تقویت شده تا فاصله‌های دورتری شنیده شود.

A ۱۶۰۰ ۲

ارتفاع صوت به بسامد بستگی دارد که چون چشمه یکسان است بنابراین ارتفاع صوت رسیده به هر دو شخص یکسان می‌باشد. با توجه به رابطهٔ $I=\frac{P}{A}$ شدت صوت با سه برابر شدن مساحت سطح، $\frac{۱}{۳}$ می‌شود $(I_۲=۳I_۱)$ و صوتی که شخص B می‌شنود ضعیف‌تر (آهسته‌تر) است.

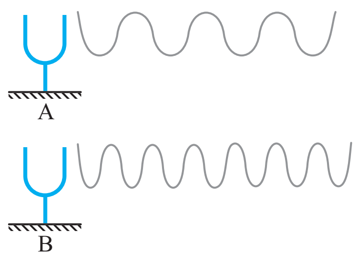
A ۱۶۰۱ ۳

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند. با توجه به شکل، دورهٔ صوت‌های تولیدی و در نتیجه بسامد آن‌ها با هم برابر است، بنابراین ارتفاع دو صوت با هم یکسان است. بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند شدت صوت با موج دامنه نسبت مستقیم دارد. دامنهٔ دو صوت یکسان نیست در نتیجه شدت صوت‌ها متفاوت است بنابراین بلندی دو صوت متفاوت است.



A ۱۶۰۲ ۳

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند و هرچه بسامد صوت بیشتر باشد، ارتفاع آن بیشتر است. با توجه به شکل طول موج صوت حاصل از دیاپازون A بلندتر از طول موج صوت حاصل از دیاپازون B است. با توجه به ثابت بودن تندی صوت و بنا بر رابطهٔ $f=\frac{v}{\lambda}$ می‌توان نتیجه گرفت که $f_B>f_A$ است و ارتفاع صوت B بیشتر از ارتفاع صوت A است.



B ۱۶۰۳ ۲

۱ بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند. حساسیت گوش برای این دو بسامد یکسان فرض شده است بنابراین وقتی دو صوت با یک بلندی شنیده می‌شود یعنی شدت دو صوت رسیده به شخص یکسان است. $(I_۱=I_۲)$

۲ شدت صوت با مربع دامنه و مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\times(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow۱=۱۶\times(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow(\frac{d_۱}{d_۲})^۲=\frac{۱}{۱۶}$$

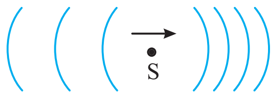
$$\Rightarrow\frac{d_۱}{d_۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow d_۲=۴d_۱$$

A ۱۶۰۴ ۱

گوش یک انسان با شنوایی معمولی بسامدهای بین $۲۰Hz$ و $۲۰۰۰۰Hz$ را می‌شنود. اکنون طول موج این بسامدها را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۳۲۰}{۲۰}\Rightarrow\lambda=۱۶m\,,\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۳۲۰}{۲۰۰۰۰}\Rightarrow\lambda=۱/۶\times۱۰^{-۲}m$$

A ۱۶۰۵ ۴

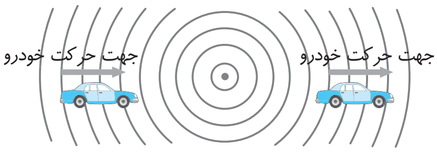


هرگاه چشمهٔ موج در حرکت باشد جبهه‌های موج در جلوی چشمه به هم نزدیک می‌شوند و طول موج کاهش می‌یابد و در پشت چشمه، جبهه‌ها از هم فاصله می‌گیرند و طول موج افزایش می‌یابد یعنی طول موج با حرکت چشمه تغییر می‌کند. تندی انتشار موج در محیط ثابت است و با تغییر طول موج، بسامد نیز تغییر می‌کند. $(f_{\text{متغیر}}=\frac{v_{\text{ثابت}}}{\lambda_{\text{متغیر}}})$

A ۱۶۰۶ ۳

هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج در جلو و عقب آن یکسان است. از این رو $\lambda_r=\lambda_l$ خواهد بود اما هنگام نزدیک شدن شنونده به چشمهٔ ساکن بسامد دریافتی توسط شنونده از بسامد واقعی چشمه بیشتر است $(f_r>f_s)$ و هنگام دورشدن از چشمه بسامد دریافتی توسط شنونده از بسامد واقعی چشمه کمتر است $(f_l<f_s)$.

بنابراین بسامد دریافتی شنونده هنگام نزدیک شدن (f_r) از بسامد دریافتی شنونده هنگام دورشدن (f_l) بیشتر است. $(f_r>f_l)$



در مدت زمان یکسان، خودرویی که به چشمهٔ ساکن صوت نزدیک می‌شود با جبهه‌های موج بیشتری برخورد می‌کند، در حالی که خودرویی که از این چشمه دور می‌شود، با جبهه‌های موج کم‌تری برخورد می‌کند.

A ۱۶۰۷ ۴

نکته هرگاه چشمهٔ صوت ساکن باشد، طول موج دریافتی توسط ناظر با طول موج چشمه یکسان است.

در گزینهٔ (۱) و (۲) که چشمه در حال حرکت است نمی‌تواند $\lambda_o=\lambda_s$ باشد و این دو گزینه نادرست هستند.

نکته هرگاه ناظر به چشمه نزدیک شود بسامد دریافتی (f_o) از بسامد چشمه (f_s) بیشتر است.

در گزینهٔ (۳) ناظر در حال دور شدن از چشمه است و بسامد دریافتی ناظر از بسامد چشمه کمتر است $(f_o<f_s)$ و این گزینه نادرست است.

در گزینهٔ (۴) ناظر در حال نزدیک شدن به چشمه است و $f_o>f_s$ بوده و چون چشمه ساکن است طول موج ثابت بوده و $\lambda_o=\lambda_s$ است از این رو گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۶۰۸ ۳

نکته وقتی چشمهٔ صوت ساکن است طول موج تغییر نمی‌کند و به حرکت ناظر بستگی ندارد.

هر دو ناظر نسبت به یک چشمهٔ ساکن در حرکت هستند بنابراین طول موج دریافتی توسط هر دو ناظر برابر طول موج چشمه بوده و $\lambda_B=\lambda_A$ خواهد بود.

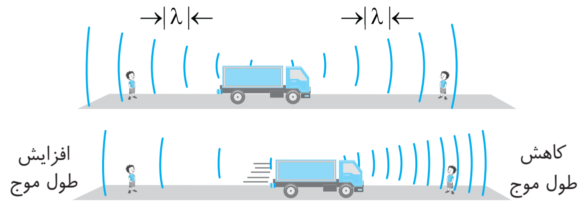
B ۱۶۰۹ ۴

با توجه به حرکت چشمه به سمت شخص، فاصلهٔ جبهه‌های موج در جلوی چشمه از هم کم می‌شود، پس طول موج صوت کاهش می‌یابد $(\lambda\downarrow)$. هم‌چنین شرایط محیطی یکسان است پس تندی صوت در حالت سکون و یا حرکت چشمه یکسان از نظر شنونده ثابت است.

$\downarrow\lambda=\frac{v_{\text{ثابت}}}{f}\Rightarrow f\uparrow$ بسامد افزایش می‌یابد

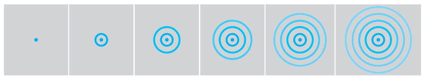
چون فاصلهٔ چشمه از شخص در حال کاهش است بنابراین شدت صوت $(I\propto 1/d^2)$ در حال افزایش می‌باشد.

ارتفاع صوت به بسامد صوت و بلندی صوت به شدت صوت بستگی دارد. بسامد و شدت صوت در حال افزایش است بنابراین بلندی و ارتفاع صوت در حال افزایش است.

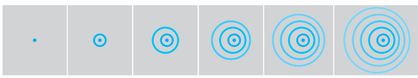


A ۱۶۱۰ ۱

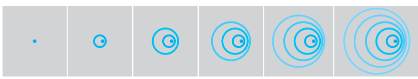
یادآوری ۱ اگر چشمهٔ موج ساکن باشد، جبهه‌های موج به صورت دایره‌هایی هم‌مرکز با فواصل یکسان مدل‌سازی می‌شود. $(v_s=0)$

(الف)


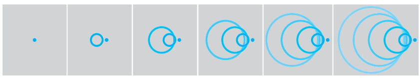
۲ اگر چشمه حرکت کند در جهتی که حرکت می‌کند جبهه‌های موج به هم نزدیک می‌شود و اگر سرعت چشمه از سرعت صوت (موج) کمتر باشد، $(v_s<v_{\text{موج}})$، جبهه‌های موج به صورت زیر است. در این شکل چشمه به سمت راست در حرکت است.

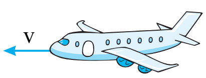
(ب)


۳ اگر سرعت چشمه (v_s) برابر سرعت صوت باشد، جبهه‌های موج در جهت پیشروی موج بر هم مماس می‌شوند. $(v_s=v_{\text{موج}})$

(پ)


۴ اگر سرعت چشمه بیشتر از سرعت صوت $(v_s>v_{\text{صوت}})$ باشد، جبهه‌های جدید از جبهه‌های قدیمی‌تر، جلوی می‌زنند و چشمه جبهه‌های خود را پشت سر می‌گذارد.

(ت)




با توجه به جهت حرکت چشمه به سمت چپ، جبهه‌های موج در سمت راست دارای فاصلهٔ بیشتر و در سمت چپ جلوی چشمه دارای فاصلهٔ کمتر هستند. از طرفی هرگاه تندی چشمه از تندی صوت بیشتر می‌شود، جبهه‌هایی که زودتر تولید شده‌اند از جبهه‌هایی که بعداً ایجاد شده‌اند عقب می‌ماند و شکل جبهه‌های موج مانند گزینهٔ (۱) خواهد بود.

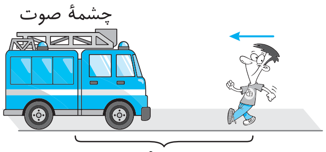
B ۱۶۱۱ ۲

x_1 و x_2 در واقع همان طول موج‌های چشمه‌های s_1 و s_2 می‌باشند و چون در طرف x_1 و x_2 فاصلهٔ بین جبهه‌های موج بیشتر از طرف دیگر است می‌فهمیم که x_1 و x_2 باید در عقب چشمه باشند، بنابراین چشمهٔ s_2 به سمت راست و چشمهٔ s_1 به سمت چپ می‌رود و چون $x_2>x_1$ است تندی چشمهٔ s_2 بیشتر است.

A ۱۶۱۲ ۱

نکته هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج در تمام محیط با طول موج چشمه برابر بوده و طول موج ثابت است.

در این مسئله چشمهٔ صوت ساکن است و با گذشت زمان طول موج ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است، نیازی به محاسبهٔ طول موج نیست.



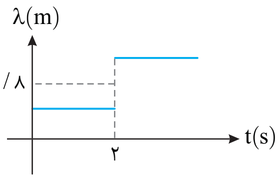
B ۱۶۱۳ ۲

۱ ابتدا زمان رسیدن چشمه به شنونده را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{d}{t}\Rightarrow 20=\frac{40}{t}\Rightarrow t=2s$$

۲ سپس طول موج صوت چشمه را وقتی که چشمه ساکن است، به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{320}{400}\Rightarrow\lambda=0/8m$$



۳ در هنگام نزدیک شدن چشمه به شنونده، طول موج در جلوی چشمه از $\lambda=0/8m$ کمتر است و هنگام دور شدن چشمه که شنونده در پشت چشمه قرار دارد طول موج از $0/8m$ بزرگ‌تر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۶۱۴ ۳

شخص A درون آمبولانس است و به همراه چشمهٔ صوت با یک تندی در حرکت است و نسبت به چشمهٔ صوت ساکن است بنابراین اثر دوپلر برای او رخ نمی‌دهد. $(f_A=f_s)$ اما شخص B در جلوی چشمه بوده و چشمهٔ صوت در حال نزدیک‌شدن به اوست در این حالت طول موج‌های جلوی چشمه کوتاه‌تر و بسامد دریافتی شخص B بیشتر از f_s خواهد بود $(f_B>f_s)$ و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۶۱۵ ۲

خط فکری شنونده در حال نزدیک شدن به چشمهٔ ساکن است بنابراین طول موج ثابت است اما بسامد دریافتی شنونده از بسامد چشمه بیشتر است. بسامد زاویه‌ای موج را از روی معادله $(x=5\times10^{-4}\cos 800\pi t)$ به‌دست می‌آوریم، بسامد چشمه و طول موج را حساب می‌کنیم. هر بسامدی که در گزینه‌ها از بسامد چشمه بیشتر باشد می‌تواند جواب مسئله باشد.

۱ بسامد موج را حساب می‌کنیم. $\omega=2\pi f\Rightarrow 800\pi=2\pi f_s\Rightarrow f_s=400Hz$

۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=330m/s}\lambda=\frac{330}{400}\Rightarrow\lambda=0/825m$$

۳ چشمه ساکن است بنابراین طول موج رسیده به شخص همان $0/825$ است و گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست است.

۴ شخص به چشمه نزدیک می‌شود بنابراین بسامد دریافتی شخص باید از بسامد چشمه بیشتر $(f_o>400Hz)$ باشد. در این صورت گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۶۱۶ ۳

خط فکری در حرکت چشمه (شخص در حال سقوط) هرچه تندی بیشتر می‌شود، جبهه‌های موج در جلوی چشمه فشرده‌تر شده و طول موج کوتاه‌تر و کوتاه‌تر شده یعنی با گذشت زمان و افزایش تندی، بسامد در جلوی چشمه در حال افزایش خواهد بود. اکنون بررسی کنید هنگام سقوط شخص، تندی آن چگونه تغییر می‌کند.

یادآوری ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند.

هنگام سقوط دائماً بر سرعت شخص در حال سقوط افزوده می‌شود، به همین دلیل بسامد دریافتی توسط شخص کنار استخر به علت پدیدهٔ دوپلر افزایش می‌یابد، بنابراین ارتفاع صوت دریافتی بیشتر می‌شود.

B ۱۶۱۷ ۳

نکته هرگاه چشمهٔ موج دارای حرکت شتابدار باشد و به ناظر نزدیک شود، اگر چشمه تندشونده باشد: بسامد دریافتی توسط ناظر (f_o) در حال افزایش بوده و $f_o>f_s$ است و اگر حرکت چشمه کندشونده باشد چون به ناظر نزدیک می‌شود $f_o>f_s$ است اما f_o در حال کاهش خواهد بود.

این یک سؤال علمی تخیلی است زیرا باید گوش حساسی داشته باشید تا بتوانید در آن مدت کوتاه تغییر ارتفاع را حس کنید. اما پاسخ چیست؟

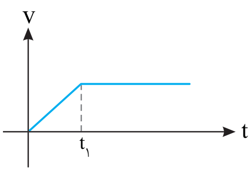
ارتفاع در حال کاهش است یعنی بسامد در حال کاهش است بنابراین تندی آمبولانس در حال کاهش است که سبب می‌گردد بسامد دریافتی توسط شما کاهش یابد و سپس ممکن است تندی آن ثابت و یا ساکن شود که در این صورت بسامد دریافتی ثابت می‌ماند بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۶۱۸ ۴

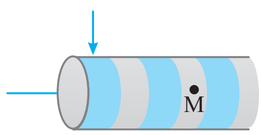
نکته ۱ هرگاه چشمه با حرکت شتاب‌دار تندشونده در حال دور شدن از ناظر باشد بسامد دریافتی توسط ناظر f_o از بسامد چشمه f_s کمتر است $(f_o<f_s)$ و علاوه بر آن f_o در حال کاهش است.

نکته ۲ هرگاه چشمه با حرکت شتاب‌دار کندشونده در حال دور شدن از ناظر باشد $f_o<f_s$ بوده و علاوه بر آن f_o در حال افزایش و نزدیک شدن به f_s است.

چشمه در حال دور شدن از ناظر است و بسامد دریافتی توسط ناظر از بسامد چشمه کمتر است اما تا لحظهٔ $t_۱$ سرعت چشمه در حال افزایش است. به همین دلیل بسامد دریافتی در حال کاهش است و بعد از $t_۱$ چشمه با تندی ثابت در حال دور شدن از ناظر است بنابراین بسامد دریافتی توسط ناظر ثابت می‌ماند، اما همچنان $f_o<f_s$ است.



A ۱۶۱۹ ۴



با توجه به شکل فاصلهٔ نقطهٔ M و تپ انبساطی که با پیکان نشان داده شده $۳\frac{\lambda}{۲}$ است. در مدت $t=\frac{T}{۲}$، موج به اندازهٔ $\frac{\lambda}{۲}$ پیشروی می‌کند و تپ انبساطی نشان داده شده به اندازه $\frac{\lambda}{۲}$ به نقطهٔ M نزدیک می‌شود و فاصلهٔ تپ انبساطی از نقطهٔ M، λ می‌شود. از طرفی با حرکت موج به اندازه $\frac{\lambda}{۲}$ باید در محل قبلی تپ انبساطی یک ناحیهٔ تراکمی ایجاد شود. با توجه به مطالب گفته شده گزینهٔ (۴) درست است.

B ۱۶۲۰ ۴

خط فکری شدت صوت با مربع بسامد و مربع دامنه نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد. در اینجا فاصله‌ها یکسان بوده بنابراین $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱}\times\frac{f_۲}{f_۱})^۲$ است

یعنی هر کدام که حاصل‌ضرب Af یا $A\omega$ در آن‌ها بزرگ‌تر باشد، شدت صوت آن چشمه بیشتر است. حاصل‌ضرب $A\omega$ را برای هر گزینه به‌دست می‌آوریم.

گزینهٔ (۱): $۲^۲\times(۴\pi)^۲=۶۴\pi^۲$ ، گزینهٔ (۲): $(۸\pi)^۲=۶۴\pi^۲$

گزینهٔ (۳): $(۰/۵)^۲(۱۶\pi)^۲=۶۴\pi^۲$

بنابراین شدت صوت هر سه چشمه باهم برابر است و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۱۶۲۱ ۱

۱ شدت صوت با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{۱}{۱۰\sqrt{۲}})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow I_۱=۲۰۰I_۲$$

۲ اکنون مقدارهای $I_۱$ و $I_۲$ را جایگزین می‌کنیم:

$$۱۰^{\beta_۱-۱۲}=۲۰۰\times۵\times۱۰^{۲\beta_۱-۱۹}\Rightarrow۱۰^{\beta_۱-۱۲}=۱۰^۳\times۱۰^{۲\beta-۱۹}$$

$$\Rightarrow۱۰^{\beta_۱-۱۲}=۱۰^{۲\beta_۱-۱۶}\Rightarrow\beta_۱-۱۲=۲\beta_۱-۱۶\Rightarrow\beta_۱=۴dB$$

$$\Rightarrow I_۱=۱۰^{\beta_۱-۱۲}\Rightarrow I_۱=۱۰^{-۸}W/m^۲$$

C ۱۶۲۲ ۲

با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۲۸dB}۲۸=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow۲/۸=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

اکنون باید فکر کنیم ۲/۸۰ را چگونه بنویسیم تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. با توجه به فرض مسئله $(\log۲=۰/۳)$ باید به سراغ تولید ۰/۳ برویم. ۲/۸ را به صورت ۴×۰/۷ می‌نویسیم و به جای ۰/۷ نیز (۱−۰/۳) را قرار می‌دهیم بنابراین:

$$۴\times۰/۷=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow۴(۱-۰/۳)=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\xrightarrow{\log۱۰=۱\ ,\ \log۲=۰/۳}$$

$$۴(\log۱۰-\log۲)=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow۴\log\frac{۱۰}{۲}=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow۴\log۵=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow۵^۴=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۶/۲۵\times۱۰^{-۱۰}W/m^۲$$

B ۱۶۲۳ ۳

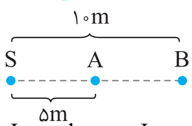
۱ ابتدا فرض می‌کنیم که اتلاف انرژی وجود ندارد و شدت صوت در ۴ متری چشمه صوت را حساب می‌کنیم.

$$\frac{I'}{I}=(\frac{r}{r'})^۲\xrightarrow{I=۵۰۰W/m^۲\ ,\ r=۲m\ ,\ r'=۴m}\frac{I'}{۵۰۰}=(\frac{۲}{۴})^۲\Rightarrow I'=۱۲۵W/m^۲$$

۲ ۵۰٪ این مقدار توسط محیط جذب شده و ۵۰٪ آن به ۴ متری رسیده است بنابراین شدت صوت در ۴ متری خواهد شد: $I''=\frac{۵۰}{۱۰۰}I'\Rightarrow I''=\frac{۵۰}{۱۰۰}\times۱۲۵\Rightarrow I''=۶۲/۵W/m^۲$

C ۱۶۲۴ ۴

۱ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد. بنابراین اگر اتلاف انرژی وجود نداشته باشد نسبت شدت صوت در نقاط A و B خواهد شد:



$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d_A}{d_B})^۲\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=(\frac{۵}{۱۰})^۲\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow I_B=\frac{۱}{۴}I_A$$

۲ با توجه به تعریف تراز شدت صوت، به کمک اختلاف تراز شدت در نقاط A و B، نسبت شدت صوت را حساب می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\xrightarrow{\beta_A=۴۵dB,\beta_B=۳۵dB}$$

$$۴۵-۳۵=۱۰\log\frac{I_A}{I'_B}\Rightarrow\log\frac{I_A}{I'_B}=۱\Rightarrow\frac{I_A}{I'_B}=۱۰\Rightarrow I'_B=\frac{۱}{۱۰}I_A$$

۳ درصد اتلاف انرژی خواهد شد:

$$\frac{I'_B-I_B}{I_B}\times۱۰۰=\frac{\frac{۱}{۱۰}I_A-\frac{۱}{۴}I_A}{\frac{۱}{۴}I_A}\times۱۰۰=\frac{\frac{۴-۱۰}{۴۰}}{\frac{۱}{۴}}=-۰/۶=-۶۰\%$$

۶۰ درصد انرژی تلف شده است.

B ۱۶۲۵ | ۳

خط فکری مسئلهٔ جالبی است. شما ابتدا باید شدت صوت حاصل از صدای گوینده در فاصلهٔ $r=0/5m$ از گوینده را حساب کرده، سپس سهم میکروفون از این شدت صوت را به‌دست بیاورید.

۱ شدت صوت در فاصلهٔ $50cm$ برابر است با:

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow{A=4\pi r^2}I=\frac{P}{4\pi r^2}$$

$$\xrightarrow{P=10\pi\times10^{-6}W}I=\frac{10\pi\times10^{-6}}{4\pi\times(0/5)^2}\Rightarrow I=10^{-5}W/m^2$$

۲ اکنون باید حساب کنیم که در مدت یک دقیقه با این شدت صوت از سطحی به مساحت $A_{\text{میکروفون}}=10cm^2$ چند ژول انرژی می‌گذرد.

$$E=IA_{\text{میکروفون}}t\Rightarrow E=10^{-5}\times10\times10^{-4}\times60\Rightarrow E=6\times10^{-7}J$$

B ۱۶۲۶ | ۱

یادآوری آستانهٔ شنوایی، ضعیف‌ترین صدایی است که گوش می‌تواند بشنود.

خط فکری برای گوش ضعیف‌ترین صدای بسامد $5kHz$ برابر $10^{-8}W/m^2$ است. بنابراین شخص تا جایی می‌تواند از چشمه دور شود که شدت صوت از $10^{-8}W/m^2$ کمتر نشود. با این مطلب، می‌توان بیشینه فاصلهٔ شخص از چشمه را حساب کرد. با توجه به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow{A=4\pi r^2,\ P=\frac{\pi}{100}W}10^{-8}=\frac{\frac{\pi}{100}}{4\pi r^2}\Rightarrow r^2=\frac{\pi}{4\pi r^2\times10^{-6}}$$

$$\Rightarrow r^2=\frac{10^6}{4}\Rightarrow r=\frac{1000}{2}=500m$$

B ۱۶۲۷ | ۳

خط فکری در رابطهٔ $I=P/A$ وقتی چشمه جبهه‌های موج کروی را به‌طور یکنواخت در تمام جهت‌ها منتشر می‌کند، در فاصلهٔ r از چشمه مساحتی که توان روی آن توزیع می‌شود برابر $A=4\pi r^2$ است. در این مسئله بلندگو تنها در جلوی خود جبهه‌های موج نیمکره را گسیل می‌کند بنابراین مساحت جبهه موج در فاصلهٔ r برابر نصف مساحت یک کره یعنی $A=\frac{4\pi r^2}{2}=2\pi r^2$ است. با دانستن این مطلب ابتدا شدت صوت و سپس تراز شدت صوت در فاصلهٔ ۵۰ متری بلندگو را به دست می‌آوریم.

۱ شدت صوت خواهد شد:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{2\pi r^2}\xrightarrow[\pi=3]{P=1/5W}I=\frac{1/5}{2\times3(50)^2}\Rightarrow I=10^{-4}W/m^2$$

۲ تراز شدت صوت در این محل را حساب می‌کنیم.

$$\beta=\log\frac{I}{I_0}=\log\frac{10^{-4}}{10^{-12}}=\log10^8\Rightarrow\beta=8B$$

B ۱۶۲۸ | ۴

۱ بسامد چشمه ۴۴ درصد افزایش یافته بنابراین بسامد خواهد شد:

$$f_2=f_1+\frac{44}{100}f_1=1/44f_1$$

۲ فاصله از چشمه نیز ۲۰ درصد افزایش می‌یابد بنابراین می‌توان نوشت:

$$d_2=d_1+\frac{20}{100}d_1=1/2d_1$$

۳ شدت صوت با مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{d_1}{d_2})^2=(1/44)^2\times(\frac{1}{1/2})^2=1/44$$

۴ تغییرات تراز شدت صوت برابر است با:

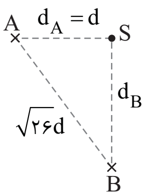
$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}=10\log1/44=10\log\frac{144}{100}$$

$$=10(\log144-\log100)=10(\log2^4\times3^2-2)\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(4\log2+2\log3-2)$$

$$\xrightarrow{\log2=0/3,\log3=0/5}\beta_2-\beta_1=10(1/2+1-2)=2dB\Rightarrow\beta_2-\beta_1=2dB$$

C ۱۶۲۹ | ۴

۱ ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ B از چشمه را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم:



$$AB^2=S_A^2+S_B^2=d_B^2+d_A^2=26d^2$$

$$\xrightarrow{d_A=d}d_B^2=25d^2\Rightarrow d_B=5d$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد، از این‌رو:

$$\xrightarrow{\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d_A}{d_B})^2}\frac{I_B}{I_A}=\frac{1}{25}$$

۳ اختلاف تراز شدت صوت برابر است با:

$$\beta_B-\beta_A=10\log\frac{I_B}{I_0}-10\log\frac{I_A}{I_0}=10\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow$$

$$\beta_B-\beta_A=10\log\frac{1}{25}=10\log5^{-2}\Rightarrow\beta_B-\beta_A=-20\log5\quad(I)$$

۴ اکنون $\log5$ را حساب می‌کنیم.

$$\log2\times5=1\Rightarrow\log2+\log5=1\xrightarrow{\log2=0/3}\log5=0/7$$

۵ $\log5$ را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم: $\beta_B-\beta_A=-20\times(0/7)=-14dB$

۶ تراز شدت صوت $14dB$ کاهش می‌یابد.

A ۱۶۳۰ | ۳

نکته هر گاه چشمهٔ صوت ساکن باشد، طول موج در تمام اطراف آن یکسان و برابر طول موج چشمه است و طول موج به حرکت ناظر بستگی ندارد.

در این مسئله چشمه ساکن است بنابراین در تمام طول مسیر حرکت کودک، طول موج ثابت است. $(\lambda_A=\lambda_B=\lambda_C)$

B ۱۶۳۱ | ۱

خط فکری هر گاه چشمه با حرکت شتاب‌دار تندشونده به ناظر نزدیک شود به دلیل نزدیک شدن به ناظر بسامد دریافتی شنونده $f_o>f_s$ است و به دلیل افزایش تندی، جبهه‌های موج به هم فشرده‌تر شده و بسامد دریافتی افزایش می‌یابد. بنابراین شما باید با به‌دست آوردن دورهٔ نوسان سامانهٔ جرم - فنر مشخص کنید که در لحظهٔ $t=0/4s$ بلندگو به ناظر (شنونده) نزدیک و یا دور می‌شود و حرکت آن در این لحظه چگونه است.

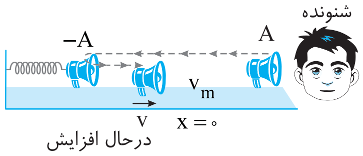
۱ دوره نوسان سامانه جرم - فنر را به دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=2\times3\times\sqrt{\frac{0/2}{20}}\Rightarrow T=0/6s$$

۲ بررسی می‌کنیم که $\Delta t=0/4s$ چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/4}{0/6}=\frac{2}{3}\Rightarrow\Delta t=2\frac{T}{3}$$

مدت زمان $2\frac{T}{3}$ از $\frac{T}{2}$ بیشتر و از $3\frac{T}{4}$ کمتر است. از این رو در لحظهٔ $t=0/4s$ بلندگو از مکان $+A$ به مکان $-A$ رفته و از مکان $-A$، به سوی حالت تعادل در حرکت است و چون به ناظر نزدیک می‌شود $f_o>f_s$ است و از طرفی سرعتش در حال افزایش است و f_o نیز در حال افزایش است.



C | ۱۶۳۲ | ۳

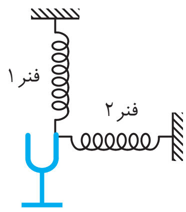
چشمه در حال نزدیک شدن به صخره است بنابراین ناظر ساکن کنار صخره بسامدی که دریافت می‌کند (f_{o_1}) از بسامد چشمه (f_s) بیشتر است $(f_{o_1}>f_s)$. صوت با بسامد f_{o_1} به صخره برخورد کرده و به سوی راننده برمی‌گردد. در این حالت صخره شبیه یک چشمهٔ ساکن رفتار می‌کند که امواجی با بسامد f_{o_1} به سوی شنوندهٔ متحرک می‌فرستد. از این رو شنونده متحرک که در حال نزدیک شدن به چشمه است بسامد دریافتی‌اش (f_{o_2}) از f_{o_1} بیشتر است بنابراین:

$$f_s<f_{o_1}<f_{o_2}$$

پنجرهٔ ۳ روبه‌روی ۴

B | ۱۶۳۲ | ۳

۱ به دیاپازون نگاه کنید. تیغه‌های دیاپازون وقتی به ارتعاش در می‌آیند به چپ و راست می‌روند.



وقتی تیغه به چپ می‌رود فنر ۲ را می‌کشد و فنر باز می‌شود و وقتی تیغه به سمت راست می‌رود، فنر ۲ جمع می‌شود و این باز شدگی و جمع‌شدگی سبب انتشار موج طولی در فنر ۲ می‌شود.

در فنر ۱ با حرکت تیغه حلقه‌ها به سمت چپ و راست می‌روند و موج به بالا می‌رود یعنی راستای نوسان حلقه بر راستای پیشروی موج عمود بوده و موج در فنر (۱) عرضی است.

نکته تندی انتشار امواج طولی در جامدات از تندی انتشار امواج عرضی بیشتر است.

۱ فنرها یکسان هستند اما در فنر (۲) موج طولی و در فنر (۱) موج عرضی است بنابراین $v_۲>v_۱$ است.

۲ بسامد موج را چشمهٔ موج تعیین می‌کند. چشمهٔ موج در هر دو فنر، دیاپازون است بنابراین بسامد موج در دو فنر یکسان است. $(f_۱=f_۲)$

۳ با ثابت بودن بسامد موج، با توجه به تعریف طول موج $(\lambda=v/f)$ چون $(v_۲>v_۱)$ است بنابراین $(\lambda_۲>\lambda_۱)$ خواهد شد.

۴ دامنهٔ چشمه برای هر دو موج یکسان است بنابراین دامنه موج در فنر (۱) و (۲) برابر است. $(A_۱=A_۲)$ در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.

نمای ۲۴

B | ۱۶۳۲ | ۴

۲

نکته فاصلهٔ بین یک تراکم و یک انبساط متوالی در امواج طولی برابر $\frac{\lambda}{۲}$ است.

۱ بنا به فرض مسئله فاصلهٔ یک تراکم از یک انبساط مجاورش $۴۰cm$ است. طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\lambda}{۲}=۴۰\Rightarrow\lambda=۸۰cm\Rightarrow\lambda=۰/۸m$$

۲ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{v=۱۶m/s}۰/۸=۱۶T\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰}s$$

۳ هر ذره از محیط دارای حرکت هماهنگ ساده است و در مدت یک دوره مسافتی چهار برابر دامنه $(\ell=۴A)$ طی می‌کند. بنابراین در مدت $\Delta t=\frac{۱}{۲۰}s$ مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=۴A\xrightarrow{A=۵cm}\ell=۴\times۵=۲۰cm$$

نمای ۲۴

B | ۱۶۳۲ | ۴

۳

تندی انتشار موج به دوره و دامنهٔ موج بستگی ندارد و برای بسامدهای مختلف یکسان است. $(v_۲=v_۱)$

یادآوری توان متوسط انتقال انرژی با مربع دامنه و مربع بسامد نسبت مستقیم دارد.

دوره نصف شده است، بنابراین بسامد خواهد شد:

$$f=\frac{۱}{T}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{T_۱}{T_۲}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

توان متوسط انتقال انرژی خواهد شد:

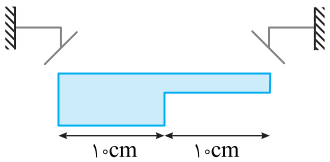
$$\frac{\bar{P}_۲}{\bar{P}_۱}=\left(\frac{f_۲}{f_۱}\right)^۲\times\left(\frac{A_۲}{A_۱}\right)^۲\Rightarrow\frac{\bar{P}_۲}{\bar{P}_۱}=(۲)^۲\times(۲)^۲=۱۶$$

نمای ۲۱

B | ۱۶۳۲ | ۳

۴

نکته در آب‌های کم‌عمق، تندی انتشار امواج سطحی آب در مناطق کم عمق‌تر، کمتر است.



امواج نوسان‌ساز (۱) در آب عمیق‌تر منتشر می‌شوند بنابراین تندی انتشار آن‌ها بیشتر است. بنابراین محل اولین ملاقات دو موج باید از نوسان‌ساز (۱) دورتر و به نوسان‌ساز (۲) نزدیک باشد. در نتیجه گزینهٔ (۳) که در آن فاصله از نوسان (۱) را ۱۲cm بیان کرده می‌تواند جواب مسئله باشد.

نمای ۲۰

B | ۱۶۳۲ | ۳

۵

تندی انتشار موج برابر است با:

$$v=\frac{\lambda}{T}$$

یک ذره از محیط دارای حرکت هماهنگ ساده است و در مدت یک دوره، مسافتی چهار برابر دامنهٔ $(L=۴A)$ طی می‌کند، بنابراین تندی متوسط هر ذره از محیط در مدت یک دوره خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۴A}{T}$$

بنا به فرض مسئله تندی انتشار موج با تندی متوسط ذرات محیط در یک دوره برابر است، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$v=s_{av}\Rightarrow\frac{\lambda}{T}=\frac{۴A}{T}\Rightarrow\lambda=۴A\Rightarrow\frac{\lambda}{A}=۴$$

در نتیجه نموداری درست است که در آن طول موج چهار برابر دامنه باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $\frac{\lambda}{۴}=۳\Rightarrow\lambda=۱۲cm\,,A=۴cm\Rightarrow\frac{\lambda}{A}=\frac{۱۲}{۴}=۳\neq۴$ ×

گزینهٔ (۲): $\frac{\lambda}{۴}=۳\Rightarrow\lambda=۱۲cm\,,A=۲\Rightarrow\frac{\lambda}{A}=\frac{۱۲}{۲}=۶\neq۴$ ×

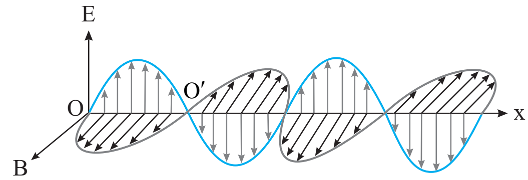
گزینهٔ (۳): $\frac{\lambda}{۲}=۸\Rightarrow\lambda=۱۶cm\,,A=۴cm\Rightarrow\frac{\lambda}{A}=\frac{۱۶}{۴}\Rightarrow\frac{\lambda}{A}=۴$ ✓

گزینهٔ (۴): $\frac{\lambda}{۲}=۸\Rightarrow\lambda=۱۶cm\,,A=۲cm\Rightarrow\frac{\lambda}{A}=\frac{۱۶}{۲}\Rightarrow\frac{\lambda}{A}=۸\neq۴$ ×

نمای ۱۹

A ۱۶۳۲ ۲

۶ بسامد و دورهٔ نوسان میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی در همهٔ نقاط یکسان است. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.



برای بررسی گزینه‌های (۲) و (۳) باید طول موج را حساب کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=۳\times۱۰^{۸}\,m/s\,,\,f=۲\times۱۰^{۶}\,Hz}\lambda=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲\times۱۰^{۶}}\Rightarrow\lambda=۱۵۰m$$

با توجه به نمودار فاصلهٔ O تا O' برابر $\frac{\lambda}{۲}$ است از این‌رو:

$$OO'=\frac{\lambda}{۲}\Rightarrow OO'=\frac{۱۵۰}{۲}\Rightarrow OO'=۷۵m$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

نمای ۲۲

B ۱۶۳۲ ۱

۷ **نکته** اختلاف تراز شدت دو صوت برابر لگاریتم نسبت شدت آن دو صوت می‌شود:

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_B}{I_۰}$$

$$\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\Delta\beta=۱۰\log\frac{\frac{I_A}{I_۰}}{\frac{I_B}{I_۰}}\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به نسبت خواسته شده، لازم است دو تراز شدت صوت داده شده را از هم کم کنیم، تا لگاریتم $\frac{I_۲}{I_۱}$ را به‌دست آوریم:

$$\Delta\beta=\beta_۲-\beta_۱\Rightarrow۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}=۹۲-۲۸=۶۴$$

$$\Rightarrow۱۰(\log\frac{\frac{I_۲}{I_۰}}{\frac{I_۱}{I_۰}})=۶۴\Rightarrow\log\frac{I_۲}{I_۱}=۶/۴$$

نکته $\log۱۰^{n}$ برابر n است و $\log a-\log b$ برابر $\log\frac{a}{b}$ است.

می‌توان عدد ۶/۴ به‌دست آمده را به صورت $۷-۲(۰/۳)$ نوشت و به جای ۷، $\log۱۰^{۷}$ و به جای ۰/۳ از $\log۲$ استفاده کرد:

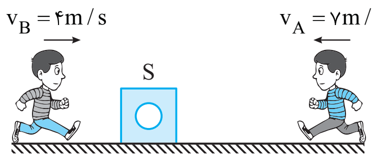
$$\log\frac{I_۲}{I_۱}=۷-۲(۰/۳)\Rightarrow\log\frac{I_۲}{I_۱}=\log۱۰^{۷}-۲\log۲$$

$$\Rightarrow\log\frac{I_۲}{I_۱}=\log\frac{۱۰^{۷}}{۴}\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۰/۲۵\times۱۰^{۷}=۲/۵\times۱۰^{۶}$$

نمای ۲۷

B ۱۶۳۲ ۲

۸ چشـمه سـاکن است و هر گاه چشمه سـاکن باشـد، فاصلهٔ جبهه‌های موج منتشر شده در محیط تغییر نمی‌کند و طول موج ثابت است بنابراین مقایسهٔ $\lambda_A>\lambda_B$ نادرستی است.



تنـدی حرکـت ناظـر A از تنـدی حرکت ناظر B بیشـتر اسـت و در مـدت ۱s، تعداد جبهه‌های موجی که دریافت می‌کند بیشـتر بوده بنابراین بسـامد دریافتی توسط ناظر A از بسامد دریافتی توسط ناظر B بیشتر است و مقایسهٔ $f_A>f_B$ درست است.

ناظر A در لحظهٔ نشـان داده شـده در فاصلهٔ دورتری از چشمه قرار دارد و شدت صوت دریافتـی ناظـر A از شـدت صـوت دریافتی ناظر B کمتر اسـت و مقایسـهٔ $I_A>I_B$ نادرست است.

نمای ۲۸

B ۱۶۳۲ ۱

۹ **خط فکری** شـدت صوت برابر توان صوتی گذرنده از یکای سطح عمود بر راستای پیشروی صوت است $(I=P/A)$ که در این رابطه $A=۴\pi r^{۲}$ بوده که r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از منبع صوت اسـت. در صورت مسـئله تراز شـدت صوت در فاصلهٔ ۵m از منبع $\beta=۶۰dB$ بیان شـده پس شـما ابتدا باید شـدت صوت در محل را به کمک تراز شدت صوت به‌دست آورده و سپس توان منبع صوت را حساب کنید.

ابتدا با توجه به تراز شدت صوت، شدت صوت تولیدی را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۶۰dB}۱۰\log\frac{I}{I_۰}=۶۰\Rightarrow\log\frac{I}{I_۰}=۶\Rightarrow\frac{I}{I_۰}=۱۰^{۶}$$

$$\xrightarrow{I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^{۲}}I=۱۰^{-۶}W/m^{۲}$$

با توجه به تعریف شـدت صوت می‌توانیم توان منبع را حساب کنیم. شدت صوت برابر است با:

$$I=\frac{\overline{P}}{A}\Rightarrow۱۰^{-۶}=\frac{\overline{P}}{۴\pi\times r^{۲}}\Rightarrow۱۰^{-۶}=\frac{\overline{P}}{۴\times\pi\times۲۵}$$

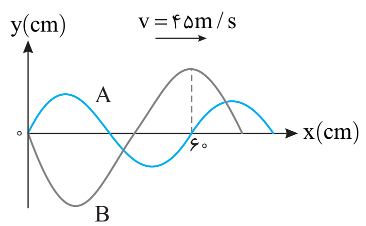
$$\Rightarrow\overline{P}=۱۰^{-۴}\pi W=۰/۱\pi mW$$

نمای ۲۷

B ۱۶۳۲ ۲

۱۰ **۱** از روی محور افقی طول موج هر موج را حساب می‌کنیم.

$$A:\lambda_A=۶۰cm\,,\,B:\frac{۳}{۴}\lambda_B=۶۰\Rightarrow\lambda_B=۸۰cm$$



۲ بسامد موج‌های A و B را به‌دست می‌آوریم.

$$v=f\lambda\Rightarrow f=\frac{v}{\lambda}\begin{cases}\xrightarrow{A}f_A=\frac{۴۵}{۰/۶}\Rightarrow f_A=\frac{۴۵۰}{۶}\Rightarrow f_A=۷۵Hz\\\xrightarrow{B}f_B=\frac{۴۵}{۰/۸}\Rightarrow f_B=\frac{۴۵۰}{۸}\Rightarrow f_B=۵۶/۲۵Hz\end{cases}$$

۳ تعداد نوسان‌های A و B را در مدت ۲۰s حساب می‌کنیم.

$$A:\begin{array}{c|c}۱s & \text{نوسان } ۷۵\\ ۲۰s & N_A\end{array}\Rightarrow N_A=۱۵۰۰$$

$$B:\begin{array}{c|c}۱s & ۵۶/۲۵\\ ۲۰s & N_B\end{array}\Rightarrow N_B=۱۱۲۵\text{ نوسان}$$

۴ اختلاف نوسان‌ها خواهد شد:

$$N_A-N_B=۱۵۰۰-۱۱۲۵=۳۷۵Hz$$

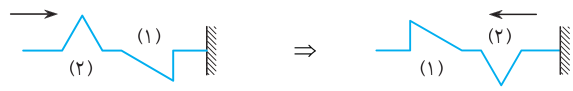
نمای ۱۹

پنجره ۵

B ۱۶۳۳ ۳

یادآوری هرگاه یک تپ به انتهای ثابت رسیده و بر آن فرود آید، تپ بازتاب از مانع وارون و قرینهٔ تپ فرودی است.

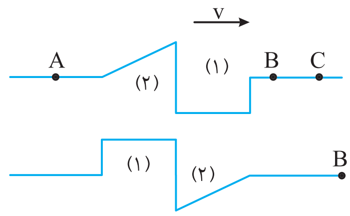
دقت کنید هر قسمت از تپ که زودتر بـه مانع برخورد می‌کند زودتر بازمی‌گردد، یعنی قسمت (۱) تپ به مانع برخورد کرده وارونه می‌شود و به بالا می‌رود و قسمت (۲) پس از آن به مانع رسیده وارون شده به سمت پایین می‌آید و به دنبال (۱) حرکت خواهد کرد.



تپ فرودی بر انتهای ثابت — بازتاب از انتهای ثابت

B ۱۶۳۴ ۳

خط فکری تپ فرضی می‌خواهد از A به C برسد، اما نقطهٔ B غیرقابل حرکت است، از این‌رو نقطهٔ B یک انتهای ثابت است. بنابراین تپ بازتابیده وارون و قرینهٔ تپ فرودی است.



نقطهٔ B شبیه انتهای ثابت عمل کرده و تپ از آن بازتابیده می‌شود و تپ بازتابیده نسبت به تپ فرودی وارونگی دارد. قسمت مستطیل شکل تپ ابتدا به نقطهٔ B می‌رسد، بنابراین در بازتاب نیز، ابتدا برمی‌گردد و در سمت چپ تپ قرار می‌گیرد. با این توضیحات، گزینهٔ (۳) تپ بازتابیده است.

B ۱۶۳۵ ۴

خط فکری هرگاه یک موج بـه مانعی برخورد کـرده از مانع بازتـاب کند، محیط انتشار موج قبل و بعد از برخورد به مانع تغییر نمی‌کند. بنابراین تندی انتشار موج که به ویژگی‌های محیط وابسته است تغییر نمی‌کند. بسامد موج نیز از ویژگی‌های چشمهٔ موج است، بنابراین هنگام انتشار موج در محیط بسامد آن ثابت می‌ماند $(f_۱=f_۲)$، از این‌رو طول موج $\lambda=v/f$ نیز ثابت می‌ماند.

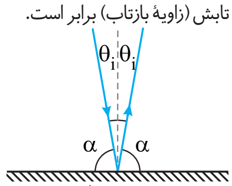
اکنون با یادآوری‌هایی که در خط فکری بیان شده گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

بازتاب موج از هر سطحی از قانون بازتاب عمومی پیروی می‌کند و گزارهٔ (الف) درست است. طول موج، بسامد و تندی انتشار موج در بازتاب موج ثابت می‌مانند، بنابراین گزاره‌های (ب)، (پ) و (ت) نیز درست هستند.

B ۱۶۳۶ ۱

یادآوری بنا به قانون بازتاب عمومی همواره زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود در نقطهٔ تابش (زاویهٔ تابش) با زاویهٔ بین پرتو بازتاب و خط عمود در نقطهٔ تابش (زاویهٔ بازتاب) برابر است.

در صورت مسـألـه بیان شده که زاویهٔ بین راستای پرتو تابش و راستای پرتو بازتابش یعنی $۲\theta_i$ برابر $\frac{۱}{۴}$ زاویهٔ α است. از این‌رو خواهیم داشت:



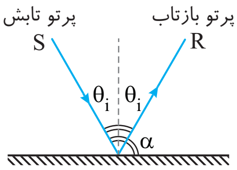
$$\theta_i+\theta_i=\frac{۱}{۴}\alpha \Rightarrow \alpha=۸\theta_i$$

$$\alpha+\theta_i=۹۰^\circ \Rightarrow ۸\theta_i+\theta_i=۹۰^\circ \Rightarrow \theta_i=۱۰^\circ$$

B ۱۶۳۷ ۲

خط فکری قرار اسـت پرتو بازتاب نیمساز زاویهٔ بین پرتو تابش و سطح آینه باشد. یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب $(۲\theta_i)$ برابر زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه (α) باشد. با توجه به این مطلب مسئله به راحتی قابل حل است.

مجمـوع زاویهٔ تابـش θ_i و زاویهٔ بیـن پرتو با سطح آینهٔ α برابر ۹۰° است، از این‌رو:



$$\begin{cases}\alpha=۲\theta_i\\ \theta_i+\alpha=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow ۳\theta_i=۹۰^\circ \Rightarrow \theta_i=۳۰^\circ$$

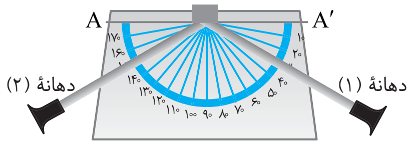
B ۱۶۳۸ ۲

خط فکری امواج صوتی مانند تمام امواج دیگر از قانون بازتاب عمومی پیروی می‌کنند. یعنی زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است. اگر شنوندهٔ دوم بخواهد صدا را با بیشترین بلندی بشنود باید گوش او (دهانهٔ دوم) در امتداد صوت بازتاب قرار گیرد.

زاویهٔ بین دو لوله ۱۲۰° است. بنابراین زاویهٔ بین هر لوله با خط عمود بر سطح مانع خواهد شد:

$$\theta_i+\theta_r=۱۲۰^\circ \xrightarrow{\theta_i=\theta_r} ۲\theta_i=۱۲۰^\circ \Rightarrow \theta_i=۶۰^\circ$$

زاویهٔ بین لولهٔ متصل به دهانهٔ (۱) با خط AA' برابر $۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ$ می‌باشد.



B ۱۶۳۹ ۴

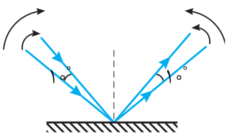
نکته بـرای آن‌که بیشـینهٔ بلندی بـه دهانهٔ دوم برسـد باید زاویـهٔ تابش موج صوتی و بازتابش با هم برابر باشند.

زاویه‌ای که دهانهٔ (۱) با خط عمود می‌سازد $۱۳۵-۹۰=۴۵^\circ$ و زاویه‌ای که دهانهٔ (۲) با خط عمود می‌سـازد $۹۰-۶۰=۳۰^\circ$ اسـت، بنابراین برای آن‌که صدای دریافتی بیشـینه شود باید یا زاویهٔ دهانهٔ (۱) با خط عمود ۳۰° شود، یعنی لولهٔ متصل به دهانهٔ (۱) ۱۵° ساعتگرد بچرخد و یا زاویهٔ دهانهٔ (۲) با خط عمود از ۳۰° به ۴۵° تغییر کند، یعنی لولهٔ متصل به دهانهٔ (۲) نیز ۱۵° ساعتگرد بچرخد.

B ۱۶۴۰ ۱

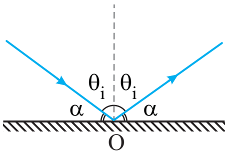
خط فکری با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابر اسـت و اگر زاویهٔ تابش کاهش (و یا افزایش) یابد زاویهٔ بازتاب نیز کاهش (و یا افزایش) می‌یابـد. البتـه با کاهش زاویهٔ تابش و کاهش زاویهٔ بازتـاب زاویه‌ای که پرتوهای تابش و بازتاب با سطح آینه می‌سازند افزایش می‌یابد.

پرتو SI به اندازهٔ ۱۰° سـاعتگرد چرخیده و دراین صورت پرتو بازتاب ۱۰° پادسـاعتگرد می‌چرخد. بنابرایـن زاویـهٔ بازتاب نیز ۱۰° کاهـش می‌یابد و زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح ۱۰° افزایش می‌یابد.



B ۱۶۴۱ ۱

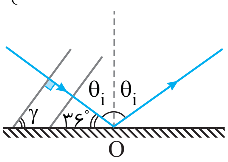
یادآوری زاویـهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب دو برابر زاویهٔ تابش $(۲\theta_i)$ است. از طرف اگر زاویـهٔ بین پرتو تابش با سـطح آینه را α بنامیم مجموع α و θ_i همواره برابر ۹۰° است.



بنابه فرض مسئله زاویهٔ α، $\frac{۱}{۳}$ زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب است از این‌رو:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{۱}{۳}(۲\theta_i)\\ \alpha+\theta_i=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۳}\theta_i+\theta_i=۹۰ \Rightarrow \frac{۵}{۳}\theta_i=۹۰ \Rightarrow \theta_i=۵۴^\circ \text{ و } \alpha=۳۶^\circ$$

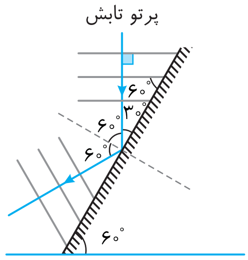
پرتـو نـور بـر جبهه‌هـای مـوج عمود می‌باشـد بنابراین: $\gamma=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+۳۶^\circ) \Rightarrow \gamma=۵۴^\circ$



میانبر همواره زاویهٔ بین جبهه‌های موج با سطح آینه (مانع) برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.

B ۱۶۴۲ ۱

نکته زاویهٔ بین جبهه‌های موج و سطح صیقلی برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.

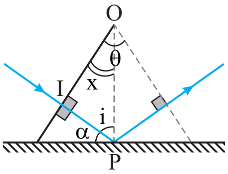


با توجه به صورت مسأله جبهه‌های موج موازی افق هستند و بنا به خاصیت خطوط موازی و مورب، جبهه‌های موج با سطح صیقلی زاویهٔ ۶۰° می‌سازند از این‌رو زاویه تابش نیز ۶۰° می‌شود و زاویهٔ بازتاب نیز ۶۰° خواهد بود.

B ۱۶۴۳ ۲

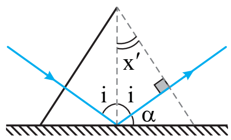
خط فکری زاویهٔ ۸۴° در شکل را با حرف θ نمایش می‌دهیم و ابتدا رابطه‌ای بین θ و α پیدا می‌کنیم تا مسئله را حل کنیم.

جبهه‌های موج بر پرتوی موج عمود است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OIP مجموع زاویهٔ i و x، ۹۰° است، از طرفی مجموع i و α نیز ۹۰° است:



$$\begin{cases} i+x=۹۰^\circ \\ \alpha+i=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x=\alpha \qquad (۱)$$

با توجه به قانون بازتاب عمومی زاویهٔ تابش و بازتاب با هم یکسان و برابر i است:



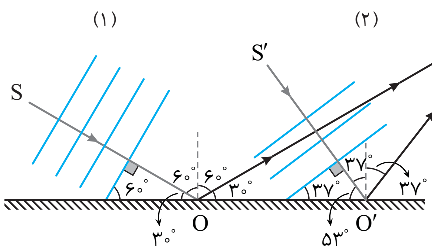
$$\begin{cases} \alpha+i=۹۰^\circ \\ i+x'=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x'=\alpha \qquad (۲)$$

با توجه به شکل و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت: $\theta=x+x'=۲\alpha$

بنابراین: $۸۴=۲\alpha \Rightarrow \alpha=۴۲^\circ$

B ۱۶۴۴ ۲

خط فکری به جای جبهه‌های موج شما باید با رسم پرتو مسئله را حل کنید و همواره یادتان باشد که زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح بازتابنده می‌سازند برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. اکنون بر جبهه‌های موج تابش و بازتاب، پرتو تابش SO و S'O' را رسم کرده و پرتوهای بازتاب را رسم می‌کنیم، سپس زاویهٔ بین دو پرتو بازتاب را به‌دست می‌آوریم.



زاویهٔ تابش پرتو SO، ۶۰° و زاویهٔ تابش پرتو S'O' برابر ۳۷° است. پرتوهای بازتاب OA و O'A نیز زاویهٔ ۶۰° و ۳۷° با خط عمود می‌سازند. در مثلث OO'A' مجموع زوایا ۱۸۰° است بنابراین θ خواهد شد.

$$\theta=۱۸۰-(۳۰+۵۳+۷۴)=۲۳^\circ$$

B ۱۶۴۵ ۲

باید به سراغ هندسه برویم. مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است.

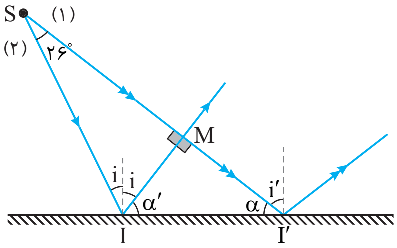
۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SMI می‌توان نوشت:

$$۲i+۲۶+۹۰=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲i+۲۶=۹۰ \Rightarrow i+۱۳=۴۵ \Rightarrow i=۳۲^\circ$$

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ IMI' خواهیم داشت:

$$\alpha'=۹۰-i \Rightarrow \alpha'=۹۰-۳۲ \Rightarrow \alpha'=۵۸^\circ$$

$$\alpha'+\alpha+۹۰=۱۸۰ \Rightarrow ۵۸+\alpha+۹۰=۱۸۰ \Rightarrow \alpha=۳۲^\circ$$



۳ اکنون زاویهٔ i' را حساب می‌کنیم.

$$\alpha+i'=۹۰ \Rightarrow ۳۲+i'=۹۰ \Rightarrow i'=۵۸^\circ$$

۴ نسبت زوایای تابش خواهد شد.

$$\frac{i'}{i}=\frac{۵۸}{۳۲} \Rightarrow \frac{i'}{i}=\frac{۲۹}{۱۶}$$

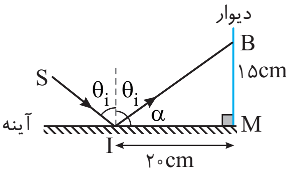
B ۱۶۴۶ ۱

خط فکری پرتو SI بعد از بازتاب آینه در نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۵cm از سطح آینه به دیوار برخورد کرده بنابراین به کمک مثلث قائم‌الزاویه IBM می‌توانید زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه (α) را حساب کرده سپس زاویهٔ تابش را به‌دست آورید.

با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \alpha=۳۷^\circ$$

$$\xrightarrow{\theta_i+\alpha=۹۰^\circ} \theta_i=۵۳^\circ$$



B ۱۶۴۷ ۴

میکروفون سهموی برای ثبت صداهای ضعیف استفاده می‌شود. پس گزینهٔ (۱) نادرست است. در دستگاه لیتوتریپسی برای شکستن سنگ‌های کلیه از بازتابنده‌های بیضوی استفاده می‌شود. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

برای تعیین تندی خودروها از اثر دوپلر امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌شود پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

از مکان‌یابی پژواکی امواج فراصوت به همراه اثر دوپلر برای تعیین تندی شارش خون (گویچه‌های قرمز) در رگ استفاده می‌شود و گزینهٔ (۴) درست است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که باید مبحث فناوری و کاربرد را در کتاب درسی به خوبی فرابگیرید.

A ۱۶۴۸ ۱

۱ صوت در مدت ۰/۲s، ۱۰۰ متر فاصلهٔ بین وال با مانع را رفته و بازگشته یعنی مسافت ۱۰۰+۱۰۰ متر را در مدت ۰/۲s طی می‌کند. بنابراین تندی صوت در محیط برابر است با:

$$v_{\text{صوت در آب}}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۱۰۰+۱۰۰}{۰/۲}=\frac{۲۰۰}{۰/۲} \Rightarrow v_{\text{صوت در آب}}=۱۰۰۰\,m/s$$

۲ حال با توجه به سرعت صوت و بسامد داده شده طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \lambda=\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰\times۱۰^{۳}}=۱۰^{-۲}\,m=۱cm$$

یادآوری تندی موج در یک محیط که شرایط فیزیکی آن ثابت بوده و تغییر نمی‌کند مقدار ثابتی است و معادلهٔ انتشار موج همان معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت است $(L=vt)$

A ۱۶۴۹ ۲

تندی صوت در محیط را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda \xrightarrow{f=۴۰\times۱۰^{۳}Hz,\ \lambda=۸/۷۵\times۱۰^{-۳}m} v=۴۰\times۱۰^{۳}\times۸/۷۵\times۱۰^{-۳}$$

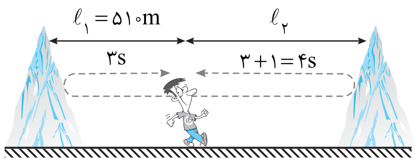
$$\Rightarrow v=۳۵۰\,m/s$$

زمان رفت و برگشت صوت ۰/۴s است، بنابراین زمان رفت صوت $\frac{۰/۴}{۲}=۰/۲s$ است،

از این‌رو فاصلهٔ دیوار از چشمه خواهد شد: $d=vt=۳۵۰\times۰/۲=۷۰m$

B ۱۶۵۰ ۲

۱ صوت فاصلهٔ شخص تا صخرهٔ نزدیک تر را در مدت ۳s می‌رود و برمی‌گردد، یعنی مسافت $۵۱۰+۵۱۰=۱۰۲۰m$ را در مدت ۳s طی می‌کند بنابراین تندی صوت در محیط خواهد شد:
$$v=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۱۰۲۰}{۳}\Rightarrow v=۳۴۰m/s$$



۲ صوت مسیر تا صخرهٔ دورتر را در مدت $۳+۱=۴s$ می‌رود و برمی‌گردد. فاصلهٔ صخره تا شخص را به‌دست می‌آوریم.
$$\ell_۲+\ell_۲=v(t)\Rightarrow ۲\ell_۲=۳۴۰(۴)\Rightarrow \ell_۲=۶۸۰m$$

۳ بنابراین فاصلهٔ دو صخره از هم برابر است با:
$$\ell_۲+\ell_۱=۵۱۰+۶۸۰=۱۱۹۰m$$

بازی با سؤال شخصی بین دو کوه ایستاده است و فریاد می‌زند. اگر اختلاف فاصلهٔ شخص از دو کوه ۱۶m باشد، پژواک اول را چند ثانیه زودتر از پژواک دوم می‌شنود؟ (سرعت صوت ۳۲۰m/s است.)

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۵

پاسخ پژواک دوم باید ۱۶m بیشتر برود و ۱۶m بیشتر برگردد، یعنی مسیر پژواک دوم $۱۶+۱۶=۳۲m$ از پژواک اول بیشتر است و تندی صوت در محیط ۳۲۰m/s است. بنابراین پژواک دوم با اختلاف زمانی زیر به شنونده می‌رسد.
$$\Delta x=vt\Rightarrow t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{۲\times۱۶}{۳۲۰}=۰/۱s$$

گزینهٔ ۲

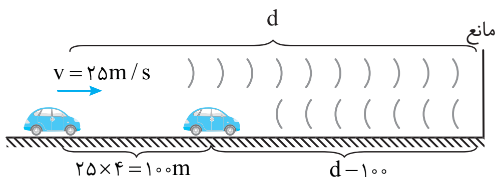
B ۱۶۵۱ ۲

خط فکری فاصلهٔ خودرو تا مانع را d فرض می‌کنیم. اگر صوت فاصلهٔ d را طی کرده به مانع برخورد کرده و بازگردد و در مدت t به راننده برسد در این مدت خودرو نیز به اندازهٔ $v_{خودرو}\times t$ به مانع نزدیک می‌شود، یعنی صوت در برگشت فاصلهٔ d را طی نمی‌کند بلکه فاصلهٔ $d-vt$ را طی می‌کند تا به خودرو برسد. اکنون با این دانسته‌ها مسئله قابل حل است.

۱ سرعت خودرو را بر حسب m/s حساب می‌کنیم.
$$v=۹۰km/h=۹۰\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}\Rightarrow v=۲۵m/s$$

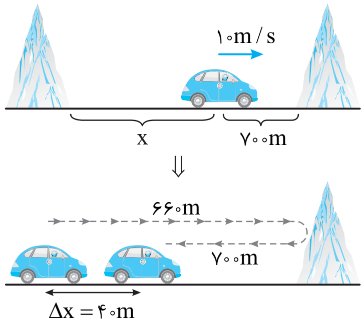
۲ مقداری که خودرو در مدت ۴s جلو می‌آید را به‌دست می‌آوریم.
$$\Delta x=vt=۲۵\times۴\Rightarrow \Delta x=۱۰۰m$$

۳ در این مدت صوت مسافت $d+(d-۱۰۰)$ را با سرعت ۳۲۰m/s طی می‌کند بنابراین:
$$\ell=vt\Rightarrow d+d-۱۰۰=۳۲۰\times۴\Rightarrow ۲d=۱۳۸۰\Rightarrow d=۶۹۰m$$

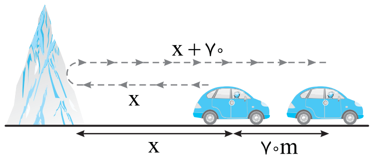


B ۱۶۵۲ ۴

۱ خودرو با تندی ۱۰m/s در حال حرکت به سمت صخرهٔ نزدیک‌تر است و در فاصلهٔ ۷۰۰ متری از صخره گلوله شلیک می‌شود و در مدت ۴s شخص صدای اولین پژواک را می‌شنود و در این مدت خودرو به اندازهٔ $\Delta x=vt=۱۰\times۴=۴۰m$ حرکت کرده، بنابراین صوت فاصلهٔ $\ell=۷۰۰+۶۶۰=۱۳۶۰m$ را در مدت ۴s طی کرده است و تندی صوت خواهد شد.
$$v=\frac{\ell}{t}\Rightarrow v=\frac{۱۳۶۰}{۴}=۳۴۰m/s$$



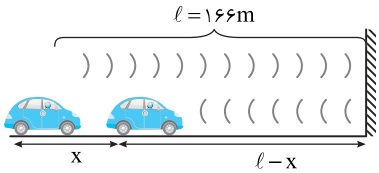
۲ اما پژواک دوم از صخرهٔ دورتر پس از ۷s به گوش شخص می‌رسد و در این مدت خودرو $\Delta x=۷\times۱۰=۷۰m$ از صخره دور شده است.
و اگر فاصلهٔ صخره دورتر از خودرو در ابتدا x باشد، هنگام دریافت پژواک این فاصله $x+۷۰$ است یعنی صوت مسافت $(x+x+۷۰)$ متر را طی می‌کند تا به گوش راننده برسد از این‌رو:
$$v=\frac{x+(x+۷۰)}{\Delta t'}\Rightarrow ۳۴۰=\frac{۲x+۷۰}{۷}\Rightarrow ۲x+۷۰=۲۳۸۰\Rightarrow x=۱۱۵۵m$$



بنابراین فاصلهٔ دو صخره از هم $۱۱۵۵+۷۰۰=۱۸۵۵m$ می‌باشد.

C ۱۶۵۳ ۲

خط فکری در حل تمام این مسایل شما باید دقت کنید که اگر فاصلهٔ خودرو تا مانع در لحظهٔ تولید صوت ℓ باشد، صوت در مسیر رفت ℓ را طی می‌کند، اما در برگشت خودرو در حال نزدیک شدن به مانع است و صوت مسیر کوتاه‌تری را طی می‌کند زیرا خودرو به طور مثال به اندازهٔ x جلو آمده بنابراین کل مسافت طی شده توسط صوت $(\ell+\ell-x)$ خواهد بود.

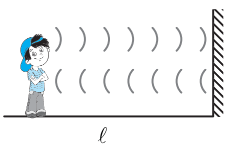


۱ اگر مدت رفت و برگشت صوت را t بنامیم، پیشروی ماشین در این مدت خواهد شد:
$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times۴\times t^۲+۱۰t\Rightarrow x=۲t^۲+۱۰t$$

۲ صوت با تندی ۳۲۰m/s مسافت $\ell+\ell-x$ را طی می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:
$$۲\ell-x=vt\Rightarrow(۲\times۱۶۶)-(۲t^۲+۱۰t)=۳۲۰\times t$$
$$۳۳۲-۲t^۲-۱۰t=۳۲۰t\Rightarrow ۲t^۲+۳۳۰t-۳۳۲=۰$$
$$t^۲+۱۶۵t-۱۶۶=۰\Rightarrow(t+۱۶۶)(t-۱)=۰\Rightarrow t=۱s$$

B ۱۶۵۴ ۳

نکته حداقل تأخیر زمانی بین صوت و پژواک آن که گوش قادر به تمیز دادن صوت از پژواکش شود ۰/۱s است.



با توجه به نکته بیان شده باید صوت، فاصلهٔ شخص را با تندی ۳۵۰m/s در مدت ۰/۱s طی کند و اگر فاصلهٔ شخص از دیوار L باشد در مسیر رفت و برگشت صوت می‌توان نوشت:
$$\Delta x=vt\Rightarrow ۲\ell=۳۵۰\times۰/۱\Rightarrow \ell=۱۷/۵m$$

B ۱۶۵۵ ۳

خط فکری تندی انتشار صوت در فلز از سرعت صوت در هوا بیشتر است، از این‌رو هرگاه به یک سرلولهٔ فلزی یک ضربه بزنیم در سمت دیگر لوله دو صدا دریافت می‌شود که یکی از طریق هوا و دیگری از طریق فلز منتقل می‌شود و برای تمیز دادن این دو صوت باید اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به انتهای دیگر لوله حداقل ۰/۱s باشد.

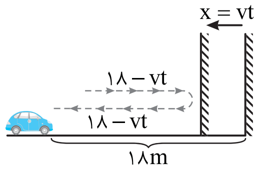
زمان حرکت صوت در هوا و در فلز را به ترتیب $t_{\text{هوا}}$ و $t_{\text{فلز}}$ می‌نامیم. اختلاف این دو باید از ۰/۱s بیشتر باشد.

$$t_{\text{هوا}}-t_{\text{فلز}}\geq ۰/۱\xrightarrow{t=\frac{x}{v}}\frac{\ell}{v_{\text{هوا}}}-\frac{\ell}{v_{\text{فلز}}}\geq ۰/۱\Rightarrow\frac{\ell}{۳۰۰}-\frac{\ell}{۱۸۰۰}\geq ۰/۱$$

$$\Rightarrow\frac{۶\ell-\ell}{۱۸۰۰}\geq ۰/۱\Rightarrow ۵\ell\geq ۱۸۰\Rightarrow\ell\geq\frac{۱۸۰}{۵}\Rightarrow\ell\geq ۳۶m$$

C ۱۶۵۶ ۱

نکته حداقل اختلاف زمانی برای دو صوت رسیده به گوش که گوش قادر به تشخیص دو صوت از هم باشد برابر ۰/۱s است.



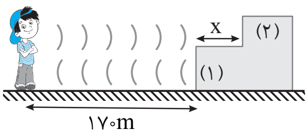
خط فکری مانع در حال حرکت با سرعت v است. وقتی راننده بوق می‌زند، صوت به سمت مانع می‌رود و در مدت t به مانع می‌رسد در این مدت مانع به اندازهٔ $x=vt$ جلو می‌آید بنابراین صوت در فاصلهٔ $۱۸-vt$ به مانع برخورد می‌کند و همین فاصله را در برگشت طی می‌کند تا به گوش راننده برسد در این صورت زمان رفت و برگشت صوت 2t خواهد شد و این 2t باید حداقل برابر ۰/۱s باشد یعنی $t=۰/۰۵s$ است اکنون مسئلهٔ قابل حل است.

مسافتی که صوت با سرعت ۳۲۰m/s طی می‌کند برابر $۲\times(۱۸-v\times۰/۰۵)$ است بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۳۲۰\times۰/۱=۲(۱۸-۰/۰۵v)\Rightarrow ۱۶=(۱۸-۰/۰۵v)\Rightarrow ۰/۰۵v=۲$$

$$\Rightarrow v=\frac{۲۰۰}{۵}=۴۰m/s$$

B ۱۶۵۷ ۱



پژواک اول از پلهٔ اول به سوی شخص می‌رود. این پژواک مسیر ۱۷۰m را می‌رود و ۱۷۰m را برمی‌گردد، بنابراین مدت زمان رسیدن پژواک اول خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۱۷۰+۱۷۰=۳۴۰t_1\Rightarrow t_1=۱s$$

پژواک دوم باید فاصلهٔ $۱۷۰+x$ (x پهنای پله) را برود و همین فاصله را باید برگردد، یعنی مسافت طی شده برای پژواک دوم برابر $۲(۱۷۰+x)$ است و زمان پژواک دوم برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۲(۱۷۰+x)=۳۴۰t_2\Rightarrow t_2=\frac{۳۴۰+۲x}{۳۴۰}$$

اختلاف زمانی t_1 و t_2 اگر از ۰/۱s کمتر باشد، صدای دو پژواک را نمی‌توان از هم تمیز داد.

$$t_2-t_1<۰/۱\Rightarrow\frac{۳۴۰+۲x}{۳۴۰}-۱<۰/۱$$

$$\Rightarrow\frac{۳۴۰+۲x-۳۴۰}{۳۴۰}<۰/۱\Rightarrow\frac{۲x}{۳۴۰}<۰/۱\Rightarrow x<۱۷m$$

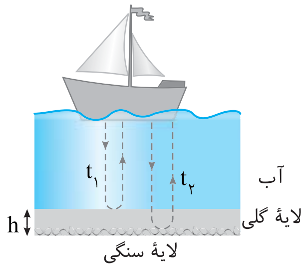
B ۱۶۵۸ ۲

خط فکری دقت کنید صوت پس از بازتاب از لایهٔ گِلی در مدت $t_1=۰/۱s$ برمی‌گردد، اما بازتاب از لایهٔ سنگی از لحظهٔ ارسال تا برگشت به دریافت کننده $t_2=۰/۱۵s$ طول می‌کشد. اختلاف زمانی (t_2-t_1) مدت زمانی است که صوت در لایهٔ گلی در حال رفت و برگشت است. بنابراین با داشتن تندی صوت در لایهٔ گلی می‌توانید، ضخامت این لایه را حساب کنید.

ضخامت لایهٔ گلی را h می‌نامیم در این صورت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow ۲h=v(t_2-t_1)\Rightarrow ۲h=۱۹۲۰(۰/۱۵-۰/۱)$$

$$\Rightarrow ۲h=۱۹۲۰(۰/۰۵)\Rightarrow h=۹۶۰(۰/۰۵)\Rightarrow h=۴۸m$$



B ۱۶۵۹ ۳

اولین پژواک در اثر بازتاب از پلهٔ اول ایجاد می‌شود و این پژواک ۲×۱۶۰m مسافت در رفت و برگشت طی می‌کند. پژواک دوم از پلهٔ دوم برمی‌گردد و در مسیر خود ۱۶۰+d را طی کرده و در برگشت نیز ۱۶۰+d را طی می‌کند یعنی مسافت طی شدهٔ آن ۲×۱۶۰+۲d است و اختلاف زمانی بین دو پژواک به دلیل همین ۲d اختلاف فاصله است. بنابراین برای این ۰/۵s اختلاف زمانی بین دو پژواک اول و دوم می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow ۲d=v\times۰/۵\Rightarrow v=۴d\qquad(I)$$

اکنون به رابطهٔ دیگری بین d و v نیاز داریم. به سراغ پژواک سوم می‌رویم.

مسافت طی شدهٔ پژواک سوم برابر است با:

$$\ell_3=(۱۶۰+d+d)+(d+d+۱۶۰)=۳۲۰+۴d$$

این پژواک بعد از ۲s به گوش رسیده است، بنابراین:

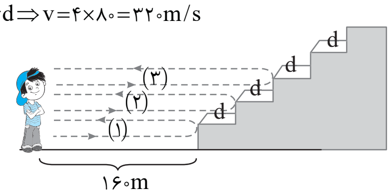
$$t_3=\frac{\ell_3}{v}\Rightarrow ۲=\frac{۳۲۰+۴d}{v}\Rightarrow ۳۲۰+۴d=۲v\qquad(II)$$

از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۳۲۰+۴d=۲\times۴d\Rightarrow ۳۲۰=۴d\Rightarrow d=۸۰m$$

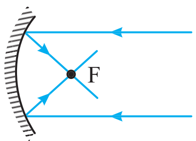
تندی انتشار صوت خواهد شد:

$$(I)\Rightarrow v=۴d\Rightarrow v=۴\times۸۰=۳۲۰m/s$$

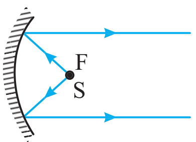


B ۱۶۶۰ ۲

یادآوری ۱ هرگاه پرتوها موازی هم به سطح کاو بتابند، در بازتاب از نقطه‌ای به نام کانون می‌گذرند.



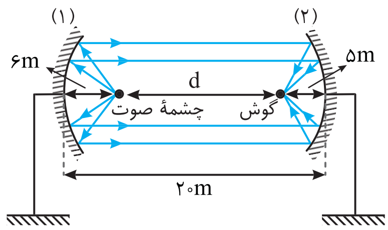
یادآوری ۲ هرگاه پرتوها از چشمهٔ S که در کانون سطح کاو قرار دارد به سطح کاو برسند پرتوهای بازتاب از سطح با هم موازی هستند.



اگر دو سطح کاو در مقابل هم قرار گیرند و چشمهٔ صوت در کانون یکی از دو سطح قرار داشته باشد چنانچه گوش شخصی در کانون سطح دوم قرار گیرد گوش صدای چشمه را با بیشترین بلندی در آن فاصله می‌شنود.

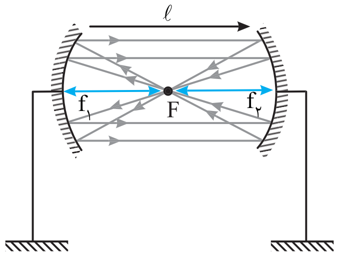
پس فاصلهٔ بین شخص و چشمهٔ صوت برابر فاصلهٔ بین دو کانون F_1 و F_2 است و این فاصله مطابق شکل خواهد شد.

$$d=۲۰-(۵+۶)\Rightarrow d=۹m$$



B ۱۶۶۱ ۱

تمام موج صوت تولید شده توسط شخص پس از بازتاب از هر دو سطح باید در همان نقطهٔ تولید صوت متمرکز شود تا شخص صوت پژواک را با بیشترین بلندی بشنود. همان‌طور که می‌دانیم اگر در کانون صوت تولید کنیم صوت تولیدی پس از بازتاب از سطح کاو، موازی با محور بازمی‌گردد و با توجه به سؤال صوت بازتاب پس از برخورد به سطح دوم نیز باید در محل تشکیل صوت متمرکز شود، از طرفی اگر موجی موازی با محور بر سطحی برخورد کند موج بازگشتی از کانون عبور می‌کند پس شخص در فاصلهٔ کانونی هر دو سطح قرار دارد و فاصلهٔ دو سطح کاو از هم برابر مجموع فاصلهٔ کانون از دو سطح است. $\ell=f_1+f_2$



B ۱۶۶۲ ۱

در رادار دوپلری از بازتاب امواج الکترومغناطیسی برای مکان‌یابی پژواکی در تعیین تندی خودروها استفاده می‌شود و (الف) درست است.

در سونوگرافی از امواج فراصوت استفاده می‌شود و (ب) نادرست است.

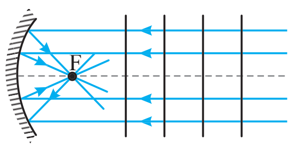
در اجاق خورشیدی از بازتاب نور خورشید (امواج الکترومغناطیسی گسیل شده از خورشید) از سطح کاو استفاده می‌شود و (پ) درست است.

در دستگاه سونار کشتی‌ها از مکان‌یابی پژواکی امواج فراصوت استفاده می‌شود و (ت) نادرست است.

بنابراین گزینهٔ (۱) پاسخ تست است.

دقت کنید باید کاربرد پدیده‌های فیزیکی در دستگاه‌های مختلف که در کتاب درسی بیان شده است را فرابگیرید.

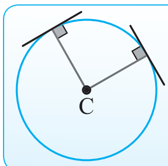
A ۱۶۶۳ ۲



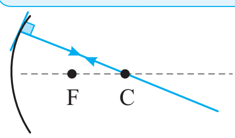
پرتوها بر جبهه‌های موج عمودند، از این‌رو وقتی جبهه‌های موج بر محور سطح کاو عمود هستند چنانچه پرتوها را رسم کنیم این پرتو موازی هم بوده و هنگام بازتاب از کانون سطح کاو می‌گذرند و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۶۶۴ ۱

یادداشت ریاضی هر خط که در امتداد شعاع دایره است بر سطح دایره عمود است.



نکته هرگاه پرتو نور (موج) بر سطح عمود باشد زاویهٔ تابش صفر است و پرتو بازتاب روی پرتو تابش بازتاب می‌کند.



نقطهٔ C در شکل مرکز سطح کروی است و اگر موج از نقطهٔ C بر سطح بتابند یعنی پرتوها در امتداد شعاع دایره قرار دارند و این پرتوها بر سطح کاو عمود هستند. زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب صفر بوده یعنی پرتو روی خودش بازتاب می‌کند.

B ۱۶۶۵ ۲

نور لیزر وقتی به دیوار برخورد می‌کند چون ابعاد ناهمواری‌های میکروسکوپی سطح دیوار از طول موج نور مرئی لیزر بزرگتر است سطح دیوار برای نور لیزر سطح ناهموار بوده و نور لیزر بازتاب پخشنده انجام می‌دهد و نور در تمام جهات بازتاب می‌یابد و این دانش‌آموزان از هر جایی که نشسته‌اند می‌توانند نقطهٔ رنگی روی دیوار را ببینند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۶۶۶ ۳

یادآوری دو نوع بازتاب نور در طبیعت مشاهده می‌شود.

۱ بازتاب منظم: سطح بازتابندهٔ نور بسیار هموار است مانند سطح آینه.

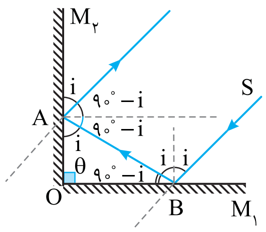
۲ بازتاب پخشنده یا نامنظم: وقتی که نور بر سطحی غیرصیقلی و ناهموار بتابد بازتاب پخشنده رخ می‌دهد.

منظور از سطح ناهموار این است که سطح در مقایسه با طول موج نور ناهموار است. اگر طول موج از ابعاد ناهمواری‌ها بزرگتر باشد، بازتاب منظم و اگر طول موج از ابعاد ناهمواری‌ها کوچکتر باشد، بازتاب پخشنده است.

طول موج نور مرئی در حدود $0/5\mu m$ است و اگر از دید میکروسکوپی سطحی که به آن نور تابیده شده دارای ناهمواری‌های بزرگ‌تر از $1\mu m$ باشد این سطح‌ها برای نور مرئی ناهموار محسوب می‌شوند و بازتاب نور از سطح آن‌ها پخشنده یا نامنظم است و اگر ناهمواری‌های سطح از $1\mu m$ بسیار کوچک‌تر باشد آن سطح برای نور مرئی هموار خواهد بود و بازتاب از این سطح آینه‌ای و منظم است. بنابراین بازتاب نور مرئی از سطح a و b و c پخشنده یا نامنظم است و بازتاب از سطح d آینه‌ای یا منظم است.

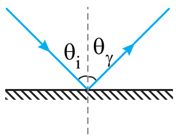
A ۱۶۶۷ ۲

نکته هرگاه زاویهٔ بین دو آینهٔ متقاطع 90° باشد (دو آینه بر هم عمود باشند) چنانچه پرتویی بر سطح یکی از آن‌ها بتابد و بعد از بازتاب به آینهٔ دیگر برخورد کند پرتو بازتاب از آینهٔ دوم موازی پرتو تابش بر آینهٔ اول است.

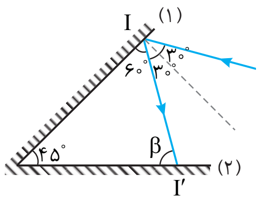


با توجه به نکتهٔ بالا گزینهٔ (۲) درست است.

C ۱۶۶۸ ۱



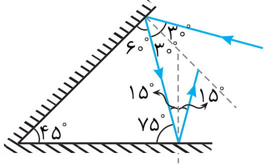
خط فکری بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بین پرتو تابش با خط عمود بر سطح تابش (θ_i) با زاویهٔ بین پرتو بازتاب با خط عمود بر سطح تابش (θ_r) باهم برابرند.



۱ با توجه به فرض مسئله، زاویهٔ بین دو آینه 45° و زاویهٔ تابش بر آینهٔ (۱)، 30° است، از این‌رو زاویهٔ بازتاب نیز 30° بوده و پرتو بازتاب مطابق شکل با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ $90-30=60^\circ$ می‌سازد.

۲ مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است، بنابراین زاویه‌ای که پرتو تابش (II') بر آینهٔ (۲) با سطح آینهٔ (۲) می‌سازد (β) برابر است با:

$$60+45+\beta=180\Rightarrow\beta=75^\circ$$



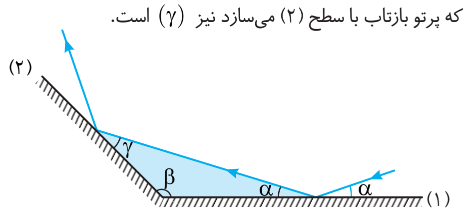
۳ بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۲) برابر $90-75=15^\circ$ خواهد شد و زاویهٔ بازتاب از سطح آینهٔ (۲) نیز 15° است.

B ۱۶۶۹ ۴

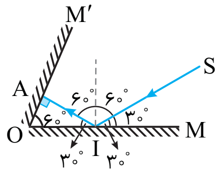
یادآوری با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌های تابش و بازتاب با هم برابرند و همچنین زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح می‌سازد با زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح می‌سازد برابر است.

درمثلث‌رنگی داریم: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \xrightarrow{180^\circ=\pi} \alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$

زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۲) می‌سازد نیز (γ) است.



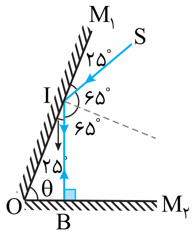
A ۱۶۷۰ ۱



۱ زاویه‌ای که پرتو SI با سطح آینهٔ M می‌سازد 30° است و بنا به قانون بازتاب عمومی زاویه‌ای که پرتو بازتاب با آینهٔ M می‌سازد نیز 30° است.

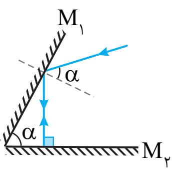
۲ زاویهٔ O (زاویهٔ بین دو آینه) 60° بوده بنابراین مثلث OAI یک مثلث قائم‌الزاویه است یعنی زاویهٔ A باید 90° باشد در نتیجه زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ M' صفر می‌شود.

A ۱۶۷۱ ۳

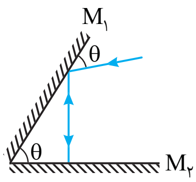


نکته هرگاه پرتو بر سطح آینه عمود بتابد زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب $\theta_i=\theta_r=0$ است. در این حالت پرتو روی خودش بازتاب می‌کند.

برای آنکه پرتوی روی خودش برگردد، باید عمود بر سطح آینهٔ M_2 بتابد. با توجه به شکل مثلث OIB باید قائم‌الزاویه باشد از این‌رو زاویهٔ بین دو آینه (θ) خواهد شد: $\theta=90^\circ-25^\circ=65^\circ$



میانبر هرگاه دو آینه با هم زاویهٔ حاده (α) بسازند. چنانچه پرتو با زاویهٔ تابش α بر یکی از آینه‌ها بتابد پس از بازتاب متوالی روی خودش بازمی‌گردد.

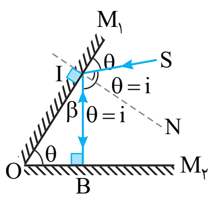


بازی با سؤال در شکل روبه‌رو مسیر پرتو نور مشخص شده است. θ چند درجه است؟ (خارج ریاضی - ۸۵)

۱) ۱۵ ۲) ۳۰
۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ ۱ پرتو پس از تابیدن بر آینهٔ M_2 روی خودش بازتاب کرده بنابراین پرتو بر آینهٔ M_2 عمود است و مثلث OIB قائم‌الزاویه است از این‌رو می‌توان نوشت:

$\theta+\beta=90^\circ \quad (I)$



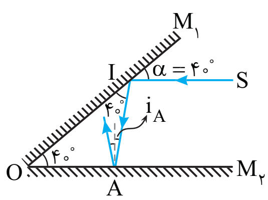
۲ پرتو SI با زاویهٔ θ به آینهٔ M_1 می‌تابد بنابراین پرتو بازتاب از آینهٔ M_1 با سطح آن زاویهٔ θ می‌سازد. $(\beta=\theta)$

۳ اکنون از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت: $\theta+\theta=90^\circ\Rightarrow\theta=45^\circ$

گزینهٔ ۳

B ۱۶۷۲ ۴

شکل (الف): **۱** به دلیل خطوط موازی مورب زاویه‌ای که پرتو SI با سطح آینهٔ M_1 می‌سازد $\alpha=40^\circ$ است و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح آینه می‌سازد برابر 40° است.



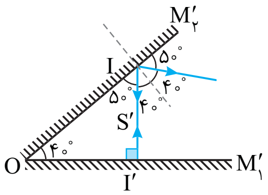
۲ در مثلث OIA زاویهٔ A برابر $180-(40+40)=100^\circ$ است.

۳ اگر در نقطهٔ A بر سطح آینهٔ M_2 خطی عمود کنیم زاویهٔ تابش بر سطح M_2 برابر خواهد شد با:

$i'_A=100-90=10^\circ$

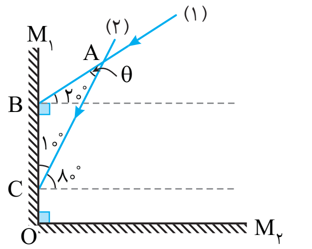
۴ در این صورت زاویهٔ بازتاب پرتو SI از سطح M_2 برابر 10° است.

شکل (ب): پرتو $S'I'$ بر سطح آینهٔ M'_1 عمود است. از این‌رو روی خودش بازتاب می‌کند و هنگام برخورد به سطح آینهٔ M'_2 با سطح زاویهٔ $90-40=50^\circ$ می‌سازد بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ M'_2، 40° و زاویهٔ بازتاب نیز 40° است.



B ۱۶۷۳ ۲

نکته هرگاه دو آینه بر هم عمود باشند و پرتو با هر زاویه‌ای که سطح یکی از آن‌ها بتابد پرتو بازتاب از آینهٔ دیگر موازی پرتو اول است.



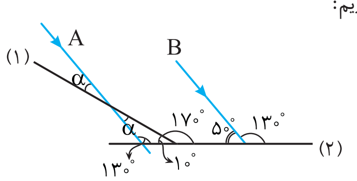
خط فکری چون پرتوهای بازتاب از آینهٔ M_2 با پرتوهای تابش بر آینهٔ M_1 موازی هستند. هر زاویه‌ای که پرتوهای بازتاب می‌سازند همان زاویهٔ بین پرتوهای تابش (۱) و (۲) است بنابراین کافی است زاویهٔ بین دو پرتوی (۱) و (۲) را به‌دست بیاوریم.

در مثلث ABC زاویهٔ β برابر $20+90=110^\circ$ است از این‌رو می‌توان نوشت:

$\theta+110+10=180\Rightarrow\theta=60^\circ$

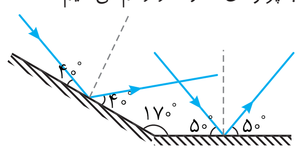
B ۱۶۷۴ ۲

پرتو A با پرتوی B موازی است و بنا به خاصیت موازی - مورب امتداد پرتو A نیز با افق زاویهٔ 130° می‌سازد. با توجه به این نکته زاویه‌ای که این پرتو با سطح آینهٔ (۱) می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:



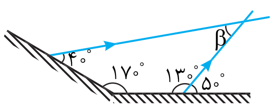
$\Delta ODI:\alpha+130+10=180\Rightarrow\alpha=40^\circ$

با توجه به متقابل به رأس بودن زاویه‌ها، زاویهٔ پرتو A با سطح آینهٔ (۱) نیز برابر $\alpha=40^\circ$ است. حال زاویهٔ بازتاب پرتوهای A و B را رسم می‌کنیم.



برای سادگی و جلوگیری از شلوغی شکل، تنها پرتوهای بازتاب را رسم می‌کنیم.

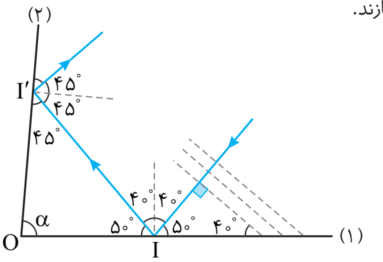
$\beta+40+170+130=360\Rightarrow\beta=20^\circ$



B ۱۶۷۵ | ۱

یادآوری برای بررسی حرکت جبهه‌های موج از یک پرتو که عمود بر جبهه‌های موج بوده و در جهت پیشروی جبهه‌ها رسم می‌شود در استفاده می‌کنیم.

نکته زاویه‌ای که پرتو با خط عمود می‌سازد برابر زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح می‌سازند.



۱ در شکل زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۱) برابر ۴۰° است و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۱) می‌سازد برابر ۵۰° است.

۲ بنابه فرض مسئله زاویهٔ بین جبهه‌های موج بازتاب با سطح (۲) ۴۵° است بنابراین پرتو بازتاب II' با سطح آینهٔ (۲) زاویه‌ای ۴۵° می‌سازد.

۳ مجموع زوایای مثلث ۱۸۰° است از این‌رو برای مثلث OII' می‌توان نوشت:

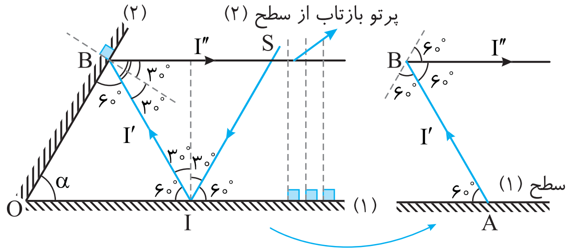
$$\alpha+۴۵+۵۰=۱۸۰\Rightarrow\alpha=۸۵^\circ$$

B ۱۶۷۶ | ۳

خط فکری پرتو بر جبهه‌های موج عمود است. اگر پرتوهای بازتاب از سطح (۲) که در شکل به صورت خط‌چین‌های موازی هم و عمود بر سطح (۱) نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید، پرتو بازتاب از سطح (۲) بر این جبهه‌ها عمود بود بنابراین پرتو بازتاب از سطح (۲) موازی سطح (۱) است. با توجه به این مطلب به سراغ حل مسئله می‌رویم

پرتو SI با زاویهٔ تابش ۳۰° به سطح (۱) تابیده و بنا به قانون بازتاب عمومی زاویهٔ بازتاب از سطح (۱) نیز ۳۰° و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۱) می‌سازد $۹۰-۳۰=۶۰^\circ$ است. گفتیم پرتو بازتاب سطح (۲) موازی سطح (۱) است از این‌رو بنا به خطوط موازی مورب زاویهٔ بین پرتو AB و پرتو بازتاب از سطح (۲) برابر ۶۰° است.

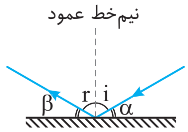
در مثلث OAB زاویهٔ A و B هر کدام ۶۰° شده است بنابراین α نیز ۶۰° خواهد شد.



شکل خطوط موازی و مورب استفاده شده

B ۱۶۷۷ | ۳

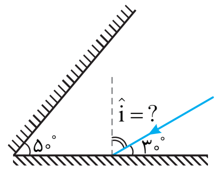
نکته با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌ای که پرتو تابش با نیم‌خط عمود (زاویه تابش) با زاویه‌ای که پرتو بازتاب با نیم‌خط عمود (زاویه بازتاب) می‌سازد باهم برابر است:



$$\begin{cases}\hat{i}=\hat{r}\\ \hat{\alpha}+\hat{i}=۹۰^\circ\\ \hat{r}+\hat{\beta}=۹۰^\circ\end{cases}$$

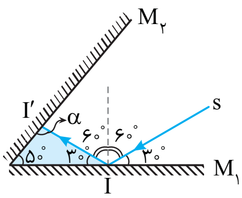
۱ با توجه به پرتو تابش زاویهٔ تابش را به‌دست می‌آوریم، سپس با توجه به اینکه زاویهٔ تابش و بازتاب باهم برابر است، زاویه بازتاب و پرتو بازتاب را می‌کشیم:

$$۳۰^\circ+\hat{i}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{i}=۶۰^\circ$$



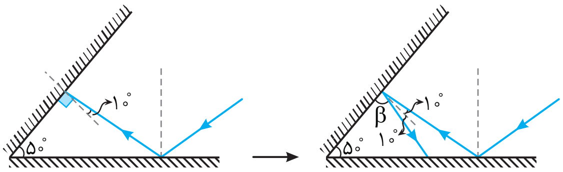
۲ زاویهٔ بازتاب ۶۰° است:

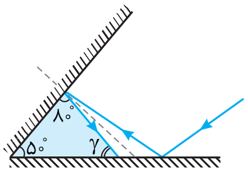
در مثلث رنگی: $۳۰^\circ+۵۰^\circ+\hat{\alpha}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{\alpha}=۱۰۰^\circ$



۳ برای پرتو II' خط عمود را می‌کشیم، پس زاویهٔ تابش به سطح $M_۲$، ۱۰° است و زاویهٔ بازتاب نیز ۱۰° است:

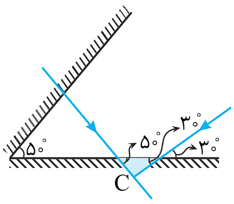
$$\hat{\beta}+۱۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{\beta}=۸۰^\circ$$





در مثلث رنگی: $۵۰^\circ+۸۰^\circ+\hat{\gamma}=۱۸۰\Rightarrow\hat{\gamma}=۵۰^\circ$

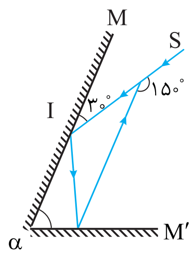
۴ حال امتداد دو پرتو SI و بازتاب از سطح دوم را باهم قطع می‌دهیم تا زاویهٔ بین دو پرتو را به‌دست بیاوریم. برای خلوت شدن شکل تنها پرتو SI و بازتاب از سطح $M_۲$ را کشیدیم:



در مثلث رنگی: $۵۰^\circ+۳۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۰۰^\circ$

بازی با سؤال پرتو نورانی SI بر آینهٔ تخت M تابیده و مطابق شکل روی دو آینهٔ M و M' بازتابش پیدا کرده است. زاویهٔ بین دو آینه چند درجه است؟ خارج ریاضی - ۸۹

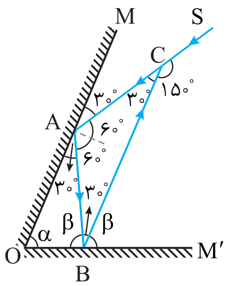
۱) ۴۵ ۲) ۶۰
۳) ۷۵ ۴) ۸۰



پاسخ زاویهٔ بین پرتو SI و سطح آینهٔ M، ۳۰° است از این‌رو زاویهٔ تابش بر آینهٔ M، ۶۰° است. در مثلث ABC زاویهٔ مجاور ۱۵۰° بوده بنابراین زاویهٔ $C=۳۰^\circ$ است. در نتیجه زاویهٔ بین پرتوی تابش AB و بازتابش BC بر آینهٔ M' برابر است با:

$$۱۸۰-(۲\times۶۰+۳۰)=۳۰^\circ$$

اکنون زاویهٔ بین پرتوی تابش AB بر آینهٔ M' با سطح آینه را به‌دست می‌آوریم:



$$۲\beta=۱۸۰-۳۰=۱۵۰^\circ\Rightarrow\beta=۷۵^\circ$$

در این صورت در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$\alpha+\beta+۳۰=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+۷۵+۳۰=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۷۵^\circ$$

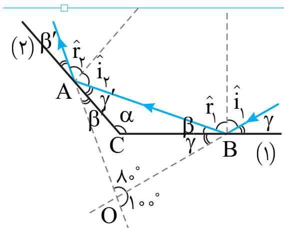
میانبر در آینه‌های متقاطع همواره زاویهٔ انحراف بین پرتوی تابش اولیه و پرتوی بازتاب از آینهٔ دوم دو برابر زاویهٔ بین دو آینه است و به زاویهٔ تابش اولیه بستگی ندارد. با دانستن این نکته می‌توان نوشت:

$$\alpha=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

گزینهٔ ۳

B ۱۶۷۸ ۳

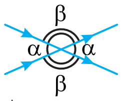
با توجه به قانون بازتاب، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند:



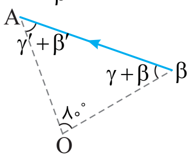
$$\hat{i}_1=\hat{r}_1 \xrightarrow[\beta=90-r_1]{\gamma=90-i_1} \gamma=\beta$$

$$\hat{i}_2=\hat{r}_2 \xrightarrow[\beta'=90-r_2]{\gamma'=90-i_2} \gamma'=\beta'$$

تذکر: زاویهٔ بین دو پرتو زاویه‌ای است که در محل تقاطع آن‌ها و در قسمتی که هر دو پرتو هم‌جهت (ورود یا خروج) هستند ساخته می‌شود.



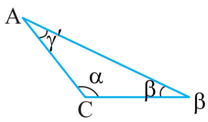
در شکل روبه‌رو زاویه‌های α، زاویهٔ بین دو پرتو و زاویه‌های β مکمل آن‌ها هستند.



در مثلثی که از امتداد پرتوی تابش اولیه و بازتاب ثانویه و پرتوی بازتاب از سطح (۱) ساخته می‌شود می‌توان نوشت:

$$(\gamma+\beta)+(\gamma'+\beta')+80=180 \xrightarrow[\gamma=\beta]{\gamma'=\beta'}$$

$$2\beta+2\gamma'=100^\circ \Rightarrow \beta+\gamma'=50^\circ$$

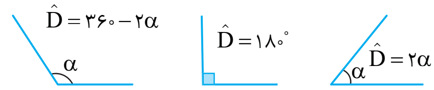


در مثلثی که با پرتوی بازتاب از سطح (۱) و دو سطح ساخته می‌شود داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma'=180 \xrightarrow{\beta+\gamma'=50^\circ}$$

$$\alpha+50=180 \Rightarrow \alpha=130^\circ$$

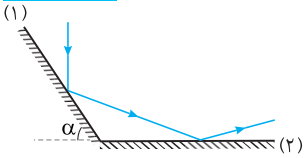
میانبر: به زاویهٔ بین پرتوی تابش اولیه و پرتو بازتاب از سطح دوم زاویهٔ انحراف گویند:



با توجه به شکل سوال زاویهٔ انحراف 100° است: $360-2\alpha=100 \Rightarrow 2\alpha=260^\circ \Rightarrow \alpha=130^\circ$

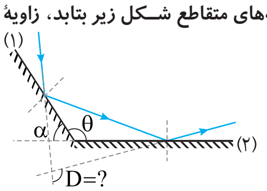
بازی با سوال: **مطابق شکل زیر، پرتو نوری به آینهٔ تخت (۱) می‌تابد و در نهایت از آینهٔ تخت (۲) بازتاب می‌شود. پرتو تابش به آینهٔ (۱) با پرتو بازتابش از آینهٔ (۲)، چه زاویه‌ای می‌سازد؟**

خارج تجربی - ۹۶



۱) α
۲) 2α
۳) $180-\alpha$
۴) $90+\alpha$

پاسخ - نکته: **هرگاه پرتو به آینه‌های متقاطع شکل زیر بتابد، زاویهٔ انحراف یعنی زاویهٔ بین راستای پرتو تابش بر آینهٔ (۱) و پرتو بازتابش از آینهٔ (۲) برابر است با:**



$$D=360-2\theta \qquad (I)$$

با توجه به شکل مجموع زاویه‌های α و θ یک زاویهٔ نیم‌صفحه (180°) تشکیل می‌دهند.

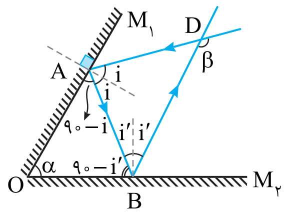
$$\theta+\alpha=180 \Rightarrow \theta=180-\alpha$$

در رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$D=360-2(180-\alpha) \Rightarrow D=360-2\times180+2\alpha \Rightarrow D=2\alpha$$

گزینهٔ ۲

B ۱۶۷۹ ۴



۱ اگر زاویهٔ تابش بر سطح M_1، i و بر سطح M_2، i' باشد، در این صورت در مثلث OAB زاویهٔ A و B خواهند شد:

$$A=90-i \quad , \quad B=90-i'$$

از طرفی خواهیم داشت: $\alpha+90-i+90-i'=180 \Rightarrow \alpha=i+i' \quad (I)$

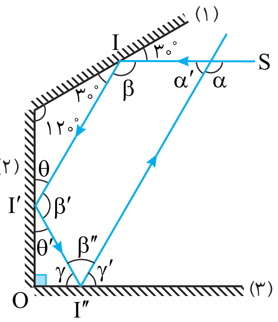
۲ در مثلث ABD زاویهٔ β زاویهٔ خارجی مثلث است و اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با β است. از این‌رو:

$$\triangle ABD: 2i+2i'=\beta \Rightarrow 2(i+i')=\beta \xrightarrow{(I)} \beta=2\alpha$$

بنابراین هرگونه تغییری در زاویهٔ تابش، تأثیری روی اندازهٔ β ندارد و در این شکل همواره $\beta=2\alpha$ است.

۳ با توجه به رابطهٔ (I) جمع i و i' همواره با α برابر است بنابراین هر مقدار که از i کم شود همان مقدار به i' اضافه شود. یعنی وقتی i به $\frac{i}{2}$ تبدیل می‌شود به اندازهٔ $\frac{i}{2}$ به i' اضافه می‌شود.

B ۱۶۸۰ ۲



۱ پرتو SI با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ 30° می‌سازد بنابراین زاویه‌ای که پرتو بازتاب II' با آینهٔ (۱) می‌سازد 30° است از این‌رو زاویهٔ بین دو پرتو SI و II' خواهد شد. $\beta=180-60=120^\circ$

۲ زاویه‌ای که پرتوی II' با سطح آینهٔ (۲) می‌سازد:

$$\theta=180-(120+30) \Rightarrow \theta=30^\circ$$

۳ زاویهٔ بین $I'I''$ با سطح آینهٔ (۲) نیز 30° خواهد شد: $\theta'=30^\circ$

۴ زاویهٔ بین دو پرتو II' و $I'I''$ نیز برابر است با: $\beta'=180-(30+30)=120^\circ$

۵ زاویهٔ پرتو $I'I''$ با سطح آینهٔ (۳) برابر است با:

$$\theta'+\gamma=90 \Rightarrow 30+\gamma=90 \Rightarrow \gamma=60^\circ \Rightarrow \gamma'=60^\circ$$

۶ زاویهٔ بین دو پرتو $I'I''$ و $I''S$ را حساب می‌کنیم: $\beta''=180-(60+60)=60^\circ$

۷ مجموع زوایای چهارضلعی $SII'I''$ برابر 360° است از این‌رو:

$$\alpha'+\beta+\beta'+\beta''=360 \Rightarrow \alpha'+120+120+60=360 \Rightarrow \alpha'=60^\circ$$

۸ مجموع زاویهٔ α و α'، 180° است. بنابراین:

$$\alpha+\alpha'=180 \Rightarrow \alpha+60=180 \Rightarrow \alpha=120^\circ$$

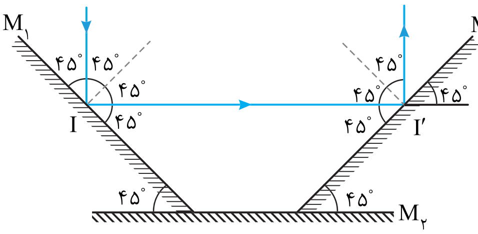
دقت کنید که توضیح دادن مسئله سبب طولانی شدن راه‌حل شده است وگرنه حل این تست زمان کوتاهی لازم دارد.

B ۱۶۸۱ ۱

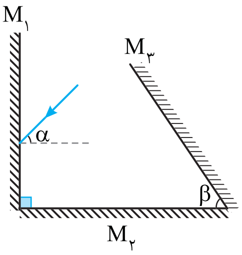
خط فکری: در حل این مسائل باید به زاویای روی شکل دقت کنید. سپس بازتاب پرتو از هر آینه را به دقت رسم کرده تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح آینهٔ M_1 می‌سازد 45° است و بنا به قانون عمومی بازتاب زاویهٔ پرتو بازتاب با سطح آینهٔ M_1 نیز 45° است.

۲ مجدداً به شکل نگاه کنید زاویهٔ بین امتداد آینهٔ M_1 و M_2، 45° و زاویهٔ بین پرتو II' و آینهٔ M_1 نیز 45° است و بنا به خطوط موازی مورب پرتوی II' موازی سطح آینهٔ M_2 بوده یعنی پرتو بازتاب از M_1 به M_2 برخورد نمی‌کند بلکه به آینهٔ M_3 می‌تابد و مطابق شکل بازتاب کرده بین پرتو نهایی موازی پرتو SI بوده و پرتو SI، 180° منحرف شده است.

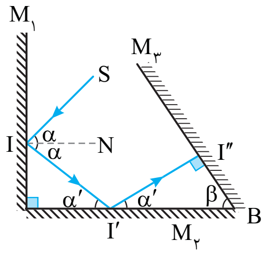


بازی با سؤال در شکل روبه‌رو پرتو SI با زاویهٔ تابش α بر سطح آینهٔ $M_۱$ تابیده شده و پس از بازتاب از سطح آینه‌های (۲) و (۳) روی خودش باز می‌گردد. کدام گزینه درست است؟



۱) $\beta=۲\alpha$ ۲) $\alpha=۲\beta$
۳) $\alpha+\beta=۹۰$ ۴) $\alpha=\beta+۹۰$

پاسخ ۱ پرتو SI با زاویهٔ تابش α به آینهٔ $M_۱$ می‌تابد و بنا به قانون عمومی بازتابش زاویهٔ بازتاب نیز α می‌شود (به شکل نگاه کنید.)



۲ با توجه به شکل دو آینهٔ $M_۱$ و $M_۲$ برهم عمودند بنابراین خط عمود N که بر آینهٔ $M_۱$ عمود است موازی آینهٔ $M_۲$ بوده و با توجه به خطوط موازی مورب زاویهٔ α' با زاویهٔ α برابر است.

۳ α' زاویهٔ بین پرتو تابش II' بر آینهٔ $M_۲$ است بنابراین زاویهٔ پرتو بازتاب $(I'I'')$ با سطح آینهٔ $M_۲$ نیز α' است.

۴ در مثلث $I'I''B$، پرتو $I'I''$ باید بر آینهٔ $M_۳$ عمود باشد تا روی خودش بازتاب کند در این صورت مجموع زوایای α' و β برابر ۹۰° خواهد شد.

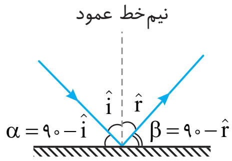
$$\alpha'+\beta=۹۰ \xrightarrow{\alpha=\alpha'} \alpha+\beta=۹۰^\circ$$

گزینهٔ ۳

B ۱۶۸۲ ۳

خط فکری در حل این سؤال باید در گام اول پرتوهای تابش و بازتاب بر سطح آینهٔ (۱) و سپس پرتو تابش و بازتاب دوم از سطح آینهٔ (۲) را رسم کنیم. به فرض مسئله دقت کنید که گفته شده پرتو دوم بازتابی از سطح آینهٔ (۱) موازی آینهٔ (۲) خواهد شد.

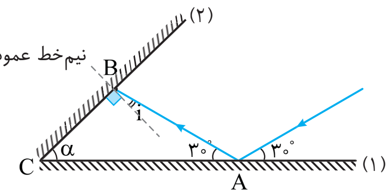
نکته با توجه به قانون بازتاب عمومی داریم:



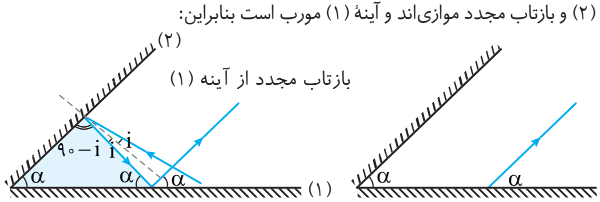
$\hat i=\hat r , \alpha=\beta$

۱ بازتاب پرتو از آینهٔ (۲) را رسم می‌کنیم و نیم‌خط عمود آن را مشخص می‌کنیم، مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر ۱۸۰° است:

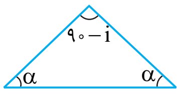
$$۳۰+(۹۰+\hat i)+\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat i=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ-۳۰^\circ-\hat\alpha \Rightarrow \hat i=۶۰^\circ-\hat\alpha \quad (I)$$



۲ پرتو بازتاب شده از آینهٔ (۲) مجدد به آینهٔ (۱) برخورد کرده و با توجه به سؤال و پرتو بازتاب مجدد از آینهٔ (۱) موازی با آینهٔ (۲) است. طبق خطوط موازی و مورب، آینهٔ (۲) و بازتاب مجدد موازی‌اند و آینهٔ (۱) مورب است بنابراین:



۳ در مثلث رنگی زاویهٔ دو آینه α و زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح آینه می‌سازد نیز با توجه به موازی مورب بالا α درجه است و مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است، بنابراین:



$$\hat\alpha+\hat\alpha+(۹۰-\hat i)=۱۸۰^\circ \xrightarrow[i=۶۰-\alpha]{\text{طبق معادلهٔ (۱)}}$$

$$۲\alpha+(۹۰-(۶۰-\alpha))=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha+۳۰=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۵۰^\circ$$

B ۱۶۸۳ ۱

با توجه به قانون بازتاب زاویه تابش و بازتاب با هم برابر است و مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است:

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۱) برابر $۶۰^\circ=۳۰-۹۰$ است بنابراین مطابق شکل (الف) زاویهٔ بازتاب از سطح آینهٔ (۱) نیز ۶۰° است.

۲ به شکل (الف) نگاه کنید. زاویهٔ بین پرتو و سطح آینهٔ (۲) خواهد شد:

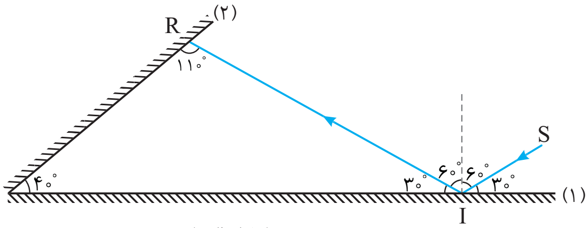
$$R=۱۸۰-(۳۰+۴۰)=۱۱۰^\circ$$

۳ اگر خط عمود بر سطح آینهٔ (۲) را رسم کنید، مطابق شکل (ب) زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۲) برابر $۲۰^\circ=۹۰-۱۱۰$ می‌شود و زاویهٔ پرتو بازتاب RR' با سطح آینهٔ (۲) $۷۰^\circ=۲۰-۹۰$ خواهد شد.

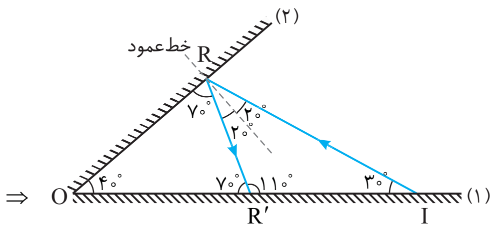
۴ در مثلث ORR' زاویهٔ پرتو بین پرتو RR' با سطح آینهٔ (۱) نیز برابر $۷۰^\circ=(۴۰+۷۰)-۱۸۰$ می‌شود.

۵ زاویهٔ تابش و بازتاب از سطح آینهٔ (۱)، ۲۰° می‌شود.

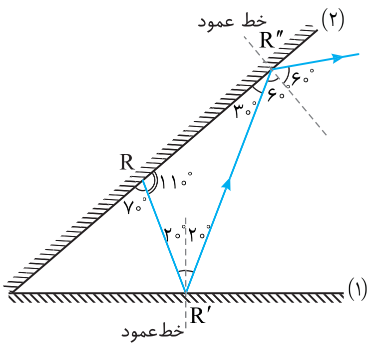
۶ پرتو $R'R''$ با آینهٔ ۲ زاویهٔ ۳۰° می‌سازد بنابراین زاویهٔ تابش و بازتاب برای پرتو $R'R''$، ۶۰° خواهد شد.



(شکل الف)



(شکل ب)

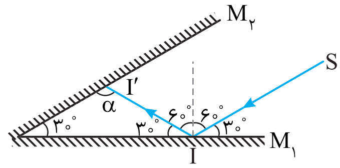


B ۱۶۸۴ | ۱

خط فکری با سؤال سختی سروکار نداریم اما کمی سؤال طولانی است، باید دوبار سوال حل شود یکبار با زاویه تابش ۶۰° و بار دیگر حالتی را بررسی کنیم که پرتو ۱۰° ساعتگرد (↻) بچرخد و زاویهٔ تابش ۷۰° شود:

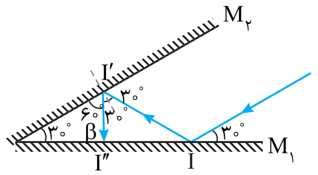
حالت (الف) زاویه تابش SI برابر ۶۰° است پس زاویه بازتاب II' نیز ۶۰° است. حال زاویه‌ای که پرتو II' با سطح آینهٔ $M_۲$ می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:

$\alpha+۳۰+۳۰=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۱۲۰^\circ$



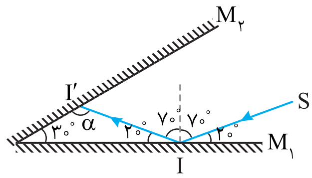
خط عمود را برای زاویهٔ α رسم کرده و پرتو بازتاب $I'I''$ از سطح $M_۲$ را رسم می‌کنیم:

$\beta+۳۰+۶۰=۱۸۰ \Rightarrow \beta=۹۰^\circ$



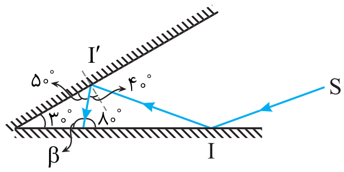
بنابراین با توجه به شکل پرتو $I'I''$ بر سطح آینهٔ $M_۱$ عمود است یعنی پرتو با زاویهٔ تابشی صفر درجه برای دومین بار بر سطح آینهٔ $M_۱$ می‌تابد.

حالت (ب) زاویهٔ تابش SI، ۷۰° شده پس زاویهٔ بازتاب از این سطح نیز ۷۰° می‌شود. حال زاویهٔ بین پرتو II' با سطح $M_۲$ را به‌دست می‌آوریم: $\alpha+۲۰+۳۰=۱۸۰ \Rightarrow \alpha=۱۳۰^\circ$

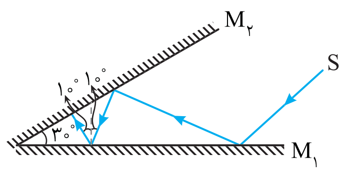


خط عمود را برای زاویهٔ α رسم کرده و پرتو بازتاب $I'I''$ را رسم می‌کنیم. زاویهٔ تابش و بازتاب بر سطح $M_۲$، ۴۰° می‌شود. حال پرتو $I'I''$ بر سطح $M_۱$ برخورد کرده که همان پرتو تابش بر سطح $M_۱$ برای دومین بار است:

$\beta+۳۰+۵۰=۱۸۰ \Rightarrow \beta=۱۰۰^\circ$

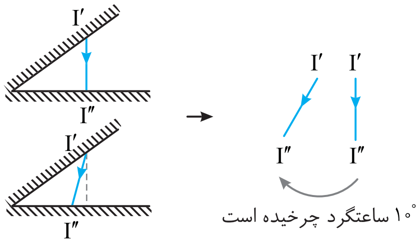


اگر برای زاویهٔ $\beta=۱۰۰^\circ$ خط عمود رسم کنیم، زاویهٔ تابش $۱۰^\circ=۱۰۰-۹۰$ می‌شود.



بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینه $M_۱$ از ۰° به ۱۰° می‌رسد.

بـه امتداد پرتو $I'I''$ در دو حالت (الف) و (ب) در شکل بعد توجه کنید، پرتو تابش بر سطح $M_۱$ و ۱۰° ساعتگرد می‌چرخد.

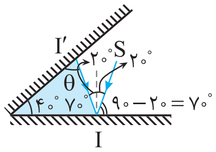


B ۱۶۸۵ | ۲

۱ بازتاب پرتو SI را رسم می‌کنیم، زاویه تابش و بازتاب یکسان و برابر ۲۰° است:

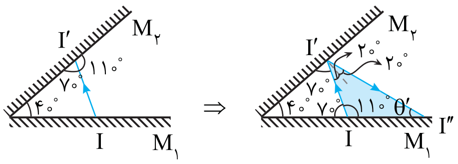
در مثلث رنگی: $\theta+۴۰+۷۰=۱۸۰$

$\Rightarrow \theta=۷۰^\circ$



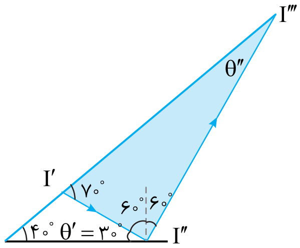
۲ پرتو II' با سطح زاویهٔ ۱۱۰° می‌سازد. نیم‌خط عمود این پرتو در سطح $M_۲$ را رسم کرده، زاویه تابش را مشخص و پرتو بازتاب را رسم می‌کنیم زاویهٔ تابش پرتو II' با آینه $M_۲$، برابر ۲۰° است.

در مثلث رنگی: $۱۱۰+۴۰+\theta'=۱۸۰ \Rightarrow \theta'=۳۰^\circ$



۳ حال پرتو تابش مجدد به از سطح $M_۱$ (II'') را رسم می‌کنیم و زاویهٔ بازتاب آن را به‌دست می‌آوریم: $\theta'=۱۸۰-۱۱۰-۴۰ \Rightarrow \theta'=۳۰$

در مثلث رنگی: $\theta''+۷۰+(۶۰+۶۰)=۱۸۰ \Rightarrow \theta''=-۱۰^\circ$ غ ق ق

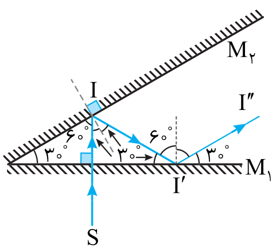


۴ زاویهٔ -۱۰° غیرقابل قبول است یعنی پرتوی $I''I'''$ به سطح $M_۲$ برخورد نمی‌کند. بنابراین زاویهٔ بازتاب نهایی پرتو SI هنگام خروج ۶۰° است.

B ۱۶۸۶ | ۲

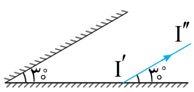
خط فکری شما باید در هر مرحله پرتو تابش بر هر آینه و پرتو بازتاب را رسم کرده و به کمک هندسه اندازهٔ زاویهٔ تابش و بازتاب را مشخص کنید و این عمل را تکرار کنید تا لحظه‌ای که زاویهٔ بین پرتو و سطح آینه کوچک‌تر و یا برابر زاویهٔ بین دو آینه شود. در این حالت پرتو از بین دو آینه خارج می‌گردد.

۱ زاویهٔ تابش پرتو SI، ۳۰° و زاویهٔ بازتاب آن نیز ۳۰° خواهد بود.



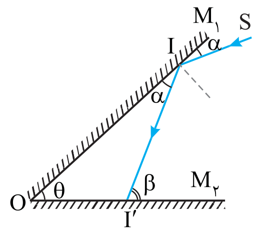
۲ پرتو II' وقتی به آینهٔ $M_۱$ برخورد می‌کند به دلیل خطوط موازی مورب با خط عمود زاویهٔ ۶۰° می‌سازد بنابراین پرتو II' با سطح آینهٔ $M_۱$ زاویهٔ ۳۰° خواهد ساخت در نتیجه زاویهٔ بین پرتو بازتاب از $M_۱$ با سطح آینهٔ $M_۱$، ۳۰° است.

۳ طبق خطوط موازی - مورب پرتو $I'I''$ با آینهٔ $M_۲$ موازی شده و از بین دو آینه خارج می‌شود در نتیجه تنها دو بار برخورد صورت می‌گیرد.



B ۱۶۸۷ ۴

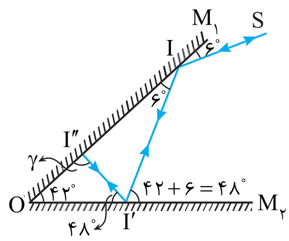
خط فکری قبل از حل مسئله باید مطلبی را برای هم روشن کنیم. اگر پرتو تابش بر آینهٔ M_1 پس از بازتاب به آینهٔ M_2 برسد. زاویه‌ای که پرتو با سطح آینهٔ M_2 می‌سازد زاویهٔ خارجی مثلث OII' است. یعنی β برابر $\alpha+\theta$ است و در هر بازتاب به اندازهٔ θ به زاویهٔ بین پرتو و سطح آینه افزوده می‌شود.



۱ پرتو SI با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ 6° می‌سازد و زاویهٔ بین دو آینه 42° است بنابراین زاویهٔ II' بر سطح M_2 برابر 48° است.

۲ زاویهٔ پرتو بازتاب $I'I''$ با آینهٔ M_1 خواهد شد. $\gamma=180-(42+48)\Rightarrow\gamma=90^\circ$

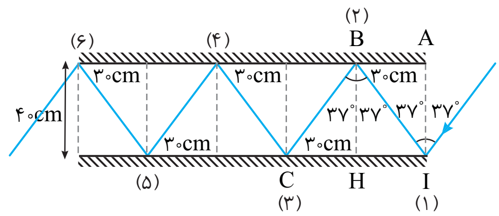
۳ بنابراین پرتو $I'I''$ بر سطح آینهٔ (۱) عمود است از این‌رو روی خودش بازتاب کرده و مسیر را برمی‌گردد. بنابراین پرتو پس از ۵ بار برخورد از سطح دو آینه و با زاویهٔ 180° نسبت به پرتو SI از بین دو آینه خارج می‌شود.



میانبر پرتوی SI یکبار به M_1 برخورد کرده سپس با زاویهٔ ۴۸=۴۲+۶ به آینهٔ M_2 برخورد کرده و بعد از آن با زاویهٔ $42+48=90^\circ$ به آینهٔ M_1 برخورد می‌کند (تا اینجا سه برخورد) و پرتو از M_1 روی خود باز می‌گردد به آینهٔ M_2 برخورد کرده و از آنجا بر همان مسیر به آینهٔ M_1 می‌رسد (جمعاً ۵ برخورد) و بر مسیر SI برمی‌گردد.

B ۱۶۸۸ ۲

خط فکری باید پرتو بازتاب را رسم کنید سپس محل برخورد به آینهٔ (۲) را بیابید و به کمک مثلثات مشخص کنید پرتو چند cm جلو رفته و این عمل را تکرار کنید. بنابراین با دقت حل را پیگیری کنید.



پرتو SI با زاویهٔ 37° به آینهٔ (۱) می‌تابد و با زاویهٔ 37° بازتاب می‌کند در مثلث IAB می‌توان نوشت:

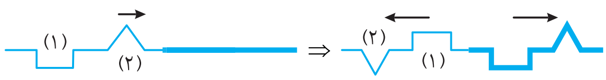
$$\tan 37=\frac{AB}{IA}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{AB}{40}\Rightarrow AB=30\,cm$$

با همین استدلال $CH=30\,cm$ می‌شود. یعنی بعد از هر برخورد پرتو ۳۰cm جلو می‌رود و مطابق شکل بعد از ۶ برخورد پرتو از بین دو آینه خارج می‌شود.

نکته اگر پهنای آینه‌ها در مسئلهٔ بالا بین ۱۵۰cm تا کمتر از ۱۸۰cm بود پرتو هم‌چنان پس از ۶ بازتاب از بین آینه‌ها خارج می‌شد.

A ۱۶۸۹ ۲

تپ بازتابیده از مرز شبیه تپ بازتابیده از انتهای ثابت وارونه و قرینه است. اما تپ عبوری از مرز شبیه تپ اولیه است اما ابعاد آن از تپ اولیه کوچک‌تر است زیرا انرژی تپ اولیه به دو بخش تقسیم می‌شود. یک بخش سهم تپ بازتاب و بخش دیگر سهم تپ عبوری است.



A ۱۶۹۰ ۱

یادآوری تندی انتشار موج در یک سیم از رابطهٔ $v=\sqrt{F/\mu}$ به دست می‌آید که در آن F نیروی کشش سیم و μ چگالی خطی سیم $(\mu=m/\ell)$ است.

نکته هرگاه یک موج از یک محیط به محیط دیگر برود بسامد موج که توسط چشمهٔ موج ایجاد می‌شود، ثابت می‌ماند.

$$\begin{cases}\text{طول موج در محیط اول}:\lambda_1=\dfrac{v_1}{f_1}\\ \text{طول موج در محیط دوم}:\lambda_2=\dfrac{v_2}{f_2}\end{cases}\xrightarrow{f_1=f_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

با توجه به رابطهٔ تندی انتشار موج در ریسمان خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{\dfrac{F_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\dfrac{F_2}{\mu_2}}}\xrightarrow{F_1=F_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\Rightarrow\frac{\mu_2}{\mu_1}=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2$$

B ۱۶۹۱ ۳

خط فکری در یک محیط همگن که شرایط فیزیکی در تمام جهت‌ها یکسان باشد، سرعت انتشار موج ثابت است، اما در این پرسش، شرایط فیزیکی محیط از A تا B در حال تغییر است، بنابراین سرعت انتشار موج از A تا B در حال تغییر بوده و طول موج نیز از A تا B درحال تغییر خواهد بود. بنابراین باید به سراغ رابطهٔ تندی انتشار موج در سیم با چگالی سیم برویم.

یادآوری سرعت انتشار موج در سیم $v=\sqrt{\dfrac{F}{\rho A}}$ بوده و با جذر چگالی سیم نسبت وارون دارد.

نکته در طول یک سیم ساکن کشش در تمام نقاط سیم یکسان است.

با توجه به اینکه بسامد موج در طول سیم تغییر نمی‌کند خواهیم داشت:

$$v_A=f\lambda_A\ ,\ \ v_B=f\lambda_B\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{v_A}{v_B}$$

به جای v مقدار $\sqrt{F/\rho A}$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{\sqrt{\dfrac{F_A}{\rho_A A_A}}}{\sqrt{\dfrac{F_B}{\rho_B A_B}}}\xrightarrow[F_A=F_B]{A_A=A_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\sqrt{\frac{\rho_B}{\rho_A}}$$

با توجه به فرض مسئله $\rho_A>\rho_B$ است بنابراین $\lambda_A<\lambda_B$ خواهد شد.

A ۱۶۹۲ ۲

یادآوری تندی انتشار موج در یک طناب (ریسمان) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید که در آن D قطر طناب، F نیروی کشش و μ چگالی خطی طناب است. $v=\dfrac{2}{D}\sqrt{\dfrac{F}{\pi\rho}}$

خط فکری دو طناب به هم متصل هستند و کشش در هر دو یکسان $(F_1=F_2)$ است. از طرفی دو طناب هم‌جنس هستند و چگالی هر دو یکی است. $(\rho_1=\rho_2)$ بنابراین ابتدا نسبت سرعت‌ها و سپس نسبت طول موج را حساب کنید.

۱ بسامد موج از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و هنگام انتشار موج ثابت می‌ماند. $(f_1=f_2)$

۲ نسبت v_2/v_1 را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}v_1=\dfrac{2}{D_1}\sqrt{\dfrac{F_1}{\pi\rho_1}}\\ v_2=\dfrac{2}{D_2}\sqrt{\dfrac{F_2}{\pi\rho_2}}\end{cases}\xrightarrow[\rho_1=\rho_2]{F_1=F_2}\frac{v_2}{v_1}=\frac{D_1}{D_2}\xrightarrow{D_2=2D_1}\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{2}$$

۳ نسبت طول موجها خواهد شد:

$$v_2=f\lambda_2\ ,\ \ v_1=f\lambda_1\xrightarrow{f_1=f_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{1}{2}$$

بازی با سؤال در شکل زیر چشمهٔ O در دو ریسمان که از یک نقطه به هم متصل شده‌اند، موج گسیل می‌کند. اگر دو ریسمان هم‌جنس و همگن باشند و سرعت انتشار امواج در ریسمان B، سه برابر سرعت انتشار امواج در ریسمان A باشد، سطح مقطع ریسمان A چند برابر سطح مقطع ریسمان B است؟ (نیروی کشش دو ریسمان یکی است.)

۱) ۹ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

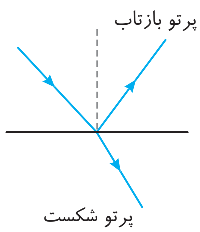
پاسخ سرعت انتشار موج در ریسمان برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ است.

اکنون به حل مسئله می‌پردازیم: $\frac{v_B}{v_A}=\frac{\sqrt{\frac{F}{\rho A_B}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A_A}}}\Rightarrow 3=\sqrt{\frac{A_A}{A_B}}\Rightarrow\frac{A_A}{A_B}=9$

گزینهٔ ۱

A ۱۶۹۳ | ۱

دوره و بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است.
اما هنگام گذر موج از مرز دو محیط بخشی از موج بازتاب کرده و بخشی وارد محیط دوم می‌شود. مطابق شکل، امتداد پرتو بازتاب و شکست یکسان نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.



وقتی بخشی از نور وارد محیط دیگر و بخشی از آن بازتاب می‌شود یعنی انرژی اولیه موج به دو بخش تقسیم می‌شود، بنابراین شدت نور برای این موج‌ها ممکن است یکسان نباشد و گزینهٔ (۳) نادرست است.
ویژگی‌های دو محیط یکسان نیست بنابراین وقتی موج از یک محیط به محیط دیگری می‌رود تندی انتشار تغییر می‌کند از این‌رو تندی انتشار موج بازتاب و تندی انتشار موج شکست یکسان نبوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۶۹۴ | ۴

سرعت امواج الکترومغناطیسی وقتی از هوا وارد محیط چگال‌تری مانند آب می‌شوند، کاهش می‌یابد $(v\downarrow=\frac{c}{n\uparrow})$ اما بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج بوده از این‌رو بسامد ثابت می‌ماند؛ در نتیجه طول موج نیز کاهش می‌یابد $(\lambda\downarrow=\frac{v\downarrow}{f})$.

A ۱۶۹۵ | ۳

بسامد از ویژگی‌های چشمه است و تغییر نمی‌کند. $f_1=f_2=60\,Hz$

طول موج یک موج از یک محیط به محیط دیگر با تندی انتشار موج نسبت مستقیم دارد.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\frac{v_2}{f}}{\frac{v_1}{f_1}}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{0/5}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lambda_2=0/25m$$

بازی با سؤال موج‌های حاصل از یک چشمهٔ موج در آب با سرعت $1540m/s$ و در هوا با سرعت $350m/s$ منتشر می‌شوند. اگر طول موج آن‌ها در هوا ۲/۵ متر باشد، طول موج آن‌ها در آب چند متر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۱۱ ۳) ۴/۴ ۴) ۵

پاسخ هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر (از هوا به آب)، بسامد ثابت می‌ماند. بنابراین:

$$f_1=f_2\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{2/5}=\frac{1540}{350}\Rightarrow\lambda_2=11m$$

گزینهٔ ۲

B ۱۶۹۶ | ۳

نکته رنگ نور به بسامد نور بستگی دارد و هنگام گذر نور از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر بسامد نور و در نتیجه رنگ نور ثابت می‌ماند.
با توجه به نکته بیان شده گزینهٔ (۳) درست است.

بازی با سؤال رنگ نور به کدام عامل زیر بستگی دارد؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) شدت نور ۲) سرعت نور ۳) بسامد نور ۴) طول موج نور

پاسخ نور یک لامپ تکفام قرمز در آب و هوا یکسان دیده می‌شود و نور قرمز در آب و در هوا دارای بسامد مشخص است. اما طول موج نور قرمز در هوا و آب به دلیل پدیدهٔ شکست یکسان نیست؛ بنابراین رنگ نور که توسط چشم دیده می‌شود به بسامد آن بستگی دارد.

گزینهٔ ۳

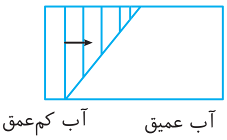
B ۱۶۹۷ | ۱

یادآوری تشت موج شامل یک تشت شیشه‌ای کم‌عمق و یک نوسان‌ساز است. یک راه مشاهدهٔ رفتار موج با استفاده از سایه‌ای است که توسط لامپ از سطح آب داخل تشت بر ورقهٔ کاغذی زیر تشت تشکیل می‌شود.

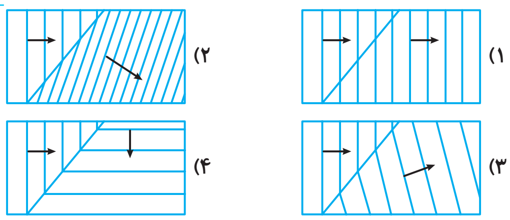
نکته تندی انتشار موج سطحی روی آب‌های کم‌عمق به عمق آب بستگی دارد و در مناطق کم‌عمق‌تر، تندی کمتر است.

وقتی موج به مرز برهٔ شیشه‌ای می‌رسد و وارد قسمت کم‌عمق‌تر می‌شود، تندی انتشار موج کاهش می‌یابد اما بسامد موج که توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود ثابت است بنابراین طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج کاهش می‌یابد $(\lambda\downarrow=\frac{v\downarrow}{f_{\text{ثابت}}})$ از طرفی همین امر سبب تغییر مسیر جبهه‌های موج می‌شود؛ بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

بازی با سؤال روی سطح آب یک تشت، یک موج سطحی تخت در قسمت کم‌عمق ایجاد شده است و این موج به مرز آب کم‌عمق و آب عمیق‌تر می‌رسد. کدام گزینه شکل جبهه‌های موج سطحی در آب عمیق‌تر را به درستی نمایش می‌دهد؟



از کتاب درسی



پاسخ با ورود موج از آب کم‌عمق به آب عمیق‌تر، تندی موج و در نتیجه طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج افزایش می‌یابد و جبهه‌های موج نیز که با مرز زاویه می‌سازند از مسیر خود منحرف می‌شوند؛ بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

گزینهٔ ۳

A ۱۶۹۸ | ۱

۱) تندی موج ۶۰٪ کاهش یافته، یعنی تندی در ناحیهٔ کم‌عمق خواهد شد:

$$v_2=v_1-\frac{60}{100}v_1\Rightarrow v_2=0/4v_1$$

۲) با توجه به $\lambda=\frac{v}{f}$ و اینکه در شکست بسامد تغییر نمی‌کند، داریم:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}=0/4\xrightarrow[\text{برابر طول موج است}]{\text{فاصلهٔ دو ستیغ متوالی}}\frac{\lambda_2}{10}=0/4\Rightarrow\lambda_2=4cm$$

A ۱۶۹۹ | ۱

بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=2\pi f$ است و می‌دانیم بسامد با تغییر محیط ثابت می‌ماند، بنابراین بسامد زاویه‌ای موج الکترومغناطیسی در شیشه و خلأ یکسان می‌باشد.

A ۱۷۰۰ ۲

هرگاه نور از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری شود، سرعت و طول موج آن به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند اما بسامد آن ثابت می‌ماند. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{f=\text{ثابت}}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{2/25\times10^8}{3\times10^8}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{4}{3}$$

A ۱۷۰۱ ۴

نکته سرعت صوت در آب از سرعت صوت در هوا بیشتر است. اما در مورد امواج الکترومغناطیسی با توجه به قانون شکست اسنل هرچه محیط غلیظ‌تر باشد، ضریب شکست بیشتر شده و سرعت کاهش می‌یابد. از این‌رو: $\downarrow v=\frac{c}{n\uparrow}$

وقتی صوت از هوا وارد آب می‌شود، بسامد ثابت می‌ماند. اما با زیاد شدن تندی انتشار صوت در آب، طول موج در آب افزایش می‌یابد.

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[\text{v افزایش یافته}]{\text{با تغییر محیط بسامد ثابت می‌ماند.}}\lambda \text{ بیشتر می‌شود}$$

وقتی نور و یا هر موج الکترومغناطیسی از هوا وارد آب می‌شود تندی انتشار آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[\text{v کاهش یافته}]{\text{با تغییر محیط بسامد ثابت مانده}}\lambda \text{ کمتر می‌شود}$$

A ۱۷۰۲ ۱

بنا به تعریف ضریب شکست هر محیط برابر با نسبت تندی نور در خلأ به تندی نور در آن محیط است؛ از این‌رو:

$$n=\frac{c}{v}\xrightarrow[c=3\times10^8\,m/s=3\times10^5\,km/s]{v=2/5\times10^5\,km/s}n=\frac{3\times10^5}{2/5\times10^5}\Rightarrow n=1/2$$

A ۱۷۰۳ ۴

با توجه به تعریف ضریب شکست، وقتی پرتو از خلأ وارد محیطی با ضریب شکست n می‌شود، تندی انتشار $\frac{1}{n}$ می‌شود. $n=\frac{c}{v}\Rightarrow v=\frac{c}{n}$

چون بسامد نور ثابت می‌ماند، طول موج آن نیز $\frac{1}{n}$ می‌شود. $\lambda'=\frac{\lambda}{n}$

A ۱۷۰۴ ۴

یادآوری سرعت تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است. با توجه به تعریف ضریب شکست:

$$v=\frac{c}{n}\Rightarrow v=\frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}{\frac{4}{3}}\Rightarrow v=\frac{3}{4\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

A ۱۷۰۵ ۲

۱ با توجه به قانون شکست عمومی و قانون شکست اسنل

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{v_2}{3\times10^8}=\frac{1}{\frac{6}{5}}\Rightarrow\frac{v_2}{3\times10^8}=\frac{5}{6}\Rightarrow v_2=2/5\times10^8\,m/s$$

۲ بسامد به چشم نور بستگی دارد و با تغییر محیط تغییر نمی‌کند.

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{3\times10^8}{600\times10^{-9}}\Rightarrow f=\frac{1}{2}\times10^{15}\Rightarrow f=5\times10^{14}\,Hz$$

۳ همچنین با توجه به $\lambda=\frac{v}{f}$ و ثابت ماندن f بنابراین تغییرات λ و v یکسان می‌باشد:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{600}=\frac{1}{\frac{6}{5}}\Rightarrow\lambda_2=500\,nm$$

A ۱۷۰۶ ۲

با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت:

$$v_1=\frac{c}{n_1}\ ,\ v_2=\frac{c}{n_2}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{\frac{c}{n_2}}{\frac{c}{n_1}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\quad(I)$$

از طرفی با ثابت ماندن بسامد موج در گذر از یک محیط به محیط دیگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}v_1=f\lambda_1\\v_2=f\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\qquad(II)$$

از رابطهٔ (I) و (II) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{0/45}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}\Rightarrow\lambda_2=0/4\,\mu m$$

A ۱۷۰۷ ۴

رابطهٔ سرعت نور با ضریب شکست را در دو حالت می‌نویسیم و سپس دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{n_{\text{ش}}}{n_{\text{آ}}}=\frac{v_{\text{آ}}}{v_{\text{ش}}}=\frac{9}{8}\\\frac{n_{\text{ال}}}{n_{\text{ش}}}=\frac{v_{\text{ش}}}{v_{\text{ال}}}=\frac{8}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_{\text{آ}}}{v_{\text{ش}}}\times\frac{v_{\text{ش}}}{v_{\text{ال}}}=\frac{9}{8}\times\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{v_{\text{آ}}}{v_{\text{ال}}}=\frac{9}{5}$$

A ۱۷۰۸ ۱

خط فکری نکتهٔ مهم در حل این تست ساده این است که بسامد با تغییر محیط ثابت می‌ماند و نسبت بسامد در هوا با نسبت بسامد در محیط شفاف دیگر تفاوتی ندارد؛ به همین علت شما نسبت بسامدها در هوا را به‌دست بیاورید. نسبت بسامدها در هوا را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}f_A=\frac{v}{\lambda_A}\\f_B=\frac{v}{\lambda_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{400}{200}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=2$$

A ۱۷۰۹ ۱

۱ با توجه به رابطهٔ ضریب شکست با سرعت نور خواهیم داشت:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{1}{\frac{4}{3}}\Rightarrow\lambda_2=\frac{3}{4}\lambda_1$$

۲ اکنون یک معادله داریم و دو مجهول؛ اما با توجه به صورت مسئله و اینکه طول موج در آب از طول موج در هوا کمتر شده، می‌توان نوشت:

$$\lambda_1-\lambda_2=100\Rightarrow\lambda_1-\frac{3}{4}\lambda_1=100\Rightarrow\frac{\lambda_1}{4}=100\Rightarrow\lambda_1=400\,nm$$

۳ طول موج در هوا $\lambda_1=400\,nm$ است. در گسترهٔ امواج الکترومغناطیسی طول موج نور مرئی در بازهٔ ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm قرار دارد. بنابراین این موج الکترومغناطیسی در ناحیهٔ نور مرئی قرار دارد.

۴ بسامد این موج الکترومغناطیسی در هر محیطی از جمله خلأ خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow400\times10^{-9}=\frac{3\times10^8}{f}\Rightarrow f=\frac{3}{4}\times10^{15}\,Hz\Rightarrow f=7/5\times10^{14}\,Hz$$

A ۱۷۱۰ ۳

با ورود نور از شیشه به هوا به اندازهٔ ۴۰٪ سرعت آن افزایش یافته؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{\text{هوا}}=v_{\text{شیشه}}+\frac{40}{100}v_{\text{شیشه}}\Rightarrow v_{\text{هوا}}=1/4\,v_{\text{شیشه}}$$

با توجه به قانون شکست اسنل:

$$\begin{cases}\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}\\\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_1}{v_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{v_{\text{شیشه}}}{v_{\text{هوا}}}=\frac{n_{\text{هوا}}}{n_{\text{شیشه}}}\Rightarrow\frac{v_{\text{شیشه}}}{1/4\,v_{\text{شیشه}}}=\frac{1}{n_{\text{شیشه}}}$$

$$\Rightarrow n_{\text{شیشه}}=1/4=\frac{7}{5}$$

A ۱۷۱۱ ۲

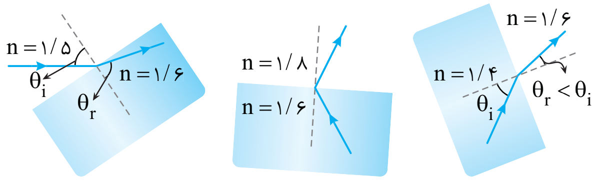
سرعت نور در این محیط شفاف ۳۶ درصد از سرعت نور در خلأ (c) کمتر است؛ یعنی:

$$v=c-\frac{۳۶}{۱۰۰}c\Rightarrow v=\frac{۶۴}{۱۰۰}c$$

اکنون می‌توان نوشت: $\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۶۴}{۱۰۰}=\frac{۱۶}{۲۵}$

A ۱۷۱۲ ۲

برای هر سه شکل خط عمود را رسم می‌کنیم.



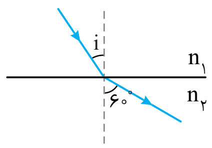
(پ) (ب) (الف)

در شکل (الف) ضریب شکست محیط دوم از محیط اول بیشتر است، بنابراین پرتو شکست به خط عمود باید نزدیک شود و شکل (الف) درست است.

شکل (ب) کاملاً نادرست است. زیرا زاویهٔ تابش و شکست باید در دو طرف خط عمود تشکیل شود. در حالی که در این شکل هر دو پرتو در یک طرف خط عمود رسم شده‌اند.

در شکل (پ) ضریب شکست محیط دوم بزرگ‌تر است و باید پرتو به خط عمود نزدیک شود؛ یعنی $\theta_r<\theta_i$ باشد، اما پرتو از خط عمود دور شده که این شکل نادرست است.

A ۱۷۱۳ ۴

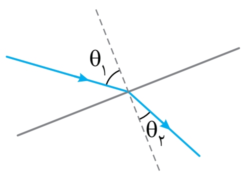


با توجه به شکل روبه‌رو زاویهٔ شکست از زاویهٔ تابش بیشتر است. با توجه به قانون اسنل $(n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲)$، ضریب شکست محیط اول $(n_۱)$ از ضریب شکست محیط دوم $(n_۲)$ بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) درست است.

سرعت نور با ضریب شکست نسبت وارون دارد $(\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲})$ بنابراین وقتی $n_۱>n_۲$ است، سرعت نور در محیط اول از سرعت نور در محیط دوم کمتر است $(v_۱<v_۲)$ و گزینهٔ (۲) درست است.

هرگاه پرتو نور از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود. پرتو در محیط (۲) از خط عمود دور شده؛ بنابراین محیط (۲) از محیط (۱) رقیق‌تر است و گزینهٔ (۳) نیز درست است.

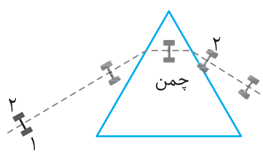
A ۱۷۱۴ ۲



با توجه به شکل و رسم خط عمود بر سطح با عبور موج الکترومغناطیسی پرتو به خط عمود نزدیک شده؛ بنابراین سرعت در محیط دوم کمتر از سرعت در محیط اول است اما بسامد ثابت می‌ماند و طول موج نیز کاهش می‌یابد:

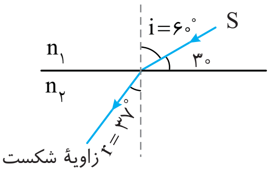
$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}\xrightarrow{v_۲<v_۱}\lambda_۲<\lambda_۱$$

A ۱۷۱۵ ۲



در هر چهار گزینه ماشین با ورود به چمن، به سمت پایین منحرف شده است و این نشان می‌دهد که تندی حرکت چرخ‌های ماشین روی چمن از محیط پیرامونش کمتر بوده و همین امر سبب می‌گردد که وقتی چرخ شمارهٔ (۱) به روی چمن می‌رود، سرعتش از چرخ شمارهٔ (۲) کمتر بوده و ماشین درون زمین چمن منحرف شود. سرعت هر دو چرخ یکسان است اما وقتی چرخ شمارهٔ (۲) از چمن خارج می‌شود سرعتش بیشتر شده و سبب چرخش ماشین رو به پایین می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۷۱۶ ۱



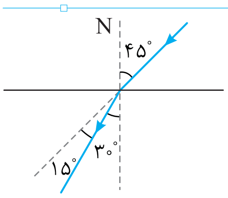
هرگاه پرتو نور به طور مایل از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری شود، مسیر آن به طور ناگهانی تغییر می‌کند و علت آن، تغییر ناگهانی سرعت نور است. در محیط‌های غلیظ سرعت نور کمتر است. پس اگر هنگام گذر نور از محیط شفاف به محیط شفاف دیگر پرتو به خط عمود نزدیک شود، محیط دوم غلیظ‌تر بوده و سرعت نور در این محیط از سرعت نور در محیط اول کمتر است.

$$r<i\Rightarrow n_۲>n_۱\xrightarrow{\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}}v_۲<v_۱$$

زاویهٔ شکست زاویهٔ بین پرتو شکست و خط عمود است که این زاویه $r=۳۷°$ است.

میانبر در هر محیطی که زاویهٔ بین پرتو و خط عمود بزرگ‌تر است، تندی انتشار نور در آن محیط بیشتر است.

A ۱۷۱۷ ۳



۱ پرتو هنگام ورود به محیط دوم از مسیر خود $۱۵°$ منحرف می‌شود و زاویهٔ شکست برابر است با: $\theta_۲=۴۵-۱۵=۳۰°$

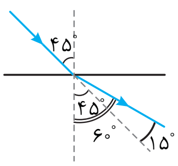
۲ با توجه به رابطهٔ اسنل، ضریب شکست خواهد شد:

$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\xrightarrow{n_۱=۱,n_۲=n}\sin۴۵°=n\sin۳۰°\Rightarrow n=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow n=\sqrt{۲}$$

۳ اکنون می‌توان طول موج پرتو مورد نظر را در محیط شفاف جدید به‌دست آورد:

$$\lambda'=\frac{\lambda}{n}\Rightarrow\lambda'=\frac{۷۰۰}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\lambda'=۳۵۰\sqrt{۲}nm\Rightarrow\lambda'=\frac{۷\sqrt{۲}}{۲۰}\mu m$$

B ۱۷۱۸ ۴



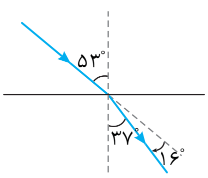
۱ هرگاه صوت از هوا وارد یک مایع شود پرتو از خط عمود دور می‌شود. بنابراین زاویهٔ شکست خواهد شد: $\theta_۲=۴۵°+۱۵°=۶۰°$

۲ با توجه به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\theta_{\text{هوا}}}{\sin\theta_{\text{مایع}}}=\frac{v_{\text{هوا}}}{v_{\text{مایع}}}\Rightarrow\frac{\sin۴۵}{\sin۶۰}=\frac{v_{\text{هوا}}}{v_{\text{مایع}}}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{v_{\text{هوا}}}{v_{\text{مایع}}}\Rightarrow\frac{v_{\text{مایع}}}{v_{\text{هوا}}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

B ۱۷۱۹ ۱

نکته روابط شکست موج در هنگام ورود غیرعمودی از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد: $\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}$



$۵۳°-۱۶°=۳۷°$

باید توجه داشت هنگام عبور موج از یک محیط به محیط دیگر، بسامد موج تغییر نمی‌کند.

با ورود نور از هوا به هر محیط دیگری پرتو به خط عبور نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین پرتو موج $۱۶°$ به نیم‌خط عمود نزدیک می‌شود:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\sin۳۷°}{\sin۵۳°}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

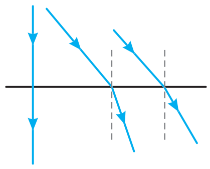
طول موج $\frac{۱}{۸}\mu m$ کاهش یافته است.

$$\lambda_۱-\lambda_۲=\frac{۱}{۸}\times۱۰^{-۶}\xrightarrow{\lambda_۲=\frac{۳}{۴}\lambda_۱}\frac{۱}{۴}\lambda_۱=\frac{۱}{۸}\times۱۰^{-۶}\Rightarrow\lambda_۱=۰/۵\times۱۰^{-۶}m$$

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۰/۵\times۱۰^{-۶}}=۶\times۱۰^{۱۴}Hz$$

B ۱۷۲۰ ۲

خط فکری زاویهٔ تابش صفر درجه یعنی پرتو عمود بر مرز دو محیط بتابد و بدون انحراف وارد محیط دوم شود. اما وقتی زاویهٔ تابش شروع به افزایش می‌کند و از هوا وارد محیط شفاف می‌شود از مسیر خود منحرف می‌شود اما زاویهٔ شکست از زاویهٔ تابش همواره کمتر است ($\theta_r<\theta_i$) و وقتی زاویهٔ تابش به 90° می‌رسد زاویهٔ شکست از 90° کمتر است. بنابراین شما باید به گزینهٔ (۲) و (۳) فکر کنید.



با توجه به قانون اسنل ($n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$) هرگاه $\theta_1=90^\circ$ شود آنگاه زاویهٔ شکست خواهد شد: $1\times\sin 90^\circ=2\sin\theta_r\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_r=30^\circ$

یعنی حد نهایی زاویهٔ شکست در این پدیده 30° است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۷۲۱ ۲

خط فکری سرعت نور در یک محیط معین مقدار ثابتی است؛ پس حرکت نور حرکت یکنواخت روی خط راست است. شما باید به کمک معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت $x=vt$ مسئله را حل کنید.

معادلهٔ انتشار نور را برای آب و هوا می‌نویسیم:

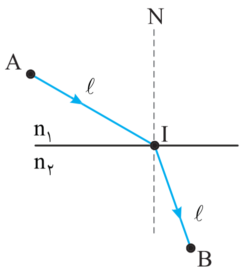
$$\begin{cases} d_{\text{هوا}}=v_{\text{هوا}}t_{\text{هوا}}\\ d_{\text{آب}}=v_{\text{آب}}t_{\text{آب}}\end{cases}\xrightarrow[t_{\text{هوا}}=t_{\text{آب}}]{\text{با فرض مسئله}}\frac{d_{\text{هوا}}}{d_{\text{آب}}}=\frac{v_{\text{هوا}}}{v_{\text{آب}}}\qquad (I)$$

با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت: $n_{\text{آب}}=\frac{v_{\text{هوا}}}{v_{\text{آب}}}$ (II)

از رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d_{\text{هوا}}}{d_{\text{آب}}}=n_{\text{آب}}\xrightarrow[n_{\text{آب}}=\frac{4}{3}]{d_{\text{آب}}=120\,cm}\frac{d_{\text{هوا}}}{120}=\frac{4}{3}\Rightarrow d_{\text{هوا}}=160cm$$

A ۱۷۲۲ ۱



خط فکری با یک مسئلهٔ حرکت‌شناسی سر و کار دارید. از شما خواسته شده زمان حرکت یک متحرک را از نقطهٔ A تا I و از I تا B را بر حسب تندی حرکت متحرک حساب کنید، بنابراین شما باید با معادلهٔ حرکت یکنواخت در هر مسیر، زمان را بر حسب تندی حساب کرده و با هم جمع کنید.

۱ زمان حرکت نور از A تا I برابر است با: $x=vt\Rightarrow t=\frac{x}{v}\Rightarrow t_1=\frac{\ell}{v_1}$

۲ زمان حرکت نور از I تا B برابر است با: $t=\frac{x}{v}\Rightarrow t_2=\frac{\ell}{v_2}$

۳ زمان رسیدن از A تا B برابر است با: $t_{\text{کل}}=t_1+t_2\Rightarrow t=\frac{\ell}{v_1}+\frac{\ell}{v_2}$ (I)

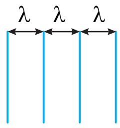
۴ اما به گزینه‌ها دقت کنید! در تمام گزینه‌ها خبری از v_2 نیست بلکه ضریب شکست‌های n_1 و n_2 دیده می‌شود؛ بنابراین باید از رابطهٔ (I)، v_2 را حذف کنید.

پس به سراغ رابطهٔ سرعت و ضریب شکست می‌رویم. $\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow v_2=\frac{n_1}{n_2}v_1$

۵ اکنون رابطهٔ به‌دست آمده را در (I) قرار می‌دهیم.

$$t=\frac{\ell}{v_1}+\frac{\ell}{\frac{n_1}{n_2}v_1}\Rightarrow t=\frac{\ell}{v_1}+\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{\ell}{v_1}\right)\xrightarrow{\text{از } \frac{\ell}{v_1} \text{ فاکتور می‌گیریم}}t=\frac{\ell}{v_1}\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)$$

A ۱۷۲۳ ۳



نکته در رسم جبهه‌های موج فاصلهٔ دو جبههٔ متوالی برابر یک طول موج است.

خط فکری دقت کنید در بازتاب موج از مرز دو محیط، موج در همان محیط انتشار می‌یابد. بنابراین تندی موج و طول موج آن بدون تغییر می‌ماند اما در پدیدهٔ شکست، موج از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شود و با تغییر شرایط فیزیکی محیط، تندی انتشار موج و در نتیجه طول موج آن تغییر می‌کند. بنابراین شما در شکل‌ها باید به دنبال چگونگی تغییر فاصلهٔ جبهه‌های موج بگردید.

در بازتاب، طول موج ثابت می‌ماند پس باید در بازتاب، فاصلهٔ جبهه‌های موج ثابت بماند. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است. در شکست نور و ورود به محیط غلیظ‌تر طول موج کاهش می‌یابد؛ ($\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}$) بنابراین باید فاصلهٔ جبهه‌های موج در ورود به شیشه از هم کم شود که در گزینهٔ (۳) جبهه‌های موج این‌گونه رسم شده‌اند.

A ۱۷۲۴ ۱

با توجه به شکل با ورود جبهه‌های موج به محیط دوم فاصلهٔ جبهه‌های موج کمتر شده است؛ بنابراین در محیط دوم طول موج کمتر از طول موج در محیط اول است ($\lambda_1>\lambda_2$). در گذر موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد ثابت می‌ماند و با توجه به $\lambda=\frac{v}{f}$ وقتی طول موج کاهش می‌یابد یعنی تندی در محیط دوم از تندی در محیط اول کمتر است. ($v_2<v_1$)

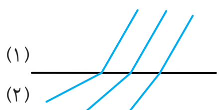
با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\xrightarrow{v_2<v_1}n_2>n_1\Rightarrow\frac{n_2}{n_1}>1$$

میانبر اگر هنگام ورود جبهه‌های موج از یک محیط به محیط دیگر جبهه‌های موج به مرز دو محیط نزدیک شوند، آنگاه تندی و طول موج در محیط دوم از محیط اول کمتر است.

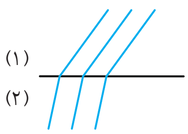
B ۱۷۲۵ ۳

در گزینهٔ (۱) جبهه‌های موازی از محیط همگن (۱) وارد محیط همگن شده بنابراین باید جبهه‌های در محیط دوم نیز با هم موازی باشند اما نیستند و گزینهٔ (۱) نادرست است.

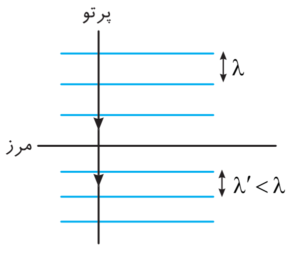


نکته هرگاه موج از یک محیط وارد محیط دیگری شود و تندی انتشار موج کاهش یابد، قطعاً طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج کم می‌شود. ($\downarrow\lambda=\frac{v\downarrow}{f_{\text{ثابت}}}$)

در گزینهٔ (۲) موج وارد محیط (۲) شده که در آن تندی موج کمتر است؛ بنابراین باید فاصلهٔ جبهه‌های موج کاهش یابد اما افزایش یافته و گزینهٔ (۲) نادرست است.



هنگامی که پرتو عمود بر سطح بتابد بدون انحراف موج از مرز عبور می‌کند و از طرفی می‌دانیم که پرتو بر جبهه‌های موج نیز عمود است؛ بنابراین باید جبهه‌های موج موازی با سطح باشند. با ورود به محیط دوم، با کم شدن v طول موج (فاصلهٔ موج‌های تخت) نیز از هم کم شده و فاصلهٔ جبهه‌های موج نیز کم می‌شود بنابراین گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۱۷۲۶ ۳

یادآوری ۱ فاصلهٔ دو جبهه موج متوالی از هم برابر طول موج (λ) است.

۲ در آب‌های کم‌عمق، هرچه عمق کمتر می‌شود، تندی انتشار موج سطحی در سطح آب کمتر می‌شود.

۳ در عبور موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد موج که از ویژگی‌های چشمهٔ موج است ثابت می‌ماند از این‌رو:

$$v=f\lambda \xrightarrow{f_1=f_2} \frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

با توجه به شکل، فاصلهٔ جبهه‌های موج در بخش B از بخش A کمتر است. از این‌رو طول موج در بخش B از بخش A کوتاه‌تر بوده $(\lambda_B<\lambda_A)$، در نتیجه تندی انتشار موج در بخش B از بخش A کمتر است $(v_B<v_A)$. بنابراین عمق آب در بخش B از عمق آب در بخش A کمتر است $(h_B<h_A)$.

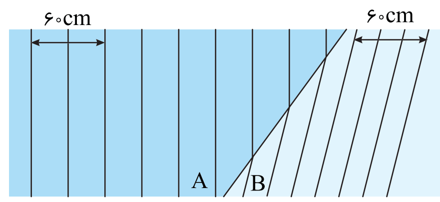
دوباره به شکل نگاه کنید:

در بخش A فاصله‌ای که مقدار آن $60cm$ است، دو برابر طول موج و در بخش B سه برابر طول موج است، از این‌رو:

$$2\lambda_A=60\Rightarrow\lambda_A=30cm\ ,\ 3\lambda_B=60\Rightarrow\lambda_B=20cm$$

اکنون نسبت $\frac{v_B}{v_A}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{20}{30}\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\frac{2}{3}$$



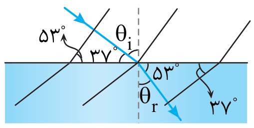
B ۱۷۲۷ ۳

۱ پرتو موج همواره بر جبهه‌های موج عمود است. با توجه به این نکته ابتدا زاویه تابش را به کمک زوایای شکل زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{\theta}_i=90^\circ-37^\circ\Rightarrow\hat{\theta}_i=53^\circ\ ,\ \hat{\theta}_r=90^\circ-53^\circ\Rightarrow\hat{\theta}_r=37^\circ$$

۲ حال با توجه به قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{4}{3}\Rightarrow\lambda_2=\frac{3}{4}\lambda_1$$



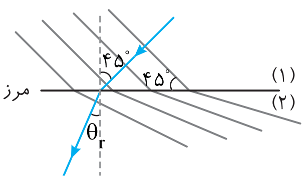
۳ درصد تغییرات طول موج خواهد شد:

$$\text{درصد تغییرات}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}\times100\Rightarrow\frac{-\frac{\lambda_1}{4}}{\lambda_1}\times100=-25\%$$

میانبر همواره زاویه‌های بین جبهه‌های موج و مرز دو محیط برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. $\theta_i=53^\circ,\theta_r=37^\circ$

A ۱۷۲۸ ۲

یادآوری زاویهٔ بین جبهه‌های موج با مرز دو محیط برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.



خط فکری ابتدا باید تشخیص دهیم محیط اول و محیط دوم کدام است. با توجه به فرض مسئله در محیط اول تندی انتشار موج از تندی آن در محیط دوم بیشتر است. $(25m/s>21/25m/s)$

بنابراین طول موج در محیط اول باید از طول موج در محیط دوم بلندتر باشد. در نتیجه محیط اول محیط بالای مرز بوده و موج از آن‌جا وارد محیط دوم شده است. اکنون به کمک قانون عمومی شکست می‌توانید زاویهٔ شکست در محیط دوم را به‌دست آورده و مقدار انحراف جبهه‌های موج را تعیین کرد.

۱ بنا به قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\sin45}{\sin\theta_2}=\frac{25}{21/25}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta_2}=\frac{1}{0/85}$$

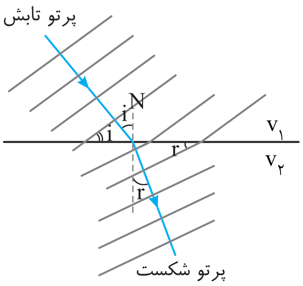
$$\sin\theta_2=0/85\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0/85\times\frac{1/4}{2}\Rightarrow\sin\theta_2=0/595\sim0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۲ مقدار انحراف برابر است با: $45-37=8^\circ$

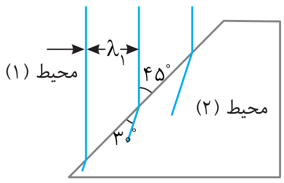
A ۱۷۲۹ ۳

یادآوری زاویهٔ بین جبهه‌های موج با سطح جدایی دو محیط برابر زاویه بین پرتو و نیم‌خط عمود بر نقطه تابش است.

قانون شکست عمومی: $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}$



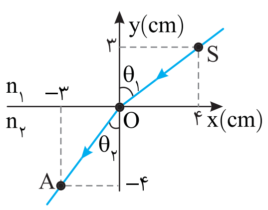
با توجه به شکل زاویهٔ بین جبهه‌های تابش با سطح 45° است، بنابراین زاویهٔ تابش $\theta_1=45^\circ$ است، همچنین زاویهٔ بین جبهه‌های شکست در محیط (۲) با سطح جدایی 30° بوده یعنی زاویهٔ شکست $\theta_2=30^\circ$ است، از این‌رو با توجه به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\sin45^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{2}$$

A ۱۷۳۰ ۳

خط فکری باز یک مسئله که به‌جای اندازه زوایای تابش و شکست، روی شکل فاصله‌ها و مکان‌ها را به ما داده است. بنابراین شما باید به کمک هندسه و مثلثات زوایای شکست و تابش را حساب کرده به سراغ قانون شکست عمومی بروید.



۱ زاویهٔ تابش را حساب می‌کنیم. $\tan\theta_1=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta_1=53^\circ$

۲ زاویهٔ شکست را به دست می‌آوریم. $\tan\theta_2=\frac{3}{4}\Rightarrow\theta_2=37^\circ$

۳ قانون شکست عمومی را می‌نویسیم.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin53^\circ}{\sin37^\circ}=\frac{0/8}{0/6}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{4}{3}$$

بازی با سؤال یک قطعه شیشه تخت با ضریب شکست $\sqrt{۲}$ مطابق شکل روی محور مختصات قرار گرفته و پرتو SI از هوا به آن می‌تابد و وارد شیشه می‌شود. مختصات نقطه‌ای که پرتو از قطعه خارج می‌شود، کدام گزینه است؟

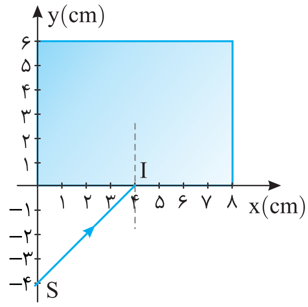
$(\sqrt{۳}=۱/۷)$

۱) $(۷/۴,۶)$

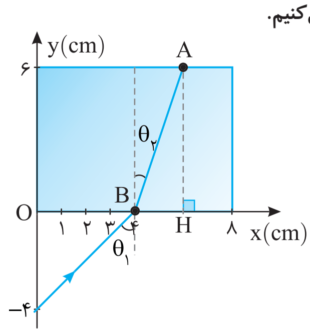
۲) $(۶,۷/۴)$

۳) $(۶,۶)$

۴) $(۶,۸)$



پاسخ زاویهٔ تابش را حساب می‌کنیم.



$$\tan\theta_۱=\frac{۴}{۴}=۱\Rightarrow\theta_۱=۴۵^\circ$$

زاویهٔ شکست در تیغهٔ شیشه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲$$

$$\Rightarrow ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}\sin\theta_۲$$

$$\Rightarrow\sin\theta_۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_۲=۳۰^\circ$$

فاصلهٔ BH را به کمک هندسه و مثلثات به‌دست می‌آوریم:

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{BH}{۶}\Rightarrow BH=۲\sqrt{۳}cm=۲\times۱/۷=۳/۴cm$$

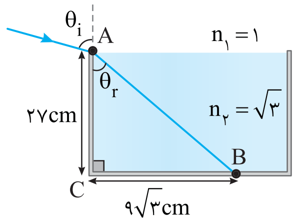
مختصات نقطهٔ A محل خروج پرتو خواهد شد.

$$x_A=۴+۳/۴=۷/۴cm\ ,\ y_B=۶cm\Rightarrow A=(۷/۴,۶)$$

گزینهٔ ۱

۱۷۳۱ ۴

خط فکری در مسائل نور هندسی شما باید به کمک اضلاع و زوایای روی شکل شروع به حل مسئله کنید. یعنی در این مسئله باید از طول $BC=۹\sqrt{۳}cm$ و طول $AC=۱۸cm$ برای یافتن زاویهٔ شکست (θ_r) استفاده کنید. سپس به سراغ قانون شکست اسنل رفته زاویهٔ تابش θ_i را به‌دست آورید.



۱ ابتدا با توجه به روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC زاویهٔ شکست (θ_r) را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\theta_r=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲۷}$$

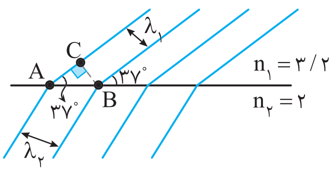
$$\Rightarrow\tan\theta_r=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\theta_r=۳۰^\circ$$

۲ حال با توجه به قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۱}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\theta_i=۶۰^\circ$$

۱۷۳۲ ۴

خط فکری ابتدا شما باید به کمک فاصلهٔ AB و زاویهٔ ۳۷° روی شکل طول موج در محیط اول $(\lambda_۱)$ را به کمک هندسه و مثلثات حساب کنید. سپس به سراغ قوانین شکست رفته و $\lambda_۲$ را به دست آورید.



۱ طول موج فاصلهٔ عمودی بین دو جبههٔ متوالی موج است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$\sin ۳۷^\circ=\frac{BC}{AB}\Rightarrow ۰/۶=\frac{\lambda_۱}{۸}\Rightarrow\lambda_۱=۴/۸cm$$

۲ اکنون به کمک ضریب شکست در محیط، طول موج در محیط دوم را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{v_۱}{v_۲}\xrightarrow{\frac{v_۱}{v_۱}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}}\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\Rightarrow\frac{۲}{۳/۲}=\frac{۴/۸}{\lambda_۲}$$

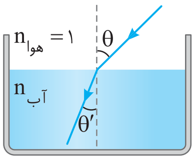
$$\lambda_۲=۱/۶\times۴/۸\Rightarrow\lambda_۲=۷/۶۸\,cm$$

۱۷۳۳ ۴

ضریب شکست هوا برابر ۱ است اما ضریب شکست مایع ریخته شده بزرگ‌تر از ۱ است:

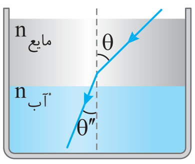
حالت (۱): پرتو از هوا وارد آب شود:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_{آب}}{n_{هوا}}\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_{آب}}{۱}\quad(I)$$



حالت (۲): پرتو از مایع وارد آب شود:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{n_{آب}}{n_{مایع}}\quad(II)$$



دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

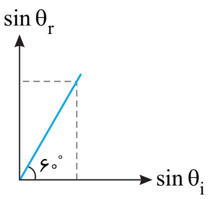
$$\frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}}=\frac{\frac{n_{آب}}{۱}}{\frac{n_{آب}}{n_{مایع}}}\Rightarrow\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}=n_{مایع}$$

چون $n_{مایع}$ از ۱ بزرگ‌تر است پس نسبت $\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}$ نیز از ۱ بزرگ‌تر است:

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}>۱\Rightarrow\sin\theta''>\sin\theta'\Rightarrow\theta''>\theta'$$

با توجه به اینکه در قانون شکست زاویه، تندی و طول موج پرتو با هم رابطهٔ مستقیم دارند پس در حالت دوم که زاویهٔ شکست بزرگ‌تر بوده، طول موج نیز بزرگ‌تر است.

۱۷۳۴ ۴



۱ با توجه به شکل نسبت سینوس‌ها برابر شیب نمودار بوده از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\tan ۶۰=\frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{۱}{\tan ۶۰}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲ بنا به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow v_A<v_B$$

بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.

۳ اکنون با قانون اسنل به سراغ ضریب شکست می‌رویم.

$$\frac{n_B}{n_A}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_۳}\Rightarrow\frac{n_B}{n_A}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow n_A>n_B$$

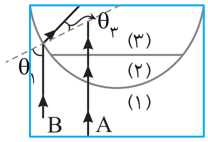
از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۷۳۵ ۳

یادآوری هرگاه نور از یک محیط شفاف به‌طور مایل وارد محیط شفاف دیگری شود، مسیرش به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند. این پدیده را شکست نور می‌گویند. اگر پرتو از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود، به خط عمود نزدیک می‌شود و اگر از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، از خط عمود دور می‌شود و اگر عمود بر سطح جدایی دو محیط بتابد، بدون انحراف وارد محیط دوم می‌شود.

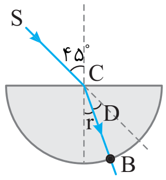
در شکل داده شده پرتو A بر سطح جدایی (۱) و (۲) عمود نیست، اما بدون انحراف از این سطح گذشته است، پس $n_1=n_2$ است. پرتو B هنگام گذر از محیط (۱) به محیط (۳) به خط عمود نزدیک شده است. $(\theta_3<\theta_1)$

پس ضریب شکست محیط (۳) از ضریب شکست محیط (۱) و (۲) بزرگ‌تر است. $(n_3>n_1=n_2)$



A ۱۷۳۶ ۲

خط فکری C مرکز نیم‌استوانه است و اگر پرتوی از مرکز بگذرد و به سوی محیط برود، این پرتو در امتداد شعاع استوانه بوده و بر محیط عمود است و از نقطهٔ B بدون انحراف خارج می‌شود. بنابراین شما تنها باید زاویهٔ شکست هنگام ورود پرتو به استوانه را حساب کنید و مقدار انحراف پرتو را به دست بیاورید.



با توجه به قانون اسنل خواهیم داشت:

$$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r\Rightarrow 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\times\sin\theta_r\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{1}{2}\Rightarrow r=30^\circ$$

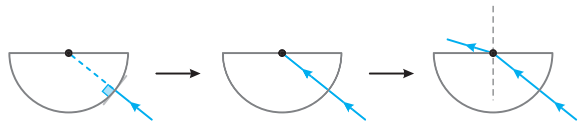
از این‌رو مقدار انحراف پرتو برابر است با: $D=45^\circ-30^\circ=15^\circ$

A ۱۷۳۷ ۲

نکته هرگاه پرتو نوری وارد نیم کره یا نیم‌استوانه‌ای شود و امتداد آن از مرکز بگذرد، پرتو در امتداد شعاع حرکت کرده و بر سطح نیم کره یا نیم‌استوانه عمود است و هنگام ورود یا خروج منحرف نمی‌شود.

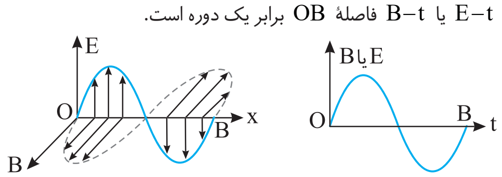
با توجه به نکته بیان شده، شکل‌های گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.

هنگام خروج از نیم‌کره، پرتو وارد هوا خواهد شد پس سرعت پرتو افزایش می‌یابد و از خط عمود دور می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

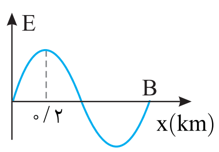


A ۱۷۳۸ ۴

یادآوری در نمودار $E-x$ و $B-x$ فاصلهٔ OB برابر یک طول موج است و در نمودار $E-t$ یا $B-t$ فاصلهٔ OB برابر یک دوره است.

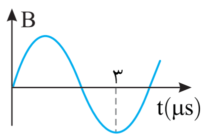


۱ از روی نمودار $E-x$ طول موج نور را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{\lambda}{4}=0/2\Rightarrow\lambda=0/8\,km$$

۲ دوره را از روی نمودار میدان مغناطیسی - زمان $(B-t)$ حساب می‌کنیم.



$$\frac{3T}{4}=3\times10^{-6}\Rightarrow T=4\times10^{-6}s$$

۳ تندی نور در این محیط شفاف خواهد شد:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{0/8\times10^{3}}{4\times10^{-6}}\Rightarrow v=0/2\times10^{9}\Rightarrow v=2\times10^{8}m/s$$

۴ اکنون طول موج در خلأ را به کمک رابطهٔ بین تندی و طول موج به دست می‌آوریم.

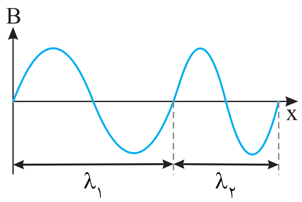
$$\lambda_1=\frac{v_1}{f_1},\quad \lambda_2=\frac{v_2}{f_2}\xrightarrow{f_1=f_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_{\text{خلأ}}}=\frac{v_2}{v_{\text{خلأ}}}\Rightarrow\frac{0/8}{\lambda_{\text{خلأ}}}=\frac{2\times10^{8}}{3\times10^{8}}$$

$$\lambda_{\text{خلأ}}=1/2\,km\Rightarrow\lambda_{\text{خلأ}}=1200m$$

A ۱۷۳۹ ۲

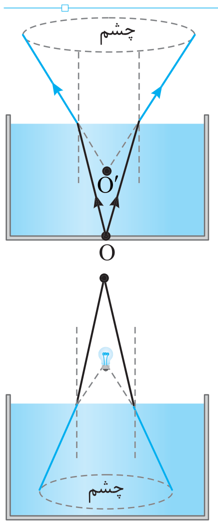
با توجه به شکل با ورود به محیط دوم طول موج کاهش یافته است و با توجه به ثابت بودن بسامد که از ویژگی‌های چشمه است. تندی انتشار نیز کاهش می‌یابد.

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\xrightarrow{\lambda_2<\lambda_1}v_2<v_1$$

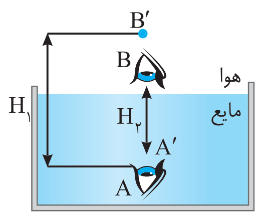


A ۱۷۴۰ ۱

خط فکری هرگاه پرتو نور از محیط غلیظ مانند آب وارد محیط رقیق مانند هوا شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود و این امر سبب می‌گردد که ناظر بیرون آب نقطهٔ O را در محل نقطهٔ O′ ببیند، یعنی اگر سکه‌ای در کف ظرف باشد، آن را بالاتر می‌بینند، اما اگر پرتو نور از هوا به آب وارد شود، مثلاً یک چراغ بالای سطح آب باشد و شما از زیر آب به آن نگاه کنید، چراغ را بالاتر از جایی که هست می‌بینید. به مسیر پرتوها دقت کنید. با توجه به این مطلب شما می‌توانید در مورد این تست اظهارنظر کنید.



ناظر A که در محیط غلیظ (آب) است، ناظر B را بالاتر از جایی که واقعاً هست و دورتر از خود می‌بینید. ناظر B که در محیط رقیق (هوا) است، ناظر A را بالاتر از جایی که واقعاً هست و نزدیک‌تر به خود می‌بیند. بنابراین $H_1>H_2$ است.



بازی با سؤال گربه‌ای بالای سکو و یک ماهی درون دریاچه قرار دارد.

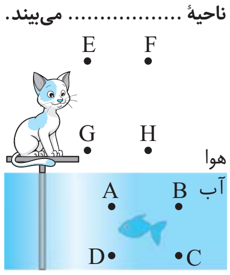
گربه، ماهی را در ناحیهٔ .... و ماهی، گربه را در ناحیهٔ .... می‌بینند.

۱) H, A

۲) E, A

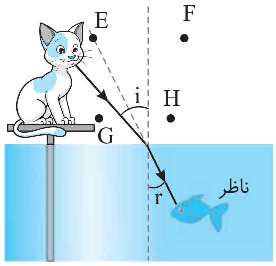
۳) B, E

۴) F, B

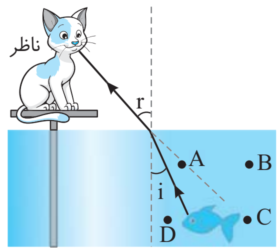


پاسخ گربه در محیط رقیق بوده و به ماهی در محیط غلیظ نگاه می‌کند، از این‌رو ماهی را از جایی که هست بالاتر یعنی در نقطهٔ A می‌بینند. (شکل الف) ماهی از محیط غلیظ (آب) به محیط رقیق هوا می‌نگرد و گربه را از جایی که هست بالاتر یعنی در نقطهٔ E می‌بینند (شکل ب).

گزینه ۲



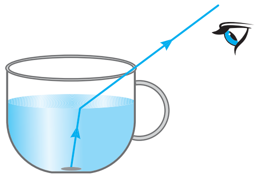
شکل (ب)



شکل (الف)

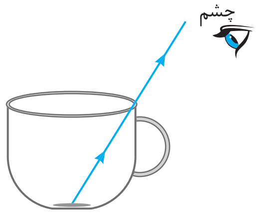
A ۱۷۴۱ ۳

خط فکری پرتوهای نور از آب وارد هوا شده و از خط عمود دور می‌شود. اما چشم شخص در جایی است که پرتو با آن که منحرف می‌شود به آن نمی‌رسد. بنابراین شما باید کاری بکنید که پرتو از این مقدار نیز بیشتر منحرف شده تا شخص بتواند سکه را ببیند. برای این منظور باید کاری کنیم که ضریب شکست مایع درون فنجان افزایش یابد.



فنجان آب

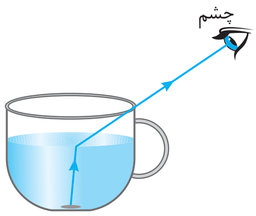
اگر فنجان را از آب خالی کنیم پرتو بدون انحراف از فنجان خارج می‌شود و شخص قطعاً نمی‌تواند سکه را ببیند و گزاره (الف) نادرست است.



فنجان بدون آب

اگر نمک یا شکر را به‌خوبی در آب حل کنیم، پرتو هنگام خروج از مایع بیشتر منحرف شده و سبب می‌گردد که شخص سکه را ببیند و (ب) درست است.

اگر فنجان را از آب خالی کرده و به جای آن مایعی با ضریب شکست بیشتر قرار دهیم. در این حالت نیز پرتو خروجی بیشتر منحرف می‌شود و ممکن است به چشم شخص برسد و گزاره (پ) نیز درست است.



مایع با ضریب شکست بیشتر

A ۱۷۴۲ ۴

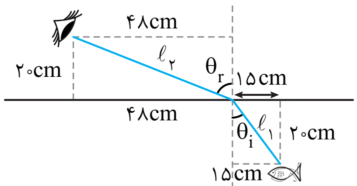
خط فکری دقت کنید نیازی به دانستن اندازهٔ زاویهٔ تابش θ_i و زاویهٔ شکست (θ_r) نیست و شما باید $\sin\theta_i$ و $\sin\theta_r$ را به کمک شکل به‌دست بیاورید و مسئله را حل کنید.

۱ با توجه به قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_۲}{n_۱}$$

$$\ell_۱=\sqrt{۲۰^۲+۱۵^۲}=۲۵cm \quad , \quad \ell_۲=\sqrt{۲۰^۲+۴۸^۲}=۵۲cm$$

$$\sin\theta_r=\frac{۴۸}{\ell_۲}\Rightarrow \sin\theta_r=\frac{۴۸}{۵۲}=\frac{۱۲}{۱۳} \quad , \quad \sin\theta_i=\frac{۱۵}{\ell_۱}\Rightarrow \sin\theta_i=\frac{۱۵}{۲۵}=\frac{۳}{۵}$$

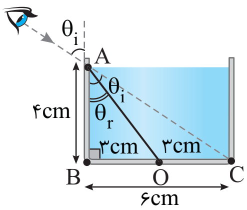


۲ اکنون به کمک قانون اسنل ضریب شکست آب دریاچه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۱۲}{۱۳}}=\frac{۱}{n_{آب}}\Rightarrow n_{آب}=\frac{۲۰}{۱۳}$$

A ۱۷۴۳ ۴

خط فکری باز باید شما از فاصله‌های روی شکل سینوس زاویه‌های تابشی و شکست را حساب کنید، سپس به سراغ قوانین مربوط به شکست بروید. البته ابتدا باید طول ضلع AC و AO را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به دست بیاورید.



۱ طول وترهای AC و AO را حساب کنیم.

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow AC=\sqrt{۴^۲+۶^۲}\Rightarrow AC=\sqrt{۲^۲(۲^۲+۳^۲)}\Rightarrow$$

$$AC=۲\sqrt{۱۳}\,cm$$

$$AO^۲=AB^۲+BO^۲\Rightarrow AO=\sqrt{۴^۲+۳^۲}\Rightarrow AO=۵\,cm$$

۲ در مثلث ABC زاویهٔ A با زاویهٔ تابش θ_i متقابل به رأس بوده و با هم برابرند و $\sin\theta_i$ خواهد شد.

$$\sin\theta_i=\frac{BC}{AC}\Rightarrow \sin\theta_i=\frac{۶}{۲\sqrt{۱۳}}\Rightarrow \sin\theta_i=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

۳ در مثلث ABO زاویهٔ A با زاویهٔ شکست (θ_r) را به دست می‌آوریم.

$$\sin\theta_r=\frac{OB}{OA}=\frac{۳}{۵}$$

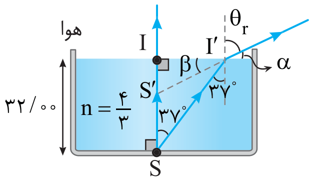
۴ به کمک قانون اسنل، ضریب شکست مایع را حساب می‌کنیم.

$$n=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow n=\frac{\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

A ۱۷۴۴ ۱

۱ پرتو SI بر سطح آب عمود است و بدون انحراف از آب خارج می‌شود.

۲ بنا به خطوط موازی و مورب زاویهٔ تابش پرتو SI' برابر ۳۷° است.



۳ زاویهٔ شکست θ_r را به کمک قانون اسنل به دست می‌آوریم.

$$n_۱\sin\theta_i=n_۲\sin\theta_r\Rightarrow \frac{۴}{۳}\sin ۳۷^\circ=۱\times\sin\theta_r=\sin\theta_r=\frac{۴}{۳}\times ۰/۶$$

$$\sin\theta_r=۰/۸\Rightarrow\theta_r=۵۳^\circ$$

۴ زاویهٔ α را روی شکل حساب می‌کنیم.

$$\alpha+\theta_r=۹۰\Rightarrow\alpha+۵۳=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۷^\circ$$

۵ زاویه‌های β و α متقابل به رأس هستند و با هم برابرند: $\beta=\alpha=۳۷^\circ$

۶ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SII' فاصلهٔ II' را به دست می‌آوریم.

$$\tan ۳۷^\circ=\frac{II'}{SI}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{II'}{۳۲}\Rightarrow II'=۲۴cm$$

۷ در مثلث $S'II'$، فاصلهٔ $S'I$ را به دست می‌آوریم.

$$\tan\beta=\frac{S'I}{II'}\Rightarrow\tan ۳۷^\circ=\frac{S'I}{۲۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{S'I}{۲۴}\Rightarrow S'I=۱۸cm$$

۸ بنابراین خواهیم داشت:

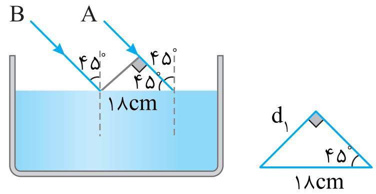
$$\frac{SI}{S'I}=\frac{۳۲}{۱۸}=\frac{۱۶}{۹}$$

C ۱۷۴۵ ۳

نکته فاصلهٔ دو پرتو از هم برابر طول پاره‌خط عمود بر دو پرتو است.

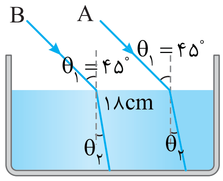
۱ فاصلهٔ دو پرتو را در هوا به‌دست می‌آوریم:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{d_1}{۱۸} \Rightarrow d_1 = ۹\sqrt{۲}cm$$



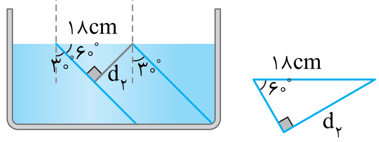
۲ زاویهٔ شکست پرتوها در مایع را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}\Rightarrow \sin\theta_2=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_2=۳۰$$



۳ فاصلهٔ دو پرتو در محیط دوم را حساب می‌کنیم.

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{d_2}{۱۸}\Rightarrow d_2=۹\sqrt{۳}cm$$

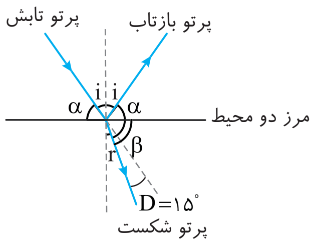


۴ نسبت خواسته شده یعنی $\frac{d_2}{d_1}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۹\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{d_2}{d_1}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{d_2}{d_1}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

A ۱۷۴۶ ۱

مطابق شکل، پرتو بازتاب و شکست را رسم می‌کنیم.



۱ زاویهٔ بین پرتو تابش و سطح تیغه (α) با زاویهٔ β متقابل به رأس بوده و با هم برابر هستند. $(\beta=\alpha)$

۲ با توجه به فرض مسئله زاویهٔ بین پرتو بازتاب و پرتو شکست ۱۲۵° است، از این‌رو:

$$\alpha+\beta+D=۱۲۵ \quad (I)$$

۳ پرتو ۱۵° از مسیرش منحرف شده $(D=۱۵^\circ)$

$$(I)\Rightarrow\alpha+\alpha+۱۵=۱۲۵\Rightarrow\alpha=۵۵^\circ$$

۴ مجموع زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح تیغه می‌سازد (α) و زاویهٔ i، ۹۰° است.

$$i+۵۵=۹۰\Rightarrow i=۳۵^\circ$$

۵ زاویهٔ شکست خواهد شد:

$$r=i-D\Rightarrow r=۳۵-۱۵\Rightarrow r=۲۰^\circ$$

B ۱۷۴۷ ۴

۱ ابتدا سرعت نور در آب را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{v_{آب}}{۳\times۱۰^۸}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}\Rightarrow v_{آب}=\frac{۹}{۴}\times۱۰^۸=۲/۲۵\times۱۰^۸ m/s$$

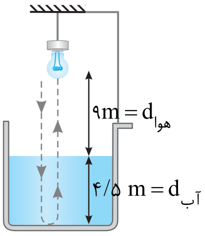
۲ نور مسیر تا کف مخزن رفته و از آینه بازتاب شده و این مسیر را باز می‌گردد پس نور دو بار مسافت ۹m در هوا طی کرده و دو بار مسافت ۴/۵m را در آب طی می‌کند. با توجه به اینکه سرعت نور در یک محیط ثابت است، پس زمان طی شدن مسافت در آب و هوا را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{آب}: v_{آب}=\frac{۲d_{آب}}{\Delta t_{آب}}\Rightarrow\Delta t_{آب}=\frac{۲d_{آب}}{v_{آب}}\Rightarrow\Delta t_{آب}=\frac{۲\times۴/۵}{۲/۲۵\times۱۰^۸}=۴\times۱۰^{-۸}s$$

$$\text{هوا}: v_{هوا}=\frac{۲d_{هوا}}{\Delta t_{هوا}}\Rightarrow\Delta t_{هوا}=\frac{۲d_{هوا}}{v_{هوا}}\Rightarrow\Delta t_{هوا}=\frac{۲\times۹}{۳\times۱۰^۸}=۶\times۱۰^{-۸}s$$

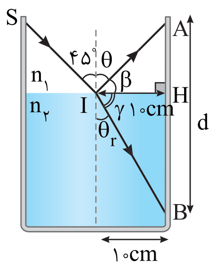
۳ زمان کل طی شده برابر است با:

$$\Delta t_{کل}=\Delta t_{آب}+\Delta t_{هوا}\Rightarrow\Delta t_{کل}=۴\times۱۰^{-۸}+۶\times۱۰^{-۸}=۱۰^{-۷}s$$



A ۱۷۴۸ ۲

خط فکری باید زاویهٔ بازتاب (θ) و زاویهٔ شکست θ_r را حساب کنید. سپس به کمک این زاویه‌ها از مثلث AIH و IHB، مقدار AH و HB را به‌دست آورده و با هم جمع کنید.



$\theta=۴۵^\circ$

۱ بنا به قانون بازتاب عمومی: $\theta=۴۵^\circ$

۲ در مثلث AH زاویهٔ β نیز ۴۵° بوده و این مثلث متساوی‌الساقین است و $AH=۱۰cm$ می‌شود.

۳ زاویهٔ شکست را به کمک قانون اسنل به دست می‌آوریم:

$$n=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow\sqrt{۲}=\frac{\sin ۴۵}{\sin\theta_r}\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_r=۳۰^\circ$$

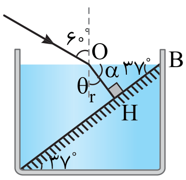
۴ در مثلث IHB زاویهٔ γ خواهد شد: $۹۰-۳۰=۶۰^\circ$

۵ طول HB را حساب می‌کنیم.

$$\tan\gamma=\frac{HB}{IH}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{HB}{۱۰}\Rightarrow HB=۱۰\sqrt{۳}cm\Rightarrow HB=۱۰\times۱/۷=۱۷cm$$

۶ طول d برابر است با: $d=AH+HB\Rightarrow d=۱۰+۱۷=۲۷cm$

A ۱۷۴۹ ۴



۱ مسئله را باید از آخر حل کرد، یعنی اینکه، پرتو به سطح آینه برخورد کرده و روی خودش بازتاب می‌کند، بنابراین پرتو بر سطح آینه به‌طور عمود می‌تابد. بنابراین مثلث OHB قائم‌الزاویه است.

۲ زاویهٔ B نیز به دلیل خطوط مورب و موازی ۳۷° بوده بنابراین زاویهٔ α خواهد شد:

$$\alpha+۳۷^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow\alpha=۵۳^\circ$$

۳ زاویهٔ شکست نیز برابر است با:

$$\theta_r=۹۰-\alpha=۹۰-۵۳=۳۷^\circ$$

۴ با کمک قانون اسنل ضریب شکست مایع را به دست می‌آوریم.

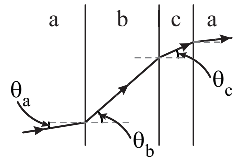
$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\Rightarrow ۱\times\sin ۶۰^\circ=n\sin ۳۷^\circ$$

$$۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=n\times۰/۶\Rightarrow n=\frac{\sqrt{۳}}{۱/۲}\Rightarrow n=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

A ۱۷۵۰ ۱

نکته با توجه به قانون شکست عمومی $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$، در هر محیطی که تندی انتشار موج بیشتر است، در آن محیط زاویهٔ بین پرتو نور و خط عمود بزرگ‌تر است.

$\theta_1>\theta_2 \Leftrightarrow v_1>v_2$



به شکل دقت کنید و زاویه‌ای را که پرتو با خط عمود می‌سازد در هر محیط با دیگر محیط‌ها مقایسه کنید.

$\theta_a<\theta_c<\theta_b \Rightarrow v_a<v_c<v_b$

A ۱۷۵۱ ۱

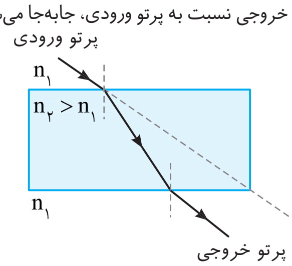
خط فکری با توجه به قانون اسنل، ضریب شکست یک محیط با سینوس زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در همان محیط نسبت وارون دارد. $(\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2})$ بنابراین در هر محیطی که زاویهٔ بین پرتو و خط عمود بزرگ‌تر باشد، ضریب شکست در آن محیط کوچک‌تر است. بنابراین شما باید زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط‌ها را با هم مقایسه کنید.

$\theta_1=60^\circ, \theta_2=40^\circ, \theta_3=50^\circ \Rightarrow \theta_2<\theta_3<\theta_1 \Rightarrow n_2>n_3>n_1$

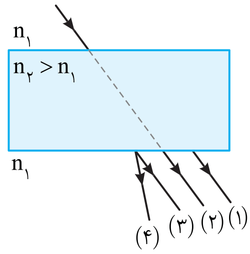
A ۱۷۵۲ ۳

یادآوری ۱ در تیغهٔ شفاف امتداد پرتو ورودی به تیغه و امتداد پرتو خروجی از تیغه موازی هستند.

یادآوری ۲ پرتو خروجی از یک تیغه نمی‌تواند در امتداد پرتو ورودی باشد و در اثر شکست، مسیر پرتو خروجی نسبت به پرتو ورودی، جابه‌جا می‌شود.

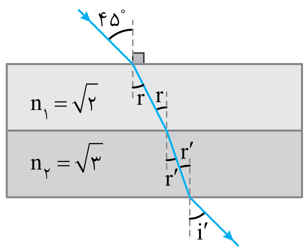


چون $n_2>n_1$ است پرتو هنگام ورود به خط عمود نزدیک می‌شود بنابراین مسیر (۱) نمی‌تواند پاسخ باشد، زیرا نشان می‌دهد که پرتو درون تیغه از خط عمود دور شده است.
پرتو (۲) در امتداد پرتو ورودی است که این نیز نمی‌تواند جواب مسئله باشد.
پرتو (۳) دقیقاً موازی پرتو ورودی و نسبت به آن جابه‌جا شده، از این‌رو این پرتو صحیح است.
امتداد پرتو (۴) و امتداد پرتو ورودی موازی هم نبوده و این پرتو نیز پاسخ درست نخواهد بود.



A ۱۷۵۳ ۱

روی هر مرز قانون اسنل را می‌نویسیم:



۱ مرز هوا و n_1:

$\sin 45^\circ=\sqrt{2}\sin r$

۲ مرز n_1 و n_2:

$\sqrt{2}\sin r=\sqrt{3}\sin r'$

۳ مرز n_2 و هوا:

$\sqrt{3}\sin r'=\sin i'$

با مقایسهٔ سه رابطه می‌توان نوشت:

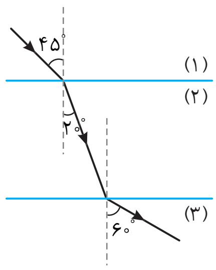
$\sin 45^\circ=\sin i' \Rightarrow i'=45^\circ$

میانبر در یک تیغه تخت شفاف همواره زاویه ورود به تیغه با زاویه خروج از تیغه برابر است.

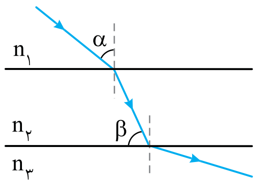
A ۱۷۵۴ ۳

قانون شکست عمومی را برای دو محیط (۱) و (۳) می‌نویسیم:

$$\frac{v_3}{v_1}=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1}\xrightarrow{\theta_1=45^\circ,\theta_3=60^\circ}\frac{v_3}{v_1}=\frac{\sin 60}{\sin 45}\Rightarrow\frac{v_3}{v_1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow\frac{v_3}{v_1}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$



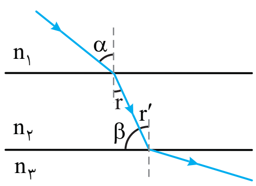
بازی با سؤال اگر v_1 و v_2 به‌ترتیب سرعت نور در محیط‌های (۱) و (۲) در شکل مقابل باشند، $\frac{v_1}{v_2}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ۲) $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ ۳) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ۴) $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$

پاسخ یادآوری ریاضی $\sin(90-\theta)=\cos\theta$

به شکل دقت کنید. به دلیل خاصیت موازی و مورب زاویهٔ r و r' با هم برابر هستند. $(r=r')$



از طرفی مجموع زاویهٔ β و r' برابر 90° است.

$r'+\beta=90 \Rightarrow r+\beta=90 \Rightarrow r=90-\beta \quad (I)$

بنا به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin r}\xrightarrow{(I)}\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin(90-\beta)}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

گزینهٔ ۴

B ۱۷۵۵ ۴

خط فکری در هر مرحله از ورود نور به محیط‌های شفاف رابطهٔ شکست نور $(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1})$ را می‌نویسیم و با هم مقایسه می‌کنیم.

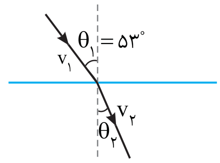
محیط (۱) و (۲): با توجه به صورت مسئله سرعت نور از محیط (۱) به محیط (۲)، ۲۵٪ کاهش یافته است:

$$v_2=v_1\underbrace{-}_{\text{کاهش}}\underbrace{\frac{25}{100}}_{25\%}v_1\Rightarrow v_2=0/75v_1$$

رابطهٔ بین سرعت نور و زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست $\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ است.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow\frac{v_1}{0/75v_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{0/75}=\frac{0/8}{\sin\theta_2}\Rightarrow\sin\theta_2=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$



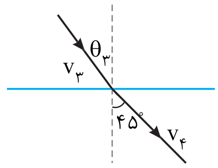
محیط (۳) و (۴): سرعت نور در محیط (۴)، ۴۰ درصد بیشتر از سرعت نور در محیط (۳) است:

$$v_4=v_3+\frac{40}{100}v_3\Rightarrow v_4=1/4v_3$$

رابطهٔ بین سرعت نور و زاویهٔ تابش و شکست به صورت $\frac{v_3}{v_4}=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}$ است:

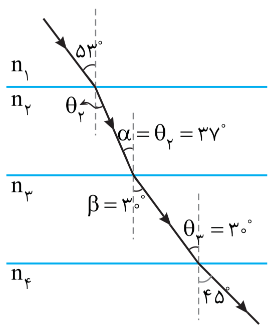
$$\frac{v_3}{v_4}=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}\Rightarrow\frac{v_3}{1/4v_3}=\frac{\sin\theta_3}{\sin45^\circ}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1/4}=\frac{\sin\theta_3}{0/7}\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_3=30^\circ$$



محیط (۲) و (۳): حال با توجه به خطوط موازی و مورب، α در مرز دو محیط (۲) و (۳) برابر ۳۷° و β در مرز دو محیط (۳) و (۴) برابر ۳۰° است. رابطهٔ بین ضریب شکست دو محیط و زاویهٔ پرتو تابش و شکست به صورت زیر است:

$$\frac{n_2}{n_3}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{n_2}{n_3}=\frac{\sin30^\circ}{\sin37^\circ}\Rightarrow\frac{n_2}{n_3}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{10}}\Rightarrow\frac{n_2}{n_3}=\frac{5}{6}$$



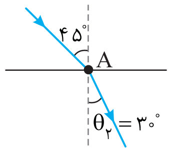
B ۱۷۵۶ ۳

خط فکری با توجه به رابطهٔ سرعت در حرکت با سرعت ثابت داریم: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

بنابراین برای محاسبه Δt به $\Delta x=AB$ و سرعت حرکت نور نیاز داریم.

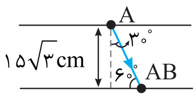
۱ ابتدا زاویهٔ شکست محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin45^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$



۲ حال طول AB را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin60^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{\ell_{AB}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{\ell_{AB}}\Rightarrow\ell_{AB}=30cm=0/3m$$



۳ سرعت در محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{v_2}{3\times10^8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow v_2=\frac{3}{\sqrt{2}}\times10^8\Rightarrow v_2=1/5\sqrt{2}\times10^8 m/s$$

۴ حال زمان مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:

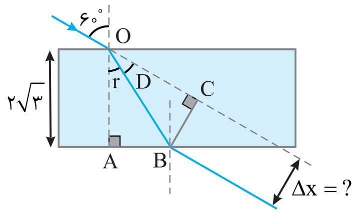
$$v=\frac{\ell_{AB}}{t_{AB}}\Rightarrow t_{AB}=\frac{\ell_{AB}}{v_2}\Rightarrow t_{AB}=\frac{0/3}{1/5\sqrt{2}\times10^8}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times10^{-9}s=\sqrt{2}ns$$

A ۱۷۵۷ ۴

خط فکری امتداد پرتو خروجی و امتداد پرتو ورودی موازی هم هستند، بنابراین فاصلهٔ آن‌ها از هم خط عمودی است که بر دو خط رسم می‌شود یعنی مطابق شکل خط BC فاصلهٔ بین پرتو ورودی و خروجی است که شما باید آن را به دست بیاورید. از این‌رو ابتدا باید زاویهٔ ورود به تیغه (زاویهٔ شکست r) را حساب کنید، سپس به کمک مثلث‌های OAB و OBC، BC را به‌دست بیاورید.

۱ ابتدا زاویهٔ شکست (r) را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\sin60^\circ}{\sin r}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin r}\Rightarrow\sin r=\frac{1}{2}\Rightarrow r=30^\circ$$



۲ در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$\cos r=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\cos30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{OB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{OB}\Rightarrow OB=4cm$$

۳ زاویهٔ انحراف D را حساب می‌کنیم.

زاویهٔ انحراف $D=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

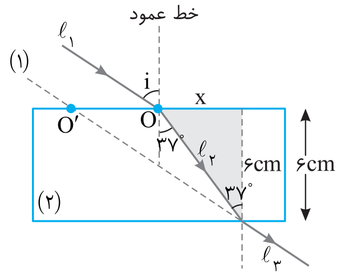
۴ در مثلث OBC می‌توان نوشت:

$$\sin D=\frac{BC}{OB}\Rightarrow\sin30^\circ=\frac{BC}{4}\Rightarrow BC=2cm$$

A ۱۷۵۸ ۲

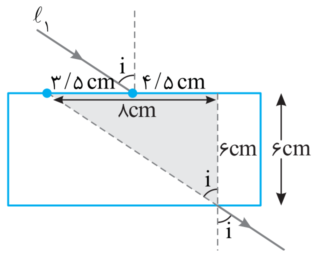
۱ با توجه قضیهٔ خطوط موازی و مورب زاویه پرتو ℓ_2 با خط عمود بر سطح متوازی‌السطوح هنگام خروج نیز 37° است.

$$\tan 37^\circ=\frac{x}{6}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{x}{6}\Rightarrow x=4/5\,cm$$



۲ پرتوهای ورودی و خروجی در یک محیط هستند، پس پرتوهای ورودی و خروجی موازی هم هستند و زاویه خروج از متوازی‌السطوح نیز $\hat{i}$ است.

$$\tan i=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\Rightarrow\hat{i}=53^\circ$$

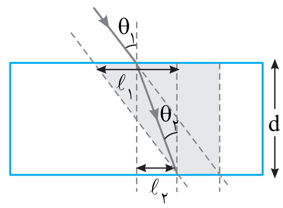


۳ حال ضریب شکست را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{0/8}{0/6}=\frac{n_2}{1}\Rightarrow n_2=\frac{4}{3}$$

میانبر به طور کلی اگر d ضخامت تیغه متوازی‌السطوح باشد، فاصله محل تقاطع پرتوهای ورودی و خروجی یا امتداد آنها روی سطح تیغه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\ell=\ell_1-\ell_2=d\times|\tan\theta_1-\tan\theta_2|$$



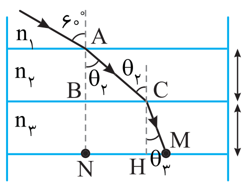
در این سؤال محاسبهٔ زاویهٔ i با استفاده از این نکته به صورت زیر است:

$$3/5=6\times|\tan\hat{i}-\tan 37^\circ|\Rightarrow\frac{3/5}{6}=\tan\hat{i}-\frac{3}{4}$$

$$\tan\hat{i}=\frac{3/5}{6}+\frac{3}{4}\Rightarrow\tan\hat{i}=\frac{7+9}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}\Rightarrow\hat{i}=53^\circ$$

A ۱۷۵۹ ۳

۱ زاویهٔ شکست در محیط n_2 را حساب می‌کنیم.



$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\Rightarrow 1\times\sin 60=\frac{17}{16}\sin\theta_2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{17}{16}\sin\theta_2\Rightarrow\frac{1/7}{2}=\frac{17}{16}\sin\theta_2=\sin\theta_2=0/8\Rightarrow\theta_2=53^\circ$$

۲ در مثلث ABC، طول ضلع BC را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_2=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{BC}{10}\Rightarrow BC=\frac{40}{3}cm$$

۳ زاویهٔ θ_3 را نیز به کمک قانون اسنل حساب می‌کنیم.

$$n_2\sin\theta_2=n_3\sin\theta_3\Rightarrow\frac{17}{16}\sin 53=\frac{17}{12}\sin\theta_3\Rightarrow$$

$$\frac{0/8}{4}=\frac{\sin\theta_3}{3}\Rightarrow\sin\theta_3=0/6\Rightarrow\theta_3=37^\circ$$

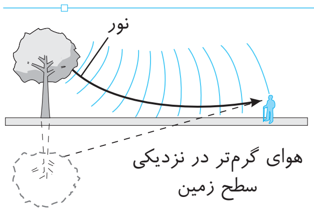
۴ فاصلهٔ HM را در مثلث CHM به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_3=\frac{HM}{CH}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{HM}{10}\Rightarrow HM=\frac{30}{4}cm$$

۵ فاصلهٔ MN خواهد شد.

$$MN=BC+HM=\frac{40}{3}+\frac{30}{4}\Rightarrow MN=\frac{160+90}{12}\Rightarrow MN=\frac{250}{12}=\frac{125}{6}cm$$

A ۱۷۶۰ ۲



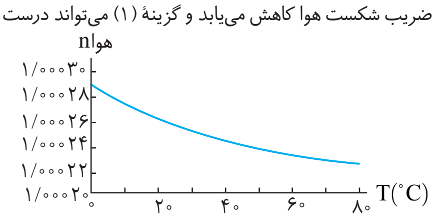
سراب در روزهای گرم که هوای مجاور سطح زمین گرم‌تر از لایه‌های بالاتر هوا بوده و چگالی هوا در سطح زمین از لایه‌های بالاتر کمتر است اتفاق می‌افتد، بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

همچنین جبهه‌های موج که به سمت پایین می‌آیند با ضریب شکست‌های کوچک‌تر روبه‌رو شده و سرعت آن‌ها افزایش می‌یابد که مطابق شکل این امر سبب خم شدن پرتو به سمت بالا می‌شود و گزارهٔ (ب) درست است.

با تغییر چگالی هوا از بالا تا سطح زمین، ویژگی‌های محیط تغییر کرده و تندی انتشار نور در لایه‌های بالاتر از تندی آن در سطح زمین کمتر است، بنابراین گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۱۷۶۱ ۱

با افزایش دما چگالی هوا کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش دما چگالی هوا رقیق‌تر می‌شود، پس ضریب شکست هوا کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.



A ۱۷۶۲ ۳

در روزهای گرم هوای سطح زمین نسبتاً داغ است. از طرفی، چگالی هوا با افزایش دما کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش ضریب شکست نیز می‌شود و تندی انتشار موج از لایه‌های بالایی به سوی سطح زمین افزایش می‌یابد. از طرفی بسامد نور از ویژگی‌های چشمهٔ موج بوده و ثابت است بنابراین طول موج در نقاط نزدیک سطح زمین بزرگتر است. $(\uparrow\lambda=\frac{v\uparrow}{f})$

A ۱۷۶۳ ۱

ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است. در گسترهٔ نور مرئی، نور قرمز دارای بلندترین طول موج و کمترین ضریب شکست است. از این‌رو کمتر از رنگ‌های دیگر منحرف می‌شود. اما دربارهٔ تندی پرتوها:

پرتو فرابنفش دارای کمترین طول موج و بیشترین ضریب شکست است. بنابراین تندی پرتو بنفش از همه کمتر است. $\downarrow v=\frac{c}{n\uparrow}$

A ۱۷۶۴ ۳

نکته ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است.

یادآوری در گستره (طیف) امواج الکترومغناطیسی طول موج از پرتو گاما تا امواج رادیویی در حال افزایش است.

$\gamma \rightarrow x \rightarrow$ فرابنفش $\rightarrow$ نور مرئی $\rightarrow$ فروسرخ $\rightarrow$ رادیویی

قرمز نارنجی زرد سبز آبی بنفش

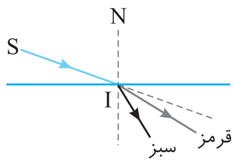
$\lambda\uparrow, f\downarrow$

الگوی تست به‌راحتی قابل بررسی است.

$$\lambda_G>\lambda_U>\lambda_\gamma \Rightarrow n_G<n_U<n_\gamma \xrightarrow{n=\frac{c}{v}} \frac{c}{v_G}<\frac{c}{v_U}<\frac{c}{v_\gamma}$$

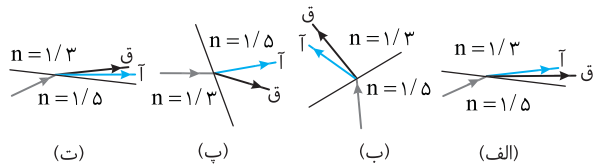
$$\Rightarrow v_G>v_U>v_\gamma$$

A ۱۷۶۵ ۱



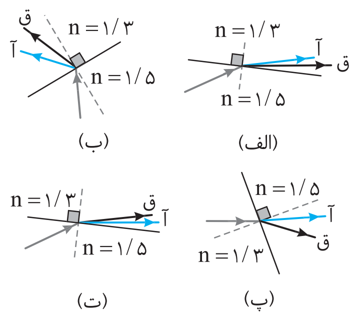
هرگاه پرتو نور از هوا وارد محیط غلیظ‌تری مانند مایع شود، پرتو منحرف شده و به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود. از طرفی پرتویی که دارای طول موج کوتاه‌تر است بیشتر منحرف می‌شود. طول موج پرتو سبز از طول موج پرتو قرمز کوتاه‌تر است، بنابراین پرتو سبز نیز باید به خط عمود نزدیک‌تر شود.

بازی با سؤال **در شکل‌های زیر، پرتو فرودی که شامل نورهای قرمز و آبی است در سطح مشترک دو محیط شکست پیدا کرده‌اند. چه تعداد از شکل‌ها شکست را به‌درستی نشان می‌دهد؟ (قرمز: ق، آبی: آ)** از کتاب درسی



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **خط عمود بر سطح مشترک دو محیط را در هر شکل رسم می‌کنیم. در شکل (ب) پرتوهای تابش و شکست در یک طرف خط عمود قرار دارند که چنین چیزی ممکن نیست.**



در شکل (پ)، پرتو آبی به خط عمود نزدیک و پرتو قرمز از خط دور شده است در حالی‌که چون پرتوها از محیط با ضریب شکست کمتر وارد محیط با ضریب شکست بیشتر شده‌اند باید هر دو پرتو آبی و قرمز با زوایای شکست متفاوت به خط عمود نزدیک شوند در حالیکه پرتو قرمز از خط عمود دور شده است، بنابراین شکل (پ) نادرست است.

در مورد شکل‌های (الف) و (ت) پرتویی از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شده است و پرتوها از خط عمود باید دور شوند و پرتو قرمز باید کمتر منحرف شود. از این‌رو شکل (الف) نادرست و شکل (ت) درست است. بنابراین تنها شکل (ت) درست است.

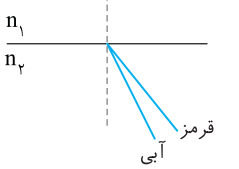
گزینهٔ ۱

A ۱۷۶۶ ۳

خط فکری ضریب شکست هر محیط شفاف غیر از خلأ برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است، یعنی پرتو آبی که طول موجش از پرتو قرمز کوتاه‌تر است، بیشتر منحرف می‌شود. اکنون با مقایسهٔ انحراف پرتوی آبی و قرمز در محیط‌های n_1 و n_2 و همچنین n_3 و n_4 می‌توان ضریب شکست آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

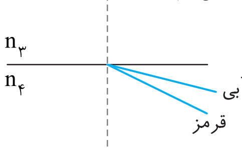
در شکل (الف) پرتو آبی به خط عمود نزدیک‌تر از پرتو قرمز است و چون پرتو آبی بیشتر منحرف شده است باید $n_2>n_1$ باشد.

شکل (الف)



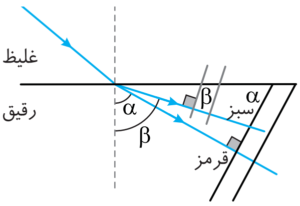
در شکل (ب) پرتو آبی هنگام شکست از خط عمود دورتر است و قرمز و به خط عمود نزدیک‌تر و چون آبی بیشتر شکسته شده است پس $n_3>n_4$ است.

شکل (ب)



A ۱۷۶۷ ۳

خط فکری نور زرد ترکیبی از نور قرمز و نور سبز است، از طرفی طول موج نور سبز از طول موج نور قرمز کوتاه‌تر است $(\lambda_G<\lambda_R)$.



ضریب شکست محیط به طول موج نور بستگی دارد و هر چه طول موج کوتاه‌تر باشد، ضریب شکست محیط بیشتر است. بنابراین هنگام ورود پرتو نور زرد به محیط رقیق، پرتو سبز از مسیرش بیشتر منحرف می‌شود. حال با توجه به این دانسته‌ها باید در مورد α و β اظهار نظر کنید.

در واقع زاویه شکست نور قرمز از زاویهٔ شکست نور سبز کمتر است. زاویه‌ای که جبهه موج با مرز مشترک دو محیط می‌سازد برابر زاویه شکست پرتو مربوط به همان موج با خط عمود است، بنابراین زاویهٔ بین جبهه‌های موج قرمز با مرز شکست یعنی α از زاویهٔ بین جبهه‌های موج سبز با مرز مشترک یعنی β کمتر است.

A ۱۷۶۸ ۳

یادآوری تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ برابر است.

دو پرتو الکترومغناطیسی A و B در حال انتشار در خلأ هستند، بنابراین تندی انتشار آن‌ها با هم برابر است $(v_A=v_B)$ و گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) نادرست هستند. با توجه به رابطهٔ طول موج می‌توان نوشت:

$$\lambda_A=\frac{v_A}{f_A},\quad \lambda_B=\frac{v_B}{f_B} \xrightarrow{v_A=v_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A} \xrightarrow{\text{اگر } \lambda_A>\lambda_B} f_A<f_B$$

گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۷۶۹ ۳

نکته سرعت امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های شفاف غیر از خلأ با هم برابر نیست و پرتو با طول موج بزرگ‌تر، در محیط شفاف دارای سرعت بیشتری است.

دو پرتو الکترومغناطیسی A و B در آب در حال انتشار هستند، بنابراین تندی انتشار آن‌ها با هم برابر نیست. با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۳) درست است.

$$\lambda_A>\lambda_B\Rightarrow n_A<n_B\Rightarrow \frac{c}{v_A}<\frac{c}{v_B}\Rightarrow v_A>v_B$$

A ۱۷۷۰ | ۲

در ابتدا به شما بگوییم که رابطهٔ $\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ مربوط به گذر یک پرتو از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر است. یعنی v_1 و v_2 سرعت یک پرتو در محیط (۱) و (۲) همچنین λ_1 و λ_2 طول موج یک پرتو در دو محیط است. در حالی‌که در این تست شما با دو پرتو مختلف با طول موج‌های مختلف در هوا سر و کار دارید که به یک منشور می‌تابد. یعنی v_1 و v_2 سرعت پرتو (۱) در منشور و v_2 سرعت پرتو (۲) در منشور بوده و گزینهٔ (۴) اصولاً در مورد این تست نادرست است. حال به حل مسئله بپردازیم.
هرگاه یک پرتو مرکب از دو موج λ_1 و λ_2 $(\lambda_1>\lambda_2)$ وارد محیط شفافی شوند. ضریب شکست محیط شفاف برای پرتوی λ_1 که دارای طول موج بیشتری است کمتر بوده از این‌رو می‌توان نوشت:

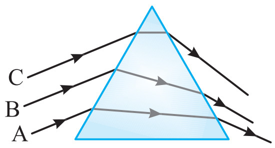
ضریب شکست محیط شفاف برای پرتو دوم

$$\lambda_1>\lambda_2\Rightarrow n_1<n_2\Rightarrow\frac{c}{v_1}<\frac{c}{v_2}\Rightarrow v_1>v_2$$

ضریب شکست محیط شفاف برای پرتو اول — سرعت نور پرتو اول در محیط شفاف — سرعت نور پرتو دوم در محیط شفاف

A ۱۷۷۱ | ۳

خط فکری ضریب شکست یک محیط برای طول موج‌های مختلف موج‌های الکترومغناطیسی، متفاوت و برای طول موج‌های بلندتر، کمتر است و این پرتوها هنگام گذر از منشور کمتر منحرف می‌شوند. بنابراین شما باید به انحراف پرتوها توجه کنید و تشخیص بدهید کدام پرتو بیشتر منحرف شده است.



انحراف پرتو C هنگام ورود به منشور از بقیه کمتر است، از این‌رو طول موج آن از بقیه بزرگتر بوده و بسامد آن از بقیه کمتر است.

A ۱۷۷۲ | ۴

خط فکری باید از روی نمودار داده شده، ضریب شکست نور آبی و نور قرمز را مشخص کنید، سپس سرعت نور آبی و قرمز در تیغه را به دست آورده، زمان گذر هر یک از پرتوها از تیغه را حساب کرده و اختلاف زمانی را به دست بیاورید.

۱ با توجه به داده‌های روی نمودار ضریب شکست نور آبی ۱/۵۳ و ضریب شکست نور قرمز ۱/۵۱ است. تندی پرتوهای قرمز و آبی را به دست می‌آوریم:

$$v_{\text{نورآبی}}=\frac{c}{n_{\text{آبی}}}=\frac{c}{1/53}\quad,\quad v_{\text{نور قرمز}}=\frac{c}{n_{\text{قرمز}}}=\frac{c}{1/51}$$

۲ ضخامت تیغه d است و مدت زمان عبور هر پرتو از تیغه خواهد شد:

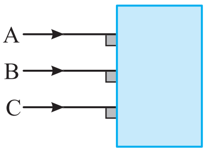
$$d=vt\Rightarrow\begin{cases}t_{\text{قرمز}}=\dfrac{d}{\frac{c}{1/51}}\Rightarrow t_{\text{قرمز}}=1/51\dfrac{d}{c}\\[2ex] t_{\text{آبی}}=\dfrac{d}{\frac{c}{1/53}}\Rightarrow t_{\text{آبی}}=1/53\dfrac{d}{c}\end{cases}$$

۳ زمان‌های به دست آمده را از هم کم می‌کنیم.

$$t_{\text{آبی}}-t_{\text{قرمز}}=0/02\frac{d}{c}=\frac{2d}{100c}=\frac{d}{50c}$$

در واقع نور قرمز $\frac{d}{50c}$ ثانیه زودتر از نور آبی از تیغه خارج می‌شود.

بازی با سؤال مطابق شکل زیر، سه پرتو موازی تک‌رنگ A، B و C به یک تیغهٔ شیشه‌ای تخت می‌تابند. مدت زمان عبور پرتوها از تیغه به ترتیب t_A، t_B و t_C است. اگر $t_B<t_C<t_A$ باشد، کدام گزینه می‌تواند به‌ترتیب از راست به چپ رنگ پرتوهای A، B و C باشد؟



۱) قرمز - آبی - بنفش
۲) بنفش - قرمز - آبی
۳) بنفش - آبی - قرمز
۴) آبی - قرمز - بنفش

پاسخ هر چه زمان عبور پرتو از تیغهٔ کوتاه‌تر باشد، تندی انتشار پرتو در تیغه بیشتر است و هر چه تندی انتشار پرتو در تیغه بیشتر باشد، طول موج آن پرتو بزرگتر است.

$$t_B<t_C<t_A\Rightarrow v_B>v_C>v_A\xrightarrow{v=\frac{c}{n}}$$
$$n_B<n_C<n_A\Rightarrow\lambda_B>\lambda_C>\lambda_A$$

یادآوری در گسترده نور مرئی که از رنگ‌های قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی و بنفش تشکیل شده است. از قرمز به بنفش طول موج کاهش می‌یابد.

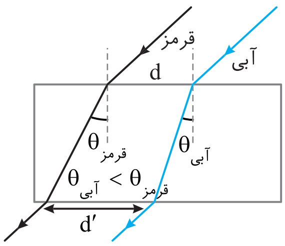
$$\lambda_B>\lambda_C>\lambda_A\Rightarrow\lambda_{\text{قرمز}}>\lambda_{\text{آبی}}>\lambda_{\text{بنفش}}$$

گزینهٔ ۲

A ۱۷۷۳ | ۳

هر چه طول موج کوچک‌تر باشد، ضریب شکست محیط برای آن پرتو بیشتر می‌شود. طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است به همین دلیل نور آبی بیشتر در تیغه دچار شکست می‌شود و پرتو آبی به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود.

$(\theta_{\text{آبی}}<\theta_{\text{قرمز}})$

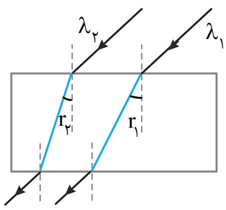


از این‌رو با توجه به شکل $d'>d$ خواهد شد.

A ۱۷۷۴ | ۳

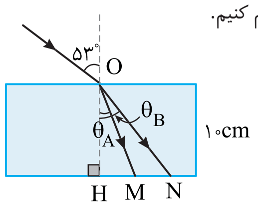
خط فکری باید به نحوهٔ خروج پرتو و مقدار انحراف آن‌ها دقت کنید.

پرتوها پس از خروج از تیغه به هم نزدیک شده‌اند و مطابق شکل باید پرتو λ_1 از پرتو λ_2 کمتر منحرف شده باشد، $(r_1>r_2)$ یعنی ضریب شکست تیغه برای λ_1 کمتر از ضریب شکست تیغه برای λ_2 بوده است و با توجه به اینکه ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های بلندتر، کمتر است باید $\lambda_1>\lambda_2$ باشد.



A ۱۷۷۵ ۲

خط فکری ابتدا باید زاویهٔ شکست هر پرتو در تیغه را حساب کنید. سپس با استفاده از مثلثات در مثلث‌های OHM و OHN طول ضلع‌های HM و HN را به‌دست آورده و از هم کم کنیم.



۱ ضریب شکست محیط برای پرتو A بیشتر است. بنابراین پرتو A بیشتر منحرف می‌شود. زاویهٔ شکست A را حساب می‌کنیم.

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\Rightarrow ۱\times\sin ۵۳^\circ=۱/۶\sin\theta_A\Rightarrow ۰/۸=۱/۶\sin\theta_A$$

$$\Rightarrow\sin\theta_A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_A=۳۰^\circ$$

۲ طول ضلع MH خواهد شد:

$$\Delta OHM:\tan\theta_A=\frac{HM}{OH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{HM}{۱۰}$$

$$\Rightarrow HM=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}cm=\frac{۱۰\times ۱/۷}{۳}=۵/۶\,cm$$

۳ زاویهٔ شکست B را به‌دست می‌آوریم.

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2=۱\times\sin ۵۳^\circ=\frac{۴}{۳}\sin\theta_B\Rightarrow ۰/۸=\frac{۴}{۳}\sin\theta_B$$

$$\Rightarrow\sin\theta_B=۰/۶\Rightarrow\theta_B=۳۷^\circ$$

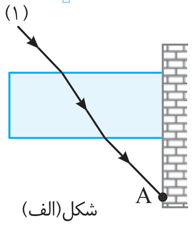
۴ طول ضلع HN برابر است با:

$$\Delta OHN:\tan\theta_B=\frac{HN}{OH}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{HN}{۱۰}\Rightarrow HN=\frac{۳۰}{۴}=۷/۵\,cm$$

۵ فاصلهٔ MN خواهد شد. $MN=HN-HM=۷/۵-۵/۶\Rightarrow MN=۱/۹cm$

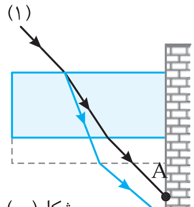
A ۱۷۷۶ ۲

خط فکری مسیر پرتو در ابتدا مطابق شکل (الف) بود و پرتو بعد از عبور از تیغه به نقطهٔ A می‌رسد. برای آن‌که پرتو به نقطهٔ پایین‌تر از A برسد، باید انحراف بیشتری پیدا کند. اکنون شما باید تک‌تک حالت‌ها را بررسی کنید.



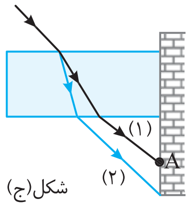
شکل(الف)

اگر ضخامت تیغه را بیشتر کنیم با توجه به مسیر پرتو در شکل روبه‌رو نور آبی پس از خروج از منشور در نقطهٔ پایین‌تر از A قرار می‌گیرد (شکل ب) و روش (الف) درست است.



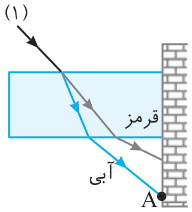
شکل(ب)

هرچه ضریب شکست تیغه بیشتر باشد، پرتو شکست بیشتر به خط عمود نزدیک می‌شود. پس از خروجی نیز پایین‌تر از A قرار می‌گیرد و روش (ب) درست است.

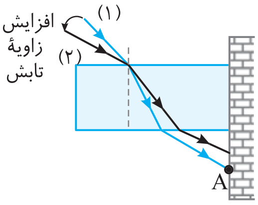


شکل(ج)

اگر از نور قرمز به جای نور آبی استفاده شود، چون طول موج نور قرمز از طول موج نور آبی بیشتر است، ضریب شکست تیغه برای نور قرمز کمتر از نور آبی بوده. یعنی پرتو قرمز کمتر منحرف شده و به نقطهٔ بالای A می‌رسد و روش (پ) نادرست است.

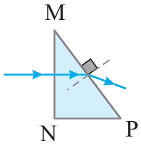


اگر زاویهٔ تابش را افزایش دهیم، از مسیر (۲) پرتو به نقطه‌ای بالاتر از A می‌رسد و روش (ت) نادرست است.



A ۱۷۷۷ ۴

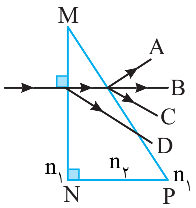
پرتو عمود بر وجه MN می‌تابد (زاویهٔ تابش صفر است) و بدون انحراف وارد منشور می‌شود. سپس روی وجه MP از منشور وارد هوا می‌شود. بنابراین اگر خط عمود را رسم کنید، باید پرتو از خط عمود دور شود، بنابراین پرتوهای BA نادرست هستند. اما پرتوهای C و D هر دو از خط عمود دور شده و ممکن است، پاسخ مسئله باشند.



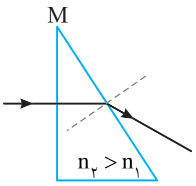
A ۱۷۷۸ ۴

پرتو عمود به MN می‌تابد و بدون انحراف باید وارد منشور شود. بنابراین مسیر D نادرست است. پرتو بر وجه MP عمود نمی‌تابد بنابراین باید روی این وجه منحرف شود بنابراین مسیر B نادرست است.

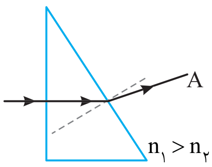
اما مسئله بیان نکرده که n_1 بزرگتر است یا n_2.



اگر $n_2>n_1$ باشد، هنگام خروج پرتو از منشور باید پرتو از خط عمود دور شود، یعنی پرتو به سمت قاعده منشور منحرف می‌شود و مسیر C درست است.

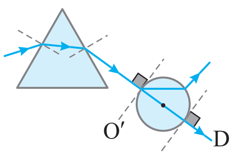


اگر $n_1>n_2$ باشد، هنگام خروج پرتو از منشور باید به خط عمود نزدیک شود و پرتو به سمت رأس منحرف می‌شود و مسیر A درست است.



A ۱۷۷۹ ۴

هرگاه پرتو از خلأ به یک منشور بتابد مطابق شکل، به سمت قاعدهٔ منشور منحرف می‌شود. در نتیجه پرتو به سمت کرهٔ شیشه‌ای O نمی‌رود و وقتی پرتو به کرهٔ شیشه‌ای به‌گونه‌ای بتابد که امتداد آن از مرکز بگذرد، یعنی پرتو در امتداد قطر کره باشد، پرتو بر سطح کره عمود بوده و بدون انحراف از کره می‌گذرد. بنابراین مسیر D درست است و مسیر C نادرست است.



A ۱۷۸۰ ۱

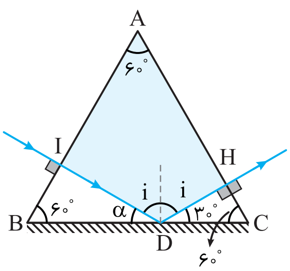
۱ نور بر وجه AB عمود تابیده و زاویهٔ تابش صفر است. از این‌رو پرتو بدون انحراف از وجه AB می‌گذرد و در نقطهٔ D به آینه برخورد می‌کند.

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ BID زاویهٔ α برابر است با:

$$\alpha+۶۰=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$$

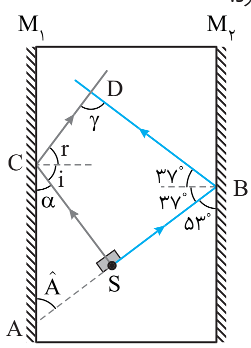
۳ بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینه $i=۶۰^\circ$ است و پرتو DH با سطح آینه زاویهٔ ۳۰° می‌سازد.

۴ زاویه‌ای که پرتو DH بر وجه AC می‌سازد ۹۰° بوده و پرتو خروجی از منشور نیز با وجه AC زاویهٔ ۹۰° می‌سازد.



B ۱۷۸۱ ۱

خط فکری حل مسئله را باید از زاویهٔ تابش ۳۷° به آینهٔ $M_۲$ شروع کرد و مرحله به مرحله زوایای روی شکل (زاویه‌های تابش، بازتاب ...) را مشخص کرد تا در نهایت زاویهٔ بین دو پرتو بازتاب (γ) را به‌دست آورد.



۱ زاویه‌ای که پرتو SB با سطح آینهٔ $M_۲$ می‌سازد مطابق شکل $۹۰-۳۷=۵۳^\circ$ است.

۲ اگر پرتو SB را امتداد دهیم تا در نقطهٔ A آینهٔ $M_۱$ را قطع کند چون دو آینهٔ $M_۱$ و $M_۲$ موازی هستند، به دلیل خطوط موازی و مورب زاویهٔ A نیز ۵۳° است.

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ASC زاویه‌ای که پرتو تابش SC با سطح آینهٔ $M_۱$ می‌سازد برابر است با:

$$\alpha+A=۹۰\Rightarrow\alpha+۵۳=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۷^\circ$$

۴ زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب روی آینهٔ $M_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$i+\alpha=۹۰\Rightarrow i+۳۷=۹۰\Rightarrow i=۵۳^\circ$$

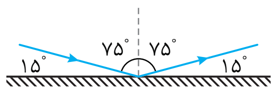
۵ مجموع زوایای داخلی چهارضلعی SCDB، ۳۶۰° است، بنابراین γ خواهد شد:

$$\gamma+(۲\times۳۷)+(۲\times۵۳)+۹۰=۳۶۰\Rightarrow\gamma=۹۰^\circ$$

A ۱۷۸۲ ۴

یادآوری زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند، از این‌رو زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب دو برابر زاویهٔ تابش است.

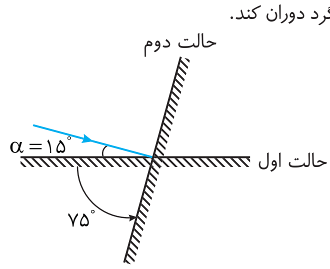
در این مسئلهٔ زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب ۱۵۰° است، بنابراین زاویهٔ تابش خواهد شد:



$$۲i=۱۵۰^\circ\Rightarrow i=۷۵^\circ$$

زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینهٔ $\alpha=۹۰-۷۵=۱۵^\circ$

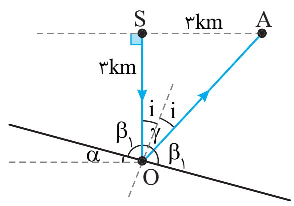
می‌خواهیم پرتو تابش روی خودش بازتاب کند، بنابراین باید پرتو تابش بر سطح آینه عمود شود، یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینه ۹۰° شود. در نتیجه مطابق شکل آینه باید ۷۵° پادساعتگرد دوران کند.



C ۱۷۸۳ ۱

۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SOA زاویهٔ بین پرتو تابش SO و پرتو بازتاب OA را با استفاده از روابط مثلثاتی به دست می‌آوریم:

$$\tan\gamma=\frac{SA}{SO}\Rightarrow\tan\gamma=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow\gamma=۴۵^\circ$$



۲ زاویهٔ تابش بر سطح تیغه برابر نصف زاویهٔ بین پرتو تابش و بازتاب است.

$$i=\frac{\gamma}{۲}\Rightarrow i=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵^\circ$$

۳ زاویه‌ای که پرتو بازتاب (OA) با سطح تیغه می‌سازد برابر است با:

$$\beta=۹۰-۲۲/۵=۶۷/۵^\circ$$

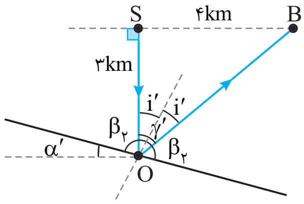
۴ زاویهٔ α را به‌دست می‌آوریم.

$$\alpha+\beta_۱=۹۰\Rightarrow\alpha+۶۷/۵=۹۰\Rightarrow\alpha=۲۲/۵^\circ$$

۵ در حالت دوم همان کارها را مجدداً تکرار می‌کنیم.

زاویهٔ بین پرتو تابش SO و پرتو بازتاب OB را به دست می‌آوریم:

$$\tan\gamma'=\frac{SB}{SO}\Rightarrow\tan\gamma'=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\gamma'=۵۳^\circ$$



۶ زاویهٔ تابش بر سطح آینه در حالت دوم خواهد شد:

$$i'=\frac{\gamma'}{۲}\Rightarrow i'=\frac{۵۳}{۲}\Rightarrow i'=۲۶/۵^\circ$$

۷ زاویهٔ $\beta_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$i'+\beta_۲=۹۰\Rightarrow ۲۶/۵+\beta_۲=۹۰\Rightarrow\beta_۲=۶۳/۵^\circ$$

۸ زاویهٔ α' خواهد شد:

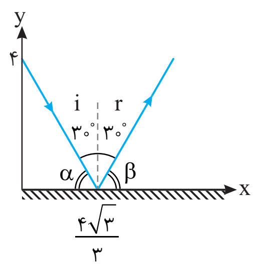
$$\alpha'+\beta_۲=۹۰\Rightarrow\alpha'=۹۰-۶۳/۵\Rightarrow\alpha'=۲۶/۵^\circ$$

۹ بنابراین باید تیغه را $۲۶/۵^\circ-۲۲/۵^\circ=۴^\circ$ بچرخانیم.

C ۱۷۸۴ ۴

۱ ابتدا خط $y=-\sqrt{۳}x+۴$ را رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ خط $+۴$ و شیب خط برابر $-\sqrt{۳}$ است. زاویهٔ بین پرتو و سطح آینه را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha=\sqrt{۳}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$



۲ زاویهٔ پرتو تابش با سطح آینه ۶۰° شد، بنابراین زاویهٔ پرتو بازتاب با سطح آینه نیز $\beta=۶۰^\circ$ می‌شود.

۳ محل برخورد پرتو بر سطح آینه را مشخص می‌کنیم.

$$y=-\sqrt{۳}x+۴\xrightarrow{y=۰}-\sqrt{۳}x+۴=۰\Rightarrow x=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۴ اکنون می‌توانیم معادلهٔ خطی که پرتو بازتاب بر آن منطبق است را به دست آوریم. شیب خط خواهد شد:

$$\tan\beta=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

این خط از نقطهٔ $(\frac{۴\sqrt{۳}}{۳},۰)$ می‌گذرد. در این صورت:

$$\tan\beta=\frac{y-y_۰}{x-x_۰}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{y-۰}{x-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}}\Rightarrow y=\sqrt{۳}x-۴$$

C ۱۷۸۵ ۳

صوت تولید شـده ابتدا به دیوار (۱) رسـیده و پس از بازتاب به گوش شـخص می‌رسد و پژواک دوم ناشی از پژواک از دیوار (۲) می‌باشد

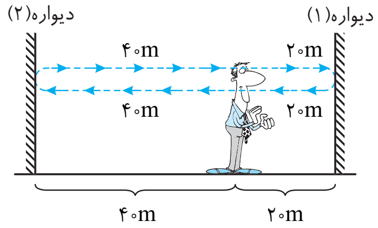
زمان رفت و برگشت پژواک اول:

$$\begin{cases} d_۱=۲۰+۲۰=۴۰\,m \\ v_۱=۳۲۰\,m/s \end{cases} \Rightarrow t_۱=\frac{d_۱}{v_۱}$$

زمان رفت و برگشت پژواک اول $\Rightarrow t_۱=\frac{۴۰}{۳۲۰}=\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵\,s$

$$\begin{cases} d_۲=۴۰+۴۰=۸۰\,m \\ v_۲=۳۲۰\,m/s \end{cases} \Rightarrow t_۲=\frac{d_۲}{v_۲}$$

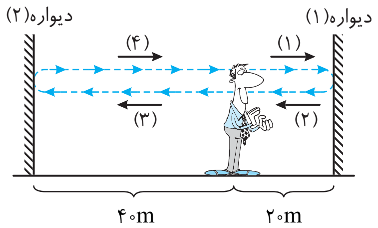
زمان رفت و برگشت پژواک دوم $\Rightarrow t_۲=\frac{۸۰}{۳۲۰}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵\,s$



یعنـی در لحظه‌های $۰/۱۲۵s$ و $۰/۲۵s$ از هر دیـواره یک پژواک یعنی جمعاً دو پژواک به گوش شخص می رسد.

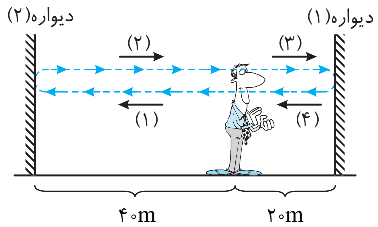
صوت برخورد کرده به دیوارهٔ (۱) می‌تواند به دیوارهٔ (۲) برخورد کند و سـپس به گوش شخص برسد؛ زمان این پژواک را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} d'_۱=۲(۲۰)+۲(۴۰)=۱۲۰m \\ v=۳۲۰m/s \end{cases} \Rightarrow t'_۱=\frac{d'_۱}{v}=\frac{۱۲۰}{۳۲۰}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵s$$



امـا همیـن مطلب در مورد پـژواک بازتابیده از دیـوارهٔ (۲) نیز صدق می‌کنـد. یعنی این پژواک می‌تواند به دیوارهٔ (۱) برسـد و از روی دیوارهٔ (۱) بازتاب کرده و مجدداً به گوش شخص برسد. زمان این پژواک را نیز به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} d'_۲=۲(۴۰)+۲(۲۰)=۱۲۰m \\ v=۳۲۰m/s \end{cases} \Rightarrow t'_۲=\frac{d'_۲}{v}=\frac{۱۲۰}{۳۲۰}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵s$$



جالب شد! زمان پژواک دوم از هر دیواره $۰/۳۷۵s$ است، یعنی دو پژواک با هم به گوش می‌رسند. اما گوش نمی‌تواند آن‌ها را از هم تشخیص دهد زیرا برای تمیز دادن دو صوت از هم حداقل اختلاف زمانی $۰/۱s$ لازم اسـت. در نتیجه گوش شخص در مدت $۰/۴s$ جمعاً سه پژواک را درک می‌کند.

C ۱۷۸۶ ۱

خط فکری به شـکل سؤال دقت کنید. وقتی شخص دسـت می‌زند، امواج صوتی کروی به سـوی پلکان می‌رود. اولین پـژواک از اولین پله، دومین پژواک در اثر بازتاب از دومیـن پله و ... به گوش شـخص می‌رسـد و اختلاف زمانی هر دو پـژواک متوالی که شـخص دریافـت می‌کنـد برابر دورهٔ صدای دریافتی توسـط شـخص اسـت؛ یعنی برای به‌دسـت آوردن دوره، شـما باید زمان رفت و برگشـت صوت روی یـک پله (۲ℓ) را به دست بیاورید و از آنجا بسامد را حساب کنید.

دورهٔ صدای بازگشتی را حساب می‌کنیم:

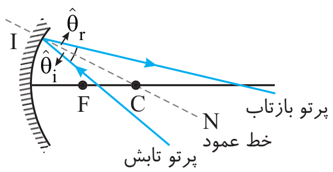
$$\Delta x=v\Delta t \Rightarrow ۲\ell=vT \Rightarrow T=\frac{۲\ell}{v}$$

بسامد صدای دریافتی خواهد شد:

$$f=\frac{۱}{T} \Rightarrow f=\frac{v}{۲\ell} \Rightarrow f=\frac{۳۲۰}{۲\times۰/۵} \Rightarrow f=۳۲۰Hz$$

B ۱۷۸۷ ۴

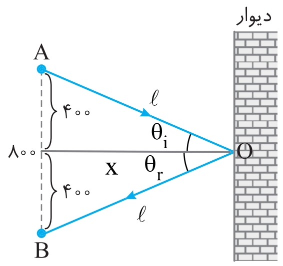
بنـا به قانون بازتاب عمومـی، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند. یعنی اگر در نقطهٔ تابش خطی عمود بر سطح بازتاب کننده رسم کنیم زاویهٔ بین پرتو تابش با این خط عمود با زاویهٔ بین پرتو بازتاب و خط عمود برابر است، اما چگونه خط عمود بر این سطح کاو را رسـم کنیم. برای این کار کافی اسـت یک شـعاع از مرکز سطح به نقطهٔ تابش (I) رسم کنید. شعاع بر سطح عمود است، بنابراین شما با این کار خط عمود بر سطح تابش را رسم کرده‌اید و می‌توانید پرتو بازتاب را رسم کنید. دراین حالت گزینهٔ (۴) پاسخ مسئله است.



C ۱۷۸۸ ۲

۱ صدا اول مستقیماً از محل شلیک در امتداد AB به شنونده می‌رسد، که این مدت برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۳۲۰=\frac{۸۰۰}{\Delta t_{AB}} \Rightarrow \Delta t_{AB}=۲/۵\,s$$



۲ صـدای دوم در اثـر بازتاب صوت از دیوار به گوش شـخص می‌رسـد. با توجه به فرض مسـئله اختلاف زمانی دو صورت رسیده به شخص $۰/۶۲۵$ است؛ از این‌رو مدت زمان رسیدن صدای دوم از چشمه به شخص خواهد شد:

$$\Delta t'=۲/۵+۰/۶۲۵=۳/۱۲۵\,s$$

۳ بـا توجه به قانـون عمومی بازتاب صوت به‌صورت شـکل روبـه‌رو از دیوار بازتاب می‌شود، بنابراین فاصلهٔ هر شخص تا محل بازتاب خواهد شد:

$$v=\frac{۲\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۳۲۰=\frac{۲\ell}{۳/۱۲۵} \Rightarrow ۲\ell=۱۰۰۰ \Rightarrow \ell=۵۰۰m$$

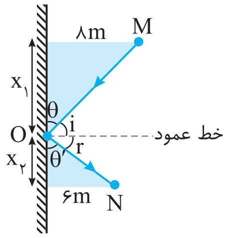
۴ در این صورت فاصلهٔ هر شخص از دیوار خواهد شد:

$$۵۰۰^۲=۴۰۰^۲+x^۲ \Rightarrow x=۳۰۰m$$

B ۱۷۸۹ ۳

مسیر پرتو عبوری از M که پس از بازتاب به N رسیده را رسم می‌کنیم.

با توجه به اینکه زاویهٔ تابش (i) و زاویهٔ بازتاب (r) با هم برابرند پس زاویه‌ای که پرتوها با سطح می‌سازند θ و θ′ نیز با هم برابر بوده و دو مثلث رنگی با هم متشابه‌اند:



دو مثلث متشابه: $\frac{PM}{PO}=\frac{NE}{EO}\Rightarrow\frac{۸}{x_1}=\frac{۶}{x_2}\Rightarrow x_2=\frac{۳}{۴}x_1$

با توجه به شکل سؤال x_1+x_2 برابر ۱۰/۵ متر است:

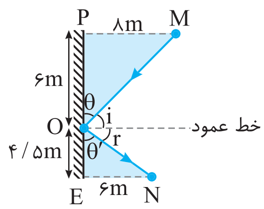
$$x_1+x_2=۱۰/۵\Rightarrow x_1+\frac{۳}{۴}x_1=۱۰/۵\Rightarrow\frac{۷x_1}{۴}=۱۰/۵$$

$$\Rightarrow x_1=۶m,\ x_2=\frac{۳}{۴}\times۶=۴/۵m$$

حال طول پرتوهای MO و NO را حساب می‌کنیم:

$$OM=\sqrt{PM^۲+PO^۲}\Rightarrow OM=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰m$$

$$ON=\sqrt{NE^۲+OE^۲}\Rightarrow ON=\sqrt{۶^۲+(۴/۵)^۲}=۷/۵m$$



حال با توجه به سرعت نور، مدت زمانی که هر مسیر طی می‌شود را حساب می‌کنیم:

$$c=\frac{\text{طول مسیر طی شده}}{\text{مدت زمان}}\Rightarrow\begin{cases}۳\times۱۰^۸=\frac{۱۰}{\Delta t_{MO}}\Rightarrow\Delta t_{MO}=\frac{۱۰}{۳}\times۱۰^{-۸}\\ ۳\times۱۰^۸=\frac{۷/۵}{\Delta t_{ON}}\Rightarrow\Delta t_{ON}=\frac{۷/۵}{۳}\times۱۰^{-۸}\end{cases}$$

کل زمان طی شده برابر است با:

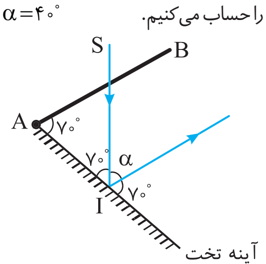
$$\Delta t_{\text{کل}}=\Delta t_{MO}+\Delta t_{ON}=\frac{۱۰}{۳}\times۱۰^{-۸}+\frac{۷/۵}{۳}\times۱۰^{-۸}$$

$$\Rightarrow\Delta t_{\text{کل}}=\frac{۱۷/۵}{۳}\times۱۰^{-۸}s=\frac{۱/۷۵}{۳}\times۱۰^{-۷}s$$

B ۱۷۹۰ ۲

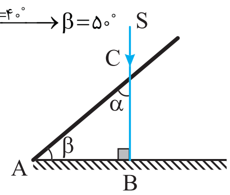
حالت (۱) پرتو بازتاب و سطح AB با هم موازی‌اند پس طبق خطوط موازی و مورب زاویه پرتو بازتاب با آینهٔ تخت برابر زاویه بین دو سطح ۷۰° است بنابراین زاویه بین پرتو SI با سطح آینه نیز ۷۰° است، زاویهٔ α را حساب می‌کنیم.

$۷۰+۷۰+\alpha=۱۸۰\Rightarrow\alpha=۴۰^\circ$



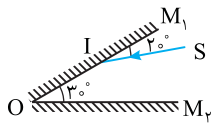
حالت (۲): در این حالت باید پرتو SI عمود باشد تا بازتاب پرتو روی خودش صورت گیرد و پرتو از شکاف S خارج است، بنابراین مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است که زاویه α در آن ۴۰° است، بنابراین زاویهٔ بین آینه و دیواره (β) خواهد شد.

$$\alpha+\beta+۹۰=۱۸۰\xrightarrow{\alpha=۴۰^\circ}\beta=۵۰^\circ$$



در نتیجه زاویه بین دو آینه از ۷۰° به ۵۰° رسیده و ۲۰° کاهش یافته است.

بازی با سؤال آینهٔ M_1 را چند درجه و در کدام جهت حول O بچرخانیم تا زاویهٔ تابش بر آینهٔ M_2 صفر درجه شود؟



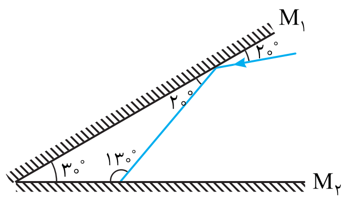
۱) ۴۰°، پادساعتگرد

۲) ۴۰°، ساعتگرد

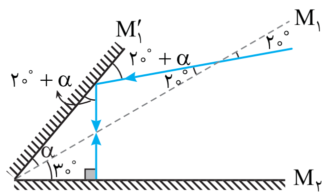
۳) ۲۰°، پادساعتگرد

۴) ۲۰°، ساعتگرد

پاسخ زاویهٔ تابش صفر یعنی پرتو بازتاب و تابش روی هم بیفتند. یعنی پرتو با سطح آینهٔ زاویهٔ ۹۰° می‌سازد، بنابراین باید زاویهٔ پرتو با سطح آینهٔ M_1 افزایش پیدا کند. در نتیجه آینهٔ M_1 باید پادساعتگرد بچرخد.



با توجه به شکل:



$$۲۰^\circ+\alpha+۳۰^\circ+\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow۲\alpha=۴۰^\circ\Rightarrow\alpha=۲۰^\circ$$

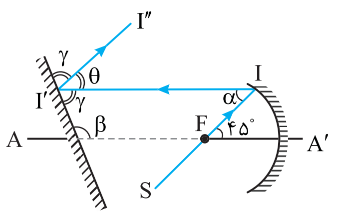
گزینه ۳

C ۱۷۹۱ ۲

نکته هرگاه پرتو از کانون بگذرد و به سطح کاو بتابد، در بازتاب موازی محور آینه باز می‌گردد.

۱ پرتو SI به سطح کاو می‌تابد و موازی محور AA' بازتاب می‌کند.

۲ با توجه به خطوط موازی و مورب، زاویهٔ $\alpha=۴۵^\circ$ است.



۳ پرتو بازتاب II' به سطح آینهٔ تخت تابیده و پرتو بازتاب آن بنا به فرض مسئله با پرتو SI موازی است.

۴ با توجه به خطوط موازی و مورب، دو زاویهٔ α و θ برابرند:

$\theta=\alpha\Rightarrow\theta=۴۵^\circ$

۵ بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌ای که پرتو II' با سطح آینه می‌سازد (γ) با زاویه‌ای که پرتو بازتاب $I'I''$ با سطح آینهٔ تخت می‌سازد هم اندازه است، بنابراین:

$$۲\gamma+\theta=۱۸۰\xrightarrow{\theta=۴۵^\circ}۲\gamma=۱۸۰-۴۵\Rightarrow۲\gamma=۱۳۵\Rightarrow\gamma=۶۷/۵^\circ$$

۶ بنا به خطوط موازی - مورب خواهیم داشت:

$$\beta=\gamma+\theta=۶۷/۵+۴۵=۱۱۲/۵^\circ$$

C ۱۷۹۲ ۴

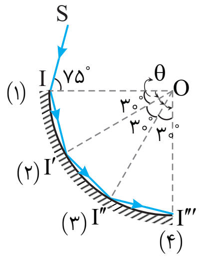
خط فکری مسئلهٔ زیبایی است اما شما باید چند مطلب را به خودتان یادآوری کنید.

۱- شعاع دایره در این مسئله در هر نقطه، همان خط عمود بر سطح آینه است.

۲- زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند، اکنون باید مسیر پرتو را دنبال کنید.

زاویهٔ تابش در نقطهٔ I، 75° است و زاویهٔ بازتاب نیز 75° است. پرتو در نقطهٔ I' به سطح آینه برخورد می‌کند. چون مثلث OII' متساوی‌الساقین است، زاویهٔ تابش در I' نیز 75° است. در این صورت در مثلث OII' زاویهٔ θ برابر است با:

$$\theta+75+75=180\Rightarrow\theta=30^\circ$$



پرتو در ادامهٔ مسیرش دوباره به سطح آینه در نقطهٔ I'' برخورد می‌کند و مجدداً زاویهٔ تابش 75° است و زاویهٔ رأس مثلث $OI'I''$، 30° می‌شود؛ یعنی به ازای هر 30° چرخش شعاع، یک بار نور به آینه می‌خورد. بنابراین مطابق شکل ۴ بار پرتو از روی آینه بازتاب می‌کند.

میانبر اگر زاویهٔ تابش اول بر سطح این آینهٔ کروی شکل i باشد، علاوه بر برخورد اول به ازای هر $\theta=180-2i$ یک بار پرتو به آینه برخورد می‌کنند.

$$n=\frac{90}{180-(2\times75)}+1=\frac{90}{30}+1=4$$

B ۱۷۹۳ ۱

۱ زاویهٔ تابش SI بر سطح آینه، α نامیده شده است و بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بازتاب آن را در شکل نیز با α نمایش داده‌ایم.

۲ در مثلث OII' دو ضلع OI و OI' شعاع دایره هستند و با هم برابرند. بنابراین مثلث OII' متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس I' نیز α است.

۳ زاویهٔ پرتو بازتاب از نقطهٔ I' نیز α است.

۴ مجموع زوایای یک مثلث 180° است؛ از این‌رو در مثلث OII' خواهیم داشت:

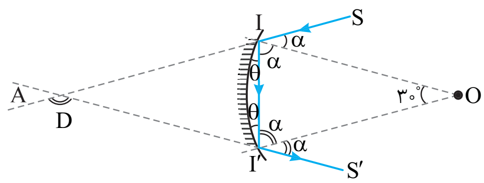
$$2\alpha+30=180\Rightarrow\alpha=75^\circ$$

۵ مجموع دو زاویهٔ α و زاویهٔ θ برابر 180° است؛ از این‌رو:

$$2\alpha+2\theta=180\Rightarrow 2\times75+2\theta=180\Rightarrow\theta=15^\circ$$

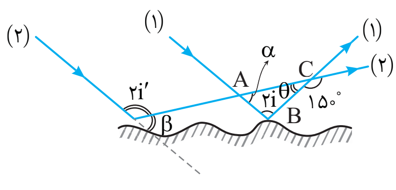
۶ زاویهٔ D زاویهٔ خارجی مثلث AII' است؛ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$D=\theta+\theta\Rightarrow D=15^\circ+15^\circ=30^\circ$$



C ۱۷۹۴ ۴

۱ بنا به فرض مسئله دو پرتو (۱) و (۲) موازی هستند. پرتو (۲) را امتداد می‌دهیم، در این صورت زاویهٔ α و زاویهٔ β روی شکل بنا به خطوط موازی و مورب برابر هستند. $(\alpha=\beta)$



۲ زاویهٔ θ روی شکل برابر $\theta=180^\circ-150^\circ=30^\circ$ است.

۳ زاویهٔ بین پرتو تابش (۱) و پرتو بازتاب آن را با $2i$ نمایش می‌دهیم، در این صورت می‌توان نوشت:

$$2i+\alpha+\theta=180^\circ\Rightarrow 2i+\alpha+30=180\Rightarrow 2i=150-\alpha \quad (I)$$

۴ زاویهٔ بین پرتو تابش (۲) و پرتو بازتاب آن را با $2i'$ نمایش می‌دهیم، بنابراین می‌توان نوشت:

$$2i'+\beta=180^\circ \xrightarrow{\beta=\alpha} 2i'+\alpha=180^\circ\Rightarrow 2i'=180^\circ-\alpha \quad (II)$$

۵ دو رابطهٔ (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم:

$$2i'-2i=180^\circ-\alpha-(150^\circ-\alpha)\Rightarrow 2(i'-i)=30^\circ\Rightarrow i'-i=15^\circ$$

میانبر هرگاه شکلی شبیه شکل مسئله به شما داده شود خواهیم داشت:

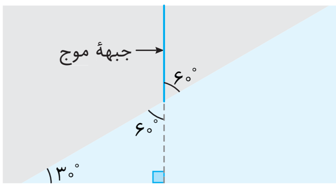
$$i'-i=\frac{\theta}{2}$$

B ۱۷۹۵ ۲

نکته زاویهٔ بین جبههٔ موج و مرز برابر است با زاویهٔ بین پرتو موج و خط عمود.

۱ در شکل زاویهٔ بین جبهه‌های شکست و مرز دو محیط 30° است، بنابراین زاویهٔ شکست $(\theta_2=30^\circ)$ می‌شود.

۲ حال باید سراغ زاویهٔ تابش برویم. یکی از جبهه‌های تابش را امتداد می‌دهیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه مطابق شکل بسازیم. اکنون مشخص است که جبهه‌های موج تابش با مرز دو محیط زاویهٔ $\theta_1=60^\circ$ می‌سازند.



۳ بنا به قانون شکست عمومی $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}$ و از طرفی هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد ثابت می‌ماند. از این‌رو طول موج با تندی انتشار موج در محیط نسبت مستقیم دارد.

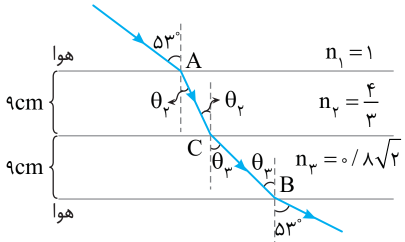
$$v_1=f\lambda_1\ ,\ v_2=f\lambda_2\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

۴ اکنون می‌توانیم نسبت $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Rightarrow\frac{\sin30^\circ}{\sin60^\circ}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

B ۱۷۹۶ *۳

این تست ساده‌ای است اما طراح، کنکور تجربی رو با المپیاد فیزیک رشتهٔ ریاضی اشتباه گرفته. ☺



۱ ابتدا تندی نور در محیط n_2 را حساب می‌کنیم.

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{3\times10^8}{v_2}\Rightarrow v_2=\frac{9}{4}\times10^8\,m/s$$

* کلید سازمان سنجش، ۳ با تأثیر مثبت

۲ زاویهٔ ورود (شکست) به محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{0/8}{\sin\theta_2}\Rightarrow\sin\theta_2=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۳ اکنون AC را حساب می‌کنیم:

$$\cos\theta_2=\frac{9}{AC}\Rightarrow 0/8=\frac{9}{AC}\Rightarrow AC=\frac{90}{8}cm=\frac{90}{8}\times10^{-2}m$$

۴ زمان طی مسیر AC برابر است با:

$$t_{AC}=\frac{AC}{v_2}=\frac{\frac{90}{8}\times10^{-2}}{\frac{9}{4}\times10^{8}}=5\times10^{-10}s=0/5ns$$

۵ اکنون به سراغ محیط (۳) می‌رویم:

$$\frac{n_3}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3}\Rightarrow n_3=\frac{\sin53^\circ}{\sin\theta_3}\Rightarrow 0/8\sqrt{2}=\frac{0/8}{\sin\theta_3}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_3=45^\circ$$

۶ بنابراین CB برابر $9\sqrt{2}cm$ خواهد بود. تندی در محیط (۳) برابر است با:

$$v_3=\frac{c}{n_3}\Rightarrow v_3=\frac{3\times10^8}{0/8\sqrt{2}}m/s$$

$$t_{CB}=\frac{CB}{v_3}=\frac{9\sqrt{2}\times10^{-2}}{\frac{3\times10^8}{0/8\sqrt{2}}}=\frac{9\sqrt{2}\times0/8\sqrt{2}\times10^{-2}}{3\times10^8}$$

$$t_{CB}=4/8\times10^{-10}=0/48ns\quad,\quad t_{کل}=0/5+0/48=0/98ns$$

بالاخره حل تمام شد اما دقت کردید پاسخ در گزینه‌ها نیست. البته اگر حل را یاد گرفته‌اید نگران نباشید.

A ۱۷۹۷ ۱

یادآوری ضریب شکست یک محیط برابر نسبت سرعت نور در خلأ به سرعت نور در آن محیط است. $(n=\frac{c}{v})$.

۱ با توجه به ضریب شکست‌ها سرعت نور در هر لایه را به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=\frac{c}{n}=\frac{c}{1/5}\ ,\ v_2=\frac{c}{n'}=\frac{c}{1/7}\ ,\ v_3=\frac{c}{n''}=\frac{c}{1/6}$$

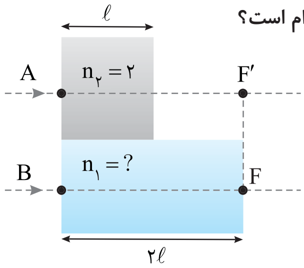
۲ پرتو یک‌بار از بین دو لایه با ضریب شکست‌های n و n′ رد می‌شود و بار دیگر از لایه با ضریب شکست n″ و همان‌طور که می‌دانید $t=\frac{x}{v}$، بنابراین زمان گذر از هر لایه را به‌دست می‌آوریم:

$$t_1=\frac{\ell}{\frac{c}{1/5}}\Rightarrow t_1=1/5\frac{\ell}{c}\ ,\ t_2=\frac{\ell}{\frac{c}{1/7}}\Rightarrow t_2=1/7\frac{\ell}{c}$$

$$\Rightarrow\Delta t_{1,2}=t_1+t_2\Rightarrow\Delta t=3/2\frac{\ell}{c}\quad,\quad t_3=\frac{2\ell}{\frac{c}{1/6}}\Rightarrow t_3=3/2\frac{\ell}{c}$$

۳ بنابراین اختلاف زمان صفر است.

بازی با سؤال **مطابق شکل روبه‌رو دو پرتو A و B به طور همزمان از هوا وارد محیط‌های شفاف n_2 و n_1 می‌شوند و به‌طور همزمان از نقاط F′ و F عبور می‌کنند. ضریب شکست n_1 کدام است؟**



۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{6}{5}$

۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ **سرعت انتشار پرتو A از درون محیط شفاف n_2 برابر است با:**

$$v=\frac{c}{n_2}\Rightarrow v_A=\frac{c}{2}$$

زمان رسیدن پرتو A به نقطهٔ F′ از دو قسمت تشکیل شده است. در جابه‌جایی ℓ سرعت $\frac{c}{2}$ و در جابه‌جایی ℓ بعدی تندی انتشار c است؛ بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_A=\frac{\ell}{\frac{c}{2}}+\frac{\ell}{c}\Rightarrow t_A=\frac{3\ell}{c}$$

بنا به فرض مسئله زمان گذر پرتو B از محیط n_1 نیز برابر t_A است، از این‌رو:

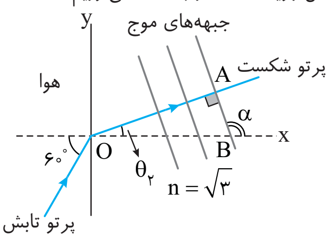
$$t_B=t_A=\frac{3\ell}{c}\xrightarrow{t_B=\frac{2\ell}{v_B}}\frac{2\ell}{v_B}=\frac{3\ell}{c}\Rightarrow\frac{c}{v_B}=\frac{3}{2}\xrightarrow{n=\frac{c}{v}}n=\frac{3}{2}$$

گزینهٔ ۱

C ۱۷۹۸ ۴

خط فکری دقت کنید که مرز دو محیط محور yهاست. بنابراین زاویه‌ای که پرتو تابش با محور xها می‌سازد، زاویهٔ تابش است $(\theta_i=60^\circ)$ با دانستن این مطلب زاویهٔ شکست را بیابید $(\theta_2=?)$، سپس با رسم جبهه‌های موج زاویهٔ بین این جبهه‌ها با محور xها را مشخص کرده و شیب این جبهه‌ها را حساب کنید.

۱ ابتدا با توجه به قانون شکست اسنل زاویهٔ شکست را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$

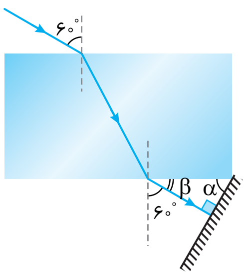
$$\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$

۲ همان‌طور که می‌دانیم جبهه‌های موج بر پرتو عمودند، بنابراین جبهه‌های شکست بر پرتو شکست عمود بوده و جبهه‌های شکست با محور xها زاویهٔ α می‌سازند در مثلث OAB، α زاویهٔ خارجی است و مقدار آن خواهد شد: $\alpha=90+30=120^\circ$

۳ اکنون شیب جبهه‌های موج شکست قابل محاسبه است:

$$\text{شیب جبهه‌های موج شکست}=\tan120^\circ=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}$$

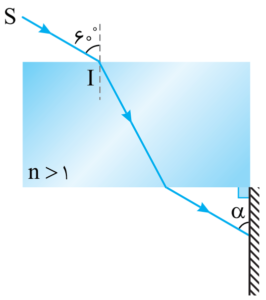
B ۱۷۹۹ ۱



هنگامی بازتاب پرتو تابش روی خودش خواهد بود که پرتو بر سطح آینه عمود باشد. زاویهٔ ورودی به یک تیغهٔ متوازی‌السطوح با زاویهٔ خروجی از تیغه برابر است. بنابراین زاویه‌ای که پرتو خروجی با وجه تیغه می‌سازد $\beta=90-60=30^\circ$ می‌شود. پرتو خروجی بر سطح آینه عمود است: از این‌رو زاویهٔ α خواهد شد:

$$\alpha=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)\Rightarrow\alpha=60^\circ$$

بازی با سؤال **مطابق شکل، پرتوی SI از هوا با زاویهٔ تابش 60° به وجه AB یک تیغهٔ متوازی‌السطوح می‌تابد و وارد تیغه می‌شود. این پرتو پس از خروج از تیغه به یک آینهٔ تخت برخورد می‌کند. پرتو بازتابیده از آینه با امتداد پرتوی SI چه زاویه‌ای می‌سازد؟**



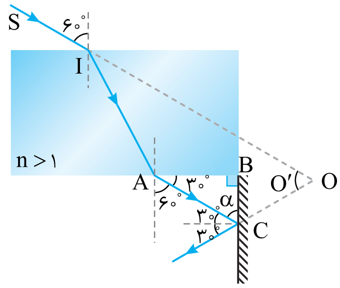
۱) 53°

۲) 120°

۳) 90°

۴) 150°

پاسخ پرتـو خروجی از تیغـهٔ تخت با پرتوی ورودی به تیغهٔ موازی اسـت. بنابراین هر زاویه‌ای که پرتو بازتاب از آینه با پرتوی خروجی می‌سازد طبق خطوط مـوازی و مـورب، همان زاویه را با پرتو SI می‌سـازد. زاویهٔ خروجی از تیغه 60° اسـت و پرتوی خروجی با وجه تیغه زاویهٔ 30° می‌سازد. مثلث ABC قائم‌الزاویه بـوده و زاویـهٔ $\alpha=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ اسـت. از ایـن‌رو زاویهٔ تابش بر سـطح آینه $i=30^\circ$ می‌شـود و زاویهٔ بین پرتو بازتاب و پرتو تابش $2i=60^\circ$ خواهد شد. پرتو SI و پرتـو AB موازی هسـتند، بنابراین زاویهٔ O' بنا بـه خطوط موازی - مورب 60° و زاویهٔ D، 120° خواهد بود.

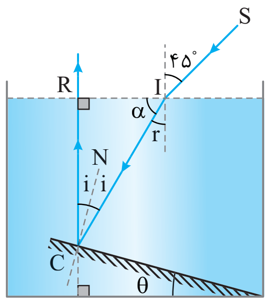


گزینه ۲

C ۱۸۰۰ ۱

۱ ابتدا زاویهٔ شکسـت در آب را به‌دست می‌آوریم:

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$
$$\Rightarrow 1\times\sin 45=\sqrt{2}\sin r$$
$$\Rightarrow \sin r=\frac{1}{2}=30^\circ\Rightarrow r=30^\circ$$



۲ زاویـه‌ای که پرتو شکسـت با سـطح مایع می‌سازد خواهد شد:

$$\alpha=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

۳ مثلـث RIC قائم‌الزاویه اسـت، از ایـن‌رو زاویهٔ بین پرتو تابـش IC و پرتو بازتاب CR خواهد شد:

$$2i+\alpha+90^\circ=180^\circ\xrightarrow{\alpha=60^\circ}2i+60^\circ+90^\circ=180^\circ\Rightarrow i=15^\circ$$

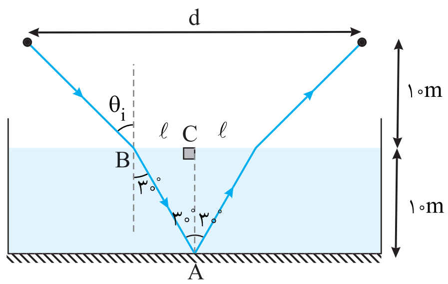
یادداشت ریاضی هرگاه دو ضلع یک زاویه بر دو ضلع زاویهٔ دیگر عمود باشند، آن دو زاویه برابر یا مکمل یکدیگرند.

به اضلاع زاویهٔ بازتاب i دقت کنید. یک ضلع آن خط عمود N اسـت که بر سـطح آینه یعنی یکی از ضلع‌های زاویهٔ θ عمود اسـت، ضلع دیگر آن خط RC اسـت که بر سطح افقی یعنی ضلع دیگر زاویهٔ θ عمود است، بنابراین $\theta=i=15^\circ$ است.

C ۱۸۰۱ ۲

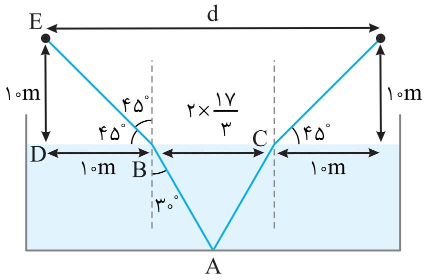
۱ با توجه به قانون بازتاب عمومی زاویهٔ پرتو تابش به آینه و بازتاب از آن با هم برابر است، بنابراین در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\Delta ABC\Rightarrow \tan 30^\circ=\frac{\ell}{10}\Rightarrow \ell=\frac{10\sqrt{3}}{3}m\Rightarrow \ell=\frac{17}{3}m$$



۲ همچنین می‌توان θ_i را با توجه به قانون شکست اسنل به‌دست آورد:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin 30^\circ}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_i=45^\circ$$



۳ بنابراین مثلث BDE متساوی‌الساقین بوده و ضلع $BD=10cm$ می‌شود.

۴ در این صورت با توجه به شکل مقدار d خواهد شد:

$$d=10+2\times\frac{17}{3}+10=\frac{94}{3}m$$

B ۱۸۰۲ ۱

خط فکری بایـد زاویهٔ تابش بر هر وجه را به کمک زوایا و اضلاع روی شـکل پیدا کنید، سپس با داشتن زوایای شکست در هر دو محیط، ضریب شکست آن‌ها را به دست آورید و نسبت $\frac{n}{n'}$ را حساب کنید.

۱ مثلث SAB، متساوی‌السـاقین اسـت، بنابراین زاویهٔ β روی شکل 45°، زاویهٔ تابش پرتو SB بر وجه AB برابر $\theta_{i_2}=45^\circ$ است.

۲ ضلع CD برابر $\sqrt{3}d$ و ضلع SC برابر d اسـت، از این‌رو زاویهٔ α روی شـکل خواهد شد:

$$\tan\alpha=\frac{d}{\sqrt{3}d}\Rightarrow\alpha=30^\circ$$

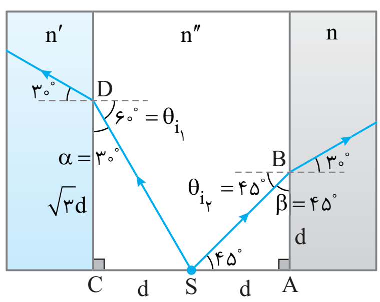
در نتیجه زاویهٔ تابش پرتو SD برابر $\theta_{i_1}=60^\circ$ است.

۳ اکنون به کمک قانون شکست اسنل، ضریب شکست هر محیط را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta_{i_1}}{\sin 30^\circ}=\frac{n'}{n''}\Rightarrow n'=\sqrt{3}n'' \quad,\quad \frac{\sin\theta_{i_2}}{\sin 30^\circ}=\frac{n}{n''}\Rightarrow n=\sqrt{2}n''$$

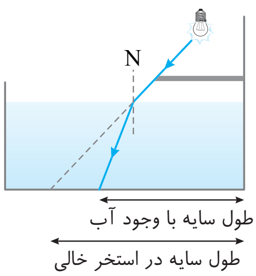
۴ نسبت ضریب شکست‌ها خواهد شد:

$$\frac{n}{n'}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$



A ۱۸۰۳ ۱

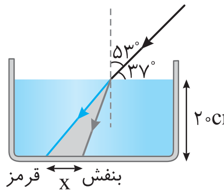
هنگامی که پرتو به سـطح آب می‌تابد و وارد آب می‌شـود، بـه خط عمـود (N) نزدیک می‌شود و طول سایه کوتاه‌تر می‌شود.



B ۱۸۰۴ ۳

یادآوری عموماً ضریب شکست یک محیط معین برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است.

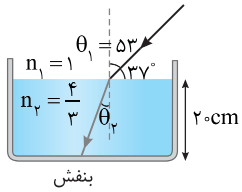
۱ با توجه به نکتهٔ بالا در یک محیط، نور قرمز کمترین و نور بنفش بیشترین ضریب شکست را دارد، بنابراین:



۲ در شکل بالا x خواسته سؤال است، زاویهٔ شکست پرتو بنفش را حساب می‌کنیم:

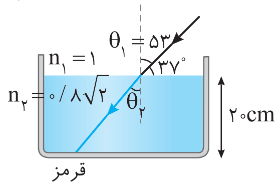
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin 53^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{\frac{4}{3}}{1}$$

$$\Rightarrow\frac{0/8}{\sin\theta_2}=\frac{4}{3}\Rightarrow\sin\theta_2=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

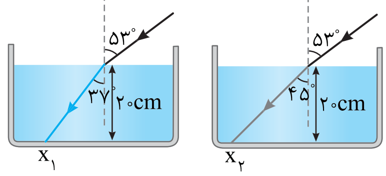


۳ زاویهٔ شکست پرتو قرمز را رسم می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin 53}{\sin\theta_2}=\frac{0/8\sqrt{2}}{1}\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_2=45^\circ$$



۴ با توجه به زاویه‌های شکست و اینکه ارتفاع مایع ۲۰cm است، خواهیم داشت:

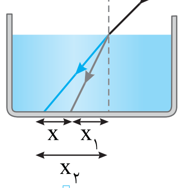


$$\tan 45^\circ=\frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}}\xrightarrow{\tan 45^\circ=1}1=\frac{x_2}{20}\Rightarrow x_2=20cm$$

$$\tan 37^\circ=\frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}}\xrightarrow{\tan 37^\circ=\frac{3}{4}}\frac{3}{4}=\frac{x_1}{20}\Rightarrow x_1=15cm$$

۵ حال x خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$x=x_2-x_1\Rightarrow x=20-15=5cm$$

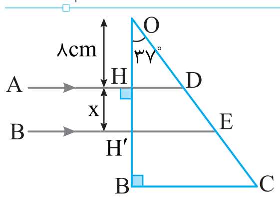


C ۱۸۰۵ ۴

۱ طول مسیر HD در منشور را به کمک مثلثات در مثلث OHD حساب می‌کنیم:

$$\tan 37^\circ=\frac{HD}{OH}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{HD}{8}$$

$$\Rightarrow HD=6cm$$



۲ سرعت پرتو A در منشور را به کمک تعریف ضریب شکست به‌دست می‌آوریم.

$$v_A=\frac{c}{n_A}\xrightarrow{n_A=1/6}v_A=\frac{c}{1/6}$$

۳ زمان حرکت پرتو A در منشور خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow DH=v_At_A\Rightarrow 6=\frac{c}{1/6}t_A\Rightarrow t_A=\frac{6\times 1/6}{c}$$

۴ سرعت پرتو B در منشور را حساب می‌کنیم:

$$v_B=\frac{c}{n_B}\xrightarrow{n_B=\frac{4}{3}}v_B=\frac{c}{\frac{4}{3}}\Rightarrow v_B=\frac{3c}{4}$$

۵ زمان حرکت B را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=vt\Rightarrow H'E=v_Bt_B\Rightarrow t_B=\frac{H'E}{v_B}\Rightarrow t_B=\frac{H'E}{\frac{3c}{4}}\Rightarrow t_B=\frac{4H'E}{3c}$$

۶ با توجه به فرض مسئله $t_A=t_B$. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\frac{6\times 1/6}{c}=\frac{4H'E}{3c}\Rightarrow H'E=7/2cm$$

۷ در مثلث OH'E طول ضلع OH' را به دست می‌آوریم:

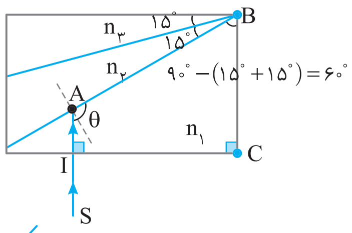
$$\tan 37^\circ=\frac{H'E}{OH'}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{7/2}{8+x}\Rightarrow 9/6=8+x\Rightarrow x=1/6cm$$

C ۱۸۰۶ ۲

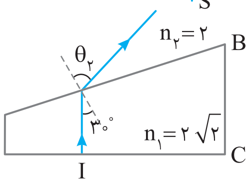
یادآوری اگر پرتویی عمود بر مرز بین دو محیط بتابد، بدون انحراف وارد محیط دوم می‌شود.

۱ با توجه به یادآوری بالا مسیر پرتو در محیط (۱) را رسم می‌کنیم:

در چهار ضلعی IABC: $\theta+90+90+60=360\Rightarrow\theta=120^\circ$



۲ برای پرتو IA نیم‌خط عمود را رسم می‌کنیم، زاویه تابش IA برابر $120-90=30^\circ$ است. حال با توجه به قانون شکست زاویهٔ θ'_2 را حساب می‌کنیم:

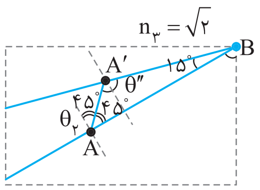


$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{2}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_2=\sqrt{2}\sin 30^\circ\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_2=45^\circ$$

۳ در محیط (۲) مسیر پرتو را کشیده و زاویه تابش را به‌دست می‌آوریم:

$$\theta''+45+15=180\Rightarrow\theta''=120^\circ$$

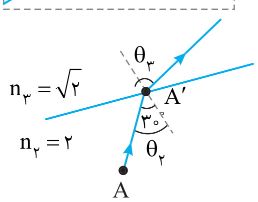


۴ نیم‌خط عمود را برای پرتو AA' کشیده و زاویه تابش $120-90=30^\circ$ می‌شود:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}=\frac{n_3}{n_2}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

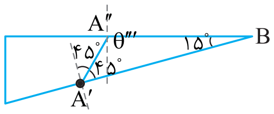
$$\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_3=45^\circ$$



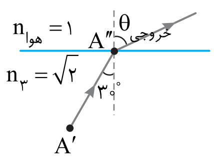
۵ مسیر پرتـو در محیـط (۳) یعنی A'A'' را دنبال می‌کنیم:

$$\theta'''+15+45=180\Rightarrow\theta'''=120$$



۶ نیم‌خط عمود را برای پرتو A'A'' رسم می‌کنیم. زاویه تابش $120-90=30$ می‌شود:

۷ قانون شکست را برای پرتو خروجی می‌نویسیم:



$$\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_{\text{خروجی}}}=\frac{n_{\text{خروجی}}}{n_3}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_{\text{خروجی}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

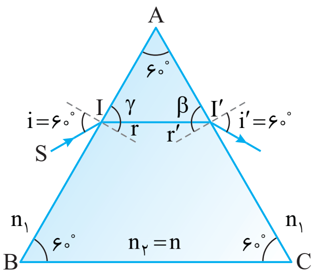
$$\sin\theta_{\text{خروجی}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_{\text{خروجی}}=45^\circ$$

B ۱۸۰۷ | ۲

خط فکری تمام زوایای α با هم برابرند، بنابراین مثلث ABC باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع با زوایای ۶۰° باشد. از طرفی زاویهٔ تابش بر وجه AB نیز $\alpha=i=60^\circ$ بوده؛ همچنین زاویهٔ پرتو خروجی با خط عمود بر وجه AC نیز $i'=\alpha=60^\circ$ است. اکنون با توجه به این مطالب باید به سراغ بررسی زوایای γ، β و زوایای r و r' رفته و به کمک آن ضریب شکست منشور را حساب کرد.

۱ قانون اسنل را برای وجه AB و AC می‌نویسیم تا ثابت شود دو زاویهٔ r و r' برابر هستند.

$$\begin{cases} AB: n_1 \sin i = n_2 \sin r \\ AC: n_1 \sin i' = n_2 \sin r' \end{cases} \xrightarrow{i=i'} r=r'$$



۲ با برابر بودن r' و r مشخص می‌شود که زوایای β و γ نیز برابر هستند.

$\gamma=\beta=60^\circ$

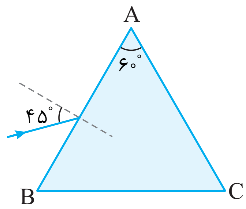
۳ بنابراین زاویه‌های r و r' هر کدام برابر ۳۰° می‌شوند.

۴ ضریب شکست n خواهد شد:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = n\times\frac{1}{2} \Rightarrow n=\sqrt{3}$$

بازی با سؤال مطابق شکل روبه‌رو پرتو تک‌رنگی از هوا با زاویهٔ ۴۵° به وجه AB منشوری می‌تابد و با همان زاویه از وجه AC بیرون می‌رود. ضریب شکست منشور کدام است؟ تجربی - ۹۰

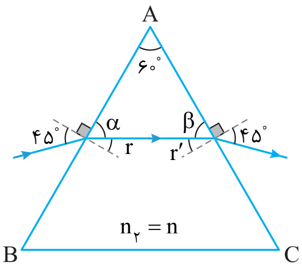
۱) ۲
۲) $\sqrt{2}$
۳) ۳
۴) $\sqrt{3}$



پاسخ ۱ با توجه به قانون اسنل $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ چون زوایای ورودی و خروجی هر کدام ۴۵° است، زوایای r و r' نیز با هم برابرند.

۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \alpha+r=90^\circ \\ \beta+r'=90^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta+r+r'=180^\circ \quad (I)$$



۳ مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است. از این‌رو:

$$\alpha+\beta+A=180^\circ \qquad (II)$$

از روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود: $A=r+r'$. یعنی مجموع زاویه‌های شکست داخلی برابر با زاویهٔ رأس منشور است.

$$A=r+r' \xrightarrow{r=r'} 60^\circ=2r \Rightarrow r=30^\circ$$

۴ ضریب شکست خواهد شد:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \xrightarrow[n_2=n]{n_1=1} n=\frac{\sin i}{\sin r} \Rightarrow n=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow n=\sqrt{2}$$

نکته در منشور مجموع زاویه‌های شکست داخلی برابر زاویهٔ رأس منشور است. $A=r+r'$

گزینه ۲

B ۱۸۰۸ | ۳

۱ هر دو پرتو بدون انحراف وارد منشور شده‌اند؛ یعنی زاویهٔ بین این پرتوها و وجه AC ۹۰° است.

۲ زاویهٔ بین پرتو HH' با وجه AB برابر $\gamma=90-30=60^\circ$ است.

در نتیجه زاویهٔ تابش پرتو HH' برابر ۳۰° خواهد شد.

۳ زاویهٔ شکست بر وجه AB را با حرف r_{AB} نشان داده و مقدار آن را حساب می‌کنیم.

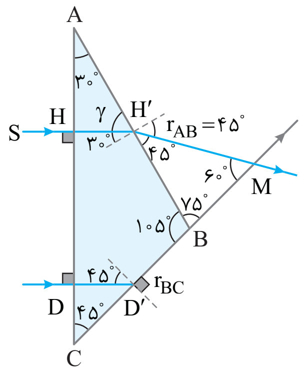
$$\text{در وجه } AB: n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \sqrt{2}\times\sin 30^\circ = 1\times\sin r_{AB} \Rightarrow r_{AB}=45^\circ$$

۴ با همین استدلال زاویهٔ تابش پرتو DD' بر وجه BC، برابر ۴۵° است. زاویهٔ شکست بر وجه BC را با حرف r_{BC} نشان داده و مقدار آن را به دست می‌آوریم.

$$\text{در وجه } BC: n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \sqrt{2}\times\sin 45^\circ = 1\times\sin r_{BC} \Rightarrow r_{BC}=90^\circ$$

۵ زاویهٔ A و C به ترتیب ۳۰° و ۴۵° بوده، بنابراین در مثلث ABC زاویهٔ B برابر $180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$ خواهد شد.

۶ بنابراین در مثلث $H'BM$ زاویهٔ بین دو پرتو، ۶۰° به‌دست می‌آید.



پنجره ۴ روبه‌روی ۵

B ۱۸۰۸ | ۱

خط فکری ۱ علت این که شخص دو صدا با اختلاف زمانی Δt دریافت می‌کند متفاوت بودن تندی انتشار صوت در هوا و فلز است. صوتی که از درون فلز منتقل می‌شود سریع‌تر از صوتی که از درون هوا منتقل می‌شود به سر دیگر لوله می‌رسد. تندی انتشار موج ثابت است و معادلهٔ انتشار موج یک معادله سرعت $(\Delta x=vt)$ است.

کافی است زمان را به‌دست آورده از هم کم کنیم.

زمان حرکت صوت در هوا برابر است با: $\Delta x=v_{\text{هوا}}t_{\text{هوا}} \xrightarrow{\Delta x=\ell} t_{\text{هوا}}=\dfrac{\ell}{v_{\text{هوا}}}$

زمان حرکت صوت در فلز خواهد شد: $\Delta x=v_{\text{فلز}}t_{\text{فلز}} \Rightarrow t_{\text{فلز}}=\dfrac{\ell}{v_{\text{فلز}}}$

بنابراین: $\Delta t=t_{\text{هوا}}-t_{\text{فلز}}=\dfrac{\ell}{v_{\text{هوا}}}-\dfrac{\ell}{v_{\text{فلز}}} \Rightarrow \Delta t=\dfrac{v_{\text{فلز}}-v_{\text{هوا}}}{v_{\text{هوا}}v_{\text{فلز}}}\ell$

B ۱۸۰۸ ۱

۲

۱ با توجه به تعریف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}$$

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

با توجه به خاصیت لگاریتم $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$ می‌توان نوشت:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

۲ داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم، $\beta_1=80dB$ و $\beta_2=120dB$

$$120-80=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=4\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=10^4$$

یادآوری شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. $I\propto\frac{1}{r^2}$

۳ به کمک نسبت شدت صوت‌ها، فاصلهٔ نقطه از منبع صوت در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\xrightarrow{r_1=20m}10^4=(\frac{20}{r_2})^2$$

$$10^2=\frac{20}{r_2}\Rightarrow r_2=0/2m=20cm$$

نمای ۲۷

B ۱۸۰۸ ۴

۳

نکته شدت صوت یک چشمهٔ صوتی I است. اگر n چشمه صوت شبیه آن با هم و در کنار هم صوت ایجاد کنند در همان فاصله از چشمه، شدت صوت nI خواهد شد.

۱ سه چشمه به چشمهٔ اول اضافه شده یعنی جمعاً ۴ چشمه با هم صوت تولید می‌کنند و شدت صوت خواهد شد: $I_2=4I_1$

۲ اختلاف تراز شدت صوت را در دو حالت به دست می‌آوریم.

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{4I_1}{I_1}$$

$$\beta_2-\beta_1=10\log4=10\log2^2\xrightarrow{\log a^n=n\log a}\beta_2-\beta_1=20\log2$$

$$\xrightarrow{\log2=0/3}\beta_2-\beta_1=20\times0/3=6dB$$

نمای ۲۷

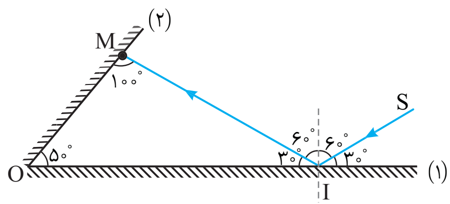
B ۱۸۰۸ ۳

۴

۱ زاویهٔ تابش به آینهٔ (۱) برابر $90-30=60°$ است.

۲ در شکل (الف) زاویه‌ای که پرتو با سطح آینهٔ (۲) می‌سازد، یعنی زاویهٔ M برابر خواهد شد با:

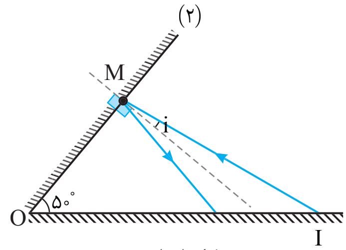
$$\Delta OMI\Rightarrow\hat M+30°+50°=180°\Rightarrow\hat M=100°C$$



شکل (الف)

۳ در شکل (ب) خط عمود بر آینهٔ (۲) را رسم کرده‌ایم تا زاویه‌ای که پرتو بازتاب از آینهٔ (۲) با سطح آینه می‌سازد را بیابیم. زاویهٔ $\hat i$ روی شکل برابر است با:

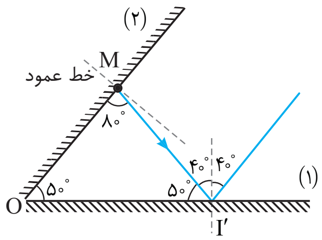
$i=100°-90°=10°$



شکل (ب)

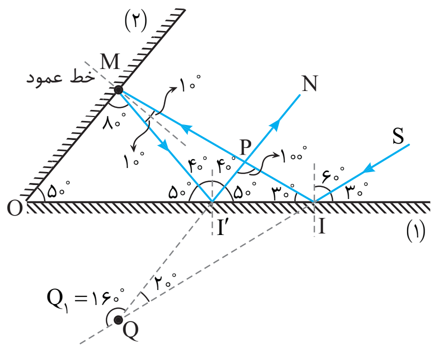
بنابراین زاویهٔ بازتاب از آینهٔ (۲) نیز ۱۰° است و این پرتو با سطح آینهٔ (۲) زاویهٔ $90°-10°=80°$ می‌سازد.

۴ با توجه به شکل زاویه‌ای که پرتو بازتاب MI′ با سطح آینهٔ (۱) می‌سازد ۵۰° است و زاویهٔ تابش در این نقطه ۴۰° می‌شود.

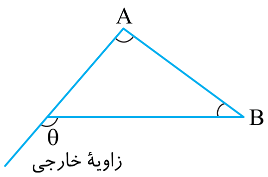


شکل (پ)

۵ اکنون مسیر کامل پرتو SI را پس از بازتاب از آینه‌های (۱) و (۲) رسم می‌کنیم و پرتو SI و پرتو I′N را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند و زاویهٔ بین آن‌ها را که روی شکل با حرف Q_1 نشان داده‌ایم، حساب می‌کنیم.



نکته زاویهٔ خارجی مثلث همواره برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور با آن است. $\hat\theta=\hat A+\hat B$



در شکل زاویهٔ Q_1 زاویهٔ خارجی مثلث QIP است. بنابراین:

$Q_1=100+30+30=160°$

نمای ۳۴

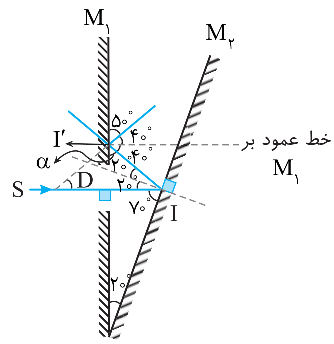
B ۱۸۰۸ ۲

۵ ۱ پرتو SI که به سطح آینه $M_۲$ می‌تابد با سطح آینه زاویهٔ $۷۰^\circ = ۲۰ - ۹۰$ می سازد.

۲ زاویهٔ تابش بر سطح آینه $M_۲$ برابر ۲۰° و زاویهٔ بین پرتو بازتاب از آینهٔ (۲) و پرتو تابش بر آینه $M_۲$ برابر $۴۰^\circ = ۲۰^\circ \times ۲$ است.

۳ با توجه به شکل زاویهٔ α یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش (II') با سطح آینه برابر $\alpha = ۹۰ - ۴۰ = ۵۰^\circ$ است بنابراین زاویهٔ تابش و بازتاب بر سطح آینه $M_۱$ برابر ۴۰° می‌باشد.

۴ خط عمود بر آینه $M_۱$ و پرتو SI موازی هستند و بنا به خاصیت موازی مورب زاویهٔ $D = ۴۰^\circ$ می‌شود.

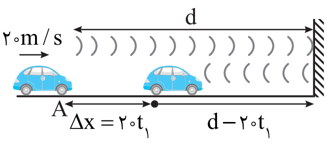


میانبر در آینه‌های متقاطع پس از دو بار بازتاب زاویهٔ انحراف دو برابر زاویهٔ بین دو آینه است. $D = ۲ \times ۲۰ = ۴۰^\circ$

نمای ۳۴

C ۱۸۰۸ ۱

۶ **حالت اول:** در مدت $t_۱$ که پژواک به راننده می‌رسد خودرو با تندی $۲۰ m/s$ به اندازهٔ $۲۰t_۱$ جلو می‌رود و به مانع نزدیک می‌شود. بنابراین صوت مسیری که طی می کند مطابق شکل برابر است با: $\ell = d + d - ۲۰t_۱$

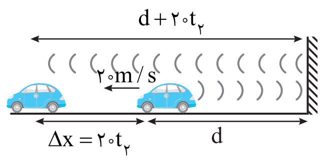


تندی انتشار صوت $۳۴۰ m/s$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\ell = v_{صوت} t_۱ \Rightarrow ۲d - ۲۰t_۱ = ۳۴۰t_۱ \Rightarrow ۲d = ۳۶۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{d}{۱۸۰}$$

حالت دوم: خودرو با تندی $۲۰ m/s$ در مدت $t_۲$ به اندازهٔ $\Delta x = ۲۰t_۲$ از صخره دور می‌شود و مطابق شکل مسافتی که صوت طی می کند تا به مانع برسد و از آن برگردد تا به راننده برسد خواهد شد:

$$\ell_۲ = d + d + ۲۰t_۲ \Rightarrow \ell_۲ = ۲d + ۲۰t_۲$$



$\ell_۲$ را صوت با تندی $۳۴۰ m/s$ طی کرده است بنابراین:

$$\ell = v_{صوت} t \Rightarrow ۲d + ۲۰t_۲ = ۳۴۰t_۲ \Rightarrow ۲d = ۳۲۰t_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{d}{۱۶۰}$$

با توجه به فرض مسئله $t_۲ - t_۱ = ۰/۲۵s$ است در نتیجه:

$$\frac{d}{۱۶۰} - \frac{d}{۱۸۰} = ۰/۲۵ \Rightarrow \frac{۹d - ۸d}{۱۴۴۰} = ۰/۲۵ \Rightarrow d = ۱۴۴۰ \times ۰/۲۵ \Rightarrow d = ۳۶۰m$$

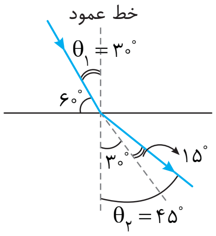
نمای ۳۲

C ۱۸۰۸ ۱

۷ ابتدا زاویهٔ تابش $\theta_۱ = ۹۰ - ۶۰ = ۳۰^\circ$ و زاویهٔ شکست $\theta_۲ = ۳۰ + ۱۵ = ۴۵^\circ$ را مشخص می‌کنیم. سپس با استفاده از رابطهٔ زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱} = \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{n_۱}{n_۲} \Rightarrow \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۳۰^\circ} \Rightarrow \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \sqrt{۲}$$



نمای ۳۸

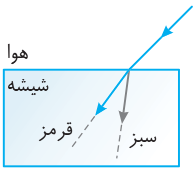
B ۱۸۰۸ ۳

۸ **یادآوری** ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های مختلف نور متفاوت است و هرچه طول موج بزرگ‌تر باشد، ضریب شکست کمتر بوده و پرتو کمتر منحرف می‌شود (می‌شکند).

۱ طول موج نور قرمز از طول موج نور سبز بلندتر بوده و ضریب شکست شیشه برای نور قرمز کمتر بوده و نور قرمز کمتر منحرف می‌شود.

۲ پرتو از هوا وارد شیشه شده از این‌رو پرتوهای شکست به خط عمود نزدیک‌تر می‌شوند.

۳ بنابراین پرتوها وقتی وارد شیشه می‌شوند از هم جدا شده و نور سبز به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



نمای ۳۸

C ۱۸۰۸ ۲

۹ **نکته** زاویهٔ بین جبهه‌های موج و مرز دو محیط برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. زاویهٔ تابش در محیط (۱) برابر $\theta_۱ = \alpha$ و زاویهٔ شکست $\theta_۲ = \beta$ است.

نکته فاصلهٔ جبهه‌های موج از هم برابر طول موج است.

طول موج در محیط اول برابر $\lambda_۱ = ۶۰۰nm$ و در محیط دوم برابر $\lambda_۲ = ۴۵۰nm$ است.

۱ بسامد موج از یک محیط به محیط دیگر ثابت می‌ماند از این‌رو:

$$v_۱ = f\lambda_۱ \ , \ v_۲ = f\lambda_۲ \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۴۵۰}{۶۰۰} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۳}{۴}$$

۲ بنا به قانون شکست عمومی خواهیم داشت: $\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱} = \frac{v_۲}{v_۱} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{۳}{۴} (I)$

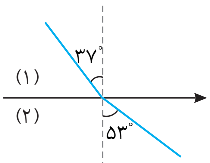
۳ زاویهٔ α و β متمم هستند $(\alpha + \beta = ۹۰^\circ)$ بنابراین:

$$\sin\beta = \cos(۹۰ - \beta) \Rightarrow \sin\beta = \cos\alpha$$

۴ در رابطهٔ I جای‌گذاری می کنیم: $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \alpha = ۵۳^\circ$

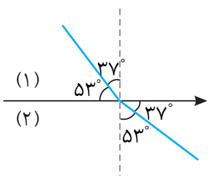
نمای ۳۹

بازی با سؤال شکل روبه‌رو جبههٔ موجی را نشان می‌دهد که از محیط (۱) در حال وارد شدن به محیط (۲) است. تندی موج در محیط (۱) چند برابر تندی موج در محیط (۲) است؟ $(\sin ۳۷ = ۰/۶ , \sin ۳۰ = ۰/۵)$



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ دقت کنید، آنچه می‌بینید پرتو نبود بلکه جبههٔ موج است. زاویه‌ای که جبههٔ موج در محیط (۱) با مرز دو محیط می‌سازد، $۹۰ - ۳۷ = ۵۳^\circ$ است و این همان زاویهٔ تابش $\theta_۱ = ۵۳^\circ$ است.



زاویهٔ بین جبههٔ موج در محیط (۲) با مرز دو محیط $۹۰ - ۵۳ = ۳۷^\circ$ است یعنی زاویهٔ شکست در محیط (۲) برابر $\theta_۲ = ۳۷^\circ$ است.

بنا به قانون شکست عمومی:

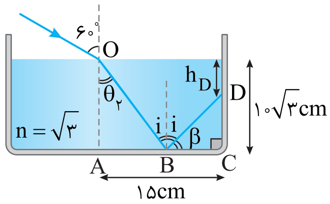
$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲} = \frac{v_۱}{v_۲} \Rightarrow \frac{\sin ۵۳}{\sin ۳۷} = \frac{v_۱}{v_۲} \Rightarrow \frac{۰/۸}{۰/۶} = \frac{v_۱}{v_۲} \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = \frac{۴}{۳}$$

گزینهٔ ۲

C ۱۸۰۸ ۱

۱۰

۱ ابتدا زاویهٔ شکست را به کمک قانون اسنل به دست می‌آوریم.



$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\Rightarrow 1\times\sin 60=\sqrt{3}\sin\theta_2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sin\theta_2\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$

۲ بنا به خاصیت موازی مورب زاویهٔ تابش i با θ_2 برابر است، از این‌رو:

$$i=\theta_2=30^\circ$$

۳ فاصله AB را به دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_2=\frac{AB}{OA}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{AB}{10\sqrt{3}}\Rightarrow AB=10cm$$

۴ فاصله BC خواهد شد: $15-10=5cm$

۵ فاصله DC را به دست می‌آوریم:

$$i=30^\circ\Rightarrow\beta=90-30=60^\circ$$

$$\Delta BCD:\tan\beta=\frac{DC}{BC}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{DC}{5}\Rightarrow DC=5\sqrt{3}cm$$

۶ عمق نقطهٔ D برابر است با: $h_D=10\sqrt{3}-5\sqrt{3}=5\sqrt{3}cm$

نمای ۳۹

پنجره تو در تو

A ۱۸۰۹ ۲

۱ **خط فکری** هر ذره از محیط انتشار موج سینوسی دارای حرکت هماهنگ ساده است. از طرفی در حرکت هماهنگ ساده بیشینه شتاب نوسانگر در نقاط بازگشت (دو انتهای مسیر) اتفاق می‌افتد. یعنی نقاطی که در برآمدگی و یا فرورفتگی موج قرار دارند دارای بیشینه شتاب هستند.

نقاط P، Q و N در بیشترین فاصله از حالت تعادلشان یعنی در نقاط بازگشت قرار دارند. بنابراین دارای بیشینه شتاب هستند.

نمای ۱۴

B ۱۸۰۹ ۳

۲

۱ تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان است. بنابراین:

$$\begin{cases}\lambda_A=\frac{c}{f_A}\\ \lambda_B=\frac{c}{f_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\xrightarrow{\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{6}{5}}\frac{f_B}{f_A}=\frac{6}{5}\xrightarrow{(I)}f_A=\frac{5}{6}f_B$$

۲ با توجه به صورت مسئله:

$$f_B-f_A=100MH\xrightarrow{(I)}f_B-\frac{5}{6}f_B=100\Rightarrow\frac{f_B}{6}=100\Rightarrow f_B=600Hz$$

نمای ۲۲

B ۱۸۰۹ ۳

۳

۱ تندی انتشار موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda\xrightarrow{f=40Hz,\lambda=1/2m}v=40\times1/2\Rightarrow v=48m/s$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

۲ بیشینه تندی نوسان ذرات طناب را حساب می‌کنیم.

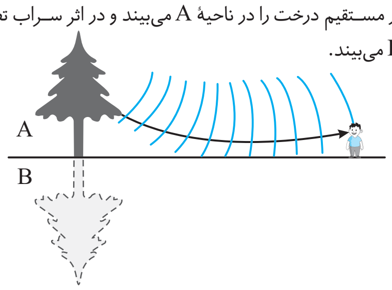
$$v_m=A\omega\xrightarrow{\omega=2\pi f}v_m=A(2\pi f)\xrightarrow{A=2cm,f=40Hz}$$

$$v_m=0/02\times2\pi\times40\Rightarrow v_m=1/6\pi\ m/s$$

نمای ۱۸

B ۱۸۰۹ ۳

۴ شخص به‌طور مستقیم درخت را در ناحیهٔ A می‌بیند و در اثر سراب تصویر درخت را نیز در ناحیهٔ B می‌بیند.



نمای ۴۱

A ۱۸۰۹ ۱

۵

۱ در گذر موج از یک محیط به محیط دیگر دوره و بسامد موج که از ویژگی‌های چشمه است ثابت می‌ماند. اما سرعت انتشار موج که به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد، تغییر می‌کند، در نتیجه طول موج نیز تغییر خواهد کرد.

$$v_1=f\lambda_1\ ,\ v_2=f\lambda_2\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}\quad(I)$$

۲ دو طناب از یک ماده ساخته شده‌اند، بنابراین چگالی آن‌ها با هم برابر است $(\rho_1=\rho_2)$.

۳ دو طناب در یک نقطه به هم گره خورده و نیروی کشش در طول دو طناب یکسان است. $F_1=F_2$

۴ نسبت تندی انتشار موج در دو طناب خواهد شد:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\frac{2}{D_1}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}}{\frac{2}{D_2}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{D_2}{D_1}\quad(II)$$

۵ با توجه به رابطهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{D_2}{D_1}\xrightarrow{\lambda_1=7cm,D_1=3D_2}\frac{7}{\lambda_2}=\frac{D_2}{3D_2}\Rightarrow\lambda_2=21cm$$

میانبر استفادهٔ مستقیم از رابطهٔ $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{D_2}{D_1}$

نمای ۳۵

B ۱۸۰۹ ۲

۶ **خط فکری** دورهٔ آونگ به میدان گرانش (g) بستگی دارد. بنابراین شما باید ابتدا شتاب گرانش در سیاره (g_P) را برحسب شتاب گرانش (g_e) حساب کنید.

۱ نسبت حجم سیاره به حجم کرهٔ زمین خواهد شد:

$$\frac{V_P}{V_e}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_P^3}{\frac{4}{3}\pi R_e^3}=\frac{R_P^3}{R_e^3}\xrightarrow{R_P=2R_e}\frac{V_P}{V_e}=(2)^3=8\Rightarrow V_P=8V_e$$

۲ با توجه به نسبت چگالی‌ها، نسبت جرم سیاره به جرم کرهٔ زمین را به‌دست می‌آوریم. $\rho_P=3\rho_e\Rightarrow\frac{M_P}{V_P}=3\frac{M_e}{V_e}\Rightarrow3\frac{M_P}{8V_e}=3\frac{M_e}{V_e}\Rightarrow M_P=24M_e$

۳ نسبت میدان گرانش در سطح سیاره به میدان گرانش در سطح زمین خواهد شد:

$$\frac{g_P}{g_e}=\frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_e}{R_e^2}}\Rightarrow\frac{g_P}{g_e}=\frac{M_P}{M_e}\times(\frac{R_e}{R_P})^2=24\times(\frac{1}{2})^2\Rightarrow g_P=6g_e$$

۴ اکنون دورهٔ آونگ را در سیارهٔ جدید به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\frac{T_P}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_P}}\xrightarrow{T_e=2s}\frac{T_P}{2}=\sqrt{\frac{1}{6}}\Rightarrow T_P=\frac{\sqrt{6}}{3}s$$

میانبر برای میدان گرانش سیاره‌ای که چگالی و شعاع آن را برحسب چگالی و شعاع زمین در اختیار داریم، می‌توان از رابطهٔ مقابل استفاده کرد. $g=\frac{4}{3}\pi RG\bar{\rho}$

نمای ۸

B ۱۸۰۹ ۲

۷ با توجه به فرض مسئله دورهٔ آونگ ۳ برابر دورهٔ سامانهٔ جرم فنر بوده بنابراین کافی است به جای دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ و به جای دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر، $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ را قرار دهیم.

$$T_{آونگ}=3T_{فنر}\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=3\times2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{\ell}{10}=9\times\frac{0/5}{450}\Rightarrow\frac{\ell}{10}=9\times\frac{1}{900}$$

$$\Rightarrow\ell=0/1m=10cm$$

نمای ۸

B ۱۸۰۹ ۱

۸ ۱ هنگامی که سرنشینان درون ماشین قرار گرفتند، فنرها فشرده شده‌اند، بنابراین ثابت فنر کل فنرها (فنر آرمانی) خواهد شد:

$$mg=F_e\Rightarrow 4000=k\times\frac{4}{100}\Rightarrow k=10^5N/m$$

۲ هنگامی که اتومبیل دارای سرنشین می‌باشد، دورهٔ تناوب کمک فنرهای اتومبیل (فنر آرمانی) برابر 1s شده است از این‌رو می‌توان جرم اتومبیل را حساب کرد.

$$\begin{cases}m & \text{جرم اتومبیل}\\ m' & \text{جرم سرنشینان}\end{cases}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m+400}{10^5}}$$

$$\Rightarrow 1=4\pi^2\left(\frac{m+400}{10^5}\right)\Rightarrow m+400=2500\Rightarrow m=2100kg$$

۳ حال اگر اتومبیل خالی باشد، روی فنرها تنها جرم اتومبیل $(m=2100kg)$ قرار دارد.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{2100}{10^5}}=\frac{2\pi\sqrt{21}}{10\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{21}}{5}s$$

نمای ۷

B ۱۸۰۹ ۲

۹ **نکته** هرگاه حرکت نوسانگر به سمت نقطهٔ تعادل باشد حرکت نوسانگر تندشونده است.

نکته همواره برای استفاده از بازهٔ زمانی باید نسبت $\frac{x}{A}$ را به‌دست بیاورید.

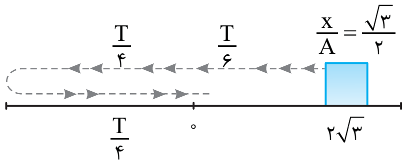
۱ نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{x}{A}=\frac{+2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

۲ حرکت در این مکان تندشونده است، یعنی نوسانگر به سوی مرکز نوسان در حال حرکت است.

۳ در بازهٔ زمانی $\frac{4}{150}s$، دو بار شتاب صفر شده است. شتاب نوسانگر در نقطهٔ تعادل $x=0$، صفر می‌شود. بنابراین در این بازه نوسانگر از مکان $x=+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ به مکان $-A$ رفته و به $x=0$ برمی‌گردد.

۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم:



۵ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده دوره را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{4}{150}s\Rightarrow\frac{T}{6}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}=\frac{4}{150}s\Rightarrow\frac{2T}{3}=\frac{4}{150}s\Rightarrow T=0/04s$$

۶ بنابراین بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\frac{2\pi}{T}=50\pi\,rad/s$ می‌باشد و معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{A=4cm}x=0/04\cos(50\pi t)$$

نمای ۳

B ۱۸۰۹ ۲

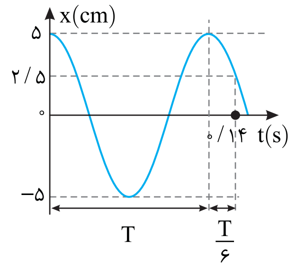
۱۰ **خط فکری** هنگامی در یک بازهٔ زمانی تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر است که جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان باشد، یعنی در آن بازهٔ مشترک تغییر جهت ندهد. بنابراین شما باید دوره را به‌دست بیاورید و بازه‌های زمانی داده شده در گزینه‌ها بررسی کنید. در هر بازه‌ای که نوسانگر تغییر جهت ندهد، جواب مسئله را یافته‌اید.

با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده می‌توان نوشت:

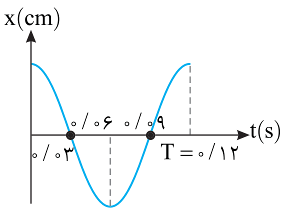
$$\Delta t=T+\frac{T}{6}=\frac{7T}{6}$$

$$\Rightarrow 0/14=\frac{7T}{6}$$

$$\Rightarrow T=0/12s$$



بنابراین نمودار $x-t$ به صورت روبه‌رو می‌باشد. در بازه‌ای که نوسانگر تغییر جهت نداده باشد تندی متوسط و سرعت متوسط با هم برابر می‌باشد، یعنی در بازه‌های $t_1=0/06s$ تا $t_2=0/12s$ و $t=0$ تا $t=0/06s$



تندی متوسط با سرعت متوسط برابر است و گزینهٔ (۲) در بازهٔ $t=0$ تا $t=0/6s$ و پاسخ تست است.

نمای ۵ و ۱

B ۱۸۰۹ ۱

۱۱ **خط فکری** هرگاه به شما معادلهٔ سرعت - مکان یک حرکت هماهنگ ساده داده شود، اگر $x=0$ را در معادله قرار دهید، تندی برابر تندی بیشینه می‌شود $(v=v_m)$ زیرا در نقطهٔ تعادل $(x=0)$ تندی بیشینه است و اگر به جای v، صفر قرار دهید، x برابر $\pm A$ می‌شود.

۱ در لحظه‌ای که نوسانگر از مبدأ مکان می‌گذرد، سرعت بیشینه است:

$$v^2=\frac{\pi^2}{400}-\frac{\pi^2}{4}x^2\xrightarrow{x=0,\,v=v_m}v_m^2=\frac{\pi^2}{400}\Rightarrow v_m=\frac{\pi}{20}m/s$$

۲ در دو انتهای مسیر یعنی هرگاه $x=\pm A$ است، سرعت صفر می‌باشد:

$$v^2=\frac{\pi^2}{400}-\frac{\pi^2}{4}x\xrightarrow{v=0,\,x=\pm A}0=\frac{\pi^2}{400}-\frac{\pi^2}{4}A^2\Rightarrow\frac{\pi^2}{400}=\frac{\pi^2}{4}A^2$$

$$\Rightarrow A^2=\frac{1}{100}\Rightarrow A=0/1m$$

۳ بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$v_m=A\omega\Rightarrow\frac{\pi}{20}=0/1\omega\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}rad/s$$

۴ دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

نمای ۱۰

B ۱۸۰۹ ۴

۱۲ ۱ انرژی مکانیکی برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، با توجه به فرض مسئله اگر $U=K$ باشد، آنگاه:

$$E=U+K\xrightarrow{U=K}E=K+K=2K\xrightarrow{E=K_m}K_m=2K$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}}{2}v_m\ (I)$$

۲ از روی معادلهٔ $x=0/02\cos 20t$، بیشینه تندی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/02\times20\Rightarrow v_m=0/4m/s$$

۳ در معادلهٔ (I) به جای v_m، $0/4m/s$ قرار می‌دهیم.

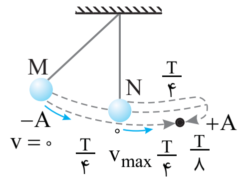
$$v=\frac{\sqrt{2}}{2}\times0/4\Rightarrow v=0/2\sqrt{2}m/s$$

نمای ۱۱

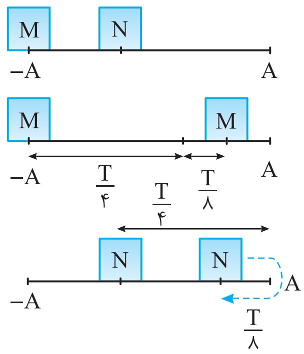
۱۳ C ۱۸۰۹ ۳

۱ دو آونگ هم‌طول هستند و با توجه به رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ دورهٔ دو نوسانگر یکسان است.

۲ در یک لحظه تندی یکی از آونگ‌ها صفر است. بنابراین این آونگ در نقطهٔ بازگشت قرار دارد مانند آونگ M در شکل روبه‌رو. آونگ دیگر در این لحظه دارای بیشینه تندی است. یعنی مانند آونگ N در حال گذر از نقطهٔ تعادل است.



۳ دو آونگ در یک جهت در حرکت هستند. در مدت $\frac{T}{۴}$ آونگ M به مرکز نوسان می‌رسد و آونگ N به دامنهٔ $(+A)$ می‌رسد و تغییر جهت می‌دهد. اکنون دو متحرک هرکدام باید به مدت $\frac{T}{۸}$ حرکت کنند تا به هم برسند. بنابراین دو آونگ پس از مدت Δt از کنار هم می‌گذرند:



$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۳T}{۸}$$

نمای ۷

۱۴ B ۱۸۰۹ ۳

۱ با توجه به رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی و اینکه بیشینه انرژی جنبشی آن‌ها با هم برابر است، می‌توان نسبت جرم سامانه‌ها را به‌دست آورد.

$$\begin{cases}P=mv\\ K=\frac{۱}{۲}mv^۲\end{cases}\Rightarrow K_{max}=\frac{P^۲_{max}}{۲m}\xrightarrow{K_۲=K_۱}\frac{P_۲^۲}{۲m_۲}=\frac{P_۱^۲}{۲m_۱}$$

$$\xrightarrow{P_۲=۳P_۱}\frac{۹P_۱^۲}{m_۲}=\frac{P_۱^۲}{m_۱}\Rightarrow m_۲=۹m_۱$$

۲ بیشینه انرژی جنبشی آن‌ها با هم برابر است:

$$K_{max_۱}=K_{max_۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}m_۱v^۲_{۱max}=\frac{۱}{۲}m_۲v^۲_{۲max}\xrightarrow{m_۲=۹m_۱}$$

$$m_۱v^۲_{۱max}=۹m_۱v^۲_{۲max}\Rightarrow v_{۱max}=۳v_{۲max}$$

۳ اندازه بیشینه سرعت نوسانگر $v_m=A\omega$ است از این‌رو:

$$A_۱\omega_۱=۳A_۲\omega_۲\xrightarrow{A_۱=A_۲}\omega_۱=۳\omega_۲\xrightarrow{\omega=۲\pi f}۲\pi f_۱=۳(۲\pi f_۲)$$

$$\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{۱}{۳}$$

نمای ۱۱

۱۵ A ۱۸۰۹ ۴ خط فکری

هنگامی نوسانگر وادارنده باعث تشدید مابقی نوسانگرها می‌شود که بسامد آن با بسامد دیگر نوسانگرها برابر باشد. از طرفی بسامد یک آونگ به جرم آونگ بستگی ندارد و بسامد به طول آونگ بستگی دارد. $(f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}})$ و هرگاه طول دو آونگ برابر باشد، بسامد طبیعی آن‌ها با هم برابر است و می‌توانند سبب تشدید یکدیگر شوند. بنابراین شما باید ببینید طول کدام آونگ‌ها با آونگ ۳ برابر است. طول آونگ (۱)، (۳) و (۷) با هم برابر است. $(\ell_۱=\ell_۳=\ell_۷)$ بنابراین اگر (۳) را به نوسان درآوریم آونگ (۱) و (۷) نوسان آونگ (۳) را تشدید می‌کنند.

نمای ۱۳

۱۶ B ۱۸۰۹ ۲

۱ فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی یعنی یک طول موج بنابراین $\lambda=۸cm$ است.

۲ فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاور نصف طول موج است از این‌رو:

$$\frac{\lambda'}{۲}=۸\Rightarrow\lambda'=۱۶cm$$

۳ نسبت تندی انتشار موج در دو سیم خواهد شد:

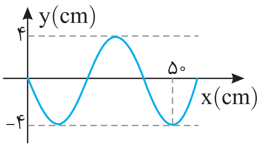
$$\frac{v'}{v}=\frac{f'\lambda'}{f\lambda}\xrightarrow{f'=۲f}\frac{v'}{v}=۲\times\frac{۱۶}{۸}\Rightarrow\frac{v'}{v}=۴$$

۴ نیروی کشش F' را برحسب F به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow۴=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow\frac{F'}{F}=۱۶$$

نمای ۱۹

۱۷ B ۱۸۰۹ ۲



۱ با توجه به نمودار دامنه $A=۴cm$ است و طول موج برابر است با:

$$\frac{۵\lambda}{۴}=۵۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm$$

۲ نسبت بیشینه سرعت نوسان ذرات $(v_m=A\omega)$ به سرعت انتشار موج $v=f\lambda$ خواهد شد:

$$\frac{v_m}{v}=\frac{A\omega}{f\lambda}\xrightarrow{\omega=۲\pi f}\frac{v_m}{v}=\frac{A(۲\pi f)}{f\lambda}\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{۲\pi A}{\lambda}\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{۲\pi\times۴}{۴۰}$$

$$\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{\pi}{۵}$$

نمای ۱۹

۱۸ A ۱۸۰۹ ۱

از شکل معادلهٔ $\vec{B}=B_m\cos(\pi\times۱۰^۷t)\vec{j}$ ترس به دلتان راه ندهید. در واقع میدان مغناطیسی بردار است و با این نحوهٔ نمایش، مشخص می‌شود که میدان مغناطیسی در راستای محور yهاست.

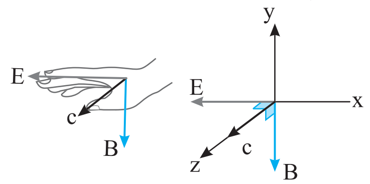
۱ در لحظهٔ $t=۷۵ns$، میدان مغناطیسی B را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{B}=B_m\cos(\pi\times۱۰^{-۷}t)\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m\cos(\pi\times۱۰^۷\times۷۵\times۱۰^{-۹})\vec{j}$$

$$\vec{B}=B_m\cos(۰/۷۵\pi)\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m\cos(\frac{۳\pi}{۴})\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{B}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}B_m\vec{j}$$

۲ در این لحظه میدان مغناطیسی موج در جهت منفی محور yها و جهت انتشار موج در جهت مثبت محور zها است.



به کمک قاعدهٔ دست راست برای امواج الکترومغناطیسی کف دست خود را به سمت yهای منفی به گونه‌ای قرار دهید که انگشت باز شست دست راست شما در جهت مثبت محور zها باشد، در این حالت چهار انگشت باز دست راست شما در خلاف جهت محور xها خواهد بود. یعنی میدان الکتریکی در جهت منفی محور xهاست.

۳ بسامد موج را به‌دست می‌آوریم $\omega=۲\pi f\Rightarrow\pi\times۱۰^۷=۲\pi f\Rightarrow f=۵\times۱۰^۶Hz$

۴ طول موج را حساب می‌کنیم.

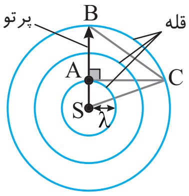
$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=c=۳\times۱۰^۸m/s}\lambda=\frac{۳\times۱۰^۸}{۵\times۱۰^۶}\Rightarrow\lambda=۶۰m$$

طول موج نور مرئی بین ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm است. بنابراین این موج الکترومغناطیسی نور مرئی نبوده و موج رادیویی است و گزینهٔ (۱) درست است.

نمای ۱۳

C ۱۸۰۹ ۲

۱۹ [۱] نقطهٔ S را به نقطهٔ C وصل کنید. اکنون یک مثلث (ASC) در اختیار دارید که در آن طول ضلع SC برابر ۳λ و طول ضلع SA برابر λ است. به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول AC را حساب می‌کنیم.



$$AS^۲+AC^۲=SC^۲\Rightarrow\lambda^۲+AC^۲=(۳\lambda)^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲=۸\lambda^۲\Rightarrow AC=۲\sqrt{۲}\lambda$$

[۲] نقطهٔ B را به C وصل می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$AB^۲+AC^۲=BC^۲\xrightarrow{AB=۲\lambda}(۲\lambda)^۲+(۲\sqrt{۲}\lambda)^۲=۱۸^۲$$

$$\Rightarrow ۴\lambda^۲+۸\lambda^۲=۱۸^۲\Rightarrow ۱۲\lambda^۲=۱۸^۲\Rightarrow\lambda^۲=۲۷\Rightarrow\lambda=۳\sqrt{۳}cm$$

نمای ۲۰

B ۱۸۰۹ ۳

۲۰ **نکته** اختلاف تراز شدت صوت با شدت‌های $I_۱$ و $I_۲$ از رابطهٔ $\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$ به‌دست می‌آید. شدت صوت $I_۲=۲\sqrt{۱۰}I_۱$ است. بنابراین

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log ۲\sqrt{۱۰}$$

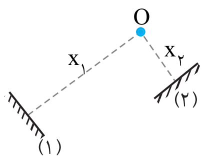
$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰(\log ۲+\log\sqrt{۱۰})=۱۰(۰/۳+۰/۵)\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۸dB$$

تراز شدت صوت ۸ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

نمای ۲۷

B ۱۸۰۹ ۲

۲۱ برای آنکه گوش بتواند صدای دو پژواک را از هم تشخیص دهد باید اختلاف زمانی رسیدن دو پژواک به گوش ۰/۱s باشد. زمان رفت و برگشت پژواک شماره (۱) برابر است با: $۲x_۱=vt_۱\Rightarrow t_۱=\frac{۲x_۱}{v}$



زمان رفت و برگشت پژواک شمارهٔ (۲) خواهد شد: $۲x_۲=vt_۲\Rightarrow t_۲=\frac{۲x_۲}{v}$

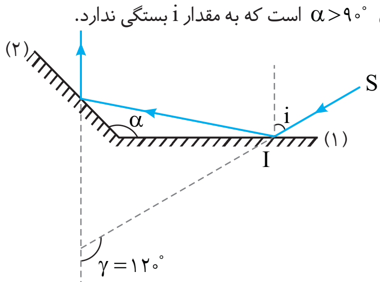
اختلاف این دو زمان باید ۰/۱s باشد.

$$t_۱-t_۲=\frac{۲x_۱}{v}-\frac{۲x_۲}{v}\Rightarrow ۰/۱=\frac{۲(x_۱-x_۲)}{۳۲۰}\Rightarrow x_۱-x_۲=۱۶m$$

باید اختلاف $x_۱$ و $x_۲$، ۱۶m باشد که تنها در گزینهٔ (۲) چنین است. نمای ۳۲

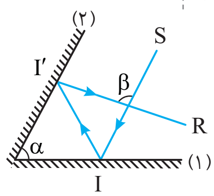
B ۱۸۰۹ ۴

۲۲ **نکته** در این‌گونه بازتاب از سطح آینه‌های متقاطع (پیداکردن زاویهٔ بین پرتو تابش به آینهٔ (۱) و بازتاب از آینهٔ (۲)) زاویهٔ انحراف پرتو برابر ۲α برای $\alpha<۹۰^\circ$ و $۳۶۰-۲\alpha$ برای $\alpha>۹۰^\circ$ است که به مقدار i بستگی ندارد.



نمای ۳۴

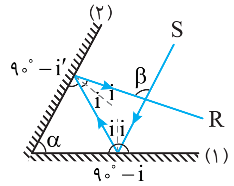
بازی با سوال مطابق شکل روبه‌رو پرتو SI پس از بازتابش از آینه‌های تخت در مسیر I'R بازتاب می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ β چند برابر زاویهٔ α است؟ ریاضی – ۹۲



۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) بستگی به زاویهٔ تابش آینهٔ (۱) دارد.

پاسخ β زاویهٔ خارجی است:

$$\beta=۲i+۲i'=۲(i+i')\quad(۱)$$



از طرفی داریم:

$$\alpha+۹۰-i'+۹۰-i=۱۸۰\Rightarrow\alpha=i'+i\quad(۲)$$

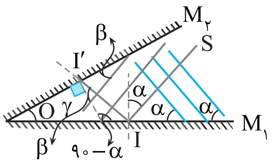
با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\beta=۲\alpha$$

گزینهٔ ۲

B ۱۸۰۹ ۴

۲۳ **یادآوری** زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح می‌سازند برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است.



[۱] زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ $M_۱$ برابر α است. از این‌رو زاویه‌ای که پرتو بازتاب $I'I$ با آینهٔ $M_۱$ می‌سازد برابر $۹۰-\alpha$ است.

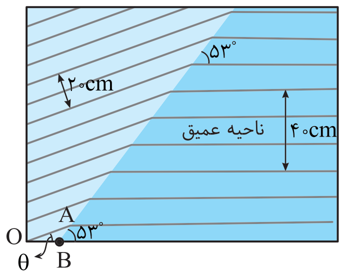
[۲] زاویهٔ جبهه‌های موج با سطح آینهٔ $M_۲$ حاده و برابر β است. یعنی پرتو II' با خط عمود زاویهٔ β می‌سازد، بنابراین در مثلث OII' برای زوایای آن می‌توانیم بنویسیم

$$\gamma+۹۰-\alpha+۹۰+\beta=۱۸۰\Rightarrow\alpha-\beta=\gamma$$

نمای ۳۴

C ۱۸۰۹ ۲

۲۴ **یادآوری** فاصلهٔ دو جبههٔ موج متوالی برابر یک طول موج (λ) است.



[۱] طول موج در ناحیهٔ عمیق برابر است با:

$$۳\lambda_۱=۴۰\Rightarrow\lambda_۱=\frac{۴۰}{۳}cm$$

[۲] طول موج در ناحیهٔ کم‌عمق‌تر:

$$۲\lambda_۲=۲۰\Rightarrow\lambda_۲=۱۰cm$$

[۳] زاویه‌ای که جبههٔ موج با مرز دو محیط می‌سازد برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. بنابراین زاویهٔ تابش $\theta_۱=۵۳^\circ$ است.

[۴] بسامد موج از یک محیط به محیط دیگر ثابت است. در این صورت طول موج با تندی انتشار موج در محیط نسبت مستقیم دارد.

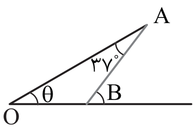
$$\begin{cases}v_۱=f\lambda_۱\\ v_۲=f\lambda_۲\end{cases}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۱۰}{\frac{۴۰}{۳}}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۳}{۴}$$

[۵] با توجه به قانون شکست عمومی می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}\Rightarrow\frac{\sin\theta_۲}{\sin ۵۳}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{\sin\theta_۲}{۰/۸}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\sin\theta_۲=۰/۶\Rightarrow\theta_۲=۳۷^\circ$$

[۶] بنابراین زاویهٔ بین جبههٔ موج شکست و مرز محیط ۳۷° است.

[۷] در مثلث OAB زاویهٔ ۵۳° زاویهٔ خارجی مثلث است و برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن است.

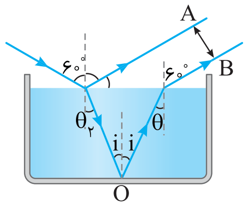


$$\theta+\theta_۲=۵۳\Rightarrow\theta+۳۷=۵۳\Rightarrow\theta=۱۶^\circ$$

نمای ۳۹

C ۱۸۰۹ ۳ ۲۵

۱ به کمک قانون اسنل زاویهٔ شکست را به‌دست می‌آوریم.

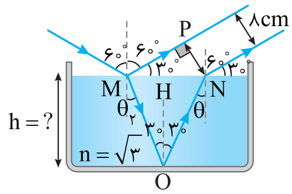


$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$
$$\Rightarrow 1\times \sin ۶۰ = \sqrt{۳}\sin\theta_2$$
$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}\sin\theta_2$$
$$\Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta_2 = ۳۰^\circ$$

۲ با توجه به خاصیت موازی - مورب زاویهٔ تابش بر سطح آینه $i = ۳۰^\circ$ و بازتاب آن نیز ۳۰° خواهد بود.

۳ زاویهٔ تابش بر مرز دو محیط (θ) نیز بنا به خاصیت موازی - مورب برابر ۳۰° می‌شود. بنابراین پرتو با زاویهٔ ۶۰° وارد هوا می‌شود.

۴ دوباره شکل را برای شما رسم می‌کنیم و تمام زوایا را روی آن می‌نویسیم.



۵ مثلث MPN قائم‌الزاویه است و ضلع PN برابر ۸cm است. بنابراین طول وتر آن یعنی MN خواهد شد:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{PN}{MN} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۸}{MN} \Rightarrow MN = ۱۶\,cm$$

۶ در مثلث MHO طول MH برابر است با:

$$MH = \frac{MN}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸cm$$

۷ ضخامت تیغه خواهد شد:

$$\triangle OMH: \tan ۳۰ = \frac{MH}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۸}{h} \Rightarrow h = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} \Rightarrow h = ۸\sqrt{۳}cm$$

نمای ۳۹

فصل چهارم

آشنایی با فیزیک اتمی و هسته‌ای

پنجره ۱

A ۱۸۱۰ ۲

به قوانین مکانیک نیوتون، نظریهٔ الکترومغناطیسی ماکسول و قوانین ترمودینامیک فیزیک کلاسیک گویند. فیزیک کلاسیک قادر به توجیه پدیده‌هایی مانند تابش گرمایی اجسام، پدیدهٔ فوتوالکتریک، ساختمان اتم، طیف اتمی، ساختار هسته و لیزر و ... نیست، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۸۱۱ ۱

آزمایش نشان می‌دهد هنگامی که نور بر سطح فلز می‌تابد رخ دادن پدیده فوتوالکتریک:

۱ به شدت نور فرودی بر فلز بستگی ندارد.

۲ به بسامد نور فرودی بر فلز بستگی دارد و هر گاه بسامد از حدی که به آن بسامد آستانه می‌گویند کوچکتر باشد، اثر فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

A ۱۸۱۲ ۴

یادآوری بنا به نظریهٔ فیزیک کلاسیک، موج الکترومغناطیسی از یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی تشکیل شده است.

از دیدگاه فیزیک کلاسیک، میدان الکتریکی بر الکترون سطح فلز نیروی الکتریکی $(F=qE \Rightarrow F=eE)$ وارد می‌کند و چنانچه این نیرو به اندازهٔ کافی قوی باشد، الکترون از سطح فلز جدا می‌شود. اگر موج فرودی بر فلز نتواند الکترون را جدا کند، می‌توان بدون تغییر بسامد نور تنها با افزایش شدت نور سبب افزایش میدان الکتریکی تابش فرودی شده تا الکترون از سطح فلز جدا شود. در واقع فیزیک کلاسیک پیش‌بینی می‌کند که رخ دادن پدیدهٔ فوتوالکتریک را می‌توان با هر بسامدی انجام داد و تنها باید شدت نور مناسب انتخاب شود، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۸۱۳ ۴

یادآوری انرژی امواج الکترومغناطیسی بنا بر نظر اینشتین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E=\underbrace{n}_{\text{تعداد فوتون‌ها}}\,\underbrace{hf}_{\text{انرژی فوتون}}$$

با افزایش شدت نور، تعداد فوتون‌ها (n) که در یکای زمان بر کلاهک الکتروسکوپ می‌تابد بیشتر می‌شود. بنابراین تعداد فوتوالکترون‌ها در یکای زمان یعنی آهنگ خروج الکترون‌ها از سطح کلاهک افزایش یابد، یعنی کاهش انحراف ورقه‌ها بیشتر و در زمان کوتاه‌تری رخ می‌دهد.

A ۱۸۱۴ ۲

از دیدگاه تئوری یعنی بدون نگاه به واقعیت آزمایشگاهی می‌توان گفت که ابتدا الکتروسکوپ الکترون‌های اضافی‌اش را از دست می‌دهد و انحراف ورقه‌ها کاهش می‌یابد و ورقه‌ها بسته می‌شوند. اما چون همچنان بر کلاهک الکتروسکوپ به مدت طولانی نور تابیده می‌شود باید الکترون‌های بیشتری از الکتروسکوپ جدا شده و ورقه‌ها دارای بار مثبت شوند و یکدیگر را دفع کرده و انحراف ورقه‌ها بیشتر شود و گزینهٔ (۴) درست است. اما واقعیت آزمایشگاهی چیز دیگری است و با تاباندن نور فرابنفش به یک الکتروسکوپ بدون بار تا امروز کسی نتوانسته است باعث باردار شدن الکتروسکوپ شود به گونه‌ای که ورقه‌ها از هم فاصله بگیرند. بنابراین از نظر آزمایشگاهی گزینهٔ (۲) پاسخ درست است.

A ۱۸۱۵ ۳

نکته یکی از نتیجه‌های نظریه الکترومغناطیسی ماکسول این است که شدت نور با مربع دامنه میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی متناسب است. $(I \propto E^۲)$

اگر دامنهٔ میدان الکتریکی n برابر شود آن‌گاه شدت نور $n^۲$ برابر می‌شود.

B ۱۸۱۶ ۲

۱ هر فوتون یک الکترون را جدا می‌کند، بنابراین بار الکتریکی که با ۲×۱۰^{۱۴} فوتون از الکتروسکوپ جدا می‌شود خواهد شد:

$$Q=ne \Rightarrow Q=۲\times۱۰^{۱۴}\times(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) \Rightarrow Q=-۳/۲\times۱۰^{-۵}C$$

$$Q=-۳۲\times۱۰^{-۶}C=-۳۲\mu C$$

۲ بنابر $-۳۲\mu C$ بار از الکتروسکوپ جدا شده و مقدار بار باقی‌مانده در الکتروسکوپ برابر است با: $-۳۸\mu C-(-۳۲\mu C)=-۶\mu C$

A ۱۸۱۷ ۳

انرژی فوتون $E=hf$ است که با بسامد نسبت مستقیم دارد.

A ۱۸۱۸ ۲

در طیف نور مرئی (بنفش، آبی، سبز، زرد، نارنجی، قرمز) به ترتیب از بنفش به قرمز، بسامد کاهش می‌یابد، بنابراین انرژی فوتون (hf) کاهش می‌یابد، از این‌رو بسامد نور نارنجی از بقیه گزینه‌ها کمتر بوده و انرژی فوتون‌های نارنجی از بقیه کمتر است.

B ۱۸۱۹ ۳

یادآوری هر الکترون ولت برابر $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J$ است $(۱eV=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J)$.

به کمک یک تناسب ساده مسئله قابل حل است.

$$\begin{array}{c|c} ۱eV.s & ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J.s \\ \hline ? & ۶/۶\times۱۰^{-۳۴}J.s \end{array} \Rightarrow ?=\frac{۶/۶\times۱۰^{-۳۴}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=\frac{۳۳}{۸}\times۱۰^{-۱۵}eV.s$$

A ۱۸۲۰ ۳

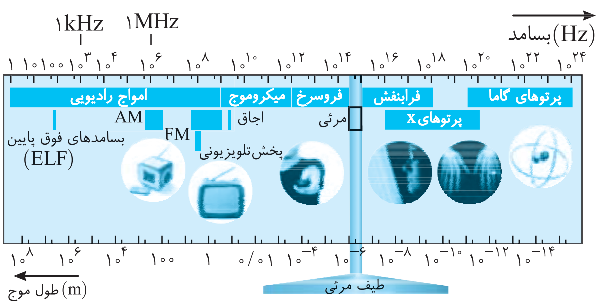
کافی است در رابطهٔ انرژی فوتون، داده‌های مسئله $\lambda=۰/۵\times۱۰^{-۶}m$ و $h=۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s$ و تندی انتشار نور $c=۳\times۱۰^{۸}m/s$ را قرار داد و انرژی فوتون را حساب کرد.

$$E=h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow E=۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۰/۵\times۱۰^{-۶}} \Rightarrow E=۲/۴۸۴eV$$

B ۱۸۲۱ ۱

منظور از انرژی هر کوانتوم یک موج الکترومغناطیسی همان فوتون است.

خط فکری ابتدا انرژی فوتون را برحسب یکای ژول حساب کنید. سپس به کمک رابطهٔ انرژی فوتون طول موج را حساب کنید. اگر طول موج بین $۴۰۰nm$ تا $۷۰۰nm$ باشد، موج الکترومغناطیسی نور مرئی است. اگر از $۷۰۰nm$ بیشتر باشد در محدودهٔ فروسرخ است البته اگر طول موج به محدودهٔ متر برسد با موج رادیویی سروکار داریم و اگر طول موج از $۴۰۰nm$ کمتر باشد به محدودهٔ فرابنفش وارد می‌شوید.



۱ انرژی فوتون برحسب ژول خواهد شد:

$$\begin{array}{c|c} ۱eV & ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J \\ \hline ۴\times۱۰^{-۷}eV & E=? \end{array} \Rightarrow E=۶/۴\times۱۰^{-۲۶}J$$

۲ طول موج خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{hc}{E} \Rightarrow \lambda=\frac{۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}{۶/۴\times۱۰^{-۲۶}} \simeq ۳/۱۰m$$

۳ طول موج در محدودهٔ متر بوده یعنی موج الکترومغناطیسی، رادیویی است.

میانبر در کتاب درسی حاصل‌ضرب hc به‌طور تقریبی برابر ۱۲۴۰eV.nm بیان شده بنابراین حل مسئله بسیار ساده‌تر است.

طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow 4\times10^{-7}=\frac{1240}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1240}{4\times10^{-7}}=310\times10^{7}nm$$

$\lambda=310\times10^{7}\times10^{-9}=3/1m\Rightarrow$ رادیویی

دقت کنید در این صورت تمام اعداد داده شده در پرانتز روبه‌روی سؤال به هیچ دردی نمی‌خورد.

A ۱۸۲۲ ۴

رابطه انرژی فوتون را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{E_X}{E}=\frac{\frac{hc}{\lambda_X}}{\frac{hc}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda_X}\Rightarrow\frac{E_X}{E}=\frac{\lambda}{\lambda_X}$$

$$\xrightarrow{\lambda_X=20\times10^{-9}m,\ \lambda=0/4\times10^{-6}m}\frac{E_X}{E}=\frac{0/4\times10^{-6}}{20\times10^{-9}}=\frac{4\times10^{-7}}{2\times10^{-8}}=20$$

A ۱۸۲۳ ۳

نکته هر گاه یک موج از یک محیط وارد محیط شفاف دیگری شود، بسامدش ثابت می‌ماند اما طول موج و تندی انتشار موج تغییر می‌کند.

انرژی فوتون به بسامد نور $(E=hf)$ بستگی دارد، بنابراین هر گاه فوتون از خلأ وارد هر محیط دیگری شود چون بسامد ثابت می‌ماند، انرژی فوتون تغییر نمی‌کند.

A ۱۸۲۴ ۱

نکته انرژی فوتون در گذر از یک محیط شفاف و ورود به محیط شفاف دیگر تغییر نمی‌کند، کافی است انرژی فوتون را در هوا به‌دست بیاوریم.

$$E=h\frac{c}{\lambda}\xrightarrow{h=6/6\times10^{-34}J,\ \lambda=0/33\times10^{-6}m,\ c=3\times10^{8}m/s}$$

$$E=6/6\times10^{-34}\times\frac{3\times10^{8}}{0/33\times10^{-6}}\Rightarrow E=6\times10^{-19}J$$

A ۱۸۲۵ ۴

انرژی پرتوهای موج الکترومغناطیسی از رابطهٔ $E=nh\frac{c}{\lambda}$ به‌دست می‌آید که در آن n تعداد فوتون‌های موج الکترومغناطیسی است از این‌رو خواهیم داشت:

$$E=n\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow[E=120J,\ h=6/6\times10^{-34}J.s]{c=3\times10^{8}m/s,\ \lambda=0/66\times10^{-6}m}$$

$$120=n\times6/6\times10^{-34}\times\frac{3\times10^{8}}{6/6\times10^{-7}}\Rightarrow n=40\times10^{19}\Rightarrow n=4\times10^{20}$$

A ۱۸۲۶ ۳

۱ انرژی گسیل شده در مدت ۱۶ ثانیه از لامپ ۱۰۰ واتی را حساب می‌کنیم.

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=Pt\Rightarrow E=100\times16\Rightarrow E=1600J$$

۲ انرژی را برحسب الکترون ولت حساب می‌کنیم: $E=\frac{1600}{1/6\times10^{-19}}eV$

۳ تعداد فوتون های گسیل شده نور زرد خواهد شد:

$$E=nhf\xrightarrow{hf=2eV}\frac{1600}{1/6\times10^{-19}}=n\times2\Rightarrow n=5\times10^{21}$$

A ۱۸۲۷ ۱

توان برابر است با:

$$P=\frac{E}{t}\xrightarrow{E=nhf}Pt=nhf$$

$$\Rightarrow4/8\times10^{4}\times1=n(4\times10^{-15}\times1/6\times10^{-19})\times75\times10^{6}\Rightarrow n=10^{30}$$

B ۱۸۲۸ ۲

۱ انرژی مصرفی لامپ ۱۲۰W در هر دقیقه برابر است با:

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=Pt\Rightarrow E=120\times60\Rightarrow E=7200J$$

۲ ۵ درصد این انرژی به نور تبدیل می‌شود. انرژی نور گسیلی از لامپ را حساب می‌کنیم.

$$Ra=\frac{E_2}{E_1}\times100\Rightarrow5=\frac{E_2}{7200}\times100\Rightarrow E_2=360J$$

۳ انرژی را برحسب الکترون ولت حساب می‌کنیم.

1eV	$1/6\times10^{-19}J$
E	360J

$$\Rightarrow E=\frac{360}{1/6\times10^{-19}}\Rightarrow E=225\times10^{19}eV$$

۴ تعداد فوتون‌های گسیلی را به‌دست می‌آوریم

$$E=nh\frac{c}{\lambda}\Rightarrow225\times10^{19}=n\times\frac{1240}{496}\Rightarrow n=90\times10^{19}\Rightarrow n=9\times10^{20}$$ فوتون

B ۱۸۲۹ ۳

تعداد فوتون گسیلی — انرژی هر فوتون

خط فکری انرژی گسیلی از یک لامپ برابر $E=nhf$ است. توان یک لامپ برابر آهنگ انرژی گسیلی از آن یعنی $P=\frac{E}{t}$ است.

۱ توان لامپ نور بنفش: $P_1=\frac{E_1}{t_1}\Rightarrow P_1=\frac{n_1hf_1}{t_1}$

۲ توان لامپ نور زرد: $P_2=\frac{E_2}{t_2}\Rightarrow P_2=\frac{n_2hf_2}{t_2}$

۳ توان هر دو لامپ یکسان و برابر ۲۰۰W است پس $P_1=P_2$:

$$\frac{n_1hf_1}{t_1}=\frac{n_2hf_2}{t_2}\xrightarrow{t_1=t_2=1s}n_1f_1=n_2f_2\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}\frac{n_1c}{\lambda_1}=\frac{n_2c}{\lambda_2}$$

$$\xrightarrow[\lambda_2=600nm]{\lambda_1=400nm}\frac{n_1}{400}=\frac{n_2}{600}\Rightarrow\frac{n_2}{n_1}=\frac{600}{400}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

B ۱۸۳۰ ۲

خط فکری با توجه به صورت مسئله شما باید یک دستگاه دو معادله دو مجهول به‌دست بیاورید و با حل آن طول موج پرتوها را بیابید.

۱ بنا بر فرض مسئله انرژی فوتون B سه برابر انرژی فوتون A است.

$$E_B=3E_A\xrightarrow{E=\frac{hc}{\lambda}}\frac{hc}{\lambda_B}=3\frac{hc}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=3\lambda_B\quad(I)$$

۲ بنابر این طول موج A از طول موج B بزرگتر است و وقتی اختلاف طول موجها ۴nm است، یعنی: $\lambda_A-\lambda_B=4nm\quad(II)$

۳ اکنون دو معادله و دو مجهول در اختیار دارید. از معادلهٔ (I) در معادلهٔ (II) جایگذاری می‌کنیم. $3\lambda_B-\lambda_B=4nm\Rightarrow\lambda_B=2nm\Rightarrow\lambda_A=3\times2=6nm$

B ۱۸۳۱ ۴

۱ انرژی فوتون از رابطهٔ $E=hf$ به‌دست می‌آید که در آن f بسامد فوتون و h ثابت پلانک است. با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$E_A=2/5E_B\Rightarrow hf_A=2/5hf_B\Rightarrow f_A=2/5f_B\quad(I)$$

۲ با توجه به فرض مسئله اختلاف بسامد فوتون‌های A و B برابر $9\times10^{14}Hz$ است. از طرفی $f_A>f_B$ است، بنابراین باید بنویسیم:

$$f_A-f_B=9\times10^{14}Hz\xrightarrow{(I)}2/5f_B-f_B=9\times10^{14}$$

$$\Rightarrow1/5f_B=9\times10^{14}\Rightarrow f_B=6\times10^{14}Hz\xrightarrow{f_A=2/5f_B}$$

$$f_A=2/5\times6\times10^{14}\Rightarrow f_A=15\times10^{14}Hz$$

۳ طول موج فوتون A خواهد شد:

$$\lambda_A=\frac{c}{f_A}\Rightarrow\lambda_A=\frac{3\times10^{8}}{15\times10^{14}}\Rightarrow\lambda_A=2\times10^{-7}m\Rightarrow\lambda_A=0/2\mu m$$

B ۱۸۳۲ ۱

خط فکری طول موج هر فوتون را از رابطهٔ $E=h\frac{c}{\lambda}$ برحسب hc پیدا کنید، سپس آن‌ها را باهم جمع کرده، انرژی فوتون جدید را به‌دست آورید.

طول موج هر فوتون خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{E_A=۴eV}۴=\frac{hc}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=\frac{hc}{۴}\\ \xrightarrow{E_B=۱۲eV}۱۲=\frac{hc}{\lambda_B}\Rightarrow\lambda_B=\frac{\lambda c}{۱۲}\end{cases}$$

دو طول موج را باهم جمع می‌کنیم:

$$\lambda=\lambda_A+\lambda_B=\frac{hc}{۴}+\frac{hc}{۱۲}\Rightarrow\lambda=\frac{۳hc+hc}{۱۲}\Rightarrow\lambda=\frac{hc}{۳}$$

انرژی فوتون با طول موج $\lambda=\lambda_A+\lambda_B$ را حساب می‌کنیم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow E=\frac{hc}{\frac{hc}{۳}}\Rightarrow E=۳eV$$

میانبر اگر انرژی فوتون‌ها با طول موج λ_A و λ_B به ترتیب E_A و E_B باشد. انرژی فوتون با طول موج $\lambda_A+\lambda_B$ برابر است با: $E=\frac{E_AE_B}{E_A+E_B}$

B ۱۸۳۳ ۲

۱ طول موج فوتون را برحسب E حساب می‌کنیم. $E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{hc}{E}$

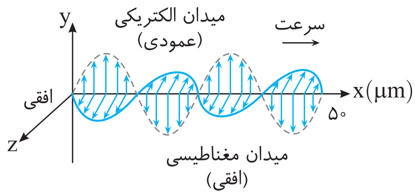
۲ در مسئله مسافت ۱۰ برابر طول موج بیان شده است. $\ell=۱۰\lambda=\frac{۱۰hc}{E}$

۳ زمان طی این مسیر خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow۱۰\frac{hc}{E}=ct\Rightarrow t=\frac{۱۰h}{E}$$

B ۱۸۳۴ ۴

۱ با توجه به نقش موج داده شده می‌توان به راحتی طول موج را به‌دست آورد:



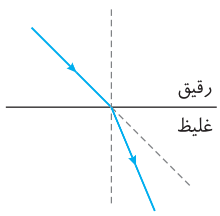
$$۲\lambda=۵۰\times۱۰^{-۶}m\Rightarrow\lambda=۲۵\times۱۰^{-۶}m$$

۲ انرژی هر فوتون برابر است با:

$$E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۵\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow E=۴/۸\times۱۰^{-۲}eV$$

B ۱۸۳۵ ۱

نکته هـر گاه پرتو نـور از محیط رقیق به محیط غلیظ وارد شـود، پرتو به خط عمود نزدیک می‌شود.



یادآوری ضریب شکسـت یک محیط شـفاف برای طول موج‌هـای کوتاه‌تر، بزرگ‌تر است و هنگام ورود پرتو با طول موج کوتاه‌تر، انحراف آن بیشتر است.

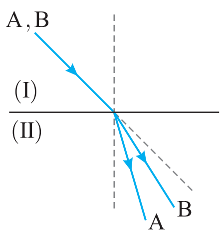
خط فکری ابتدا باید به کمک انرژی فوتون‌ها مشـخص کنید که طول موج کدام پرتو بیشتر است، تا بتوانید در مورد انحراف آن‌ها اظهارنظر کنید.

۱ انرژی فوتون A بیشتر از انرژی فوتون B است از این‌رو:

$$E_A>E_B\xrightarrow{E=\frac{hc}{\lambda}}\frac{hc}{\lambda_A}>\frac{hc}{\lambda_B}\Rightarrow\lambda_A<\lambda_B$$

۲ هنگام ورود پرتو بـه محیط (II) چون این محیط از محیط (I) غلیظ‌تر اسـت پرتوها به خط عمود نزدیک می‌شوند.

۳ طـول مـوج B از طـول مـوج A بزرگ‌تر اسـت، بنابراین هنگام ورود به محیط (II) پرتو A بیشتر منحرف شده و باید به خط عمود نزدیک‌تر باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



B ۱۸۳۶ ۱

۱ شـدت تابش خورشید برابر اسـت با انرژی که در هر ثانیه به هر مترمربع از زمین می‌رسد، بنابراین انرژی فرودی بر هر متر مربع زمین در هر ثانیه خواهد شد:

$$E=۳۰۰\times۱\times۱=۳۰۰J$$

$$c=۳\times۱۰^{۸}m/s,\lambda=۶۰۰\times۱۰^{-۹}m,h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s$$

۲ انرژی را برحسب الکترون ولت (eV) به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{c|c}۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J & ۱eV\\ \hline ۳۰۰J & E=?\end{array}\Rightarrow E=\frac{۳۰۰}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=\frac{۳}{۱۶}\times۱۰^{۲۲}eV$$

۳ تعداد فوتون را حساب می‌کنیم.

$$E=n\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow[c=۳\times۱۰^{۸}m/s]{\lambda=۶۰۰\times۱۰^{-۹}m,h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s}\frac{۳}{۱۶}\times۱۰^{۲۲}=n\times\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{۶۰۰\times۱۰^{-۹}}$$

$$n=\frac{۶\times۱۰^{۲۲}}{۴\times۱۶}\Rightarrow n=\frac{۳}{۳۲}\times۱۰^{۲۲}\Rightarrow n=۹/۳۷۵\times۱۰^{۲۰}$$

B ۱۸۳۷ ۴

خط فکری این نوع مسـائل شبیه مسـائل شدت صوت هسـتند که در آن‌ها یک چشـمهٔ نقطه‌ای، صوت با توان P در محیط صوت منتشر می‌کرد و در فاصلهٔ r از چشمهٔ یک میکروفون به مسـاحت A قرار داشـت و از شـما خواسته می‌شـد مقدار انرژی‌ای که از سطح میکروفون می‌گذرد را در مدت معین t حساب کنید.

شـما ابتدا شـدت صوت در محل را از رابطهٔ $I=\frac{P}{A}$ به‌دست می‌آوردید و سپس انرژی گذرنـده از سـطح میکروفون $E=IA_{\text{میکروفون}}t$ را حسـاب می‌کردید. اکنـون نیز باید همین کار را انجام بدهید.

۱ توان گسیلی از لامپ را حساب می‌کنیم.

$$Ra=\frac{P_۲}{P_۱}\times۱۰۰\Rightarrow۸۰=\frac{P_۲}{۵۰}\times۱۰۰\Rightarrow P_۲=۴۰W$$

۲ شدت نور در فاصلهٔ $r=۳m$ از چشمه را به‌دست می‌آوریم.

$$I=\frac{P_۲}{A}\xrightarrow[\pi\sim۳]{A=۴\pi r^{۲}}I=\frac{۴۰}{۴\times۳\times(۲)^{۲}}\Rightarrow I=\frac{۵}{۶}W/m^{۲}$$

۳ انرژی که در هر دقیقه به صفحه به مساحت $۸۰۰cm^{۲}$ می‌رسد خواهد شد:

$$E=IA_{\text{صفحه}}t\Rightarrow E=\frac{۵}{۶}\times۸۰۰\times۶۰\Rightarrow E=۴\times۱۰^{۴}J$$

۴ انرژی را برحسب الکترون ولت (eV) حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c}۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J & ۱eV\\ \hline ۴\times۱۰^{۴}J & E\end{array}\Rightarrow E=\frac{۴\times۱۰^{۴}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}\Rightarrow E=۲/۵\times۱۰^{۲۳}eV$$

۵ تعداد فوتون‌های رسیده به صفحه خواهد شد:

$$E=n\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{hc=۱۲۰۰eVnm,\lambda=۴۲۰nm}$$

$$۲/۵\times۱۰^{۲۳}=n\frac{۱۲۰۰}{۴۲۰}\Rightarrow n=۸/۷۵\times۱۰^{۲۲}$$ فوتون

B ۱۸۳۸ ۲

۱ شدت نور را در فاصلهٔ ۱۰ متری چشمه به‌دست می‌آوریم.

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow{A=4\pi r^2}I=\frac{15}{4\pi\times10^2}\Rightarrow I=\frac{15}{400\pi}\,W/m^2$$

۲ مساحت مردمک را حساب می‌کنیم:

$$a_{\text{مردمک}}=\pi r^2\xrightarrow{r=\frac{2}{2}=1mm=10^{-3}m}a_{\text{مردمک}}=\pi\times10^{-6}m^2$$

۳ انرژی نور فرودی بر مردمک خواهد شد:

$$E=Ia_{\text{مردمک}}t\xrightarrow{t=1s}E=\frac{15}{400\pi}\times\pi\times10^{-6}\Rightarrow E=\frac{15}{4}\times10^{-8}J$$

۴ تعداد فوتون‌های رسیده به مردمک برابر است با:

$$E=n\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{h=6/6\times10^{-34}J.s\,,\,\lambda=660\times10^{-9}nm}$$

$$\frac{15}{4}\times10^{-8}=n\times6/6\times10^{-34}\times\frac{3\times10^8}{660\times10^{-9}}$$

$$n=\frac{125\times10^{-8}}{10^{-17}}\Rightarrow n=125\times10^9\Rightarrow n=1/25\times10^{11}\text{ فوتون}$$

روش دیگر:

ابتدا انرژی هر فوتون را به دست می‌آوریم:

$$E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow E=\frac{6/6\times10^{-34}\times3\times10^8}{660\times10^{-9}}\Rightarrow E=3\times10^{-19}J$$

تعداد فوتون‌ها با توان $15W$ برابر است با:

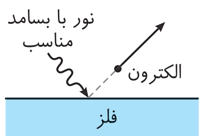
$$E_{\text{کل}}=Pt\xrightarrow{E_{\text{کل}}=nh\frac{c}{\lambda}}n\times3\times10^{-19}=15\times1\Rightarrow n=5\times10^{19}\text{ فوتون}$$

این تعداد فوتون از سطح کره‌ای به شعاع ۱۰ متر می‌گذرد پس تعداد فوتون‌های گذرنده از مردمک چشم خواهد شد:

مساحت کره $4\pi R^2$	5×10^{19}
مساحت مردمک πr^2	N

$$\Rightarrow\frac{4\pi\times10^2}{\pi\times(1\times10^{-3})^2}=\frac{5\times10^{19}}{N}\Rightarrow N=\frac{5}{4}\times10^{11}\Rightarrow N=1/25\times10^{11}\text{فوتون}$$

B ۱۸۳۹ ۱



جدا شدن الکترون از سطح فلز در اثر تابش الکترومغناطیسی فرودی بر فلز را پدیدهٔ فوتوالکتریک گویند و در شکل پرتو نور به سطح فلز برخورد کرده و سبب جدا شدن الکترون از فلز شده است پس پدیده مورد نظر پدیده فوتوالکتریک است.

A ۱۸۴۰ ۳

بسامد آستانه کمترین بسامدی است که می‌تواند الکترون‌های سطح یک فلز معین را از آن جدا کند. بسامد آستانه بستگی به جنس فلز دارد و به بسامد پرتوهای فرودی بر فلز بستگی ندارد.

بازی با سؤال **بیشینهٔ طول موج نور فرودی بر فلز که باعث جدا شدن الکترون از سطح آن می‌شود، به کدام عامل بستگی دارد؟**

۱) شدت نور ۲) ولتاژ اعمال شده ۳) جنس فلز ۴) جریان

پاسخ **کمترین مقدار انرژی برای جدا شدن الکترون از سطح فلز، به جنس فلز بستگی دارد، بنابراین بلندترین طول نور فرودی بر فلز که سبب جدا شدن این الکترون می‌شود به جنس فلز بستگی دارد.** گزینهٔ ۳

A ۱۸۴۱ ۲

بنا به نظریه اینشتین در اثر فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم‌کنش دارد.

اگر شدت نور را افزایش دهیم hf تغییر نمی‌کند بلکه تعداد فوتون‌ها (n) زیاد می‌شود، بنابراین افزایش شدت نور نقشی در انرژی جنبشی فوتوالکترون ندارد و گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست‌اند.

هرگاه نور بر سطح فلز بتابد و از آن فوتوالکترون جدا کند، بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون می‌شود و بقیهٔ آن به انرژی جنبشی فوتوالکترون تبدیل می‌شود. بنابراین هر چقدر که انرژی فوتون بیشتر باشد، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بیشتر است. از طرفی با توجه به رابطهٔ $E=\frac{hc}{\lambda}$ هر چه طول موج نور کوتاه‌تر باشد انرژی فوتون بیشتر بوده و سبب می‌گردد انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها افزایش یابد و گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۱۸۴۲ ۴

با نور بنفش پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ داده است. یعنی بسامد نور بنفش از بسامد آستانهٔ فلز (f_0) بیشتر بوده است.

در طیف نور مرئی بسامد نور بنفش از بسامد رنگ‌های دیگر بیشتر است و اگر به جای نور بنفش نور سبز یا زرد به کار ببریم ممکن است بسامد نور سبز یا نور زرد از بسامد آستانهٔ فلز کمتر شود و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ ندهد، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند.

نکته در اثر فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم‌کنش دارد.

اگر به جای یک لامپ بنفش چند لامپ بنفش به کار ببریم، شدت نور یعنی تعداد فوتون‌های نور $(E=nhf)$ افزایش می‌یابد و انرژی تک فوتون افزایش نمی‌یابد.

بنابراین انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها یعنی تندی فوتوالکترون‌ها $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

اگر از فلزی که بسامد آستانهٔ آن کمتر است استفاده کنیم، انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از این فلز کاهش می‌یابد، بنابراین از انرژی فوتون نور فرودی بر فلز، مقدار بیشتری به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود و تندی الکترون افزایش می‌یابد.

A ۱۸۴۳ ۲

همیشه یادمان باشد که افزایش شدت نور، انرژی فوتون‌های نور (hf) را افزایش نمی‌دهد. بلکه تنها تعداد فوتون‌های نور (n) را افزایش می‌دهد و در پدیدهٔ فوتوالکتریک اگر بسامد نور از بسامد آستانهٔ فلز کمتر باشد و پدیده رخ ندهد، هرگز با افزایش شدت نور نمی‌توان اثر فوتوالکتریک را مشاهده کرد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

اگر از فلزی که کمینه انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از آن کوچک‌تر باشد استفاده کنیم ممکن است انرژی فوتون‌های فرودی بتوانند الکترون‌ها را از فلز جدا کنند، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

زمان تابش نور تأثیری در اثر فوتوالکتریک ندارد یعنی اگر نور نتواند الکترون را از فلز جدا کند هر چه مدت تابش نور فرودی بر فلز را افزایش دهیم اتفاقی نخواهد افتاد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

با افزایش طول موج نور $(E=\frac{hc}{\lambda})$ انرژی فوتون‌ها کاهش می‌یابد و قطعاً نمی‌تواند الکترون را جدا کند بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **کدام گزینه درست است؟** از کتاب درسی

۱) با افزایش بسامد نور، قطعاً تعداد فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد.

۲) با تاباندن نور با بسامد مناسب بر سطح فلز، الکترون به طور آنی گسیل می‌شود.

۳) با افزایش شدت نور، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد.

۴) هر سه گزینه درست است.

پاسخ **هنگام تاباندن نور با بسامد مناسب $(f>f_0)$ در پدیدهٔ فوتوالکتریک الکترون به طور آنی از فلز جدا می‌شود و گزینهٔ (۲) درست است. افزایش بسامد نور بر تعداد فوتوالکترون‌ها تأثیری ندارد اما سبب افزایش انرژی جنبشی آن‌ها می‌شود، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست‌اند.** گزینهٔ ۲

B ۱۸۴۴ ۲

نکته در پدیدهٔ فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم‌کنش دارد.

۱ با افزایش شدت نور انرژی فوتون‌های نور (hf) تغییر نمی‌کند و تنها بر تعداد فوتون‌ها افزوده می‌شود: $(\uparrow E=\uparrow n\underbrace{hf}_{\text{ثابت}})$

۲ در پدیده فوتوالکتریک، بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون و بقیهٔ آن به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود و با ثابت ماندن انرژی فوتون، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ ثابت می‌ماند. در این صورت تندی فوتوالکترون‌های جدا شده ثابت می‌ماند.

۳ اما به دلیل افزایش تعداد فوتون‌ها، تعداد فوتوالکترون‌های جدا شده افزایش می‌یابد بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

بازی با سؤال **در یک اثر فوتوالکتریک، اگر شدت نور فرودی بر فلز را دو برابر کنیم، بیشینهٔ سرعت فوتوالکترون‌ها چند برابر می‌شود؟**

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) تغییر نمی‌کند. ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ **با دو برابر شدن شدت نور، انرژی فوتون‌های نور که سبب جدا شدن الکترون‌ها می‌شوند تغییر نمی‌کند. بنابراین انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ثابت می‌ماند و بیشینه تندی آن‌ها تغییر نمی‌کند.** گزینهٔ ۳

A ۱۸۴۵ ۴

بنابر نظریه اینشتین هر گاه بسامد نور فرودی بر فلز (f) برابر یا بیشتر از بسامد آستانه (f_0) برای فلز باشد، پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد.

اگر بسامد فوتون فرودی بر این فلز $f=f_0=10^{15}Hz$ باشد، اثر فوتوالکتریک رخ می‌دهد. اکنون کافی است انرژی این فوتون را حساب کنیم.

$$E=hf\xrightarrow{h=4\times10^{-15}eV.s}E=4\times10^{-15}\times10^{15}\Rightarrow E=4eV$$

A ۱۸۴۶ ۴

اگر انرژی فوتون تابیده به فلز برابر یا بیشتر از $8eV$ باشد، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد. کمینه انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از این فلز برابر $8eV$ است، بنابراین انرژی فوتونی که بتواند الکترون را از این فلز جدا کند باید برابر و یا بیشتر از $8eV$ باشد. از این‌رو می‌توانیم بنویسیم

$$hf\geq 8\xrightarrow{hc=1240eV.nm}h\frac{c}{\lambda}\geq 8\Rightarrow\frac{1240}{\lambda}\geq 8\Rightarrow\lambda\leq 155nm$$

هر سه طول موج $120nm$، $155nm$ و $142nm$ می‌تواند سبب پدیدهٔ فوتوالکتریک شود.

بازی با سؤال **بسامد آستانهٔ فلزی $1/5\times10^{15}Hz$ است، طول موج پرتویی که می‌تواند از سطح این فلز، الکترون جدا کند، چند نانومتر می‌تواند باشد؟ $(c=3\times10^8m/s)$**

۱) ۲۹۸ ۲) ۱۹۸ ۳) ۲۱۵ ۴) ۳۴۵

پاسخ **طول موج مربوط به بسامد آستانهٔ فلز را به دست می‌آوریم.**

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\times10^8}{1/5\times10^{15}}\Rightarrow\lambda=2\times10^{-7}\Rightarrow\lambda=200nm$$

طول موج پرتو فرودی بر فلز باید برابر یا کمتر از $200nm$ باشد تا بسامد آن برابر یا بیشتر از بسامد آستانهٔ فلز بوده و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ دهد. گزینهٔ ۲

A ۱۸۴۷ ۴

خط فکری باید انرژی فوتون فرودی بر فلز را به دست آورده و با حداقل انرژی لازم برای جدا کردن الکترون‌ها مقایسه کنیم. انرژی فوتون نور فرودی خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{h=4/14\times10^{-15}eV.s\,,\lambda=600\times10^{-9}m}$$

$$E=\frac{4/14\times10^{-15}\times3\times10^8}{600\times10^{-9}}\Rightarrow E=2/07eV$$

حداقل انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از سه فلز $2/26eV$، $4/24eV$ و $4/37eV$ است، بنابراین این فوتون نمی‌تواند از هیچ‌یک از این سه فلز الکترون جدا کند.

A ۱۸۴۸ ۱

در پدیدهٔ فوتوالکتریک اگر فوتون انرژی کافی داشته باشد، می‌تواند الکترون را از فلز جدا کند. در این صورت انرژی اضافی آن به انرژی جنبشی فوتوالکترون تبدیل می‌شود. بنابراین وقتی انرژی فوتون $6/4eV$ و انرژی لازم برای جدا کردن الکترون $2/7eV$ باشد، در این صورت انرژی جنبشی که الکترون به‌دست می‌آورد خواهد شد:

$$K=6/4-2/7=3/7eV$$

B ۱۸۴۹ ۲

خط فکری انرژی لازم برای جدا شدن الکترون برابر $1/2eV$ است و اگر فوتون با انرژی بیشتر از $1/2eV$ به سطح فلز بتابد، انرژی جنبشی فوتوالکترون افزایش می‌یابد. هرچه طول موج پرتو نور (λ) کمتر باشد، انرژی فوتون $\frac{hc}{\lambda}$ بزرگ‌تر شده و انرژی جنبشی فوتوالکترون بیشتر می‌شود.

شما باید کوتاه‌ترین طول موج را انتخاب کرده و انرژی فوتون آن را حساب کنید.

$$E=\frac{hc}{\lambda}$$

۱ در نور مرئی کمترین طول موج مربوط به نور بنفش $\lambda=0/4\mu m$ است و انرژی فوتون آن خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{h=4\times10^{-15}eV.s}E=\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^8}{0/4\times10^{-6}}\Rightarrow E=3eV$$

۲ انرژی لازم برای جدا کردن الکترون $1/2eV$ بوده است، بنابراین انرژی اضافی فوتون به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود که مقدار آن برابر است با:

$$K=3-1/2=1/8eV$$

بازی با سؤال **کمینهٔ انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از یک فلز $2eV$ است. اگر پرتویی با طول موج ۲۷۰ نانومتر بر آن بتابانیم، بیشینهٔ انرژی جنبشی این فوتوالکترون‌ها هنگام جدا شدن از فلز چند eV است؟** $(h=4/14\times10^{-15}eVs\,,c=3\times10^8m/s)$ تجربی - ۹۵ با تغییر

۱) $1/4$ ۲) $2/6$ ۳) $3/4$ ۴) $4/6$

پاسخ **انرژی فوتون‌های پرتو نور را به دست می‌آوریم:**

$$E=h\frac{c}{\lambda}=\frac{4/14\times10^{-15}\times3\times10^8}{270\times10^{-9}}\Rightarrow E=4/6eV$$

بنابه نظریهٔ اینشتین از این مقدار انرژی فوتون، $2eV$ صرف جدا شدن الکترون شده و بقیه به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود. $4/6-2=2/6eV$

گزینهٔ ۲

A ۱۸۵۰ ۲

قسمتی از انرژی که هر فوتون به الکترون می‌دهد، صرف جدا شدن الکترون از سطح فلز می‌شود و مابقی آن به فوتوالکترون انرژی جنبشی می‌دهد.

۱ انرژی فوتون را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{hc}{\lambda}=4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^8}{300\times10^{-9}}\Rightarrow E=4eV$$

۲ انرژی جنبشی فوتوالکترون هنگام جدا شدن $0/5eV$ است بنابراین انرژی که صرف جدا شدن الکترون شده است، برابر است با: $4-0/5=3/5eV$

۳ انرژی فوتونی که سبب گردد انرژی جنبشی این الکترون هنگام جدا شدن $1/5eV$ شود باید $3/5+1/5=5eV$ باشد، بنابراین طول موج این پرتو خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow 5=4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^8}{\lambda}\Rightarrow\lambda=2/4\times10^{-7}m\Rightarrow\lambda=240nm$$

بازی با سؤال **الکترونی به وسیلهٔ پرتوهایی با طول موج کمتر یا مساوی $320nm$ از سطح فلزی در پدیدهٔ فوتوالکتریک جدا می‌شود. به ازای کدام طول موج (بر حسب میکرومتر) که بر آن بتابد، انرژی جنبشی الکترون برابر $0/25$ الکترون ولت می‌شود؟** $(h=4\times10^{-15}eV.s\,,c=3\times10^8m/s)$ خارج تجربی - ۸۸

۱) $0/3$ ۲) $0/6$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ الکترون با پرتوهای با طول موج $320nm$ و کمتر از سطح فلز جدا می‌شود، بنابراین کمینه انرژی لازم برای جدا شدن الکترون از سطح این فلز برابر است با:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow E=\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{320\times10^{-9}}\Rightarrow E=3/75eV$$

اگر این الکترون هنگام جدا شدن دارای انرژی جنبشی $0/25eV$ باشد بنابر نظریهٔ اینشتین انرژی فوتون فرودی بر فلز برابر مجموع انرژی لازم برای جدا کردن الکترون و انرژی جنبشی الکترون یعنی $3/75+0/25=4eV$ خواهد بود، بنابراین طول موج فرودی بر فلز خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow 4=\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{\lambda}\Rightarrow\lambda=3\times10^{-7}m\Rightarrow\lambda=0/3\mu m$$

گزینهٔ ۱

A ۱۸۵۱ ۳

موج‌های الکترومغناطیسی از بسته‌های حاوی انرژی به نام فوتون تشکیل شده‌اند. موج‌های الکترومغناطیسی دارای میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی بوده بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند. از طرفی امواج الکترومغناطیسی بدون بار الکتریکی هستند و گزینهٔ (۳) درست است. سرعت همهٔ آن‌ها در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است و سرعت آن‌ها در خلأ به بسامد آن‌ها بستگی ندارد، بنابراین گزینهٔ (۲) نیز نادرست است.

A ۱۸۵۲ ۲

انرژی لازم برای جدا کردن الکترون‌ها از سطح یک فلز برای همهٔ الکترون‌ها یکسان نیست یعنی بعضی از الکترون‌ها سفت‌تر و بعضی از آن‌ها شُل‌تر به سطح فلز وصل هستند. انرژی یک فوتون مقدار مشخصی است. بنابراین الکترون‌های شُل‌تر که برای جدا شدن به حداقل انرژی نیاز دارند، هنگام جدا شدن انرژی جنبشی بیشتری از فوتون به آن‌ها می‌رسد و هر چه الکترون به سطح فلز سفت‌تر چسبیده باشد، انرژی جنبشی فوتوالکترون کمتر خواهد بود. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۸۵۳ ۳

یادآوری هر $1eV$ برابر $1/6\times10^{-19}$ ژول است.

۱ ابتدا انرژی را برحسب ژول به‌دست می‌آوریم:

$$1/8eV\times\frac{1/6\times10^{-19}J}{1eV}=1/8\times1/6\times10^{-19}J$$

۲ رابطهٔ بین انرژی جنبشی و تکانه به‌صورت $K=\frac{P^2}{2m}$ است:

$$K=\frac{P^2}{2m}\Rightarrow1/8\times1/6\times10^{-19}=\frac{P^2}{2\times9\times10^{-31}}\Rightarrow9\times36\times16\times10^{-52}=P^2$$

$$\Rightarrow P=3\times6\times4\times10^{-26}=7/2\times10^{-25}$$

B ۱۸۵۴ ۱

نکته ۱ هر گاه در اثر فوتوالکتریک با ثابت ماندن بسامد نور، شدت نور بر فلز را زیاد کنیم تعداد فوتون‌های نور افزایش می‌یابد و آهنگ خروج فوتوالکترون‌ها زیاد می‌شود. اما انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها تغییر نمی‌کند.

نکته ۲ هر گاه در اثر فوتوالکتریک، بسامد نور فرودی بر فلز افزایش یابد انرژی فوتون‌های نور افزایش یافته و انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها هنگام جدا شدن افزایش می‌یابد. با توجه به نکات بالا گزینهٔ (۱) درست است.

C ۱۸۵۵ ۱

هرگاه فوتونی با انرژی hf با الکترون سطح فلز برهم‌کنش کند، مقداری از انرژی صرف جدا شدن الکترون می‌شود و مابقی به الکترون انرژی جنبشی می‌دهد. اگر انرژی لازم برای جدا کردن الکترون را با E نشان دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(1)\ K=hf-E\\(2)\ K'=mhf-E\end{cases}\xrightarrow{K'=4K\ \text{فرض مسأله}}4K=mhf-E$$

حال با جای‌گذاری K از معادلهٔ (۱) در معادلهٔ (۲) داریم:

$$4hf-4E=mhf-E\Rightarrow4hf-3E=mhf$$

$$\Rightarrow m=\frac{4hf}{hf}-3\frac{E}{hf}\Rightarrow m=4-3\frac{E}{hf}$$

بنابراین از عدد ۴، مقدار $3\frac{E}{hf}$ کم می‌شود و m به‌دست می‌آید، یعنی $m<4$ است و جواب گزینهٔ (۱) می‌شود.

C ۱۸۵۶ ۳

نکته بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها به دو عامل بستگی دارد:

۱ انرژی فوتون‌های فرودی بر فلز

۲ جنس فلز

دو فلز متفاوت هستند و جنس آن‌ها یکی نیست یعنی بسامد آستانهٔ آن‌ها یکی نیست اما در دو آزمایش بیشینه انرژی جنبشی الکترون‌ها برابر شده است و این ممکن نیست مگر اینکه انرژی فوتون‌های فرودی بر دو فلز متفاوت باشد. $hf_A\neq hf_B\Rightarrow f_B\neq f_B$

یعنی بسامد نور تابیده شده به آن‌ها متفاوت است.

B ۱۸۵۷ ۳

هرگاه فوتونی با انرژی hf به الکترونی بر سطح فلز برسد و فوتوالکتریک رخ دهد، قسمتی از این انرژی صرف جدا شدن الکترون از سطح فلز می‌شود و مابقی به الکترون انرژی جنبشی می‌دهد. کمترین انرژی برای جدا کردن الکترون از سطح فلز زمانی است که بسامد نور تابیده شده برابر با بسامد آستانه باشد یعنی $f=f_0$، بنابراین انرژی این فوتون خواهد شد: $E=hf_0=4eV\Rightarrow4\times10^{-15}\times f_0=4\Rightarrow f_0=10^{15}Hz$

با تاباندن پرتویی با طول موج λ، سست‌ترین الکترون از فلز جدا شده است، که برای جدا شدن آن $4eV$ انرژی لازم است و انرژی جنبشی که الکترون به‌دست آورده $8eV$ است یعنی انرژی فوتون نور تابیده بر فلز بنابر نظریهٔ اینشتین برابر $8+4=12eV$ می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow12=\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{\lambda}\Rightarrow\lambda=10^{-7}m=100nm$$

A ۱۸۵۸ ۳

هر الکترون تنها با یک فوتون برهم‌کنش دارد. وقتی بنا به فرض مسئله تعداد فوتون‌های فرودی بر فلز در هر ثانیه ثابت مانده است، بنابراین تعداد فوتوالکترون‌ها نیز ثابت می‌ماند و همچنان برابر 10^{20} الکترون است.

B ۱۸۵۹ ۱

خط فکری ابتدا انرژی فوتون فرودی بر فلز را به‌دست بیاورید. سپس انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از سطح فلز را از آن کم کنید تا انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها هنگام جدا شدن از فلز به‌دست آید. با داشتن انرژی جنبشی تندی الکترون‌ها را حساب کنید.

۱ انرژی فوتون را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{h=4\times10^{-15}eV.s,\ \lambda=200\times10^{-9}m}$$

$$E=4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^{8}}{200\times10^{-9}}=6eV$$

۲ کمترین انرژی لازم برای جدا کردن الکترون $4/2eV$ بوده است از این‌رو انرژی جنبشی الکترون هنگام جدا شدن برابر است با:

$$K=6-4/2\Rightarrow K=1/8eV$$

۳ انرژی جنبشی را برحسب ژول می‌نویسیم:

$$K=1/8eV\times\frac{1/6\times10^{-19}J}{1eV}=2/88\times10^{-19}J$$

۴ تندی الکترون را حساب می‌کنیم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow2/88\times10^{-19}=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times v^2$$

$$\Rightarrow v^2=0/64\times10^{12}\Rightarrow v=8\times10^{5}m/s$$

B ۱۸۶۰ ۲

۱ شدت تابش چراغ $۱۰W/m^۲$ است یعنی به هر $۱m^۲$ میز در هر ثانیه $۱۰J$ انرژی داده می‌شود. سطح میز برابر $۱\times۲=۲m^۲$ است و زمان انتقال انرژی $۱h=۳۶۰۰s$ می‌باشد، بنابراین کل انرژی فرودی بر میز در مدت $۱h$ خواهد شد:

$E=IAt\Rightarrow E=۱۰\times۲\times۳۶۰۰=۷۲۰۰۰J=۷۲\times۱۰^۳J$

یادآوری هر گاه به جسمی به جرم m با گرمای ویژه c گرما بدهیم و دمای آن به اندازهٔ $\Delta\theta$ بالا برود گرمای داده شده به جسم برابر است با: $Q=mc\Delta\theta$

۲ بنابراین به میز ۷۲×۱۰^۳J انرژی می‌رسد و این انرژی صرف گرم کردن میز شده است: $Q=mc\Delta\theta\Rightarrow۷۲\times۱۰^۳=۵\times۹۰۰\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=۱۶^\circ C$

C ۱۸۶۱ ۲

۱ مقدار شدت تابشی که به سطح زمین می‌رسد ۲۵٪ شدت تابش خورشید در خارج جو است. $I'=\frac{۲۵}{۱۰۰}I\Rightarrow I'=\frac{۱}{۴}\times۱۳۶۰\Rightarrow I'=۳۴۰W/m^۲$

۲ مساحت سطح زمین چمن برابر $A=۱۱۰m\times۷۵m$ است.

۳ مقدار انرژیی که در مدت $۱۰h$ به چمن استادیوم می‌رسد را حساب می‌کنیم.

$I=\frac{E}{At}\Rightarrow E=IAt\Rightarrow E=۳۴۰\times۱۱۰\times۷۵\times۱۰\times۳۶۰۰J$

۴ تعداد فوتون‌هایی که به چمن می‌رسد را به‌دست می‌آوریم.

$E=n\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{h=۶/۶\times۱۰^{-۳۴}J.s,\lambda=۶۶۰\times۱۰^{-۹}m}$

$۳۴۰\times۱۱۰\times۷۵\times۱۰\times۳۶۰۰=n\times\frac{۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^۸}{۶۶۰\times۱۰^{-۹}}$

$\Rightarrow n=\frac{۳۴\times۱۱\times۷۵\times۳۶\times۱۰^۵}{۳\times۱۰^{-۱۹}}=۳۳۶۶۰۰\times۱۰^{۲۴}\sim۳\times۱۰^{۲۹}$

پنجره ۲

A ۱۸۶۲ ۲

اجسام در هر دمایی تابش گرمایی از خود گسیل می‌کنند که در دماهای معمولی این تابش در محدودهٔ امواج فروسرخ می‌باشد و با افزایش دما، تابش در محدودهٔ نورهای مرئی قرار می‌گیرد بنابراین گزاره‌های (الف) و (ب) درست است. برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ جسم جامد سبب تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد می‌شود. حال آنکه گازهای کم‌فشار و رقیق که اتم‌های منفرد آن‌ها از برهم‌کنش‌های قوی موجود در جسم جامد آزادند دارای طیف خطی هستند و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۱۸۶۳ ۲

تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

A ۱۸۶۴ ۲

یادآوری گازها و بخار عنصرها وقتی که تحریک می‌شوند دارای طیف نشری خطی هستند.

لامپ نئون روشن یعنی لامپی که در آن گاز نئون رقیق و کم‌فشار توسط تخلیهٔ الکتریکی نور گسیل می‌کند و نور گسیل شده تشکیل طیف نشری خطی می‌دهد.

A ۱۸۶۵ ۳

رنگ نور گسیل‌شده و طیف خطی ایجاد شده از تخلیه الکتریکی درون یک لامپ به نوع گاز درون لامپ بستگی دارد بنابراین گزارهٔ (الف) و (ب) درست است. در تمام طیف های تشکیل شده از برانگیختگی گاز درون لامپ طیف خطی می‌باشد و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۱۸۶۶ ۱

در رشتهٔ بالمر پرتوهای فرابنفش و مرئی وجود دارند.

A ۱۸۶۷ ۱

یادآوری در طیف اتمی هیدروژن در سری‌های پاشن $(n'=۳)$، براکت $(n'=۴)$ و پفوند $(n'=۵)$ تمام طول موج‌های گسیل شده در ناحیهٔ فروسرخ بوده و در سری لیمان تمام طول موج‌ها در ناحیهٔ فرابنفش و در سری بالمر، چهار طول موج مرئی و یک طول موج فرابنفش وجود دارد.

با توجه به یادآوری بالا در رشته‌های طول موجی پاشن، براکت و پفوند همهٔ طول موج‌ها در ناحیهٔ فروسرخ هستند.

A ۱۸۶۸ ۳

در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$، n و n' عدد طبیعی هستند و $n'<n$ است. با توجه به رابطهٔ داده شده در مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{n^۲})$، $n'^۲=۱۶$ بوده و $n'=۴$ است.

در اتم هیدروژن هرگاه $n'\ge۴$ باشد، طول موج‌های گسیلی در ناحیهٔ فروسرخ امواج الکترومغناطیسی قرار دارند. از طرفی $n'=۴$ مربوط به رشتهٔ براکت است.

A ۱۸۶۹ ۳

رابطهٔ داده شده در مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ را با رابطهٔ ریدبرگ مقایسه می‌کنیم $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ بنابراین خواهیم داشت:

$n'^۲=۳^۲\Rightarrow n'=۳$ رشتهٔ پاشن

در رابطهٔ ریدبرگ هرگاه $n'\ge۳$ باشد، طول موج‌های گسیلی فروسرخ هستند. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۱۸۷۰ ۴

رابطهٔ داده شده در مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۳^۲})$ را با رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ مقایسه می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$n^۲=۳^۲\Rightarrow n=۳$

در رابطهٔ ریدبرگ $n'<n$ است. بنابراین $n'<۳$ بوده و می‌تواند $n'=۲$ و یا $n'=۱$ باشد. $n'=۲$ مربوط به سری بالمر بوده و هنگامی که $n=۳$ و $n'=۲$ است طول موج در ناحیهٔ نور مرئی است (قرمز $\lambda=۶۵۶/۲nm$) و $n'=۱$ مربوط به سری لیمان است و تمام طول موج‌های رشتهٔ لیمان فرابنفش است.

بازی با سؤال در رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن هرگاه $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۲^۲})$ باشد، طول موج‌های گسیلی مربوط به کدام رشته و در کدام ناحیهٔ طیف الکترومغناطیسی است؟

۱) بالمر، مرئی ۲) بالمر، فرابنفش ۳) لیمان، فرابنفش ۴) پاشن، فروسرخ

پاسخ در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ همواره $n'<n$ است. در رابطهٔ مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۲^۲})$، $n=۲$ بوده بنابراین $n'=۱$ است. یعنی طول موج گسیلی مربوط به رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ بوده و در ناحیهٔ فرابنفش امواج الکترومغناطیسی است. گزینهٔ ۳

B ۱۸۷۱ ۳

در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{m^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ به جای m عدد $n'=۴$ و به جای n عدد $n=m+۲=۴+۲=۶$ را قرار می‌دهیم.

$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۶})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\times\frac{۹-۴}{۱۴۴}$

$\Rightarrow\lambda=۲۸۸۰nm=۲/۸۸\mu m$

A ۱۸۷۲ | ۱

نکته در رشته‌های طیف اتم هیدروژن بازه‌های طول موجی و بسامدی امواج الکترومغناطیسی گسیلی به شکل زیر است:

براکت $n'=۴$

لیمان $n'=۱$ | بالمر $n'=۲$ | پاشن $n'=۳$ | پفوند $n'=۵$

از راست به چپ طول موج کاهش می‌یابد و بسامد افزایش می‌یابد.

با توجه به نکتهٔ بیان شده در رشتهٔ پفوند بسامدها از پاشن، بالمر و لیمان کمتر است.

A ۱۸۷۳ | ۳

در رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ تمام طول موجها فرابنفش هستند و در رشتهٔ بالمر هرگاه $n=۷$ و $n'=۲$ باشد، طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است. از این‌رو گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۸۷۴ | ۴

هنگامی که بیان می‌شود رشتهٔ بالمر یعنی مقصد الکترون تراز انرژی $n'=۲$ است. بنابراین به کمک رابطهٔ ریدبرگ λ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}) \Rightarrow \frac{۱}{\lambda}=۰/۰۱(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۳^۲})\Rightarrow\lambda=\frac{۳۶۰۰}{۵}$$

$$\Rightarrow\lambda=۷۲۰nm\Rightarrow\lambda=۷۲۰\times۱۰^{-۹}=۷/۲\times۱۰^{-۷}m$$

B ۱۸۷۵ | ۴

یادآوری در سری بالمر، ۴ خط طیفی مرئی وجود دارد و پنجمین خط طیفی فرابنفش است از طرفی طول موج امواج مرئی در بازهٔ ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است و در نتیجه طول موج فرابنفش کوتاه‌تر از ۴۰۰nm است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

اگر چه این سؤال نیازی به راه‌حل و محاسبات ندارد، اما روش محاسبهٔ آن برای به‌دست‌آوردن پنجمین خط طیف اتمی رشتهٔ بالمر $(n=۲+۵=۷)$ به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=۰/۰۱۱(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴۹})\Rightarrow\lambda=۳۹۵/۹۶nm$$

بازی با سؤال **طول موج سومین خط طیف اتمی هیدروژن در رشتهٔ پاشن $(n'=۳)$ چند نانومتر و در چه محدوده‌ای است؟ $(R=۰/۰۱nm^{-1})$**

از کتاب درسی

۱) ۱۲۰۰، رادیویی **۲)** ۱۲۰۰، فروسرخ **۳)** ۸۵۰، رادیویی **۴)** ۸۵۰، فروسرخ

پاسخ **طول موج سومین خط طیف اتم هیدروژن در رشتهٔ پاشن یعنی $n=۶$ و $n'=۳$، از این‌رو به کمک رابطهٔ ریدبرگ می‌توان طول موج را به‌دست آورد که قطعاً در ناحیهٔ فروسرخ است.**

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{۶^۲})=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۴-۱}{۳۶})\Rightarrow\lambda=۱۲۰۰nm$$

گزینهٔ ۲

B ۱۸۷۶ | ۴

در رابطهٔ ریدبرگ، رشتهٔ بالمر یعنی $n'=۲$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{۴۵۰}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{۴/۵}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{n^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴/۵}\Rightarrow\frac{۱}{n^۲}=\frac{۴/۵-۴}{۱۸}\Rightarrow n^۲=۳۶\Rightarrow n=۶$$

B ۱۸۷۷ | ۳

خط فکری هر گاه الکترون از مدار بالاتر به مدار پایین‌تر برود از خود یک فوتون موج الکترومغناطیس گسیل می‌کند. دقت کنید که الکترون وقتی از تراز (مدار) n به تراز (مدار) $n'=۳$ رفته فوتون گسیل کرده بنابراین $n>n'$ است.

در این حالت می‌توانید به کمک رابطهٔ ریدبرگ - بالمر برای اتم هیدروژن مسئله را حل کنید.

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ - بالمر می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\xrightarrow{\lambda=۱۲۰۰nm,R=۰/۰۱(nm)^{-1}}\frac{۱}{۱۲۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{n^۲})$$

$$\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{n^۲}=\frac{۴-۳}{۳۶}\Rightarrow n^۲=۳۶\Rightarrow n=۶$$

بازی با سؤال **در اتم هیدروژن، الکترون از تراز n به تراز $n'=۲$ آمده و طول موج فوتون گسیل شده ۷۲۰ نانومتر است. این گسیل در رشتهٔ .... است و n برابر با .... می‌باشد.** $(R_H=۰/۰۱nm^{-1})$ خارج تجربی - ۸۹

۱) بالمر، ۳ **۲)** لیمان، ۳ **۳)** بالمر، ۹ **۴)** لیمان، ۹

پاسخ **مقصد الکترون تراز $n'=۲$ بوده، بنابراین این طول موج مربوط به رشتهٔ بالمر است، اکنون به کمک رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن، n را به‌دست می‌آوریم.**

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{۷۲۰}=۰/۰۱(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{n^۲})$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۷/۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{n^۲}\Rightarrow\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۷/۲}\Rightarrow\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow n=۳$$

گزینهٔ ۱

B ۱۸۷۸ | ۲

خط فکری طول موج‌های گسیلی اتم هیدروژن از معادلهٔ ریدبرگ به‌دست می‌آید.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$$

ثابت ریدبرگ

به n' های مختلف نام‌های متفاوتی داده شده است وقتی $n'=۱$ باشد رشتهٔ طول موجها را رشتهٔ لیمان می‌گویند بنابراین در این مسئله معادلهٔ ریدبرگ به‌صورت مقابل $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ است.

از طرفی شمارهٔ خط طیفی به این گونه است که در رشتهٔ لیمان اولین خط طیفی یعنی گذار از $n=۲$ به $n'=۱$، دومین خط طیفی یعنی گذار از $n=۳$ به $n'=۱$ و ... برای یافتن شمارهٔ خط طیفی شما باید ابتدا طول موج گسیل شده را حساب کنید.

طول موج گسیلی را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۳\times۱۰^۸}{\frac{۸}{۳}\times۱۰^{۱۵}}\Rightarrow\lambda=\frac{۹}{۸}\times۱۰^{-۷}m\Rightarrow\lambda=\frac{۹۰۰}{۸}nm$$

به کمک رابطهٔ ریدبرگ - بالمر خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\xrightarrow[R=۰/۰۱nm^{-1}]{n'=۱}\frac{۸}{۹۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow n^۲=۹\Rightarrow n=۳$$

بنابراین این طول موج مربوط به دومین خط طیفی لیمان است.

B ۱۸۷۹ | ۲

دقت کنید هنگامی اتم موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند که الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر جهش کند، بنابراین الکترون $n=۳n'$ به n' می‌رود.

۱ طول موج پرتو را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۳\times۱۰^۸}{\frac{۸}{۳}\times۱۰^{۱۵}}\Rightarrow\lambda=\frac{۹}{۸}\times۱۰^{-۷}m\Rightarrow\lambda=\frac{۹۰۰}{۸}nm$$

۲ به کمک رابطهٔ ریدبرگ n' را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۸}{۹۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(۳n')^۲})$$

$$\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۹n'^۲}\Rightarrow\frac{۸}{۹}=\frac{۸}{۹n'^۲}\Rightarrow n'=۱$$

۳ $n'=۱$ یعنی رشتهٔ لیمان.

B ۱۸۸۰ | ۱

خط فکری در ابتدا شما باید بررسی کنید که سومین خط طیفی یک رشته از طول موج‌های اتم هیدروژن کدام است. اگر فرض شود که الکترون از ترازهای بالاتر به تراز n' برود در این صورت اولین خط طیفی اتم هیدروژن در این رشته از $n'+۱$ به n' و دومین طیف خطی اتم هیدروژن در این رشته از $n'+۲$ به n' و سومین خط طیف این رشته از $n'+۳$ به n' است یعنی به‌طور کلی اگر شمارهٔ خط طیفی m باشد، طول موج گسیلی مربوط به گذار الکترون از تراز $n'+m$ به n' است.

با توجه به اینکه ثابت ریدبرگ (R) داده شده سؤال را از رابطهٔ $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ حل می‌کنیم.

۱ سومین خط طیف اتمی هیدروژن در رشتهٔ n' برابر گذار از $n'+3$ به n' است، بنابراین:

معادلهٔ ریدبرگ: $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\xrightarrow{n=n'+3}\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2})$

۲ با توجه به بسامد، طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[f=2/5\times10^{14}Hz]{v=c=3\times10^{8}m/s}\lambda=\frac{3\times10^{8}}{2/5\times10^{14}}\Rightarrow\lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}m$$

۳ در معادلهٔ ریدبرگ چون یکای R برحسب $\frac{1}{nm}$ داده شده پس باید یکای λ نیز برحسب nm گذاشته شود.

$$\lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}m\xrightarrow{1m=10^{9}nm}\lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}\times10^{9}nm\Rightarrow\lambda=1200nm$$

نکته: طول موج‌های بین $400nm$ تا $700nm$ در بازهٔ نورهای مرئی‌اند و نورهایی با طول موج کمتر از $400nm$ فرابنفش و نورهایی با طول موج بیشتر از $700nm$ در گسترهٔ طول موج‌های فروسرخ‌اند.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2})\Rightarrow\frac{1}{1200}=\frac{1}{100}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2})$$
$$\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}$$

نکته: رشتهٔ بالمر در ناحیهٔ فرابنفش و مرئی قرار دارد و چون $\lambda=1200nm$ در ناحیهٔ فروسرخ است پس این طول موج برای رشتهٔ بالمر نیست.

برای حل معادلهٔ بالا به جای حل معادله بهتر است گزینه‌ها را در معادله قرار دهیم یعنی به جای n' اعداد داده شده در هر گزینه را قرار دهیم.

گزینهٔ (۱):

$$\frac{1}{12}=(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2})\xrightarrow{n'=3}\frac{1}{12}=\frac{1}{9}-\frac{1}{36}\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{3}{36}\checkmark$$

بنابراین $n'=3$ و رشتهٔ آن پاشن است.

گزینهٔ (۲):

$$\frac{1}{12}=(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2})\xrightarrow{n'=4}\frac{1}{12}=\frac{1}{16}-\frac{1}{49}\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{33}{784}\times$$

گزینهٔ (۳):

$$\frac{1}{12}=(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2})\xrightarrow{n'=5}\frac{1}{12}=\frac{1}{25}-\frac{1}{64}\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{39}{1600}\times$$

B ۱۸۸۱ ۲

بلندترین طول موج مرئی در اتم هیدروژن مربوط به سری بالمر است، هنگامی که $n=3$ و $n'=2$ است. $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})=R(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})\Rightarrow\lambda=\frac{36}{5R}$

کوتاه‌ترین طول موج مرئی در اتم هیدروژن در سری بالمر هنگامی است که $n=6$ و $n'=2$ است. بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2})=R(\frac{1}{4}-\frac{1}{36})=R(\frac{9-1}{36})\Rightarrow\lambda_{min_{مرئی}}=\frac{36}{8R}$$
$$\Rightarrow\lambda_{min_{مرئی}}=\frac{9}{2R}$$

A ۱۸۸۲ ۳

پرانرژی‌ترین فوتون دارای کوتاه‌ترین طول موج بوده و الکترون در اتم هیدروژن وقتی از دورترین تراز به تراز $n'=2$ برود این فوتون را گسیل می‌کند (وقتی بیان می‌شود رشتهٔ بالمر یعنی مقصد الکترون تراز $n'=2$ است). اکنون به کمک رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن داریم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda=400nm$$

B ۱۸۸۳ ۴

۱ کم‌انرژی‌ترین فوتون بالمر دارای بلندترین طول موج است و آن هنگامی است که الکترون از $n=3$ به $n=2$ می‌رود.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=R(\frac{5}{36})\Rightarrow\lambda=\frac{36}{5R}$$

۲ پرانرژی‌ترین فوتون براکت دارای کوتاه‌ترین طول موج است و آن هنگامی است که الکترون از $n=\infty$ به $n=4$ می‌رود.

$$\frac{1}{\lambda'}=R(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=R(\frac{1}{16})\Rightarrow\lambda'=\frac{16}{R}$$

$$\frac{E_{بالمر}}{E_{براکت}}=\frac{h\frac{c}{\lambda}}{h\frac{c}{\lambda'}}=\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\frac{16}{R}}{\frac{36}{5R}}=\frac{20}{9}$$

B ۱۸۸۴ ۲

خط فکری: بلندترین طول موج گسیلی (کم‌انرژی‌ترین پرتو) رشتهٔ n'، از $n'+1$ به n' خواهد بود.

کوتاه‌ترین طول موج گسیلی (پرانرژی‌ترین پرتو) رشتهٔ n'، از ∞ به n' خواهد بود.

بلندترین طول موج گسیلی مربوط به گذار از $n=3$ به $n'=2$ است:

$$\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})$$
$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{36}{5R}=\frac{3600}{5}=720nm$$

کوتاه‌ترین طول موج گسیلی مربوط به گذار از $n=\infty$ به $n'=2$ است.

$$\frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{4}-0)\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{4}{R}=400nm$$

اختلاف طول موج‌های خواسته شده برابر است با: $\Delta\lambda=720-400=320nm$

B ۱۸۸۵ ۱

۱ بلندترین طول موج فرابنفش در رابطهٔ ریدبرگ هنگامی است که $n=7$ و $n'=2$ باشد.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{7^2})=R(\frac{49-4}{4\times49})$$
$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{4\times49}{45R}=\frac{196}{45R}$$

۲ کوتاه‌ترین طول موج فرابنفش در رابطهٔ ریدبرگ در رشتهٔ لیمان $(n'=1)$ است هنگامی که $n=\infty$ باشد، بنابراین:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=\frac{1}{R}$$

۳ نسبت را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}=\frac{\frac{196}{45R}}{\frac{1}{R}}\Rightarrow\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}=\frac{196}{45}$$

بازی با سؤال: بلندترین طول موج فرابنفش طیف اتمی هیدروژن در صورتی گسیل می‌شود که اتم از تراز n_1 به تراز n_2 برود. n_1 و n_2 کدام هستند؟

۱) $n_1=3$ به $n_2=2$ **۲)** $n_1=3$ به $n_2=1$

۳) $n_1=2$ به $n_2=1$ **۴)** $n_1=7$ به $n_2=2$

پاسخ: در گزینهٔ (۲)، الکترون از تراز $n_1=3$ به تراز $n_2=1$ می‌رود و در گزینهٔ (۳)، الکترون از تراز $n_1=2$ به تراز $n_2=1$ می‌رود بنابراین انرژی فوتون گسیلی در گذار گزینهٔ (۲) بیشتر و طول موج آن کوتاه‌تر است. از طرفی کوتاه‌ترین طول موج سری بالمر از بلندترین طول موج سری لیمان بلندتر است، بنابراین طول موج گسیلی در گذار از $n_1=7$ به $n_2=2$ در سری بالمر قطعاً از گذار از $n_1=3$ به $n_2=1$ در سری لیمان بلندتر است، از این‌رو پاسخ گزینهٔ (۴) است.

گزینه ۴

B ۱۸۸۶ ۲

خط فکری ← کوتاه‌ترین طول موج در طیف اتم هیدروژن وقتی گسیل می‌شود که الکترون از بالاترین تراز ممکن $(n=\infty)$ به پایین‌ترین تراز ممکن $n'=1$ برود که $n'=1$ مربوط به رشتهٔ لیمان است.

به کمک رابطهٔ ریدبرگ - بالمر برای هیدروژن کوتاه‌ترین طول موج گسیلی را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01(\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda=100nm$$

B ۱۸۸۷ ۱

۱) بلندترین طول موج غیرمرئی (فرابنفش) در رشتهٔ بالمر وقتی است که $n=7$ و $n'=2$ است. به کمک رابطهٔ ریدبرگ طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{7^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{49-4}{4\times49})$$
$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{196}{45R}$$

۲) کوتاه‌ترین طول موج غیرمرئی (فرابنفش) در رشتهٔ بالمر وقتی است که $n=\infty$ و $n'=2$ باشد. از این‌رو:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{4}{R}$$

۳) نسبت $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ خواهد شد:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\frac{196}{45R}}{\frac{4}{R}}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{196}{180}=\frac{49}{45}$$

B ۱۸۸۸ ۱

۱) بیشینه بسامد یعنی کوتاه‌ترین طول موج $(\downarrow\lambda=\frac{c}{f\uparrow})$ و کوتاه‌ترین طول موج در ناحیهٔ فروسرخ مربوط به رشتهٔ پاشن است و وقتی گسیل می‌شود که $n=\infty$ و $n'=3$ باشد. طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max\ \text{فروسرخ}}}=R(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda_{max\ \text{فروسرخ}}=\frac{9}{R}$$

$$\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}f_{\text{فروسرخ}}=\frac{c}{\frac{9}{R}}=\frac{cR}{9}$$

۲) بیشینه بسامد در ناحیهٔ مرئی مربوط به رشتهٔ بالمر $(n'=2)$ بوده و هنگامی گسیل می‌شود که $n=6$ باشد. طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{\text{مرئی}}}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2})=R(\frac{9-1}{36})\Rightarrow\lambda_{\text{مرئی}}=\frac{36}{8R}=\frac{9}{2R}$$

$$\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}f_{\text{مرئی}}=\frac{c}{\frac{9}{2R}}=\frac{2Rc}{9}$$

۳) نسبت را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_{\text{فروسرخ}}}{f_{\text{مرئی}}}=\frac{\frac{cR}{9}}{\frac{2cR}{9}}=\frac{1}{2}$$

A ۱۸۸۹ ۱

۱) کوتاه‌ترین طول موج گسیلی بالمر یعنی الکترون از بالاترین تراز $n=\infty$ به تراز $n'=2$ برود.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{4}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{4}{R}$$

۲) بلندترین طول موج گسیلی یعنی الکترون از تراز $n=3$ به تراز $n'=2$ برود.

$$\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{36}{5R}$$

۳) گسترهٔ طول موج سری بالمر خواهد شد:

$$\lambda_{max}-\lambda_{min}=\frac{36}{5R}-\frac{4}{R}=\frac{16}{5R}$$

B ۱۸۹۰ ۱

خط فکری ← محدوده تقریبی طول موج‌های رشته‌های گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته بین بلندترین طول موج و کوتاه‌ترین طول موج گسیلی در آن رشته است. اما بلندترین طول موج هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n+1$ به تراز پایین‌تر $n'=n$ می‌رود و کوتاه‌ترین طول موج هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=\infty$ به تراز $n'=n$ می‌رود. در این مسئله $n'=3$ است.

بلندترین طول موج رشتهٔ پاشن هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n'=3$ برود. با توجه به رابطهٔ ریدبرگ - بالمر برای اتم هیدروژن خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01(\frac{1}{9}-\frac{1}{16})\Rightarrow\lambda\simeq2000nm\Rightarrow\lambda\simeq2\mu m$$

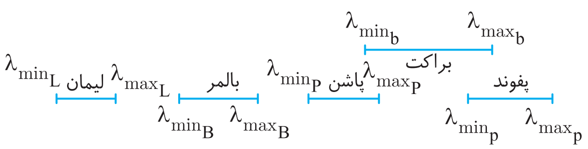
کوتاه‌ترین طول موج گسیلی رشتهٔ پاشن وقتی است که الکترون از تراز $n=\infty$ به تراز $n'=3$ برود.

$$\frac{1}{\lambda}=0/01(\frac{1}{9}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda=900nm=0/9\mu m$$

بنابراین محدودهٔ تقریبی طول موج $0/9\mu m$ تا $2\mu m$ است.

B ۱۸۹۱ ۴

نکته ← در اتم هیدروژن بازه‌های طول موجی در رشته‌های مختلف به صورت زیر است:



بلندترین طول موج گسیلی رشتهٔ لیمان، از کوتاه‌ترین طول موج گسیلی رشتهٔ بالمر از کوتاه‌تر است و گزینهٔ (۴) درست است.

البته این مطلب در مورد رشتهٔ پاشن براکت و براکت پفوند صدق نمی‌کند.

A ۱۸۹۲ ۱

تامسون موفق به کشف الکترون و اندازه‌گیری نسبت بار به جرم آن $(\frac{e}{m})$ شد بنابراین گزارهٔ(الف) درست است.

در مدل تامسون، هسته وجود ندارد و اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به‌طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

در مدل اتمی تامسون، زمانی اتم تابش گسیل می‌کند که الکترون‌ها با بسامد معینی حول وضع تعادلشان نوسان کنند و گزارهٔ (پ) درست است.

مدل اتمی تامسون نمی‌تواند طیف خطی عناصر را توجیه کند و گزارهٔ (ت) نادرست است.

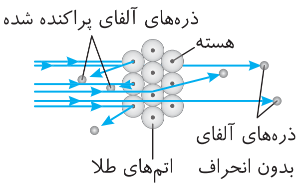
A ۱۸۹۳ ۴

در مدل اتمی رادرفورد، اتم دارای هسته با بار مثبت است و اگر الکترون‌ها را نسبت به هسته ساکن فرض کنیم باید تحت تأثیر نیروی ربایش الکتریکی بین هسته و الکترون، روی هسته سقوط کند و اگر الکترون‌ها مانند سیاره‌های منظومه خورشیدی به گرد خورشید بچرخند باز هم این حرکت پایدار نمی‌ماند. الکترون در حال گردش به گرد هسته، چون دارای حرکت شتابدار است از خود تابش گسیل کرده و با از دست دادن تدریجی انرژی، بر هسته سقوط می‌کند.

A ۱۸۹۴ ۴

در آزمایش تاباندن ذرات آلفا به ورقه‌های طلا، مشاهده شد که تعداد زیادی از ذرات آلفا بدون انحراف از ورقهٔ طلا می‌گذرند. از این‌رو رادرفورد نتیجه گرفت که بخش بزرگی از فضای اتم را فضای تهی تشکیل می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست است.

از مشاهدهٔ برگشت کامل برخی از ذرات آلفا نتیجه گرفت که اتم دارای هسته‌ای چگال با بار مثبت در مرکز اتم است و گزینهٔ (۲) درست است. پایداری اتم به آزمایش رادرفورد ارتباطی ندارد.



B ۱۸۹۵ ۲

در مدل اتمی رادرفورد با توجه به فیزیک کلاسیک با چرخش الکترون، توسط الکترون امواج الکترومغناطیسی تولید می‌شود که بسامد آن با بسامد حرکت مداری الکترون یکسان است. با تولید این موج الکترومغناطیسی انرژی الکترون کاسته شده در نتیجه شعاع مدار الکترون به دور هسته به تدریج کاسته شده و بسامد حرکت آن به تدریج بیشتر می‌شود، بنابراین بسامد موج الکترومغناطیسی نیز زیاد شده و موج الکترومغناطیسی دارای طول موج‌های کوتاه‌تر می‌شود. در گزینهٔ (۲) هرچه الکترون به هسته نزدیک‌تر می‌شود طول موج کوتاه‌تر شده است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۸۹۶ ۳

این آزمایش ورقهٔ طلا به وسیلهٔ پرتو α می‌باشد که تعداد کمی از پرتوهای α با زاویهٔ بیش از 90° باز می‌گردند که رادرفورد برخلاف مدل تامسون به این نتیجه رسید که در اتم مرکزهای بسیار چگال و بار مثبت وجود دارد، بنابراین گزارهٔ (الف) و (ب) درست و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۱۸۹۷ ۳

در مدل اتمی رادرفورد بنابر فیزیک کلاسیک حرکت الکترون به دور هسته یک حرکت شتابدار می‌باشد که سبب تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود.

نکته منبع تولید امواج الکترومغناطیسی حرکت شتابدار ذرهٔ باردار می‌باشد.

نکته بسامد موج گسیل شده از یک چشمهٔ موج برابر بسامد چشمه است.

الکترون با حرکت شتابدار، خود چشمهٔ تولید موج است، بنابراین بسامد امواج الکترومغناطیسی گسیل شده با بسامد حرکت مداری الکترون برابر است.

A ۱۸۹۸ ۳

طیف خطی عنصرها توسط مدل اتمی بور قابل توجیه است. در الگوی اتمی تامسون و الگوی اتمی رادرفورد نمی‌توان خطی و منحصربه‌فرد بودن طیف عنصرها را توجیه کرد. در الگوی اتمی بور با فرض گسسته بودن انرژی الکترون در ترازهای انرژی و اینکه الکترون در این ترازها تابش گسیل نمی‌کند و تنها زمانی تابش گسیل می‌کند که الکترون از یک تراز انرژی بالاتر به تراز انرژی پایین‌تر برود، می‌توان خطی بودن طیف خطی را توجیه کرد. از طرفی چون هر اتم دارای ترازهای انرژی ویژهٔ خود است بنابراین بنا بر الگوی اتمی بور هر عنصر تابش منحصر به خود را خواهد داشت و طیف اتمی خطی خواهد بود.

B ۱۸۹۹ ۲

یادآوری در مدل اتمی بور، مدارها و انرژی‌های الکترون‌ها در هر اتم کوانتیده‌اند، یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسسته‌ای مجاز هستند.

شعاع این مدارها و انرژی الکترون برای اتم هیدروژن از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید.

ترازهای انرژی $E_n=\frac{-13/6\,eV}{n^2}$ ، شعاع مدارها: $r_n=a_0n^2$

بررسی شعاع مدارها:

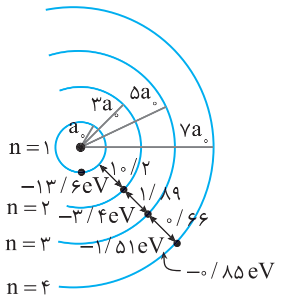
$$\left.\begin{array}{l} r_1=a_0 \\ r_2=a_0(2)^2=4a_0 \\ r_3=a_0(3)^2=9a_0 \\ r_4=a_0(4)^2=16a_0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} r_2-r_1=3a_0 \\ r_3-r_2=5a_0 \\ r_4-r_3=7a_0 \end{array}$$

بنابراین فاصلهٔ مدارهای چرخش الکترون در حال افزایش است.

بررسی انرژی ترازها:

$$\begin{array}{l} E_1=-13/6\,eV \\ E_2=\frac{-13/6}{2^2}=-3/4\,eV \\ E_3=\frac{-13/6}{3^2}=-1/51\,eV \\ E_4=\frac{-13/6}{4^2}=-0/85\,eV \end{array} \quad \begin{array}{l} E_2-E_1=10/2\,eV \\ E_3-E_2=1/89\,eV \\ E_4-E_3=-0/66\,eV \end{array}$$

بنابراین اختلاف انرژی ترازها کاهش می‌یابد.



A ۱۹۰۰ ۳

با توجه به الگوی اتمی بور در مورد شعاع مدار چرخش الکترون شعاع مدار سوم و شعاع مدار اول را از هم کم می‌کنیم.

$$r_n=n^2a_0\begin{cases} \xrightarrow{n=1} r_1=a_0 \\ \xrightarrow{n=3} r_3=3^2a_0=9a_0 \end{cases} \Rightarrow r_3-r_1=8a_0$$

B ۱۹۰۱ ۲

یادآوری در مدل اتمی بور، انرژی الکترون در اتم هیدروژن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E=-\frac{E_R}{n^2}$$

شماره مداری که در آن انرژی الکترون $-0/85eV$ و $-0/544eV$ است را به کمک رابطهٔ بالا به‌دست می‌آوریم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases} \xrightarrow{E_K=-0/85eV} -0/85=\frac{-13/6}{K^2}\Rightarrow K=4 \\ \xrightarrow{E_L=-0/544eV} -0/544=\frac{-13/6}{L^2}\Rightarrow L=5 \end{cases}$$

A ۱۹۰۲ ۱

با توجه به شعاع مدار الکترون در الگوی اتمی بور، شمارهٔ مدار را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{r_n}{r_1}=4\xrightarrow{r_n=n^2a_0}\frac{n^2a_0}{a_0}=4\Rightarrow n=2$$

انرژی الکترون خواهد شد:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases} \xrightarrow{n=1} E_1=-E_R \\ \xrightarrow{n=2} E_2=-\frac{E_R}{4} \end{cases}\Rightarrow \frac{E_2}{E_1}=\frac{1}{4}$$

بازی با سؤال **در اتم هیدروژن، الکترون از تراز $n=1$ به تراز $n=3$ می‌رود. در این انتقال، شعاع مدار و انرژی الکترون نسبت به حالت قبل، به ترتیب چند برابر می‌شوند؟** ریاضی - ۹۳

۱) ۳، $\frac{1}{3}$ ۲) ۹، $\frac{1}{9}$ ۳) ۳، ۳ ۴) ۹، ۹

پاسخ **شعاع مدار الکترون در اتم بور:**

$$r_n=n^2a_0\begin{cases} \xrightarrow{n=1} r_1=a_0 \\ \xrightarrow{n=3} r_3=9a_0 \end{cases}\Rightarrow r_3=9r_1$$

انرژی الکترون:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases} \xrightarrow{n=1} E_1=-E_R \\ \xrightarrow{n=3} E_3=-\frac{E_R}{9} \end{cases}\Rightarrow E_3=\frac{1}{9}E_1$$

گزینهٔ ۲

B ۱۹۰۳ ۴

خط فکری ابتدا بررسی کنید که شعاع مدار الکترون یعنی فاصلهٔ الکترون از هسته چند برابر می‌شود. سپس به کمک قانون کولن دربارهٔ نیروی الکتریکی بین الکترون و هسته اظهار نظر کنید.

۱ ابتدا مشخص می‌کنیم که شعاع مدار چرخش الکترون چند برابر می‌شود:

$$r_n=n^2a_0\Rightarrow\frac{r_3}{r_2}=\frac{3^2}{2^2}\Rightarrow\frac{r_3}{r_2}=\frac{9}{4}$$

۲ نیروی الکتریکی با مجذور فاصله نسبت وارون دارد از این‌رو:

$$F=k\frac{q_1q_2}{r^2}\Rightarrow\frac{F_3}{F_2}=(\frac{r_2}{r_3})^2=(\frac{4}{9})^2=\frac{16}{81}$$

بازی با سؤال **در الگوی اتمی بور برای اتم هیدروژن، اگر الکترون از مدار $n=1$ به مدار $n=2$ برود، نیروی ربایش هسته بر آن چند برابر می‌شود؟**

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ **نیروی ربایش بین هسته و الکترون طبق رابطهٔ $F=\frac{kq_1q_2}{r^2}$، با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد.**

$$\frac{F_2}{F_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\xrightarrow{r_n=n^2a_0}\frac{F_2}{F_1}=(\frac{a_0}{4a_0})^2=\frac{1}{16}$$

گزینهٔ ۴

B ۱۹۰۴ ۲

خط فکری انرژی الکترون در اتم هیدروژن در هر تراز از رابطهٔ $E_n=\frac{E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید که در آن n شمارهٔ تراز است، بنابراین کافی است در این رابطه به جای n به ترتیب ۱ و ۳ قرار داده و اعداد به‌دست‌آمده را از هم کم کنیم و مجدداً ۴ و ۶ را قرار دهیم و اعداد به‌دست آمده را از هم کم کنیم.

$$E_n=\frac{E_R}{n^2}\begin{cases}E_1=\frac{E_R}{1}\\E_3=\frac{E_R}{9}\end{cases}\xrightarrow{\Delta E=E_1-E_3}\Delta E=\frac{E_R}{1}-\frac{E_R}{9}\Rightarrow\Delta E=\frac{8}{9}E_R$$

$$E_n=\frac{E_R}{n^2}\begin{cases}E_4=\frac{E_R}{16}\\E_6=\frac{E_R}{36}\end{cases}\xrightarrow{\Delta E'=E_4-E_6}$$

$$\Delta E'=\frac{E_R}{16}-\frac{E_R}{36}\Rightarrow\Delta E'=\frac{9E_R}{144}-\frac{4E_R}{144}=\frac{5E_R}{144}$$

بنابراین نسبت $\frac{\Delta E}{\Delta E'}$ برابر است با:

$$\frac{\Delta E}{\Delta E'}=\frac{\frac{8}{9}E_R}{\frac{5E_R}{144}}\Rightarrow\frac{\Delta E}{\Delta E'}=\frac{8\times144}{5\times9}=\frac{128}{5}=\frac{256}{10}=25.6$$

بازی با سؤال **اختلاف انرژی تراز اول با تراز چهارم چند برابر اختلاف انرژی تراز اول با تراز دوم است؟**

۱) ۱/۲۵ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۶

پاسخ **انرژی هر تراز برابر $E=\frac{-E_R}{n^2}$ است:**

$$\begin{cases}E_1=\frac{-E_R}{1^2}\\E_4=\frac{-E_R}{16}\end{cases}\Rightarrow\Delta E=E_4-E_1=\frac{15}{16}E_R$$

$$\begin{cases}E_1=\frac{-E_R}{1}\\E_2=\frac{-E_R}{4}\end{cases}\Rightarrow\Delta E'=E_2-E_1=\frac{3}{4}E_R$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta E}{\Delta E'}=\frac{\frac{15}{16}E_R}{\frac{3}{4}E_R}=\frac{5}{4}=1.25$$

گزینهٔ ۱

B ۱۹۰۵ ۴

رابطهٔ شعاع مدار الکترون در الگوی اتمی بور را نوشته و در آن n و $n+1$ و $n+2$ را قرار می‌دهیم.

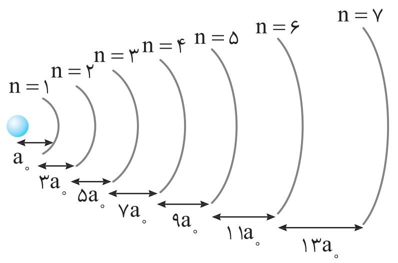
$$r_n=n^2a_0\begin{cases}r_n=n^2a_0\\r_{n+1}=(n+1)^2a_0\\r_{n+2}=(n+2)^2a_0\end{cases}\quad\begin{aligned}&\Delta r=r_{n+1}-r_n=(n+1)^2a_0-n^2a_0\\&\Delta r'=r_{n+2}-r_{n+1}=(n+2)^2a_0-(n+1)^2a_0\end{aligned}$$

با توجه به فرض مسئله:

$$\frac{\Delta r'}{\Delta r}=\frac{13}{11}\Rightarrow\frac{[(n+2)^2-(n+1)^2]a_0}{[(n+1)^2-n^2]a_0}=\frac{13}{11}\Rightarrow\frac{n^2+4n+4-n^2-2n-1}{n^2+2n+1-n^2}=\frac{13}{11}$$

$$\Rightarrow\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{13}{11}\Rightarrow 26n+13=22n+33\Rightarrow 4n=20\Rightarrow n=5$$

میانبر اختلاف شعاع دو مدار متوالی برابر ma_0 می‌شود که m مجموع دو شمارهٔ دو مدار است.



بنابراین $\Delta r'$ مربوط به اختلاف شعاع مدارهای ۶ و ۷ و Δr مربوط به اختلاف شعاع مدارهای ۵ و ۶ است.

A ۱۹۰۶ ۲

یادآوری انرژی $-13.6eV$ را یک ریدبرگ گویند. $(E_R=-13.6eV)$

انرژی الکترون در تراز $n=1$ و $n=5$ را از رابطهٔ انرژی الکترون در مدل اتمی بور به‌دست آورده و از هم کم می‌کنیم.

$$E_n=\frac{-E_R}{n^2}\Rightarrow\begin{cases}n=1\Rightarrow E_1=-E_R\\n=5\Rightarrow E_5=-\frac{E_R}{25}\end{cases}$$

انرژی لازم برای جابه‌جایی الکترون بین دو تراز برابر اختلاف انرژی الکترون در آن دو تراز است:

$$E_5-E_1=-\frac{E_R}{25}-(-E_R)\Rightarrow E_5-E_1=\frac{24}{25}E_R=0.96E_R$$

A ۱۹۰۷ ۳

۱ انرژی ترازها را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases}\xrightarrow{n=2}E_2=\frac{-13.6}{2^2}=-3.4eV\\\xrightarrow{n=4}E_4=\frac{-13.6}{4^2}=-0.85eV\end{cases}$$

۲ انرژی لازم برای بردن الکترون از تراز $n=2$ به $n=4$ برابر اختلاف انرژی الکترون در این دو تراز است.

$$E_4-E_2=-0.85-(-3.4)=2.55eV$$

B ۱۹۰۸ ۳

با توجه به رابطهٔ انرژی فوتون با طول موج می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}E=A(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\\E=hf\Rightarrow E=h\frac{c}{\lambda}\end{cases}\Rightarrow\frac{hc}{\lambda}=A(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{A}{hc}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$$

با مقایسهٔ رابطهٔ به‌دست آمده با رابطهٔ بالمر - ریدبرگ $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{1}{\lambda}=\frac{A}{hc}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\\\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\end{cases}\Rightarrow R=\frac{A}{hc}\Rightarrow A=Rhc$$

بازی با سؤال بین ثابت ریدبرگ برای اتم هیدروژن (R) و انرژی ریدبرگ (E_R)، کدام رابطهٔ زیر برقرار است؟ (c سرعت نور و h ثابت پلانک است)

۱) $R=hcE_R$ ۲) $R=\frac{E_R}{hc}$ ۳) $R=\frac{E_R}{c}$ ۴) $R=\frac{hc}{E_R}$

پاسخ با مقایسهٔ رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ و رابطهٔ بور $\frac{۱}{\lambda}=\frac{E_R}{hc}(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ مشخص می‌شود که $R=\frac{E_R}{hc}$ است. گزینهٔ ۲

A ۱۹۰۹ ۱

۱ بنا بر الگوی اتمی بور برای اتم هیدروژن شعاع مدار الکترون برابر است با:

$$r_n=a_۰n^۲\xrightarrow[r_۱=a_۰]{r_n=۱۶r_۱}a_۰n^۲=۱۶a_۰\Rightarrow n=۴$$

۲ طول موج گسیل شده از پرش الکترون از هر ترازی به تراز پایه $n=۱$ مربوط به سری لیمان است.

B ۱۹۱۰ ۲

نکته برای آنکه الکترون فوتونی گسیل (تابش) کند باید الکترون از تراز بالا به پایین‌تر بجهد.

نکته بلندترین طول موج گسیلی یا به عبارت دیگری کم‌انرژی‌ترین فوتون گسیلی در هر رشته وقتی است که الکترون از تراز n به تراز $n'=n-۱$ برود. کم‌انرژی‌ترین فوتون در رشتهٔ براکت هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=۵$ به تراز $n'=۴$ پرش کند. بنا بر الگوی اتمی بور انرژی الکترون در تراز n برابر $E_n=-\frac{E_R}{n^۲}$ بوده و هرگاه الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر برود اختلاف انرژی دو تراز را به صورت یک فوتون گسیل می‌کند. از این‌رو انرژی فوتون گسیلی خواهد شد:

انرژی فوتون گسیلی $E_۵-E_۴=-\frac{E_R}{۲۵}-(-\frac{E_R}{۱۶})=\frac{(۲۵-۱۶)}{۴۰۰}E_R=\frac{۹}{۴۰۰}E_R$

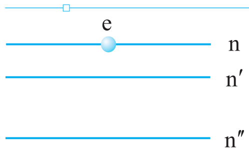
B ۱۹۱۱ ۴

هرگاه الکترون از حالت مانا با انرژی بالاتر به حالت مانای دیگر با انرژی پایین‌تر برود اختلاف انرژی دو تراز را به صورت یک فوتون موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند و هر چه فاصلهٔ دو تراز بیشتر باشد، انرژی فوتون گسیلی بیشتر است. بنابراین وقتی الکترون در تراز $n=۴$ قرار دارد پرانرژی‌ترین فوتون را وقتی گسیل می‌کند که به تراز $n'=۱$ برود. انرژی الکترون در تراز $n=۴$ و $n'=۱$ را به دست آورده از هم کم می‌کنیم تا پرانرژی‌ترین فوتون گسیلی را بیابیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\begin{cases}\xrightarrow{n=۴}E_۴=-\frac{E_R}{۴^۲}=-\frac{E_R}{۱۶}\\ \xrightarrow{n=۱}E_۱=-\frac{E_R}{۱}=-E_R\end{cases}$$

$$E_{\text{فوتون}}=E_۴-E_۱=-\frac{E_R}{۱۶}-(-E_R)\Rightarrow E_{\text{فوتون}}=\frac{۱۵}{۱۶}E_R$$

B ۱۹۱۲ ۴



نکته اگر الکترون از تراز n به تراز n'' برود تغییر انرژی آن برابر مجموع تغییر انرژی‌ها در گذر از تراز n به n' و از n' به n'' است.

$$\Delta E_{n\to n''}=E_n-E_{n''}=E_n-E_{n'}+E_{n'}-E_{n''}\Rightarrow$$
$$\Delta E_{n\to n''}=\Delta E_{n\to n'}+\Delta E_{n'\to n''}$$

هر کدام از تساوی‌های داده شده در صورت مسئله باید در نکتهٔ بالا صدق کند.

(الف) و (ب): $\Delta E_{۵\to ۳}=\Delta E_{۵\to ۴}+\Delta E_{۴\to ۳}$

تساوی (الف) نادرست و (ب) درست هستند.

(پ): $\Delta E_{۴\to ۲}=\Delta E_{۴\to ۳}+\Delta E_{۳\to ۲}$

تساوی (پ) درست است.

(ت): $\Delta E_{۴\to ۱}=\Delta E_{۴\to ۲}+\Delta E_{۲\to ۱}\Rightarrow \Delta E_{۴\to ۲}=\Delta E_{۴\to ۱}-\Delta E_{۲\to ۱}$

و تساوی (ت) نیز درست است.

B ۱۹۱۳ ۱

خط فکری باید با استفاده از رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$، λ'، λ'' و λ را به‌دست بیاورید تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ در گذار الکترون از تراز $n=۴$ به $n'=۲$ طول موج گسیلی خواهد شد:

$$\frac{۱}{\lambda'}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۴^۲})\qquad (I)$$

۲ در گذار الکترون از تراز $n=۲$ به تراز $n'=۱$ طول موج گسیلی خواهد شد:

$$\frac{۱}{\lambda''}=R(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۲^۲})\qquad (II)$$

۳ در گذار الکترون از تراز $n=۴$ به تراز $n'=۱$ طول موج گسیلی خواهد شد.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۴^۲})\qquad (III)$$

۴ اکنون رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع کرده و آن را با رابطهٔ (III) مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda'}+\frac{۱}{\lambda''}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۴^۲}+\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۲^۲})=R(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۴^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{\lambda'}+\frac{۱}{\lambda''}$$

B ۱۹۱۴ ۱

نکته تراز $n=۱$ را حالت پایه و ترازهای بالاتر را حالت برانگیخته می‌نامند، پس تراز mام در واقع $m-۱$ امین حالت برانگیخته است، به‌طول مثال $n=۳$، ۲امین حالت برانگیخته است.

اولین حالت برانگیختگی یعنی $n=۲$ و حالت پایه یعنی $n=۱$. بنابراین طبق رابطه اختلاف ترازهای انرژی خواهیم داشت:

$$\Delta E=E_U-E_L\Rightarrow\Delta E=(\frac{-E_R}{n_U^۲})-(\frac{-E_R}{n_L^۲})$$
$$\Rightarrow\Delta E=(\frac{-۱۳/۶}{۴})-(\frac{-۱۳/۶}{۱})=۱۰/۲eV$$

حال این انرژی را به ژول تبدیل می‌کنیم:

$$\Delta E=۱۰/۲eV\times\frac{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}{۱eV}=۱۶/۳۲\times ۱۰^{-۱۹}J\Rightarrow\Delta E=۱/۶۳۲\times ۱۰^{-۱۸}J$$

B ۱۹۱۵ ۴

خط فکری ابتدا باید مشخص کنیم n کدام تراز است سپس انرژی تراز $n+۱$ را به‌دست آورده و اختلاف انرژی الکترون در تراز n و $n+۱$ را حساب کنیم.

۱ در مدل اتمی بور انرژی الکترون در تراز n از رابطهٔ $E_n=-\frac{E_R}{n^۲}$ به‌دست می‌آید. اکنون مشخص می‌کنیم که در کدام تراز انرژی الکترون $-۰/۸۵eV$ است.

$$-۰/۸۵=-\frac{۱۳/۶}{n^۲}\Rightarrow n^۲=۱۶\Rightarrow n=۴$$

۲ شمارهٔ تراز $n+۱$ برابر $n+۱=۵$ است. انرژی الکترون در این تراز برابر است با:

$$E_n=\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_n=\frac{۱۳/۶}{۲۵}\Rightarrow E_۵=۰/۵۴۴eV$$

۳ اختلاف انرژی دو تراز برابر انرژی لازم برای گذار الکترون از تراز $n=۴$ به تراز $n=۵$ است.

$$E_n-E_{n+۱}=۰/۸۵-۰/۵۴۴=۰/۳۰۶eV$$

B ۱۹۱۶ ۱

خط فکری الکترون در مدار $n=۳$ است و با جذب یک فوتون به مدارهای بالا رفته است. بنابراین شما باید ابتدا انرژی الکترون در تراز $n=۳$ را حساب کنید سپس انرژی فوتون را با آن جمع کرده و مداری که الکترون به آن گذار می‌کند را مشخص کنید.

۱ انرژی الکترون در تراز $n=۳$ خواهد شد. $E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_۳=-\frac{E_R}{۹}$

۲ بعد از جذب فوتون با انرژی $\frac{۳E_R}{۳۶}$، انرژی الکترون را حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{۹}+\frac{۳E_R}{۳۶}\Rightarrow-\frac{E_R}{n^۲}=\frac{-۴E_R+۳E_R}{۳۶}\Rightarrow n^۲=۳۶\Rightarrow n=۶$$

۳ بنابراین الکترون از تراز $n=3$ به تراز $n=6$ می‌رود و نسبت شعاع مدار الکترون $\frac{r_6}{r_3}$ خواهد شد.

$$r_n=a_0n^2\Rightarrow\frac{r_6}{r_3}=\frac{a_0\times6^2}{a_0\times3^2}\Rightarrow\frac{r_6}{r_3}=\frac{36}{9}=4$$

B ۱۹۱۷ ۱

خط فکری بلندترین طول موج وقتی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به نزدیک‌ترین تراز یعنی $n'=n-1$ برود. بنابراین شما باید انرژی الکترون را در تراز $n=4$ و $n=3$ به دست بیاورید و از هم کم کنید. اما کوتاه‌ترین طول موج جذبی وقتی رخ می‌دهد که الکترون از تراز n به بالاترین تراز ممکن یعنی $n=\infty$ برود. در این صورت انرژی فوتون جذب شده بیشترین مقدار ممکن است.

۱ انرژی فوتون مربوط به بلندترین طول موج خواهد شد.

$$E_{min}=E_U-E_L\xrightarrow[n_U=4,n_L=3]{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}E_{min}=\frac{-E_R}{4^2}-\frac{-E_R}{3^2}$$

$$\Rightarrow E_{min}=\frac{7E_R}{144}$$

۲ انرژی فوتون مربوط به کوتاه‌ترین طول موج جذبی را حساب می‌کنیم.

$$E_{max}=E_U-E_L\xrightarrow{n_U=\infty,n_L=4}E_{max}=\frac{-E_R}{(\infty)^2}-\frac{-E_R}{4^2}$$

$$\Rightarrow E_{max}=\frac{E_R}{16}$$

۳ نسبت انرژی دو فوتون برابر است با:

$$\frac{E_{min}}{E_{max}}=\frac{\frac{7}{144}E_R}{\frac{E_R}{16}}=\frac{7}{9}$$

B ۱۹۱۸ ۲

نکته کمترین انرژی هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به تراز $n-1$ برود و بیشترین انرژی هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به تراز ۱ برود.

نکته انرژی فوتون در هر تراز $E_n=\frac{-E_R}{n^2}$ است و انرژی فوتون گسیل شده در انتقال از تراز n به n' برابر است با:

$$\underbrace{hf}_{\text{انرژی فوتون}}=E_n-E_{n'}$$

کمترین انرژی فوتون گسیل‌شده در گذار الکترون از $n=5$ به $n'=4$ است.

$$E_n-E_{n'}=hf\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}-\frac{E_R}{5^2}-(-\frac{E_R}{4^2})=hf$$

$$\Rightarrow\frac{-13.6}{25}+\frac{13.6}{16}=4\times10^{-15}f\Rightarrow\frac{(25-16)\times13.6}{25\times16}=4\times10^{-15}f$$

$$f=\frac{9\times3.4}{25\times16}\times10^{15}=0.0765\times10^{15}\Rightarrow f=76.5\text{THz}$$

بازی با سؤال **الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n=5$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، بسامد پرانرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل کند، چند تراهرتز است؟ $(h=4\times10^{-15}eVs)$**

۱) ۳۲۶۴ ۲) ۲۷۳۲ ۳) ۴۵۶۷ ۴) ۵۲۷۳

پاسخ **پرانرژی‌ترین فوتون در گذار الکترون از تراز $n=5$ به تراز $n'=1$ گسیل می‌شود، بنابراین:**

$$E_n-E_{n'}=hf\Rightarrow\frac{-E_R}{n^2}-\frac{-E_R}{n'^2}=hf$$

$$\frac{-13.6}{5^2}-\frac{(-13.6)}{1}=4\times10^{-15}f\Rightarrow13.6-\frac{13.6}{25}=4\times10^{-15}f$$

$$\Rightarrow\frac{24}{25}\times13.6=4\times10^{-15}f\Rightarrow f=3.264\times10^{12}\times10^{3}\text{Hz}$$

$$\Rightarrow f=3264\text{THz}$$

گزینهٔ ۱

B ۱۹۱۹ ۳

کم‌انرژی‌ترین فوتون جذبی برای گذار از $n=5$ به $n=6$ صورت می‌گیرد و انرژی فوتون برابر اختلاف انرژی الکترون در بین دو تراز است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$E_U-E_L=hf\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}\frac{-E_R}{6^2}-\frac{-E_R}{5^2}=hf$$

$$\xrightarrow{h=4\times10^{-15}eVs}\frac{-25E_R+36E_R}{25\times36}=4\times10^{-15}f$$

$$\Rightarrow\frac{+11E_R}{25\times36}=4\times10^{-15}f\Rightarrow f=\frac{11\times13.6}{25\times36\times4\times10^{-15}}\Rightarrow f=\frac{11\times13.6}{36\times10^{-13}}$$

$$\Rightarrow f=4.15\times10^{+13}\text{Hz}\Rightarrow f=41.5\text{THz}$$

B ۱۹۲۰ ۲

یادآوری بنا به مدل اتمی بور هرگاه الکترون از یک حالت مانا با انرژی بالاتر E_U به حالت مانای دیگری با انرژی پایین‌تر E_L برود اختلاف انرژی دو تراز را به صورت یک فوتون الکترومغناطیسی گسیل می‌کند. $E=E_U-E_L$

چون الکترون انرژی گسیل کرده بنابراین الکترون از تراز $n=4$ به تراز پایین‌تر آمده است.

$$E=E_U-E_L\xrightarrow[n=4]{E=\frac{3}{16}E_R,E_n=-\frac{E_R}{n^2}}\frac{3}{16}E_R=\frac{-E_R}{16}-E_L$$

$$\Rightarrow E_L=\frac{-E_R}{16}-\frac{3E_R}{16}\Rightarrow E_L=\frac{-4E_R}{16}\Rightarrow E_L=\frac{-E_R}{4}$$

A ۱۹۲۱ ۲

با توجه به الگوی اتمی بور:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow-\frac{1}{16}E_R=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow n=4$$

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{15}{1600}=\frac{1}{100}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{16})\Rightarrow\frac{15}{16}=\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{16}\Rightarrow n'=1$$

B ۱۹۲۲ ۱

خط فکری الکترون از مدار n به مدار n' رفته و فوتونی با طول موج $112.5nm$ گسیل می‌کند. در حل این مسائل وقتی که از رابطهٔ ریدبرگ استفاده می‌کنید معمولاً در نهایت باید n و n' را از روی گزینه‌ها حدس بزنید. به حل مسئله دقت کنید.

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ n و n' را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{112.5}=\frac{1}{100}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{100}{112.5}=\frac{8}{9}$$

اگر از خود بپرسیم $\frac{8}{9}$ را چگونه بنویسیم که به جواب برسیم $\frac{8}{9}$ تفاضل $1-\frac{1}{9}$ است

بنابراین:

$$\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{9}\Rightarrow\begin{cases}n'=1\\n=3\end{cases}$$

B ۱۹۲۳ ۳

خط فکری سریع‌ترین راه‌حل این مسئله، یافتن طول موج فوتون گسیلی است و دانستن اینکه در سری‌های اتم هیدروژن اگر طول موج از $400nm$ کمتر بوده یعنی پرتو گسیلی فرابنفش است و $n'=1$ و یا ممکن است $n'=2$ باشد و اگر طول موج گسیلی بین $400nm$ تا $700nm$ باشد یعنی پرتو گسیلی مرئی بوده و قطعاً $n'=2$ است و اگر $\lambda>700nm$ پرتو در ناحیهٔ فروسرخ است که n'، ۳ یا ۴ یا ۵ خواهد بود و در این حالت مسئله را کامل باید حل کرد.

ابتدا طول موج پرتو گسیل‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{562.5\times10^{12}}\approx\frac{3}{600}\times10^{-4}=\frac{1}{200}\times10^{-4}=5\times10^{-3}\times10^{-4}=500nm$$

λ در محدودهٔ نور مرئی به‌دست آمده است که تنها در سری بالمر یعنی $n'=2$ صدق می‌کند که تنها در گزینهٔ (۳)، $n'=2$ بیان شده است، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

راه‌حل کلی و طولانی: وارون طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۵۶۲/۵\times۱۰^{۱۲}}\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۵۶۲/۵\times۱۰^{۴}}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=۱۸۷/۵\times۱۰^{۴}(m)^{-۱}$$

رابطهٔ ریدبرگ را می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\Rightarrow۱۸۷/۵\times۱۰^{+۴}=\frac{۱}{۱۰۰\times\underbrace{۱۰^{-۹}}_{\text{برای تبدیل به متر}}}(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}=۱۸۷/۵\times۱۰^{-۳}\Rightarrow\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}=۰/۱۸۷۵=\frac{۱۸۷۵}{۱۰۰۰۰}$$

$$\xrightarrow[\text{بر ۲۵ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}=\frac{۷۵}{۴۰۰}=\frac{۳}{۱۶}\Rightarrow\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}=\frac{۴}{۱۶}-\frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow\begin{cases}n'^{۲}=۴\Rightarrow n'=۲\\ n^{۲}=۱۶\Rightarrow n=۴\end{cases}$$

B ۱۹۲۴ | ۴

خط فکری چون در پرانتز انرژی ریدبرگ داده شده است، پس باید مسئله را با استفاده از رابطهٔ $E_U-E_L=hf$ حل کرد. همچنین باید دو رابطهٔ زیر از مدل اتمی بور را به خاطر داشته باشیم:

$$r=\underbrace{n^{۲}}_{\text{شمارهٔ مدار}}\underbrace{a_{۰}}_{\text{شعاع مدار ۱}}\qquad E_n=\frac{\overbrace{-E_R}^{\text{یک ریدبرگ}}}{\underbrace{n^{۲}}_{\text{شمارهٔ تراز}}}$$

۱ ابتدا با توجه به رابطهٔ $E_U-E_L=hf$ حل سؤال را آغاز می‌کنیم و شماره مدار r و r' را به‌دست می‌آوریم.

$$E_U-E_L=hf\xrightarrow[hf=۲/۵۵eV]{E_U=\frac{-E_R}{n_U^{۲}},E_L=\frac{-E_R}{n_L^{۲}}}\frac{-۱۳/۶}{n_U^{۲}}-\frac{-۱۳/۶}{n_L^{۲}}=۲/۵۵$$

$$\Rightarrow\frac{-۱}{n_U^{۲}}-(-\frac{۱}{n_L^{۲}})=\frac{۲/۵۵}{۱۳/۶}\Rightarrow\frac{-۱}{n_U^{۲}}+\frac{۱}{n_L^{۲}}=\frac{۳}{۱۶}\Rightarrow n_U=۴,n_L=۲$$

بنابراین شماره مدار r، ۴ و شماره مدار r'، ۲ است.

در این سؤال هم با توجه به معادله n_U و n_L را حدس زدیم.

۲ شعاع هر مدار را برحسب شعاع بور $(a_۰)$ حساب کرده و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$r_L=n_L^{۲}a_۰\xrightarrow{r_L=r'}r'=۴a_۰$$
$$r_U=n_U^{۲}a_۰\xrightarrow{r_U=r}r=۱۶a_۰$$
$$\xrightarrow{(-)}\Delta r=۱۲a_۰\Rightarrow\frac{\Delta r}{a_۰}=۱۲$$

بازی با سؤال در اتم هیدروژن اختلاف شعاع مدارهای m و n برابر ۲۴ برابر شعاع بور $(a_۰)$ است. m و n به ترتیب کدام گزینه می‌توانند باشند؟ $(m>n)$

ریاضی - ۹۶

۱) ۵ و ۱ ۲) ۵ و ۳ ۳) ۳ و ۱ ۴) ۴ و ۲

پاسخ بنا به مدل اتمی بور شعاع مدار الکترون کوانتیده و گسسته بوده و از رابطهٔ $r_n=a_۰n^{۲}$ به دست می‌آید. بنا به فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$r_m-r_n=۲۴a_۰\Rightarrow a_۰m^{۲}-a_۰n^{۲}=۲۴a_۰$$

$$m^{۲}-n^{۲}=۲۴\Rightarrow m^{۲}-n^{۲}=۲۵-۱\Rightarrow\begin{cases}m=۵\\ n=۱\end{cases}$$

گزینهٔ ۱

C ۱۹۲۵ | ۳

خط فکری سؤال براساس کتاب درسی فیزیک طراحی شده در کتاب فیزیک هرگاه الکترون از تراز $n=۴$ به تراز $n'=۲$ برود طول موج گسیلی آبی رنگ است (در شیمی این طول موج سبز نامیده شده است). در حالت دوم، الکترون در مرحلهٔ اول از تراز $n=۴$ باید به تراز $n'=۳$ برود زیرا هرگاه $n'=۳$ باشد، فوتون گسیلی فروسرخ است و سپس از $n=۳$ به تراز $n=۲$ گذار کند.

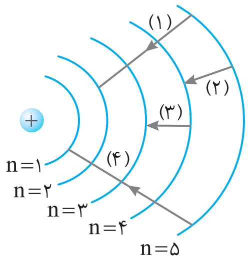
۱ در مرحلهٔ اول گذار از $n=۴$ به $n'=۳$ صورت گرفته است و انرژی فوتون گسیلی خواهد شد.

$$E=E_U-E_L\xrightarrow{E_n=\frac{-E_R}{n^{۲}}}E=\frac{-E_R}{۴^{۲}}-(\frac{-E_R}{۳^{۲}})\Rightarrow E=\frac{۷E_R}{۱۴۴}$$

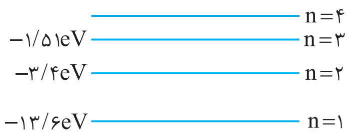
۲ گذار مرحلهٔ دوم از $n=۳$ به $n'=۲$ بوده که در این گذار نور قرمز گسیل می‌شود.

B ۱۹۲۶ | ۳

در گذارهایی که به تراز $n'=۲$ ختم می‌شود طول موج در ناحیهٔ فرابنفش و یا نور مرئی است و گزارهٔ (الف) نادرست است. هرگاه الکترون از ترازهای بالاتر به تراز $n'=۱$ برود طول موج‌های گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است. گذار ۴ از تراز $n=۵$ به تراز $n'=۱$ صورت گرفته بنابراین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است و گزارهٔ (ب) درست است.

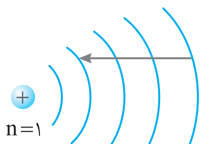


در ترازهای انرژی اتم هیدروژن بنا به مدل اتمی بور، در ترازهای بالاتر اختلاف انرژی ترازها کاهش می‌یابد. بنابراین در گذار (۲) که از $n=۵$ به $n'=۴$ صورت می‌گیرد، انرژی فوتون گسیلی از بقیهٔ گذارها کمتر بوده در نتیجه کمترین بسامد مربوط به گذار (۲) است و گزارهٔ (پ) درست است.



گذار (۱) از $n=۵$ به $n=۲$ بوده و گذار (۳) از $n=۴$ به $n=۳$ است. اختلاف انرژی ترازها در گذار (۱) از اختلاف انرژی ترازها در گذار ۳ بیشتر است. بنابراین انرژی فوتون گسیلی در این گذار بیشتر و طول موج کوتاه‌تر است $(\uparrow E=h\frac{c}{\lambda\downarrow})$ و گزارهٔ (ت) درست است.

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو مدارهای یک اتم هیدروژن بنا بر الگوی اتمی بور رسم شده است. کدام گزینه در مورد آن درست است؟



۱) اتم طول موج مرئی رشتهٔ لیمان را گسیل کرده است.

۲) اتم طول موج فرابنفش رشتهٔ بالمر را گسیل کرده است.

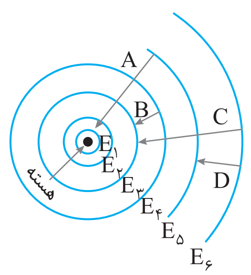
۳) اتم طول موج مرئی رشتهٔ بالمر را گسیل کرده است.

۴) اتم طول موج فروسرخ رشتهٔ پفوند را گسیل کرده است.

پاسخ با توجه به شکل، مبدأ الکترون تراز $n=۵$ و مقصد آن تراز $n=۲$ بوده پس الکترون طول موج مرئی رشتهٔ بالمر را گسیل می‌کند. گزینهٔ ۳

A ۱۹۲۷ | ۴

اختلاف انرژی دو تراز ۵ و ۶ از بقیهٔ گذارها کمتر بوده و انرژی فوتون گسیلی در این گذار کمترین مقدار و طول موج گسیلی شده نسبت به سه گذار دیگر بلندترین طول موج است.



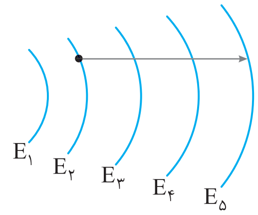
B ۱۹۲۸ ۲

با توجه به شکل مسئله الکترون با جذب انرژی یک فوتون از تراز $E_۲$ به تراز $E_۵$ رفته است. انرژی الکترون در این دو تراز را به‌دست می‌آوریم و از هم کم می‌کنیم و انرژی فوتون جذب شده را به‌دست می‌آوریم. سپس طول موج آن را حساب می‌کنیم.

$$E_n-E_{n'}=h\frac{c}{\lambda}\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^۲}}-\frac{E_R}{n^۲}-\frac{-E_R}{n'^۲}=\frac{hc}{\lambda}$$

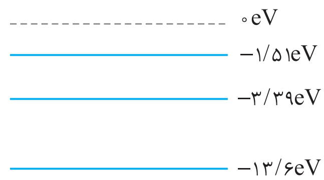
$$\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{E_R}{hc}(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱۳/۶}{۱۲۴۰}(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۵})$$

$$\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱۳/۶}{۱۲۴۰}(\frac{۲۵-۴}{۱۰۰})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱۳/۶}{۱۲۴۰}\times\frac{۲۱}{۱۰۰}\Rightarrow\lambda=\frac{۱۲۴۰\times۱۰۰}{۱۳/۶\times۲۱}\Rightarrow\lambda\approx۴۳۴nm$$



B ۱۹۲۹ ۲

راه‌حل اول: در طیف اتمی هیدروژن، چهار طول موج در ناحیهٔ نور مرئی وجود دارد. قرمز با طول موج ۶۵۶nm ، آبی با طول موج ۴۸۶nm ، نیلی با طول موج ۴۳۴nm و بنفش با طول موج ۴۱۰nm که همگی مربوط به سری طول موج‌های رشتهٔ بالمر بوده یعنی الکترون از ترازهای بالاتر به تراز $n'=۲$ می‌رود. طول موج ۶۶۰nm از بقیهٔ طول موج‌های بالمر بلندتر بوده و انرژی فوتون آن از بقیه کمتر می‌باشد. به همین دلیل الکترون از تراز $n=۳$ به تراز $n'=۲$ می‌رود.



راه‌حل دوم: ابتدا انرژی فوتون گسیلی را به‌دست آورده سپس با اختلاف انرژی ترازها مقایسه می‌کنیم.

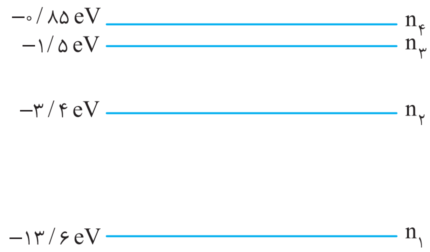
$$E=h\frac{c}{\lambda}=\frac{۴/۱۳۶\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{۶۶۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow E=۱/۸۸eV$$

که این انرژی با اختلاف انرژی تراز $n=۳$ و $n'=۲$ یکسان است:

$$E_۳-E_۲=-۱/۵۱-(-۳/۳۹)\Rightarrow E_۳-E_۲=۱/۸۸eV$$

B ۱۹۳۰ ۱

یادآوری در گذار الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر، الکترون فوتونی گسیل می‌کند که انرژی این فوتون برابر اختلاف انرژی دو تراز است.



۱ انرژی فوتون گسیلی را حساب می‌کنیم.

$$E=hf\Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۴/۷۵\times۱۰^{۱۴}\Rightarrow E=۱/۹eV$$

۲ به اعداد روی ترازها دقت کنید. اختلاف پتانسیل تراز $n_۳$ و تراز $n_۲$ برابر است با:

$$E_۳-E_۲=-۱/۵-(-۳/۴)\Rightarrow۱/۹eV$$

در نتیجه گذار الکترون از تراز $n_۳$ به تراز $n_۲$ بوده است.

A ۱۹۳۱ ۳

۱ با توجه به الگوی اتمی بور انرژی دو تراز $n_۱=۱$ و $n_۲=۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow\begin{cases}E_۱=-E_R\\ E_۴=-\frac{E_R}{۱۶}\end{cases}\Rightarrow E_۴-E_۱=-\frac{E_R}{۱۶}-(-E_R)$$

$$\Rightarrow\Delta E=\frac{۱۵}{۱۶}E_R\Rightarrow\frac{\Delta E}{E_R}=\frac{۱۵}{۱۶}\approx۹۴\%$$

۲ الکترون با دریافت انرژی از تراز $n_۱=۱$ به تراز $n_۲=۴$ می‌رود و انرژی آن افزایش می‌یابد.

B ۱۹۳۲ ۳

خط فکری نکتهٔ مهم در حل این مسئله این است که وقتی شما انرژی الکترون را در تراز $n=۲$ به‌دست می‌آورید، یک عدد منفی به‌دست می‌آید و وقتی ٪۸۴ آن را حساب می‌کنید باید افزایش انرژی را مثبت در نظر بگیرید که به انرژی الکترون افزوده می‌شود.

۱ انرژی الکترون در تراز $n=۲$ برابر است با: $E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_۲=-\frac{E_R}{۴}$

۲ به این مقدار ٪۸۴ انرژی افزوده شده است.

$$E_{n'}=-\frac{E_R}{۴}+\frac{۸۴}{۱۰۰}\times\frac{E_R}{۴}=\frac{-۱۶}{۱۰۰}\frac{E_R}{۴}=\frac{-E_R}{۲۵}=-\frac{E_R}{۵^۲}\Rightarrow n'=۵$$

بازی با سؤال **در اتم هیدروژن الکترون از تراز n به تراز $n'=۵$ رفته و انرژی آن ٪۹۶ ریدبرگ افزایش یافته است. n کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **انرژی الکترون در تراز $n'=۵$ برابر است با:**

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_۵=-\frac{E_R}{۲۵}$$

انرژی الکترون از n به $n'=۵$ به اندازهٔ $۹۶\%E_R$ افزایش یافته است از این‌رو:

$$E_۵-E_n=۹۶\%E_R\Rightarrow-\frac{E_R}{۲۵}-(-\frac{E_R}{n^۲})=\frac{۹۶}{۱۰۰}E_R$$

$$\Rightarrow\frac{E_R}{n^۲}=\frac{۹۶}{۱۰۰}E_R+\frac{E_R}{۲۵}\Rightarrow\frac{E_R}{n^۲}=E_R\Rightarrow n=۱$$

گزینهٔ ۱

B ۱۹۳۳ ۲

شمارهٔ ترازی که در آن انرژی الکترون $-۰/۸۵eV$ و $-۳/۴eV$ است را مشخص می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\begin{cases}\xrightarrow{E_{n_۱}=-۰/۸۵eV}-۰/۸۵=\frac{-۱۳/۶}{n_۱^۲}\Rightarrow n_۱^۲=۱۶\Rightarrow n_۱=۴\\ \xrightarrow{E_{n_۲}=-۳/۴eV}-۳/۴=\frac{-۱۳/۶}{n_۲^۲}\Rightarrow n_۲^۲=۴\Rightarrow n_۲=۲\end{cases}$$

شعاع مدار الکترون در این ترازها را به‌دست می‌آوریم.

$$r_n=n^۲a_۰\begin{cases}\xrightarrow{n_۱=۴}r_۱=۱۶a_۰\\ \xrightarrow{n_۲=۲}r_۲=۴a_۰\end{cases}$$

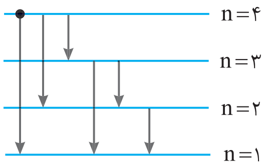
درصد تغییرات شعاع مدار چرخش الکترون خواهد شد.

$$\text{درصد تغییرات شعاع}=\frac{\Delta r}{r_۱}\times۱۰۰\Rightarrow\frac{۴a_۰-۱۶a_۰}{۱۶a_۰}\times۱۰۰=\frac{-۱۲a_۰}{۱۶a_۰}\times۱۰۰=-۷۵\%$$

بنابراین شعاع ۷۵ درصد کاهش می‌یابد.

B ۱۹۳۴ ۳

با توجه به شکل روبه‌رو، ۶ نوع فوتون با انرژی‌های متفاوت ممکن است گسیل کند.



ابتدا گذارهای ممکن $\Delta n=1$ را می‌شماریم:

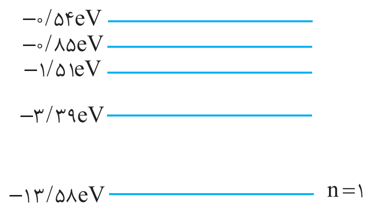
$4\to3\to2\to1$ سه نوع فوتون

سپس گذارهای ممکن $\Delta n=2$ را می‌شماریم: $4\to2$, $3\to1$ دو نوع فوتون

سرانجام گذارهای ممکن $\Delta n=3$ را می‌شماریم: $4\to1$ یک نوع فوتون

میانبر هرگاه در اتم هیدروژن الکترون در تراز n باشد با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، برای یافتن تعداد فوتون‌ها با انرژی‌های مختلف گسیل شده کافی است تمام اعداد طبیعی قبل از n را با هم جمع کنیم یعنی در این مسئله کافی است اعداد کوچک‌تر از ۴ را با هم جمع کنیم: $3+2+1=6$

بازی با سؤال **تعدادی از ترازهای اتم هیدروژن در شکل زیر نشان داده شده است: الکترون اتم هیدروژن در ترازی قرار دارد که انرژی آن $-0/54eV$ است. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن برای رفتن به تراز پایه، این الکترون چند نوع فوتون می‌تواند گسیل کند؟**



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

پاسخ **ترازی که در آن انرژی الکترون (انرژی یونش) $-0/54eV$ است، تراز پنجم $(n=5)$ است که تعداد گذارهای ممکن در آن ۱۰ گذار است.**

$5\to4\to3\to2\to1$, $5\to3\to2\to1$, $5\to2\to1$, $5\to1$

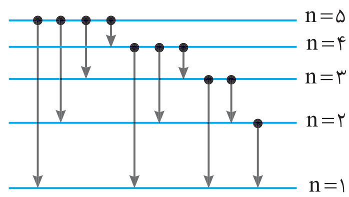
$N=4+3+2+1=10$ فوتون

گزینهٔ ۴

B ۱۹۳۵ ۲

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{5^2})$، تراز مبدأ الکترون $n=5$ بوده که از این تراز به ترازهای پایین‌تر پرش می‌کند.

راه‌حل اول: با توجه به پرش‌های شکل زیر ۱۰ نوع فوتون مختلف می تواند گسیل شود.



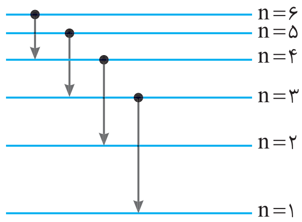
۴ نوع فوتون با $\Delta n=1$	$5\to4\to3\to2\to1$	
۳ نوع فوتون با $\Delta n=2$	$5\to3$, $4\to2$, $3\to1$	در مجموع ۱۰ فوتون $\Rightarrow$
۲ نوع فوتون با $\Delta n=3$	$5\to2$, $4\to1$	
۱ نوع فوتون با $\Delta n=4$	$5\to1$	

راه‌حل دوم: کافی است اعداد کوچک‌تر از ۵ را با هم جمع کنیم:

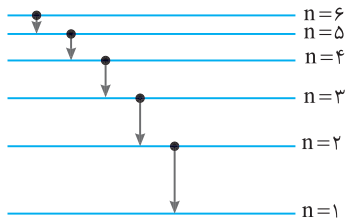
$N=4+3+2+1=10$

B ۱۹۳۶ ۴

در صورت مسئله تنها گذارهای $\Delta n\le2$ مجاز شمرده شده است یعنی $\Delta n=1$ یا $\Delta n=2$ باشد. در شکل‌های زیر گذارها رسم شده است کافی است آن‌ها را بشماریم.



گذارها با $\Delta n=2$: ۴ فوتون مختلف



گذارها با $\Delta n=1$: ۵ فوتون مختلف

بنابراین تعداد فوتون‌ها با انرژی مختلف برابر $5+4=9$ است.

C ۱۹۳۷ ۱

۱ در ششمین حالت برانگیخته، عدد کوانتومی $n=7$ است.

۲ فوتون در محدودهٔ فروسرخ هنگامی گسیل می‌شود که الکترون به تراز $n=6$ و $n=5$ و $n=4$ و $n=3$ جهش کند. بنابراین تمام گذارهایی که از $n=7$ به این ترازها ختم می‌شوند را حساب می‌کنیم.

چهار فوتون $n=7\xrightarrow{1}n=6\xrightarrow{2}n=5\xrightarrow{3}n=4\xrightarrow{4}n=3$

سه فوتون $n=7\xrightarrow{1}n=5\xrightarrow{2}n=3$, $n=6\xrightarrow{3}n=4$

دو فوتون $n=7\xrightarrow{1}n=4$ و $n=6\xrightarrow{2}n=3$

یک فوتون $n=7\xrightarrow{1}n=3$

جمعاً ۱۰ فوتون فروسرخ متفاوت گسیل می کند.

برای گسیل طول موج‌های محدودهٔ فرابنفش الکترون باید از تراز $n=7$ به تراز $n=2$ در رشتهٔ بالمر برود همچنین از ترازهای بالاتر به تراز $n=1$ (لیمان) جهش کند.

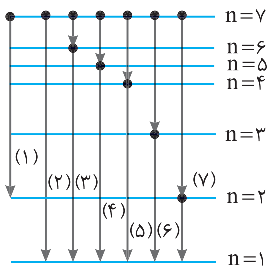
$7\xrightarrow{1}2$ و $7\xrightarrow{2}1$ و

$6\xrightarrow{3}1$ و $5\xrightarrow{4}1$ و

$4\xrightarrow{5}1$ و $3\xrightarrow{6}1$ و

$2\xrightarrow{7}1$

و جمعاً هفت فوتون در ناحیهٔ فرابنفش.



B ۱۹۳۸ ۳

بدون حل می‌توان متوجه شد که برای آن‌که الکترون از تراز $n=1$ (سری لیمان) کاملاً جدا شود (حتی اگر بخواهد به تراز $n=2$ برود) طول موج مورد نیاز در ناحیهٔ فرابنفش است. اما مسأله را حل می‌کنیم. انرژی الکترون در تراز پایه برابر است با:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\xrightarrow{n=1}E_1=-13/6eV$$

انرژی فوتون باید برابر $13/6eV$ باشد تا الکترون با دریافت آن کاملاً از اتم جدا شود. از این‌رو:

$$E=hf=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow 13/6=4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^{8}}{\lambda}\Rightarrow\lambda\approx0/882\times10^{-7}m$$

$$\Rightarrow\lambda\approx88/2nm$$

طول موج $\lambda=88/2nm<400nm$ بنابراین طول موج در ناحیهٔ فرابنفش است.

A ۱۹۳۹ ۱

یادآوری انرژی الکترون هنگامی که از اتم جدا شود برابر صفر است. با توجه به اینکه انرژی لازم برای جابه‌جایی الکترون‌ها از رابطهٔ E_U-E_L به‌دست می‌آید و در حالتی که الکترون جدا شده $E_U=0$ است پس انرژی لازم برای جدا کردن الکترون برابر انرژی الکترون در آن تراز است.

انرژی الکترون در مدار $n=2$ را حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\xrightarrow{n=2}E_2=-\frac{13/6}{2^2}\Rightarrow E_2=-3/4eV$$

بنابراین اگر به الکترون در تراز $n=2$، $3/4eV$ انرژی داده شود الکترون از اتم جدا می‌شود.

B ۱۹۴۰ ۴

الکترون در حالت پایه در مدار اول $(n=1)$ قرار داشته و در حالت یونیزه (خارج شدن الکترون از مدارهای اطراف هسته) n را برابر بی‌نهایت قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n'=1,n=\infty]{R_H=0/01nm^{-1}}\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)$$

$$\Rightarrow\lambda=100nm$$

B ۱۹۴۱ ۳

خط فکری انرژی یونش را برحسب الکترون‌ولت می نویسیم. انرژی فوتون گسیلی برابر اختلاف انرژی الکترون در مدار n و n′ است. اختلاف انرژی این دو تراز $16/32\times10^{-19}J$ را برحسب الکترون‌ولت حساب می‌کنیم. سپس به کمک رابطهٔ $E_n=-\frac{E_R}{n^2}$ باید n و n′ را پیدا کنیم. البته راهی که شما را مستقیماً به n و n′ برساند وجود ندارد و شما در نهایت باید n و n′ را حدس بزنید و یا گزینه‌ها را امتحان کنید.

۱ انرژی یونش در حالت پایه $21/76\times10^{-19}J$ است یعنی انرژی الکترون در تراز پایه برابر $-21/76\times10^{-19}$ بوده که آن را برحسب الکترون‌ولت به‌دست می‌آوریم.

$$E_1=\frac{-21/76\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}}\Rightarrow E_1=-13/6eV$$

۲ اختلاف انرژی ترازهای n و n′ را برحسب یکای eV می‌نویسیم.

$$|E_{n'}-E_n|=\frac{16/32\times10^{-19}J}{1/6\times10^{-19}}=10/2eV\Rightarrow|E_{n'}-E_n|=10/2eV$$

۳ الکترون انرژی از دست می‌دهد بنابراین $E_{n'}-E_n=-10/2eV$ است.

$$E_{n'}-E_n=-10/2eV\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}\frac{-13/6}{n'^2}-\left(\frac{-13/6}{n^2}\right)=-10/2$$

$$\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{10/2}{13/6}\xrightarrow[\text{به عدد ۳/۴ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}$$

در نتیجه $n'=1$ و $n=2$ خواهد بود.

B ۱۹۴۲ ۳

نکته انرژی یونش کمترین انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از حالت پایه است و اندازهٔ آن برابر اندازهٔ انرژی الکترون در تراز پایه است.

۱ بنا به فرض مسئله انرژی الکترون در تراز پایه $E_1=-13/5eV$ است.

۲ ابتدا انرژی فوتون‌های نور را که توسط الکترون اتم‌های هیدروژن جذب می‌شود به‌دست می‌آوریم.

$$E=hf\xrightarrow{f=3\times10^{15}Hz}E=4\times10^{-15}\times3\times10^{15}\Rightarrow E=12eV$$

۳ الکترون این انرژی را دریافت می‌کند و به تراز بالاتر می‌رود. انرژی الکترون در این تراز جدید خواهد شد:

$$E_n=-13/5+12=-1/5eV$$

۴ اکنون باید مشخص کنیم که الکترون به کدام تراز جهش کرده است.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{n=1}E_1=-13/5eV\\E_n=-1/5eV\end{cases}\Rightarrow\frac{13/5}{1/5}=\frac{\frac{-E_R}{1}}{\frac{-E_R}{n^2}}\Rightarrow9=n^2$$

$$\Rightarrow n=3$$

۵ در این صورت الکترون به تراز $n=3$ می‌رود و در بازگشت ۳ نوع فوتون مختلف می‌تواند گسیل کند.

A ۱۹۴۳ ۲

نور گسیل شده از یک قطعه تنگستن گداخته دارای طیف پیوسته است و وقتی این نور از گاز نئون می‌گذرد و در طیف‌نما تشکیل می‌شود، رنگین‌کمانی با یک سری خطوط تاریک دیده می‌شود که این خطوط تاریک، طول موج‌هایی هستند که توسط گاز نئون جذب شده‌اند. به این طیف، طیف جذبی خطی عنصر (گاز نئون) می‌گویند.

A ۱۹۴۴ ۳

در شکل (الف)، تابش حاصل از برانگیختگی گاز کم‌فشار هیدروژن اتمی توسط منشور طیف‌نمایی شده که این طیف گسیلی خطی است.

برای یک جسم جامد، نظیر رشتهٔ داغ یک لامپ روشن امواج الکترومغناطیسی گسیلی شامل گسترهٔ پیوسته‌ای از طول موج‌هاست که به آن طیف پیوسته گویند، بنابراین شکل (ب) مربوط به طیف پیوسته گسیلی جامدات است.

در شکل (پ)، نور حاصل از تنگستن از بین گازهای هیدروژن عبور کرده و برخی از خط‌ها توسط این گاز جذب می‌شوند و طیف آن جذبی خطی است.

A ۱۹۴۵ ۴

هرگاه جسم جامدی ملتهب شود و از خود نور گسیل کند، چنانچه نور آن را به یک منشور بتابانیم، یک رنگین‌کمان خواهیم دید که تمام طول موج بدون فاصله در کنار هم قرار دارند که به آن طیف نشری (گسیلی) پیوسته گویند. اگر این آزمایش را برای هر جسم جامد مانند آهن با رنگ تیره، طلا با رنگ زرد، شیشهٔ بدون رنگ و ... تکرار کنیم، نتیجه یکسان است، بنابراین با استفاده از طیف نشری (گسیلی) پیوسته نمی‌توان به نوع عنصر پی برد. اما هرگاه بخار عنصر و یا عنصر در حالت گازی را تحریک کنیم (آن را گرم کنیم، یا از آن جریان الکتریکی بگذرانیم و یا آن را به ولتاژ بالا متصل کنیم) از خود موج‌های الکترومغناطیسی و نور گسیل می‌کند، اگر این نور را به یک منشور بتابانیم برخلاف جسم جامد، در طیف بخار عنصر، خط‌های روشن و گسسته دیده می‌شود که آن را طیف گسیلی (نشری) خطی عنصر گویند. که برای هر عنصر منحصربه‌فرد بوده و در شناسایی عنصر کاربرد دارد. از طرفی اگر به یک بخار عنصر یا گاز نور سفید بتابانیم و نور عبوری از بخار عنصر را به یک طیف‌نما بتابانیم، رنگین‌کمان نور سفید دیده می‌شود که در آن چند خط تاریک وجود دارد که این خط‌های تاریک، طول موج‌هایی هستند که توسط عنصر جذب شده است. به طیف نور سفید با خط‌های تاریک، طیف جذبی خطی عنصر گویند که برای هر عنصر منحصربه‌فرد است، این طیف نیز در شناسایی عنصر کاربرد دارد.

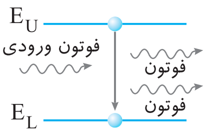
A ۱۹۴۶ ۳

در سال ۱۸۱۴ فرانهوفر برای اولین بار در طیف نور خورشید، خطوط تاریکی را مشاهده کرد. امروزه می‌دانیم طول موج‌هایی از نور خورشید هنگام عبور نور از جو خورشید و جو زمین توسط عناصر موجود در جو جذب می‌شوند که در طیف خورشید، این خط‌های تاریک جذبی را ایجاد می‌کنند و به کمک این خط‌های تاریک و مقایسهٔ آن‌ها با طیف جذبی خطی عنصرهای شناخته شده، می‌توان به عنصرهای موجود در اتمسفر زمین و اتمسفر خورشید پی برد.

B ۱۹۴۷ ۲

مدل بور نه تنها در مورد اتم هیدروژن بلکه در مورد اتم‌های هیدروژن‌گونه مانند اتم لیتیم که دو الکترون خود را از دست داده و دارای یک الکترون است با تجربه سازگاری خوبی دارد و گزارهٔ (الف) نادرست است. این مدل انرژی یونش، پایداری اتم و طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن را با موفقیت توجیه می‌کند و گزارهٔ (ب) و (ت) درست است. این مدل قادر به توجیه تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی و همچنین اتم‌های دارای چند الکترون نیست و گزارهٔ (پ) نادرست است. بنابراین دو گزارهٔ (ب) و (ت) درست هستند.

A ۱۹۴۸ ۳



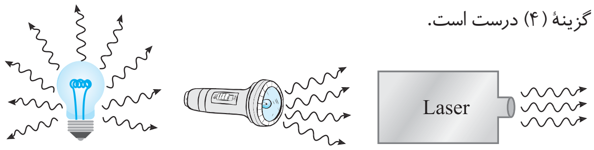
در گسیل القایی یک فوتون ورودی، الکترون برانگیخته را تحریک (یا القا) می‌کند تا تراز انرژی خود را تغییر دهد و به تراز پایین‌تر برود. برای گسیل القایی، انرژی فوتون ورودی باید دقیقاً با اختلاف انرژی‌های دو تراز یعنی $E_U - E_L$ یکسان باشد. گسیل القایی سه ویژگی عمده دارد. اول اینکه یک فوتون وارد و دو فوتون خارج می‌شود. به این ترتیب تعداد فوتون‌ها را افزایش می‌دهد و نور را تقویت می‌کند. بنابراین گزارهٔ(الف) درست است.

دوم اینکه فوتون گسیل شده، در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند و گزارهٔ (ب) درست است.

سوم اینکه فوتون گسیل شده با فوتون ورودی همگام یا دارای همان فاز است و فوتون‌هایی که باریکهٔ لیزر را ایجاد می‌کنند، هم‌بسامد، هم‌جهت و هم‌فاز هستند و گزارهٔ (پ) نیز درست است.

A ۱۹۴۹ ۴

نور لیزر از جنس نور مرئی است. در نور مرئی لامپ فوتون‌ها به انرژی‌های متفاوت در تمام جهت‌ها گسیل می‌شوند اما در نور مرئی لیزر، نور از فوتون‌های کاملاً مشابه که در یک جهت حرکت می‌کنند تشکیل شده است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.



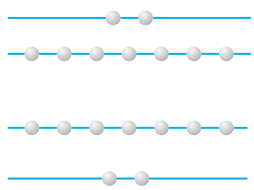
بازی با سؤال فرق اساسی پرتوی لیزر با پرتوهای دیگر در این است که فوتون‌های پرتوی لیزر ……… .

۱) هم‌فاز و هم‌بسامد هستند.
۲) دارای طول موج بلندتر هستند.
۳) دارای طول موج کوتاه‌تر هستند.
۴) قدرت نفوذ و سرعت بیشتری دارند.

پاسخ لیزر باریکه‌ای از فوتون‌های هم‌جهت، هم‌فاز و هم‌انرژی است.

گزینهٔ ۱

A ۱۹۵۰ ۳



به‌طور معمول و در دمای اتاق، بیشتر الکترون‌ها در تراز انرژی پایین‌تر قرار دارند (شکل الف).

در وضعیتی که وارونی جمعیت به‌وجود می‌آید بیشتر الکترون‌ها در تراز بالاتری موسوم به **ترازهای شبه پایدار** قرار دارند (شکل ب).

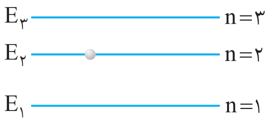
در این ترازها، الکترون‌ها مدت زمان بسیار طولانی‌تری $(۱۰^{-۳}s)$ نسبت به حالت برانگیختگی معمولاً $(۱۰^{-۸}s)$ باقی می‌مانند. این زمان طولانی‌تر، فرصت بیشتری برای افزایش وارونی جمعیت و در نتیجه تقویت نور لیزر فراهم می‌کند و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۹۵۱ ۲

در واقع اتم در حالت اول برانگیخته است که با گسیل خودبه‌خودی یک فوتون که انرژی‌اش با اختلاف انرژی دو تراز برابر است به حالت پایه می‌رود.

A ۱۹۵۲ ۲

هرگاه الکترون در تراز برانگیخته (E_U) قرار داشته باشد و بخواهیم آن را به کمک یک فوتون ورودی تحریک کنیم تا الکترون به تراز پایین‌تر (E_L) برود باید انرژی الکترون دقیقاً با اختلاف انرژی‌های دو تراز $E_U - E_L$ یکسان باشد.



الکترون در تراز $n=۲$ قرار دارد و با فوتونی با انرژی $E_۲ - E_۱$ می‌توان الکترون را تحریک کرد تا با گسیل القایی به تراز پایه برود.

بازی با سؤال الکترونی در تراز $E_۲$ است. اگر یک فوتون که انرژی آن برابر $E_۲ - E_۱$ است به آن بتابانیم، الکترون ممکن است با ……… به تراز $E_۱$ برود.

۱) گسیل خودبه‌خودی
۲) جذب خودبه‌خودی
۳) گسیل القایی
۴) جذب القایی

پاسخ هرگاه الکترون در تراز E_U قرار داشته باشد چنانچه فوتونی با انرژی $E_U - E_L$ به اتم بتابانیم، در اثر گسیل القایی الکترون به تراز E_L می‌رود، بنابراین الکترونی که در تراز $E_۲$ قرار دارد می‌تواند توسط فوتونی که انرژی آن $E_۲ - E_۱$ است تحریک شده و با گسیل القایی به تراز $E_۱$ برود.

گزینهٔ ۳

B ۱۹۵۳ ۲

شکل (الف) گسیل فوتون و یا گسیل خودبه‌خودی را نشان می‌دهد. شکل (ب) جذب فوتون توسط الکترون و گذار به تراز بالاتر را نشان می‌دهد. شکل (پ) وارونی جمعیت در عمل لیزر کردن را نشان می‌دهد. در شکل (ت) گسیل القایی که اساس کار لیزر است نشان داده شده است.

B ۱۹۵۴ ۱

خط فکری انرژی نور خروجی لیزر را در مدت $۱s$ حساب می‌کنیم، انرژی هر فوتون را به‌دست می‌آوریم و تعداد فوتون‌های گسیل شده را در هر ثانیه به‌دست می‌آوریم.

۱ انرژی خروجی لیزر برابر است با:

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=Pt\xrightarrow{P=۴/۵W,\,t=۱s}E=۴/۵J$$

۲ تعداد فوتون‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$E=nh\frac{c}{\lambda}\xrightarrow[h=۶/۶\times۱۰^{-۳۴}Js]{\lambda=۶۶۰\times۱۰^{-۹}m}۴/۵=n\times۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۶۶۰\times۱۰^{-۹}}$$

$$n=\frac{۴/۵\times۶۶۰\times۱۰^{-۹}}{۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow n=۱/۵\times۱۰^{۱۹}$$

B ۱۹۵۵ ۴

۱ انرژی الکترون در تراز $n=۳$ را به دست می‌آوریم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_۳=\frac{-E_R}{۳^۲}\Rightarrow E_۳=\frac{-E_R}{۹}$$

۲ فرض می‌کنیم که الکترون بتواند این فوتون با انرژی $\frac{۳}{۳۶}E_R$ را جذب کرده و به ترازهای بالاتر برود.

$$E_n=E_۳+\frac{۳E_R}{۳۶}\Rightarrow E_n=\frac{-E_R}{۹}+\frac{۳E_R}{۳۶}\Rightarrow E_n=\frac{-E_R}{۳۶}$$

۳ شمارهٔ ترازی که در آن انرژی الکترون $-\frac{E_R}{۳۶}$ است حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}=-\frac{E_R}{۳۶}\Rightarrow n=۶$$

بنابراین الکترون با جذب این فوتون به تراز $n=۶$ گذار می‌کند.

B ۱۹۵۶ ۲

خط فکری انـرژی فوتون را به‌دسـت می‌آوریم. انرژی الکتـرون در تراز $n=۳$ را حساب می‌کنیم. یک بار فرض می‌کنیم که اگر الکترون این فوتون را جذب کند به کدام تراز بالاتر می‌رود. اگر برای این حالت پاسخی به‌دست آوردیم، حل مسئله تمام است. در غیر این صورت باید حالتی را فرض کنیم که این فوتون سبب گسیل القایی می‌شود یعنی الکترون از تراز $n=۳$ به تراز پایین‌تر می‌رود.

۱ انرژی فوتون برابر است با:

$$E=hf \xrightarrow{f=۲۴۰THz=۲۴\times ۱۰^{۱۳}Hz} E=۴\times ۱۰^{-۱۵}\times ۲۴\times ۱۰^{۱۳} \Rightarrow E=۰/۹۶eV$$

۲ انرژی الکترون در تراز $n=۳$ را به‌دست می‌آوریم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲} \xrightarrow{E_R=۱۳/۵eV} E_۳=\frac{-۱۳/۵}{۳^۲} \Rightarrow E_۳=-۱/۵eV$$

۳ فـرض می‌کنیـم الکتـرون، فوتون با انـرژی $۰/۹۶eV$ را جذب می‌کنـد. در این صورت انرژی آن خواهد شد. $E=-۱/۵+۰/۹۶=-۰/۵۴eV$

۴ انرژی $-۰/۵۴eV$ را در رابطهٔ انرژی الکترون در مدل اتمی بور قرار می‌دهیم. اگر عدد طبیعی به‌دسـت آمد جواب مسئله است و اگر n عدد طبیعی نشد یعنی الکترون این فوتون را جذب نمی‌کند.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲} \Rightarrow -۰/۵۴=\frac{-۱۳/۵}{n^۲} \Rightarrow n^۲=۲۵ \Rightarrow n=۵$$

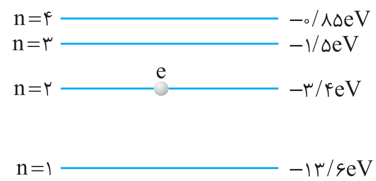
در نتیجه الکترون با جذب این فوتون به تراز $n=۵$ می‌رود.

B ۱۹۵۷ ۴

۱ انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{۱۲۰۰}{۸۰۰} \Rightarrow E=۱/۵eV$$

۲ بـه انـرژی ترازهـا دقت کنیـد. اختلاف انـرژی هیچ دو تراز $۱/۵eV$ نمی‌شـود. بنابراین بدون هیچ اتفاقی فوتون از اتم عبور می‌کند.



B ۱۹۵۸ ۲

همواره بسـامد موج منتشـر شده در محیط با بسامد چشـمهٔ موج برابر است. در حرکت شـتابدار الکترون به گرد هسته، الکترون به عنوان چشـمهٔ امواج الکترومغناطیسی عمل می‌کنـد. بنابراین در هر لحظه بسـامد (و دوره) موج الکترومغناطیسـی گسـیلی توسط الکترون با بسامد مداری حرکت الکترون برابر است.

بنا به نظریهٔ فیزیک کلاسـیک، با گسـیل موج الکترومغناطیسـی توسط الکترون، الکترون انرژی از دست می‌دهد و به هسته نزدیک‌تر شده بسامد مداری آن و همچنین بسامد امواج الکترومغناطیسی گسیلی الکترون افزایش می یابد. $f'>f \xrightarrow{f=\frac{۱}{T}} f'>\frac{۱}{T}$

B ۱۹۵۹ ۲

یادآوری رشتهٔ پاشن به معنی گذار الکترون از ترازهای بالاتر به تراز $n'=۳$ است و بلندترین آن هنگامی است که الکترون از تراز $n=۴$ به تراز $n'=۳$ پرش کند.

۱ شعاع مدار الکترون:

$$r_n=n^۲a_۰ \begin{cases} \xrightarrow{n=۳} r_۳=۹a_۰ \\ \xrightarrow{n=۴} r_۴=۱۶a_۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{r_۳}{r_۴}=\frac{۹a_۰}{۱۶a_۰} \Rightarrow \frac{r_۳}{r_۴}=\frac{۹}{۱۶}$$

۲ انرژی الکترون:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲} \begin{cases} \xrightarrow{n=۳} E_۳=-\frac{E_R}{۹} \\ \xrightarrow{n=۴} E_۴=-\frac{E_R}{۱۶} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_۳}{E_۴}=\frac{۱۶}{۹}$$

B ۱۹۶۰ ۱

طول موج‌های رشـتهٔ بالمر در ناحیهٔ مرئی و فرابنفش بوده اما طول موج‌های رشـتهٔ پفوند و پاشـن و براکت در ناحیهٔ فروسـرخ اسـت و انـرژی فوتون‌های آن از انـرژی فوتون‌های رشـتهٔ بالمـر کمتر بـوده و چنانچه کوتاه‌ترین طول موج رشـتهٔ بالمر نتواند سـبب پدیدهٔ فوتوالکتریک شـود فوتون‌های رشـتهٔ پفوند، پاشـن و براکت نیز قادر به انجام این پدیده نخواهد بود اما فوتون‌های سـری لیمان در ناحیه فرابنفش هسـتند و در این سری انرژی فوتون‌ها از تمام فوتون‌های سـری بالمر بیشـتر بوده و ممکن اسـت کوتاه‌ترین طول موج (یعنی پر انرژی‌ترین فوتون‌های) سری لیمان بتوانند سبب پدیده فوتوالکتریک شوند.

بازی با سؤال **اگر کوتاه‌ترین طول موج سری بالمر قادر به انجام پدیدهٔ فوتوالکتریک در سـلولی معین نباشـد، بلندترین طول موج کدام سری، احتمالاً قادر به انجام این پدیده خواهد بود؟**

۱) لیمان ۲) پاشن ۳) براکت ۴) پفوند

پاسخ **کوتاه‌تریـن طـول موج سـری بالمر هنگام گـذار الکتـرون از تراز $n=\infty$ بـه $n=۲$ بـوده و در ناحیهٔ فرابنفش اسـت. طول موج‌های رشـته‌های پاشـن، براکت و پفوند همگی در ناحیهٔ فروسرخ هسـتند و انرژی فوتون آن‌ها از انرژی فوتون بالمر کمتر اسـت و نمی‌توانند سـبب پدیدهٔ فوتوالکتریک شوند. اما در رشتهٔ لیمان، فوتون‌ها در ناحیه فرابنفش هستند و ممکن است بتوانند سبب اثر فوتوالکتریک شوند.** گزینهٔ ۱

B ۱۹۶۱ ۲

نکته طـول موج‌های گسـیلی در رشـتهٔ بالمـر هرگاه از تـراز $n=۶$، $n=۵$، $n=۴$ و $n=۳$ به تراز $n'=۲$ می‌روند، در ناحیهٔ نور مرئی هستند.

با گذار از تراز $n_۱=۵$ به $n_۲=۲$، یک فوتون گسیل می‌شود که انرژی آن برابر اختلاف انرژی دو تراز است، انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم:

$$E=E_۱-E_۲ \xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^۲}} \text{انرژی فوتون}=E_۱-E_۲=-\frac{E_R}{۵^۲}-(-\frac{E_R}{۲^۲})$$

$$\Rightarrow \text{انرژی فوتون}=-\frac{۱۳/۶}{۲۵}+\frac{۱۳/۶}{۴}=-۰/۵۴۴+۳/۴=۲/۸۵۶eV$$

و گزینهٔ (۲) درست است.

البته اگر به گزینه‌ها دقت کنید نیاز به محاسبهٔ عددی نیست. زیرا تنها در گذار از $n=۵$ به $n'=۲$ نور مرئی گسیل می‌شود و اگر الکترون از ۵ به ۴ و از ۴ به ۳ و از ۳ به ۲ برود دو فوتون فروسرخ و یک فوتون مرئی گسیل می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست هستند.

B ۱۹۶۲ ۱

یادآوری نیـروی الکتریکـی بین دو بار بنـا به قانون کولـن $(F=k\frac{q_۱q_۲}{r^۲})$ با مربع فاصلهٔ نسبت وارون دارد.

خط فکری در حـل مسـئله باید، شـعاع مدار الکتـرون در مدارهـای ۱ و ۲ و ۳ را به‌دست بیاورید تا بتوانید در مورد نیروی الکتریکی بین هسته و الکترون اظهارنظر کنید.

۱ شعاع مدارها را حساب می‌کنیم.

$$r_n=a_۰n^۲ \begin{cases} \xrightarrow{n=۱} r_۱=a_۰ \\ \xrightarrow{n=۲} r_۲=۴a_۰ \\ \xrightarrow{n=۳} r_۳=۹a_۰ \end{cases}$$

۲ نیروی الکتریکی بین هسـته و الکترون را حسـاب می‌کنیم، بار هسته $(q_۱=e)$ و بار الکترون $(q_۲=-e)$ است.

$$F=\frac{k|q_۱||q_۲|}{r^۲} \begin{cases} \xrightarrow{n=۱} F_۱=\frac{ke^۲}{(a_۰)^۲}=k\frac{e^۲}{a_۰^۲} \\ \xrightarrow{n=۲} F_۲=k\frac{e^۲}{(۴a_۰)^۲}=k\frac{e^۲}{۱۶a_۰^۲} \\ \xrightarrow{n=۳} F_۳=k\frac{e^۲}{(۹a_۰)^۲}=\frac{ke^۲}{۸۱a_۰^۲} \end{cases}$$

۳ در فرض مسئله تغییر نیروی الکتریکی از تراز $n=1$ به تراز $n=2$ برابر F در نظر گرفته شده است. یعنی

$$F=F_1-F_2=\frac{ke^2}{a_0^2}-\frac{ke^2}{16a_0^2}\Rightarrow F=\frac{15}{16}k\frac{e^2}{a_0^2}$$

۴ اکنون نسبت $\frac{F_3}{F}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{F_3}{F}=\frac{\frac{ke^2}{81a_0^2}}{\frac{15}{16}k\frac{e^2}{a_0^2}}\Rightarrow\frac{F_3}{F}=\frac{16}{81\times15}=\frac{16}{1215}$$

B | ۱۹۶۳ | ۳

۱ انرژی ترازهای اتم هیدروژن برابر $\frac{-E_R}{n^2}$ است که n شماره تراز است. انرژی ترازهای m و $m-1$ را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases}\text{در تراز } m-1\Rightarrow E=\frac{-E_R}{(m-1)^2}\\ \text{در تراز } m\Rightarrow E'=\frac{-E_R}{m^2}\end{cases}\Rightarrow E_1=|E-E'|=|\frac{-E_R}{(m-1)^2}-(\frac{-E_R}{m^2})|$$

$$\Rightarrow E_1=|\frac{E_R}{m^2}-\frac{E_R}{(m-1)^2}|\Rightarrow E_1=\frac{E_R}{m^2}-\frac{E_R}{(m-1)^2}$$

$$\Rightarrow E_1=\frac{E_R|(m-1)^2-m^2|}{m^2(m-1)^2}\Rightarrow E_1=\frac{E_R(1-2m)}{m^2(m-1)^2}\qquad(I)$$

۲ انرژی در ترازهای m و $m+1$ را حساب کرده اختلاف آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\text{در تراز } m\Rightarrow E'=\frac{-E_R}{m^2}\\ \text{در تراز } m+1\Rightarrow E''=\frac{-E_R}{(m+1)^2}\end{cases}\Rightarrow E_2=|E'-E''|=\frac{E_R(2m+1)}{m^2(m+1)^2}$$

$$\Rightarrow E_2=\frac{E_R(2m+1)}{m^2(m+1)^2}\qquad(II)$$

نسبت $\frac{E_1}{E_2}$ خواهد شد:

$$(I),(II)\Rightarrow\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{E_R(1-2m)}{m^2(m-1)^2}}{\frac{E_R(2m+1)}{m^2(m+1)^2}}\Rightarrow\frac{E_1}{E_2}=\frac{(1-2m)(m+1)^2}{(2m+1)(m-1)^2}$$

B | ۱۹۶۴ | ۲

خط فکری در حل این مسئله سریع‌ترین راه‌حل، رفتن به سراغ گزینه‌ها و بررسی آن‌ها است. البته یادمان هست که طول موج‌های نور مرئی بین $400nm$ برای بنفش و $700nm$ برای نور قرمز است. طول موج $1125\mathring{A}$ یعنی $\lambda=112/5nm$ مربوط به فرابنفش است $(112/5nm<400nm)$.

گزینهٔ (۱): گذار از $n=3$ به $n'=2$ مربوط به رشتهٔ بالمر است و نور گسیلی آن قرمز و در ناحیهٔ مرئی است و گزینهٔ (۱) درست نیست.

گزینهٔ (۲): طول موج در گذار الکترون از $n=3$ به $n'=1$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}(\frac{8}{9})$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{900}{8}=112/5nm=1125\mathring{A}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است. اما گزینهٔ (۳) مربوط به رشتهٔ پاشن بوده و نور فرابنفش گسیل نمی‌کند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

C | ۱۹۶۵ | ۱

خط فکری تقریباً با یک بازی ریاضی سروکار داریم که باید به کمک انرژی ترازهای اتم شمارهٔ ترازهای n، n' و n'' را مشخص کنیم و مسئله را حل کنیم.

۱ در گذار الکترون از تراز n به n' انرژی فوتون گسیلی $E=\frac{8}{9}E_R$ است. بنابراین:

$$E=E_n-E_{n'}\Rightarrow\frac{-E_R}{n^2}-(-\frac{E_R}{n'^2})=\frac{8}{9}E_R\Rightarrow\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{9}\Rightarrow\begin{cases}n=3\\n'=1\end{cases}$$

۲ بنابراین الکترون به تراز $n'=1$ جهش کرده است و حالا با دریافت فوتونی با انرژی $\frac{15}{16}E_R$ به تراز n'' می‌رود از این‌رو:

$$E=E_1-E_{n''}\Rightarrow\frac{15}{16}E_R=E_R-E_{n''}\Rightarrow E_{n''}=\frac{-E_R}{16}$$

$$\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}-\frac{E_R}{n''^2}=-\frac{E_R}{16}\Rightarrow n''^2=16\Rightarrow n''=4$$

۳ طول موج فوتونی که الکترون را از تراز $n=3$ به تراز $n=4$ می‌برد خواهد شد:

$$E_4-E_3=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow-\frac{E_R}{4^2}-(-\frac{E_R}{3^2})=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow-\frac{13/6}{16}+\frac{13/6}{9}=\frac{1200}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\frac{1200}{\lambda}=-0/85+1/51\Rightarrow\lambda=\frac{1200}{0/66}\sim1818nm$$

B | ۱۹۶۶ | ۳

خط فکری انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم، ابتدا فرض می‌کنیم که الکترون این انرژی را جذب می‌کند. بنابراین انرژی فوتون را با انرژی الکترون جمع می‌کنیم و انرژی الکترون را در رابطهٔ $E_n=-\frac{E_R}{n^2}$ قرار می‌دهیم تا n را به‌دست بیاوریم. اگر n عدد طبیعی به‌دست آمد، حل مسئله تمام است و اگر عدد به‌دست آمده عدد صحیح نبود باید به گسیل القایی برویم و بررسی کنیم که آیا اختلاف انرژی ترازهای پایین‌تر با انرژی فوتون یکی است یا نه؟ اگر یکی بود، گسیل القایی رخ می‌دهد و الکترون در اثر تحریک (القا) فوتون به تراز پایین‌تر می‌رود و اگر یکی نبود، فوتون روی اتم تأثیری نخواهد داشت و اتفاقی رخ نمی‌دهد. این یک اتم فرضی بوده و الکترون در تراز $n=2$ دارای انرژی $E_2=-2eV$ است.

۱ ابتدا انرژی فوتون تابیده شده به اتم را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow E=\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{800\times10^{-9}}\Rightarrow E=1/5eV$$

۲ حال فرض می‌کنیم که الکترون این فوتون را جذب می‌کند، در این صورت انرژی الکترون برابر خواهد شد با: $E_{n'}=-2+1/5=-0/5eV$

۳ اکنون باید بررسی کنیم آیا ترازی با انرژی $-0/5eV$ برای این الکترون وجود دارد یا نه؟

$$\begin{cases}E_n=-\frac{E_R}{n^2}\\E_{n'}=-\frac{E_R}{n'^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{n^2}{n'^2}\Rightarrow\frac{-0/5}{-2}=\frac{2^2}{n'^2}\Rightarrow n'=4$$

۴ برای n' یک عدد طبیعی به‌دست آمده، بنابراین تراز $n'=4$ دارای انرژی $-0/5eV$ بوده و الکترون با دریافت انرژی از تراز $n=2$ به تراز $n'=4$ می‌رود.

بازی با سؤال **در یک اتم فرضی تک‌الکترون، الکترون در تراز $n=2$ دارای انرژی $-3eV$ است. اگر به آن یک فوتون با طول موج $0/72$ میکرومتر بتابانیم چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ $(h=4\times10^{-15}eV.s\ ,\ c=3\times10^{8}m/s)$**

۱) الکترون با جذب انرژی فوتون به تراز $n=3$ می‌رود.

۲) اتفاقی رخ نمی‌دهد.

۳) الکترون با گسیل القایی به تراز $n=1$ می‌رود.

۴) الکترون با جذب انرژی فوتون به تراز $n=4$ می‌رود.

پاسخ ۱ **انرژی فوتون را حساب می‌کنیم.**

$$E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow E=4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^{8}}{0.72\times10^{-6}}\Rightarrow E=\frac{1.2}{0.72}=\frac{120}{72}$$

$$\Rightarrow E=\frac{10}{6}eV\Rightarrow E=\frac{5}{3}eV$$

۲ **حال فرض می‌کنیم این فوتون توسط الکترون جذب شود. انرژی الکترون پس از جذب فوتون برابر می‌شود با:** $E_{n'}=-3+\frac{5}{3}\Rightarrow E_{n'}=-\frac{4}{3}eV$

اکنون بررسی می‌کنیم، آیا ترازی با این انرژی وجود دارد یا نه؟

$$\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{\frac{-E_R}{n'^2}}{\frac{-E_R}{n^2}}\Rightarrow\frac{\frac{-4}{3}}{-3}=\frac{(2)^2}{n'^2}\Rightarrow n'=3$$

بنابراین الکترون با دریافت انرژی فوتون از تراز $n=2$ به تراز $n'=3$ برانگیخته می‌شود.

گزینهٔ ۱

C ۱۹۶۷ ۳

۱ ابتدا انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم:

$$E=hf\Rightarrow E=4\times10^{-15}\times2.25\times10^{15}\Rightarrow E=9eV$$

۲ اگر الکترون این فوتون را جذب کند انرژی آن برابر $-3+9=+6eV$ می‌شود در حالی که در ترازهای اتمی، انرژی الکترون منفی بوده، بنابراین فوتون برای رفتن به ترازهای بالاتر این فوتون را جذب نمی‌کند و گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند.

۳ فرض می‌کنیم که الکترون با گسیل یک فوتون با انرژی $9eV$ به تراز پایین‌تر برود. در این صورت انرژی الکترون در تراز پایین‌تر برابر $-3-9=-12eV$ خواهد شد.

۴ اکنون باید بررسی کرد که انرژی الکترون در تراز $n'=1$ چند الکترون - ولت است:

$$\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{\frac{-E_R}{n'^2}}{\frac{-E_R}{n^2}}\Rightarrow\frac{E_1}{E_2}=\frac{2^2}{1^2}\Rightarrow\frac{E_1}{-3}=4\Rightarrow E_1=-12eV$$

۵ در این صورت الکترون تحت تأثیر فوتون، گسیل القایی انجام داده و به تراز پایهٔ $n'=1$ می‌رود.

در واقع انرژی فوتون $9eV$ برابر اختلاف انرژی ترازهای $n=2$ و $n'=1$ بوده و وقتی فوتون به این اتم می‌تابد سبب تحریک (القا) الکترون شده و الکترون با گسیل القایی از تراز ۲ به تراز ۱ رفته و یک فوتون با انرژی $9\,eV$ علاوه بر فوتون ورودی، ایجاد می‌کند.

C ۱۹۶۸ ۲

۱ ابتدا انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم:

$$E=hf=4\times10^{-15}\times6\times10^{14}\Rightarrow E=2.4eV$$

۲ اگر الکترون این فوتون را جذب کند، انرژی آن برابر $-1.5+2.4=0.9eV$ می‌گردد. می‌دانیم انرژی الکترون در ترازهای اتمی منفی است و الکترون این فوتون را جذب نمی‌کند و به ترازهای بالاتر اتمی نمی‌رود، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۳ اگر الکترون تحت تأثیر این فوتون، گسیل القایی انجام دهد، با گسیل یک فوتون با انرژی $2.4eV$ به تراز پایین می‌رود و انرژی الکترون در تراز پایین‌تر برابر $-1.5-2.4=-3.9eV$ می‌شود.

۴ اکنون باید مشخص کرد که ترازی با این انرژی وجود دارد یا نه:

$$\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{\frac{-E_R}{n'^2}}{\frac{-E_R}{n^2}}\Rightarrow\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{n^2}{n'^2}\Rightarrow\frac{-3.9}{-1.5}=\frac{3^2}{n'^2}\Rightarrow n'^2=3.46$$

کاملاً مشخص است که n' عدد طبیعی نیست بنابراین گسیل القایی نیز رخ نمی‌دهد و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند. در نتیجه با تاباندن این فوتون اتفاقی رخ نمی‌دهد و فوتون هیچ‌گونه تأثیری بر این اتم نخواهد داشت.

پنجره ۱ روبه‌روی ۲

A ۱۹۶۸ ۴

۱ با توجه به رابطهٔ انرژی فوتون، طول موج را حساب می‌کنیم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{h=4\times10^{-15}eVs,\,E=2\times10^{3}eV}2\times10^{3}=\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{\lambda}$$

$$\lambda=6\times10^{-10}m\Rightarrow\lambda=0.6nm$$

نمای ۲

B ۱۹۶۸ ۲

۲ **خط فکری** مسئلهٔ ساده‌ای است کافی است ابتدا به کمک تعریف توان $(P=E/t)$ انرژی گسیلی در مدت یک دقیقه را حساب کرده سپس به کمک رابطهٔ اینشتین، تعداد فوتون‌ها را به‌دست بیاورید.

انرژی که لامپ با این نور تک‌رنگ در مدت t گسیل می‌کند برابر است با:

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=P.t\qquad(1)$$

از طرفی بنا بر رابطهٔ اینشتین برای اثر فوتوالکتریک انرژی کل گسیلی برابر است با:

$$E=nhf\qquad(2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم و داده‌های مسئله را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$Pt=nhf\xrightarrow[h=6.6\times10^{-34}J.s,\,f=6\times10^{14}Hz]{t=60s,\,P=33W}$$

$33\times60=n\times6.6\times10^{-34}\times6\times10^{14}\Rightarrow n=5\times10^{21}$ فوتون

نمای ۲

A ۱۹۶۸ ۴

۳ **خط فکری** موفقیت‌های مدل اتمی بور:

۱ تبیین پایداری اتم

۲ توجیه طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن اتمی و اتم‌های هیدروژن گونه

۳ محاسبه انرژی یونش اتم هیدروژن بر مبنای گسسته بودن ترازهای انرژی الکترون در اتم

نارسایی‌های مدل اتمی بور:

۱ این مدل برای چرخش بیش از یک الکترون به دور هسته به کار نمی‌رود.

۲ عدم توجیه متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی

بنابراین با توجه به یادآوری بالا گزینهٔ (۴) صحیح است.

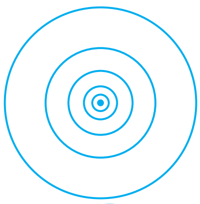
نمای ۸

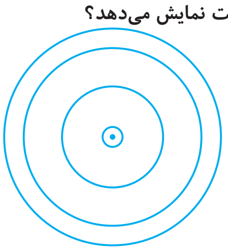
A ۱۹۶۸ ۲

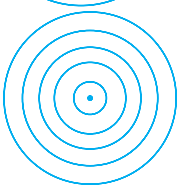
۴ **نکته** در مدل اتمی بور با افزایش شمارهٔ مدارها (ترازهای) اتم هیدروژن اختلاف انرژی ترازها کاهش می‌یابد.

اختلاف انرژی ترازها با افزایش n کاهش یافته و باید خطوط مدل‌سازی ترازهای انرژی به هم نزدیک‌تر رسم شوند و گزینهٔ (۲) درست است.

بازی با سؤال **بنا بر الگوی اتمی بور کدام شکل، مدارهای چرخشی الکترون به گرد هستهٔ اتم هیدروژن را درست نمایش می‌دهد؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) هیچ کدام

پاسخ **در الگوی اتمی بور، با افزایش شمارهٔ مدار و دور شدن از هسته، فاصلهٔ مدارهای چرخشی الکترون به گرد هسته بیشتر می‌شود.**

گزینهٔ ۱

نمای ۷

۵ B ۱۹۶۸ ۲

۱ انرژی الکترون در تراز $n=4$ و $n'=2$ را بنا به مدل اتمی بور به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow E_4=-\frac{E_R}{16}\ ,\ E_2=-\frac{E_R}{4}$$

۲ تغییر انرژی الکترون را به‌دست می‌آوریم:

$$E_2-E_4=-\frac{E_R}{4}-(-\frac{E_R}{16})\Rightarrow \Delta E_{2\to 4}=\frac{-3}{16}E_R$$

۳ درصد تغییرات انرژی الکترون خواهد شد:

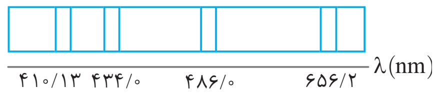
$$\text{درصد تغییرات انرژی}:\frac{\Delta E_{2\to 4}}{E_4}\times 100=\frac{\frac{-3}{16}E_R}{-\frac{E_R}{16}}\times 100=3\times 100=300\%$$

۴ الکترون با از دست دادن انرژی از تراز $n=4$ به تراز $n'=2$ می‌رود و انرژی آن کاهش می‌یابد.

نمای ۷

۶ B ۱۹۶۸ ۲

طول موج $656/2nm$ در ناحیهٔ مرئی است. در اتم هیدروژن طول موج‌های گسیلی رشتهٔ بالمر $(n'=2)$ مرئی هستند.



چهار عدد روی شکل مربوط به نور مرئی هستند که طول موج $656/2nm$ بلندترین طول موج است. بنابراین الکترون از تراز $n=3$ به تراز $n'=2$ جهش کرده است.

نمای ۷

۷ B ۱۹۶۸ ۱

انرژی فوتون گسیل شده برابر اختلاف انرژی دو تراز n و n' است.

$$E_n-E_{n'}=E_{\text{فوتون}}$$

با توجه به فرض مسئله انرژی فوتون ۲۴ برابر E_n است. یعنی الکترون در تراز n، $24E_n$ را از دست می‌دهد و به تراز n' می‌رود، بنابراین داریم:

$$E_n-E_{n'}=-24E_n$$ (علامت منفی به دلیل از دست دادن انرژی است.)

$$E_{n'}=25E_n\xrightarrow{E_n=\frac{E_R}{n^2}}\frac{-E_R}{n'^2}=25\frac{-E_R}{n^2}\Rightarrow n^2=25n'^2\Rightarrow n=5n'$$

بنابراین $n'=1$ (رشتهٔ لیمان) و $n=5$ است و طول موج گسیلی مربوط به چهارمین خط طیفی رشتهٔ لیمان است.

نمای ۷

۸ B ۱۹۶۸ ۱

۱ الکترون در تراز $n=4$ قرار دارد و بلندترین طول موجی که می‌تواند جذب کند برای گذار از $n=4$ به $n=5$ است. طول موج را به کمک رابطهٔ ریدبرگ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\xrightarrow{n'=4,\,n=5}\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{16}-\frac{1}{25})$$

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{25-16}{400})\Rightarrow\lambda=\frac{400}{9R}$$

۲ بلندترین طول موجی که الکترون در تراز $n=4$ می‌تواند گسیل کند، در تراز الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n=3$ گسیل می‌شود. طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=R(\frac{1}{9}-\frac{1}{16})=R(\frac{16-9}{144})\Rightarrow\lambda'=\frac{144}{7R}$$

۳ نسبت طول موج‌ها خواهد شد:

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\frac{400}{9R}}{\frac{144}{7R}}\Rightarrow\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{175}{81}$$

نمای ۷

۹ B ۱۹۶۸ ۳

۱ دومین خط طیف اتمی هیدروژن در رشتهٔ براکت یعنی گذار الکترون از تراز $n=6$ به تراز $n'=4$. طول موج گسیلی را به کمک رابطهٔ ریدبرگ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}(\frac{1}{16}-\frac{1}{36})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}(\frac{9-4}{144})$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{14400}{5}\Rightarrow\lambda=2880nm$$

۲ دومین خط طیف اتمی هیدروژن در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$ یعنی گذار الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n'=2$. طول موج گسیلی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{100}(\frac{1}{4}-\frac{1}{16})\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{100}(\frac{4-1}{16})\Rightarrow\lambda'=\frac{1600}{3}nm$$

۳ اختلاف طول موج‌ها برابر است با:

$$\lambda-\lambda'=2880-\frac{1600}{3}\Rightarrow\Delta\lambda=\frac{8640-1600}{3}\Rightarrow\Delta\lambda=\frac{7040}{3}nm$$

نمای ۵

۱۰ C ۱۹۶۸ ۴

۱ انرژی ۳۰ فوتون با طول موج $660nm$ را به‌دست می‌آوریم.

$$E=\frac{nhc}{\lambda}\Rightarrow E=30\times\frac{6/6\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{660\times10^{-9}}\Rightarrow E=9\times10^{-18}J$$

۲ شدت نور در محل مردمک را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{E}{A_{\text{مردمک}}t}\xrightarrow[r_{\text{مردمک}}=10^{-3}m]{A=\pi r^2}I=\frac{9\times10^{-18}}{\pi(10^{-3})^2}\Rightarrow I=\frac{9}{\pi}\times10^{-12}\frac{W}{m^2}$$

۳ اکنون به کمک تعریف شدت نور، فاصلهٔ d را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{P_{\text{چشمه}}}{A}\Rightarrow I=\frac{P_{\text{چشمه}}}{4\pi d^2}\xrightarrow{P_{\text{چشمه}}=3600W}\frac{9}{\pi}\times10^{-12}=\frac{3600}{4\pi d^2}$$

$$\Rightarrow d^2=10^{14}\Rightarrow d=10^{7}m=10^{4}km$$

نمای ۲

پنجرهٔ ۳

A ۱۹۶۹ ۴

برای یک عنصر با نماد شیمیایی X، نماد هسته به صورت $^A_ZX_N$ است که Z عدد اتمی (تعداد پروتون)، N تعداد نوترون و A عدد جرمی است، اما مشخص کردن N ضروری نیست و با توجه به رابطهٔ $A=Z+N$ می‌توان با مشخص بودن عدد جرمی و عدد اتمی تعداد نوترون را به‌دست آورد. همچنین می‌توان برای خلاصه نشان دادن نماد شیمیایی عدد اتمی (Z) را نیز نشان نداد، چون نماد شیمیایی عنصر نشان‌دهندهٔ مقدار Z نیز می‌باشد، برای مثال با نوشتن Al می‌فهمیم که این عنصر آلومینیوم می‌باشد که عدد اتمی آن همواره ۱۳ است، بنابراین هر سه شکل نوشته شده در گزینه‌ها درست‌اند اما نماد گزینه‌های (۲) و (۳) خلاصه‌تر هستند.

A ۱۹۷۰ ۲

ابعاد هستهٔ اتم حدود $10^{-15}m$ (یک فمتومتر یا یک فرمی) و ابعاد اتم حدود 10^{-10} متر (یک آنگستروم) است.

A ۱۹۷۱ ۳

برای نمایش یک عنصر از نماد ^A_ZX استفاده می‌شود که Z عدد اتمی عنصر و برابر با تعداد پروتون‌ها است و A عدد جرمی که برابر با مجموع پروتون‌ها و نوترون‌های درون هسته می‌باشد. بنابراین در $^{35}_{17}Cl$، عدد ۱۷ تعداد پروتون‌های درون هسته است.

بازی با سؤال هستهٔ اتم آهن $^{56}_{26}Fe$ چند نوکلئون دارد؟

۱) ۳۰　۲) ۵۶　۳) ۲۶　۴) ۱۵

پاسخ یادآوری به پروتون و نوترون، نوکلئون گویند و مجموع نوکلئون‌های هسته را عدد جرمی (A) می‌نامند. در $^{56}_{26}Fe$ تعداد نوکلئون ۵۶ است.

گزینهٔ ۲

A ۱۹۷۲ ۳

در نمادنویسی عنصر $^{A}_{Z}X_{N}$ ، N تعداد نوترون‌هاست. بنابراین تعداد نوترون‌های هسته $X_{۲۴}$ برابر ۲۴ واحد است.

با توجه به فرض مسئله، اختلاف تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها ۳ است و در هسته‌ها تعداد نوترون‌ها از تعداد پروتون‌ها بیشتر است. بنابراین: $N-Z=۳ \Rightarrow ۲۴-Z=۳ \Rightarrow Z=۲۱$

عدد جرمی برابر مجموع پروتون‌ها و نوترون‌ها است:

$$A=Z+N \Rightarrow A=۲۱+۲۴ \Rightarrow A=۴۵$$

A ۱۹۷۳ ۳

یادآوری بار الکتریکی همواره مضرب درستی از بار پایه $e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ است. $(Q=ne)$

بار مثبت هسته Q است، بنابراین تعداد پروتون‌های هسته خواهد شد:

$$Q=ne \Rightarrow n=\frac{Q}{e}$$

B ۱۹۷۴ ۲

۱ تعداد پروتون‌های هسته را به کمک بار الکتریکی هسته حساب می‌کنیم.

$$Q=Ze \Rightarrow ۶/۷۲\times۱۰^{-۱۸}=Z\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} \Rightarrow Z=\frac{۶۷/۲\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} \Rightarrow Z=۴۲$$

۲ با توجه به فرض مسئله $\frac{N}{Z}=\frac{۹}{۷}$ بوده، بنابراین: $\frac{N}{۴۲}=\frac{۹}{۷} \Rightarrow N=۵۴$

۳ عدد جرمی مجموع عدد اتمی (Z) و عدد نوترونی (N) است.

$$A=Z+N \Rightarrow A=۴۲+۵۴ \Rightarrow A=۹۶$$

A ۱۹۷۵ ۴

در واکنش‌های هسته‌ای، با تبدیل جرم به انرژی سر و کار داریم که مقدار این جرم بسیار کوچک است، به همین دلیل در فیزیک هسته‌ای به جای یکای کیلوگرم از یکای جرم اتمی استفاده می‌شود که عبارت است از $\frac{۱}{۱۲}$ جرم اتم کربن ۱۲ و جرم هر اتم کربن ۱۲ را برابر $۱۲/۰۰۰۰۰۰u$ در نظر می‌گیرند.

A ۱۹۷۶ ۳

نکته تعداد ذرات در کپسول از هر ماده برابر $N_a=۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۳}$ است که به آن عدد آواگادرو گویند.

یکای جرم اتمی (1u یا 1amu) برابر $\frac{۱}{۱۲}$ جرم اتم کربن ۱۲ است. جرم مولی کربن $^{۱۲}_{۶}C$ برابر 12g بوده، یعنی جرم $۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۳}$ اتم کربن 12g است. بنابراین $\frac{۱}{۱۲}$ جرم هر اتم کربن برابر است با:

$$1\,u=\frac{۱}{۱۲}\times\left(\frac{۱۲}{۱۰۰۰}\right)\left(\frac{۱}{۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۳}}\right)=۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}kg$$

این تست را با مراجعه به گزینه‌ها نیز می‌توان پاسخ داد: گزینهٔ (۴) عدد بسیار بزرگی است، بنابراین نادرست است. گزینهٔ (۱) نیز برای یکای جرم اتمی عدد بزرگی است، بنابراین نادرست است. گزینهٔ (۲) نیز بار الکتریکی الکترون و از طرفی ضریب تبدیل یکای انرژی الکترون - ولت به ژول است.

A ۱۹۷۷ ۲

یادآوری اتم‌ها با تعداد پروتون یکسان و تعداد نوترون‌های مختلف را ایزوتوپ (هم‌مکان) می‌نامند، زیرا همگی در جدول مندلیف یک خانه را اشغال می‌کنند.

ایزوتوپ‌ها به دلیل داشتن ساختار ترازهای الکترونی یکسان دارای خواص شیمیایی یکسان می‌باشند و ایزوتوپ‌ها دارای تعداد نوکلئون متفاوت هستند بنابراین هسته‌های متفاوت داشته و انرژی بستگی هستهٔ آن‌ها یکسان نخواهد بود و گزینهٔ (۲) نادرست بوده و جواب تست است. بار هستهٔ ایزوتوپ‌ها یکسان و تعداد نوکلئون‌هایشان متفاوت است، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) درست هستند.

A ۱۹۷۸ ۲

عناصری که دارای عدد اتمی یکسان هستند ایزوتوپ یک عنصر بوده و دارای تعداد الکترون‌های یکسان می‌باشند، از این‌رو رفتار شیمیایی یکسانی دارند، در سه مورد $^{۵۹}_{۲۶}Z$ و $^{۶۱}_{۲۶}X$ و $^{۶۱}_{۲۷}Y$، دو مورد $^{۵۹}_{۲۶}Z$ و $^{۶۱}_{۲۶}X$ ایزوتوپ یک عنصر بوده و دارای خواص شیمیایی یکسانی هستند. اما چون تعداد نوترون‌های آن‌ها متفاوت است دارای رفتار هسته‌ای متفاوت هستند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۹۷۹ ۳

اتم هر عنصر دارای تعداد مشخصی الکترون است، به‌طور مثال اتم اکسیژن دارای ۸ الکترون است و یا اتم اورانیوم دارای ۹۲ الکترون است. اما هر عنصر ممکن است ایزوتوپ‌های مختلفی داشته باشد؛ همین امر سبب می گردد که تعداد هسته‌های موجود در طبیعت از تعداد اتم‌های موجود در طبیعت بیشتر باشد.

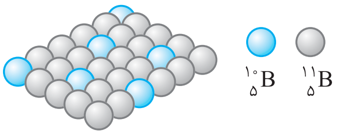
B ۱۹۸۰ ۴

نکته جرم اتمی درج شده در جدول تناوبی عناصر، میانگین جرم‌های اتمی ایزوتوپ‌های مختلف هر عنصر است.

با توجه به درصد فراوانی ایزوتوپ‌های $^{۱۱}_{۵}B$ و $^{۱۰}_{۵}B$، جرم اتمی بور را حساب می‌کنیم.

به شکل دقت کنید. از ۳۰ اتم بور ۶ اتم آن $^{۱۰}_{۵}B$ و ۲۴ اتم آن $^{۱۱}_{۵}B$ است بنابراین:

$$\frac{۶\times(۱۰)+۲۴\times(۱۱)}{۳۰}=۱۰/۸g$$



C ۱۹۸۱ ۴

عنصر دارای ۹ ایزوتوپ است و سنگین‌ترین ایزوتوپ $^{A}_{Z}X$ است. ایزوتوپ‌ها دارای عدد اتمی یکسان و عدد جرمی متفاوت (تعداد نوترون‌های متفاوت) هستند. حال فرض کنید ایزوتوپ‌ها به گونه‌ای هستند که هر ایزوتوپ با دیگری یک نوترون اختلاف داشته باشد. در این صورت عدد جرمی ایزوتوپ‌ها به‌صورت زیر است:

$$\underbrace{^{A}_{Z}X\ ,\ ^{A-۱}_{Z}X\ ,\ ^{A-۲}_{Z}X\ ,\ ^{A-۳}_{Z}X\cdots\ ^{A-۸}_{Z}X}_{\text{۹ ایزوتوپ}}$$
سبک‌ترین ایزوتوپ

بنابراین سبک‌ترین ایزوتوپ نمی‌تواند دارای عدد جرمی $A-۷$ باشد. حال اگر هر ایزوتوپ با ایزوتوپ دیگر ۲ نوترون تفاوت داشته باشد، سبک‌ترین ایزوتوپ خواهد شد.

$$\underbrace{^{A}_{Z}X\ ,\ ^{A-۲}_{Z}X\ ,\ ^{A-۴}_{Z}X\ ,\ ^{A-۶}_{Z}X\cdots\ ^{A-۱۶}_{Z}X}_{\text{۹ ایزوتوپ}}$$
سبک‌ترین ایزوتوپ

مشاهده می‌کنید که هرچه تفاوت نوترون‌ها در دو ایزوتوپ بیشتر شود، سبک‌ترین ایزوتوپ از $^{A-۸}_{Z}X$ سبک‌تر خواهد شد.

A ۱۹۸۲ ۴

نیروی هسته‌ای در مقایسه با نیروی کولنی نیرویی بسیار قوی‌تر است اما بُرد نیروی هسته‌ای کوتاه است و در ابعاد هستهٔ اتم $(۱۰^{-۱۵}m)$ عمل می‌کند. پس گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **نیروهای هسته‌ای .... و .... هستند و با افزایش تعداد پروتون‌ها در هسته، نقش نیروی .... بارزتر می‌شود.**

۱) قوی - کوتاه‌برد - کولنی
۲) قوی - دوربرد - هسته‌ای
۳) ضعیف - کوتاه‌برد - کولنی
۴) ضعیف - کوتاه‌برد - هسته‌ای

پاسخ **نیروهای هسته‌ای بین نوکلئون‌ها نسبت به نیروی دافعهٔ کولنی بین پروتون‌ها در هسته بسیار قوی‌تر بوده، از این رو آن را نیروی هسته‌ای قوی گویند. اما نیروی هسته‌ای کوتاه‌برد است و در هسته‌های سنگین که تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها زیاد شده و ابعاد هسته بزرگ می‌شود، نیروی دافعهٔ کولنی نقش پررنگ‌تری خواهد داشت.** گزینهٔ ۱

A ۱۹۸۳ ۴

نیروی هسته‌ای یک نیروی ربایشی بین نوکلئون‌های مجاور در هسته است. این نیرو کوتاه‌بُرد بوده و نسبت به نیروی الکتریکی رانشی پروتون‌ها بسیار قوی‌تر است، به همین علت آن را نیروی هسته‌ای قوی گویند.

A ۱۹۸۴ ۱

نیروی هسته‌ای یک نیروی کوتاه‌بُرد و ربایشی بین نوکلئون‌های هسته است. یعنی دو پروتون و یا دو نوترون و یا یک نوترون و یک پروتون همدیگر را با نیروی هسته‌ای می‌ربایند و این نیرو در فواصل یکسان برای همهٔ حالت‌های بیان شده یکسان است.

بازی با سؤال **نیروی هسته‌ای در فاصلهٔ یکسان بین کدام دو ذره بیشتر از مابقی است؟**

۱) پروتون - پروتون　۲) پروتون - نوترون

۳) نوترون - نوترون　۴) هر سه نیروی هسته‌ای یکسانی دارند.

پاسخ **نیروی هسته‌ای مستقل از بار ذره است، در واقع نیروی هسته‌ای بین دو پروتون و یک پروتون - یک نوترون با هم برابر است.** گزینه ۴

A ۱۹۸۵ ۳

نیروی هسته‌ای، قوی اما کوتاه‌برد است. به همین علت وقتی هسته سنگین و ابعاد آن بزرگ است، نیروی هسته‌ای بین نوکلئون‌های دور از هم بسیار ناچیز اما نیروی دافعهٔ کولنی بین پروتون‌ها همچنان باقی و قابل ملاحظه است که سبب ناپایداری هسته‌های سنگین می‌شود، به همین علت ابعاد هسته‌های پایدار دارای یك حد است.

A ۱۹۸۶ ۲

وقتی تعداد پروتون‌های درون هسته افزایش یابد، اگر هسته بخواهد پایدار بماند باید تعداد نوترون‌های درون هسته نیز افزایش یابد. البته هرچه هسته سنگین‌تر می‌شود افزایش تعداد نوترون‌ها از افزایش تعداد پروتون‌ها بیشتر است و نسبت $\frac{N}{Z}$ افزایش می‌یابد.

بازی با سؤال **کدام گزینه در مورد نسبت تعداد نوترون به پروتون $\left(\frac{N}{Z}\right)$ هسته‌های پایدار درست است؟**

۱) برای هسته‌های پایدار سنگین بیشتر از هسته‌های سبک است.

۲) برای هسته‌های پایدار سبک بیشینه از هسته‌های سنگین است.

۳) برای همهٔ هسته‌های پایدار تقریباً مساوی است.

۴) این نسبت به سنگین یا سبک بودن هسته‌های پایدار بستگی ندارد.

پاسخ **در هستهٔ عناصر در جدول تناوبی، عناصر تا $Z=30$ را عناصر سبک گویند که در آن‌ها $\frac{N}{Z}\approx 1$ و هسته‌های سنگین به عنصرهایی مانند اورانیوم، رادیم و غیره در انتهای جدول می‌گویند که نسبت $\frac{N}{Z}$ آن‌ها حدود ۱/۵ است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.** گزینه ۱

A ۱۹۸۷ ۳

محدودهٔ عدد اتمی عنصرهای موجود در طبیعت از $Z=1$ برای هیدروژن تا $Z=92$ برای اورانیوم می‌باشد و گزینهٔ (۱) درست است.

سنگین‌ترین عنصر پایدار بیسموت است $(Z=83)$ و هسته‌های بعد از آن ناپایدار هستند و گزینهٔ (۲) درست است.

از عناصر ناپایدار با $Z>83$ تنها توریم $(Z=90)$ و اورانیوم $(Z=92)$ در طبیعت یافت می‌شوند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

هرچه هسته بزرگ‌تر می‌شود (Z افزایش می‌یابد) تعداد نوترون‌ها به گونه‌ای افزایش می‌یابد که نسبت $\frac{N}{Z}$ زیاد می‌شود و گزینهٔ (۴) درست است.

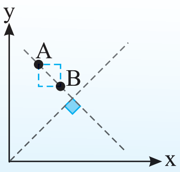
A ۱۹۸۸ ۲

بیسموت با عدد اتمی ۸۳ سنگین‌ترین هستهٔ پایدار است. اما عنصری که دارای بیشترین عدد اتمی، بیشترین نوترون و سنگین‌ترین هسته است، ایزوتوپ $^{238}_{92}U$ می‌باشد.

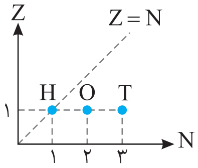
A ۱۹۸۹ ۳

ویژگی‌های هر اتم توسط تعداد الکترون‌های آن مشخص می‌شود و گزارهٔ (الف) درست است. ویژگی‌های هستهٔ هر اتم را تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های آن مشخص می‌کند و گزارهٔ (ب) نادرست است.

یادداشت ریاضی در صفحهٔ xoy، جمع مختصات $(x+y)$ تمام نقطه‌های روی خط عمود بر نیمساز عدد ثابتی است. به‌طور مثال اگر از A به B برویم به همان اندازه که x زیاد می‌شود، y کم شده و $x+y$ ثابت می‌ماند.



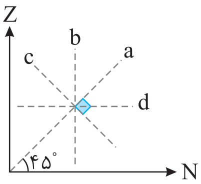
در نمودار $Z-N$ خط عمود بر نیمساز مشخص‌کنندهٔ عناصر با عدد جرمی یکسان است و گزارهٔ (پ) درست است.



در نمودار $Z-N$، ایزوتوپ‌های یک عنصر بر خط عمود بر محور Z واقع شده‌اند. مطابق شکل روبه‌رو اگر بر محور Z برای $Z=1$ خطی عمود کنیم تمام ایزوتوپ‌هایی که دارای یک پروتون هستند مانند هیدروژن، دوتریم، تریتیم و ... مشخص می‌شوند. یعنی هرگاه عمودی بر محور Z رسم کنیم، به تعداد نقاطی که روی این خط قرار می‌گیرد آن عنصر دارای ایزوتوپ است و گزارهٔ (ت) درست است.

در نتیجه ۳ گزاره از ۴ گزاره درست است.

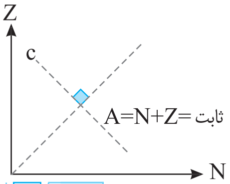
بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو نمودار عدد اتمی برحسب عدد نوترونی رسم شده است. عنصرهای روی کدام خط دارای عدد جرمی یکسان هستند؟**



۱) a　۲) b

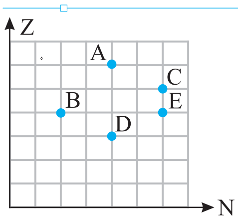
۳) c　۴) d

پاسخ **با توجه به نمودار عنصرهای روی خط c (خط عمود بر نیمساز) دارای عدد جرمی یکسان هستند.** $A=Z+N$



گزینه ۳

A ۱۹۹۰ ۱

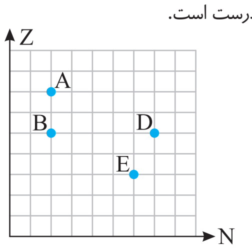


می‌دانیم تعداد پروتون‌های دو ایزوتوپ یکسان و تعداد نوترون‌های آن‌ها مختلف است. بنابراین با توجه به نمودار دو عنصر B و E که دارای عدد اتمی یکسان هستند، ایزوتوپ یکدیگرند.

A ۱۹۹۱ ۳

A و B دارای تعداد نوترون‌های برابرند اما عدد اتمی متفاوت دارند، بنابراین ممکن نیست که عدد جرمی آن‌ها $(A=Z+N)$ یکسان باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

D و B دارای عدد اتمی یکسان و عدد نوترونی متفاوت هستند و ایزوتوپ یکدیگرند و عدد جرمی یکسانی ندارند. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

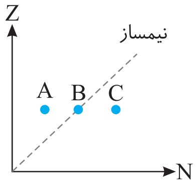


اگر به A و E دقت کنید تعداد نوترون‌های E، چهار واحد از تعداد نوترون‌های A بیشتر و تعداد پروتون‌های E چهار واحد از تعداد پروتون‌های A کمتر است؛ در این صورت عدد جرمی A و E $(A=Z+N)$ با هم برابر است و گزینهٔ (۳) درست است.

عنصر D یک نوترون و دو پروتون از عنصر E بیشتر دارد، بنابراین $A_D>A_E$ و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۱۹۹۲ | ۱

در نمودار عدد اتمی برحسب عدد نوترونی تمام هسته‌های عناصر طبیعی در سمت راست نیمساز قرار دارند زیرا در سمت راست نیمساز، تعداد پروتون‌ها از تعداد نوترون‌ها کمتر است و در سمت چپ تعداد پروتون‌ها از تعداد نوترون‌ها بیشتر است و اگر تعداد پروتون‌ها از نوترون‌ها بیشتر باشد، دافعهٔ الکتریکی بین پروتون سبب می‌گردد هسته‌ای از این دست وجود نداشته باشد. بنابراین ایزوتوپ A امکان وجود طبیعی ندارد.



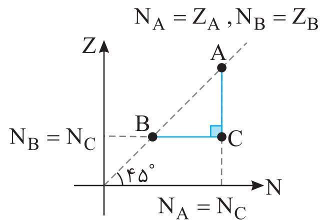
B ۱۹۹۳ | ۱

۱ عنصر B روی نیمساز نمودار $Z-N$ قرار دارد و عدد اتمی آن با عدد نوترونی آن برابر است:
$Z=N$

بنا به فرض مسئله عدد جرمی B ۴۰ است، از این‌رو:

$$B:\begin{cases}Z=N\\ Z+N=۴۰\end{cases}\Rightarrow Z=N=۲۰$$

۲ با توجه به نمودار عنصر C و عنصر B دارای عدد اتمی یکسان هستند و ایزوتوپ‌های یک عنصر می‌باشند و بنابراین عدد اتمی عنصر C نیز برابر ۲۰ است.



$Z_C=Z_B=۲۰$

۳ A روی نیمساز قرار دارد. از طرفی عدد اتمی A بنا به فرض مسئله ۲۵ است.
بنابراین:
$N_A=Z_A=۲۵$

۴ عنصر C و عنصر A با توجه به نمودار دارای عدد نوترونی برابر هستند و عدد نوترونی C خواهد شد:
$N_C=N_A=۲۵$

۵ عدد جرمی C را حساب می‌کنیم:

$$A_C=N_C+Z_C\Rightarrow A_C=۲۵+۲۰=۴۵$$

۶ اکنون نماد عنصر C را می‌نویسیم:
${}^{A_C}_{Z_C}C\Rightarrow {}^{۴۵}_{۲۰}C$

B ۱۹۹۴ | ۴

۱ به کمک بار هسته می‌توان تعداد پروتون‌های هسته (عدد اتمی) عنصر M را به‌دست آورد.
$Q=Ze\Rightarrow ۱/۲۸\times۱۰^{-۱۸}=Z_M(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\Rightarrow Z_M=۸$

۲ عنصر M روی نیمساز قرار دارد، بنابراین تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن یکسان است از این‌رو:
$N_M=Z_M=۸$

۳ عدد جرمی عنصر M خواهد شد: $A_M=Z_M+N_M=۸+۸\Rightarrow A_M=۱۶$

نکته تمام هسته‌هایی که روی خطی عمود بر نیمساز قرار دارند دارای عدد جرمی یکسان هستند.

۴ عنصر P روی خطی قرار دارد که شیب آن -۱ است، شیب نیمساز ۱ است بنابراین خط مورد نظر بر نیمساز عمود است.
بنابراین $A_P=A_M=۱۶$ است.

B ۱۹۹۵ | ۴

در یک هستهٔ اتم کربن ${}^{۱۲}_{۶}C$ تعداد پرتون‌ها و نوترون‌ها به صورت $A=Z+N=۱۲$ است، بنابراین حجم اشغالی یک هستهٔ کربن برابر است با:

$$V_{\text{هسته}}=۱۲\times\frac{۴}{۳}\pi r^۳=۱۶\pi(۱۰^{-۱۵})^۳=۱۶\pi\times۱۰^{-۴۵}=۴۸\times۱۰^{-۴۵}m^۳$$

گنجایش توپ تنیس برابر است با:

$$V_{\text{توپ}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۴}{۳}\times۳\times(۳\times۱۰^{-۲})^۳=۴\times۲۷\times۱۰^{-۶}m^۳$$

$$n=\frac{V_{\text{توپ}}}{V_{\text{هسته}}}=\frac{۴\times۲۷\times۱۰^{-۶}}{۴۸\times۱۰^{-۴۵}}=۲/۲۵\times۱۰^{۳۹}\sim۱۰^{۳۹}$$

بازی با سؤال جرم نوترون‌هایی را که می‌توان کنار هم درون یک جعبه کبریت به ابعاد $۶cm\times۴cm\times۲cm$ قرار داد، تقریباً چند کیلوگرم است؟ (شعاع و جرم نوترون تقریباً $۱۰^{-۱۵}m$ و $۱۰^{-۲۷}kg$ است و $\pi=۳$.) از کتاب درسی

۱) $۱۰^{۵}$ ۲) $۱۰^{۱۳}$ ۳) $۱۰^{۲۰}$ ۴) $۱۰^{۲۵}$

پاسخ حجمی که هر نوترون اشغال می‌کند، برابر است با:

$$V_{\text{نوترون}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳_{\text{نوترون}}=۴\times(۱۰^{-۱۵})^۳=۴\times۱۰^{-۴۵}m^۳$$

گنجایش قوطی کبریت برابر است با: $V=۶\times۴\times۲\times۱۰^{-۶}m^۳=۴/۸\times۱۰^{-۵}m^۳$

تعداد نوترون‌هایی که در این قوطی جای می‌گیرند برابر است با:

$$n=\frac{V}{V_{\text{نوترون}}}=\frac{۴/۸\times۱۰^{-۵}}{۴\times۱۰^{-۴۵}}=۱/۲\times۱۰^{۴۰}$$

بنابراین $۱/۲\times۱۰^{+۴۰}$ نوترون در این قوطی جای می‌گیرند و می‌دانیم جرم هر نوترون برابر $۱۰^{-۲۷}kg$ است.

$$m_{\text{کل}}=nm_{\text{نوترون}}=۱/۲\times۱۰^{+۴۰}\times۱۰^{-۲۷}=۱/۲\times۱۰^{۱۳}kg\Rightarrow M_{\text{کل}}\sim۱۰^{۱۳}kg$$

گزینهٔ ۲

A ۱۹۹۶ | ۳

آزمایش نشان می‌دهد جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر است. طبق رابطهٔ اینشتین $(E=\Delta mc^۲)$ هنگام تشکیل هسته، این اختلاف جرم به انرژی تبدیل می‌شود که آن را انرژی بستگی می‌نامند.

A ۱۹۹۷ | ۳

جرم هستهٔ اتم از جرم نوکلئون‌های آن کمتر است. این کاستی جرم به انرژی بستگی هسته تبدیل می‌شود. بنابراین منشأ انرژی بستگی هسته، تبدیل جرم به انرژی است.

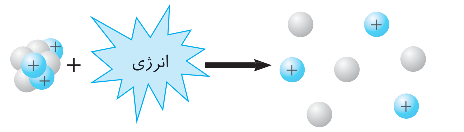
A ۱۹۹۸ | ۳

فرض کنید می‌خواهیم نوکلئون‌های یک هسته را از هم جدا کنیم، در این صورت باید به نوکلئون‌ها انرژی داده شود تا از هسته جدا شوند. بنابراین هنگام تشکیل هسته که نوکلئون‌ها کنار هم قرار می‌گیرند، باید نوکلئون‌ها انرژی از دست داده باشند. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

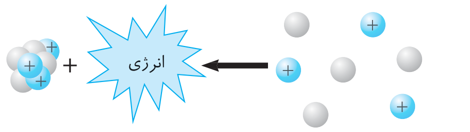
A ۱۹۹۹ | ۳

در شکل (الف) به جهت پیکان دقت کنید شکل (الف) واپاشی یک هسته به نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده‌اش را با دریافت انرژی نشان می‌دهد و این طرحواره می‌تواند درست باشد.

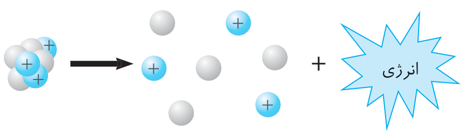
(الف)



(ب)



(پ)



در شکل (ب) با توجه به جهت پیکان، تعدادی نوکلئون یک هسته تشکیل داده‌اند و مقداری انرژی آزاد کرده‌اند که سبب کاستی جرم هسته می‌شود. بنابراین طرحواره شکل (ب) نیز درست است. شکل (پ) هیچ‌گونه مفهوم فیزیکی را به ما ارائه نمی‌دهد.

A ۲۰۰۰ | ۳

در یک هستهٔ پایدار، مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هسته از جرم هسته بیشتر است و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۰۰۱ | ۳

جرم هر اتم از مجموع جرم ذره‌های تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر است، همچنین جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر است، بنابراین جرم هستهٔ هلیم که دارای دو پروتون و دو نوترون است، از مجموع جرم دو نوترون و دو پروتون کمتر است.

B ۲۰۰۲ | ۱

اندازه‌گیری‌های تجربی نشان می‌دهد، جرم هستهٔ اتم از جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر است. در واقع برای تشکیل هسته، مقداری انرژی لازم است که از تبدیل بخش کوچکی از جرم نوکلئون‌ها به انرژی تأمین می‌شود که به آن انرژی بستگی هسته گویند.

$$E=\Delta Mc^۲\Rightarrow E=[(NM_n+ZM_p)-M_X]c^۲$$

بنابراین هرچه اختلاف مجموع جرم نوکلئون‌ها با جرم هسته بیشتر باشد، انرژی بستگی هسته بیشتر است و هسته پایدارتر است.

A ۲۰۰۳ | ۴

کاستی جرم هسته برابر تفاضل مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هسته و جرم هسته است. بنابراین باید مجموع جرم نوکلئون‌های هستهٔ کربن ${}^{۱۲}_{۶}C$ را به‌دست آوریم $(۶m_p+۶m_n)$ سپس جرم هستهٔ کربن را از آن کم کرد.

$$\Delta m=(۶m_p+۶m_n)-m_C$$

A ۲۰۰۴ | ۱

با توجه به رابطهٔ اینشتین خواهیم داشت:

$$E=mc^۲\Rightarrow E=۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\times(۳\times۱۰^۸)^۲$$

$$\Rightarrow E=۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\times۹\times۱۰^{۱۶}=۱۵/۰۳\times۱۰^{-۱۱}\approx۱/۵\times۱۰^{-۱۰}J$$

A ۲۰۰۵ | ۲

بنا بر نظریهٔ اینشتین، جرم و انرژی صورت‌های مختلف یک کمیت فیزیکی هستند و رابطهٔ $E=mc^۲$ بین آن‌ها برقرار است که در آن c سرعت نور است.

$$E=mc^۲\xrightarrow{E=۷/۲\times۱۰^{-۱۲}J,\ c=۳\times۱۰^۸m/s}۷/۲\times۱۰^{۱۲}=m\times(۳\times۱۰^۸)^۲$$

$$\Rightarrow m=\frac{۷/۲\times۱۰^{۱۲}}{۹\times۱۰^{۱۶}}=۰/۸\times۱۰^{-۴}kg\Rightarrow m=۰/۰۸g$$

A ۲۰۰۶ | ۲

۱ جرمی که به انرژی تبدیل می‌شود را برحسب kg می‌نویسیم:

$$m=۱\mu g=۱۰^{-۶}g=۱۰^{-۶}\times۱۰^{-۳}kg\Rightarrow m=۱۰^{-۹}kg$$

۲ ابتدا با استفاده از رابطهٔ اینشتین، انرژی حاصل از تبدیل ۱ میکروگرم جرم به انرژی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=mc^۲=(۱\times۱۰^{-۹})\times(۳\times۱۰^۸)^۲=۹\times۱۰^۷J=۹\times۱۰^۴kJ$$

۳ حال مقدار نفت مورد نیاز برای تولید ۹×۱۰^۴kJ انرژی را با یک تناسب ساده حساب می‌کنیم:

نفت	انرژی
$۱g$	$۵۰kJ$
m'	۹×۱۰^۴kJ

$$\Rightarrow m'=\frac{۹\times۱۰^۴}{۵۰}=۱/۸\times۱۰^۳g=۱/۸kg$$

A ۲۰۰۷ | ۴

۱ انرژی حاصل از تبدیل ۴ گرم ماده به انرژی را به کمک رابطهٔ اینشتین به‌دست می‌آوریم:

$$E=mc^۲\Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۳}\times(۳\times۱۰^۸)^۲\Rightarrow E=۳۶\times۱۰^{۱۳}J$$

۲ مقدار انرژی‌ای که هر لامپ ۱۰۰ واتی در مدت ۲۰ ساعت مصرف می‌کند را حساب می‌کنیم:

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=۱۰۰\times۲۰\times۳۶۰۰\Rightarrow E=۷/۲\times۱۰^۶J$$

۳ بنابراین تعداد لامپ‌ها را به کمک یک تناسب ساده می‌توان حساب کرد:

۱ لامپ	$۷/۲\times۱۰^۶$
n لامپ	۳۶×۱۰^{۱۳}

$$\Rightarrow n=\frac{۳۶\times۱۰^{۱۳}}{۷/۲\times۱۰^۶}\Rightarrow n=۵\times۱۰^۷=۵۰۰۰۰۰۰۰$$

A ۲۰۰۸ | ۱

خط فکری به کمک رابطهٔ اینشتین، مقدار انرژی حاصل از تبدیل یک گرم جرم به انرژی را حساب کنید، سپس به کمک رابطهٔ انرژی پتانسیل گرانشی $U=mgh$ جرمی را که با این انرژی می‌توان به ارتفاع صدمتری برد به‌دست بیاورید.

۱ ابتدا انرژی حاصل از یک گرم را به‌دست می‌آوریم:

$$E=mc^۲\Rightarrow E=۱۰^{-۳}\times(۳\times۱۰^۸)^۲\Rightarrow E=۹\times۱۰^{۱۳}J$$

۲ اکنون مقدار جرمی را که می‌توان با این انرژی به ارتفاع صد متر بالا برد به‌دست می‌آوریم:

$$E=mgh\Rightarrow۹\times۱۰^{۱۳}=m\times۱۰\times۱۰۰\Rightarrow m=۹\times۱۰^{۱۰}kg$$

$$\Rightarrow m=۹۰\times۱۰^۶\ \text{تن}\Rightarrow m=۹۰\ \text{میلیون تن}$$

A ۲۰۰۹ | ۱

با توجه به رابطهٔ $E=mc^۲$ داریم:

$$\begin{cases}E=۱u\times c^۲=۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}\times۹\times۱۰^{۱۶}=۱/۴۹\times۱۰^{-۱۰}J\\ ۱J=۶/۲۵\times۱۰^{۱۸}eV=۶/۲۵\times۱۰^{۱۲}MeV\end{cases}$$

$$\Rightarrow E=۱/۴۹\times۱۰^{-۱۰}\times۶/۲۵\times۱۰^{۱۲}\simeq۹۳۱/۵MeV$$

نکته این تبدیل که انرژی معادل جرم $۱u$ برابر است با: $۹۳۱/۵MeV$ بهتر است به خاطر سپرده شود.

A ۲۰۱۰ | ۳

انرژی بستگی برابر است با جرم کاستی هسته (Δm) ضرب در مجذور سرعت نور $(c^۲)$، بنابراین:

$$\frac{(\Delta mc^۲)_{\text{کربن}}}{(\Delta mc^۲)_{\text{دوتریم}}}=\frac{\Delta m_{\text{کربن}}}{\Delta m_{\text{دوتریم}}}=\frac{۰/۰۹}{۰/۰۱۵}=\frac{۹۰}{۱۵}=۶$$

A ۲۰۱۱ | ۳

هسته مانند اتم دارای ترازهای انرژی کوانتیده است و نوکلئون درون هسته نمی‌تواند هر انرژی دلخواهی را اختیار کند و گزارهٔ (الف) درست است. اختلاف انرژی ترازهای نوکلئون در هسته از مرتبهٔ MeV و ترازهای انرژی الکترون در اتم از مرتبهٔ eV است، بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

نوکلئون‌ها می‌توانند با جذب انرژی در هسته به ترازهای انرژی بالا بروند و هسته برانگیخته شود، بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

اختلاف انرژی ترازهای هسته از مرتبهٔ MeV (مگاالکترون‌ولت) است و گزارهٔ (ت) نادرست است.

A ۲۰۱۲ | ۳

نکته پرتو الکترومغناطیسی که هسته گسیل می‌کند همواره پرتو گاما است.

بدون حل کاملاً مشخص است که پرتو گسیل شده از هسته قطعاً گاما است و گزینهٔ (۳) درست است. اما اگر بخواهیم طول موج پرتو را به‌دست بیاوریم خواهیم داشت:

$$E=hf\Rightarrow E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow۴\times۱۰^{+۶}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=۶/۴\times۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times۱۰^۸}{\lambda}$$

$$\lambda=۳\times۱۰^{-۱۳}m=۳\times۱۰^{-۴}nm$$

طول موج فرابنفش حدود $۴۰۰nm$ است و طول موج فروسرخ و رادیویی از $۷۰۰nm$ بیشتر است، بنابراین این طول موج مربوط به پرتو گاما است.

پنجرهٔ دو جداره

A ۲۰۱۳ | ۲

کاستی جرم هسته را به‌دست می‌آوریم: $۳/۰۲۴۵-۳/۰۱۳۶=۰/۰۱۰۹$

انرژی بستگی هسته خواهد شد: $۰/۰۱۰۹\times۹۳۱/۵\approx۱۰/۱۵MeV$

بازی با سؤال **انرژی بستگی یک هسته برابر $۳۱۰/۵MeV$ است. کاستی جرم هسته حدود چند u است؟** $(c=۳\times۱۰^۸m/s)$ از کتاب درسی

۱) ۰/۳۳ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۲۷ ۴) ۱/۴

پاسخ **نکته** انرژی حاصل از تبدیل جرمی معادل $1u$ به انرژی، برابر $۹۳۱/۵MeV$ است. کافی است انرژی بستگی را بر ۹۳۱/۵ تقسیم کنیم.

$$\frac{۳۱۰/۵}{۹۳۱/۵}=\frac{۱}{۳}\approx ۰/۳۳u$$

گزینه ۱

A ۲۰۱۴ ۲

تریتیم دارای سه نوکلئون است، از این‌رو انرژی بستگی هسته به ازای هر نوکلئون خواهد شد:

$$\frac{۱۰/۱۵}{۳}=۳/۳۸۳MeV$$

A ۲۰۱۵ ۲

۱ تغییر جرم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta M=M_{Ra}-(M_{Rn}+M_{He})\Rightarrow \Delta M=۲۲۳/۰۱۸-(۲۱۹/۰۰۹+۴/۰۰۳)$$

$$\Rightarrow \Delta M=۲۲۳/۰۱۸-۲۲۳/۰۱۲=۰/۰۰۶u$$

۲ به کمک رابطهٔ اینشتین انرژی آزاد شده را حساب می‌کنیم.

$$E=mc^۲\Rightarrow E=۰/۰۰۶\times۹۳۱/۵=۵/۵۸۹MeV$$

$$=۵/۵۸۹\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۱۰^{۶}=۸/۹۴۲۴\times۱۰^{-۱۳}J$$

بازی با سوال **در هسته‌های یک عنصر، جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هستهٔ آن $۰/۰۰۲u$ بیشتر از جرم خود هسته است و هر u (یکای جرم اتمی) معادل با $۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}kg$ است. انرژی بستگی هسته‌ای این عنصر چند ژول است؟** $(c=۳\times۱۰^{۸}m/s)$

۱) $۲/۹۸۸\times۱۰^{-۱۳}$ ۲) $۱/۴۹۴\times۱۰^{-۱۰}$

۳) $۷/۴۷\times۱۰^{-۸}$ ۴) $۱/۸\times۱۰^{-۱۴}$

پاسخ **تفاوت جرم هسته و نوکلئون‌ها به انرژی تبدیل می‌شود. تفاوت جرم را برحسب kg به‌دست می‌آوریم:**

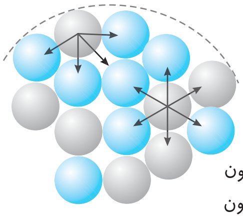
$$\Delta m=۰/۰۰۲\times۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}=۳/۳۲\times۱۰^{-۳۰}kg$$

$$E=\Delta mc^۲\Rightarrow E=۳/۳۲\times۱۰^{-۳۰}\times(۳\times۱۰^{۸})^۲\Rightarrow E=۲/۹۸۸\times۱۰^{-۱۳}J$$

گزینه ۱

B ۲۰۱۶ ۲

نکته قسمتی از هسته و نوکلئون‌های آن به صورت طرح‌واره نشان داده شده است. هر نوکلئون فقط به نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاورش نیروی هسته‌ای وارد می‌کند.

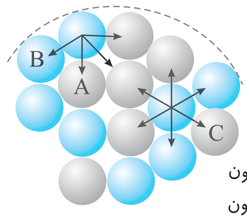


نیرویی که دو پروتون بر هم وارد می‌کنند:

۱ نیروی ربایشی هسته‌ای

۲ نیروی رانش الکتریکی

البته نیروی گرانش بین آن‌ها بسیار ناچیز هستند.



نیروی هسته‌ای پروتون‌های A و B بسیار قوی‌تر از نیروی الکتریکی بین آن‌ها است، زیرا این دو پروتون مجاور هم هستند، بنابراین نیروی خالص بین A و B ربایشی است. نیروی هسته‌ای نیروی کوتاه بُرد است، نیروی ربایشی هسته‌ای بین B و C کم است اما نیروی دافعهٔ الکتریکی نیروی بلندبُردتری است. بنابراین دافعهٔ الکتریکی بین دو پروتون B و C از ربایش هسته‌ای بیشتر است و نیروی خالص رانشی است.

پنجره ۲ روبه‌روی ۳

A ۲۰۱۶ ۳

۱ با توجه به بردارهای نیروی رسم شده در شکل، نیروی هسته‌ای بین دو نوترون و یا دو پروتون و یا یک نوترون و یک پروتون وجود دارد یعنی از دید نیروی هسته‌ای تفاوتی بین پروتون و نوترون نیست بنابراین گزارهٔ (الف) را می‌توان نتیجه گرفت. از طرفی در شکل نشان داده شده است که هر نوکلئون تنها به نوکلئون‌های مجاورش نیرو وارد می‌کند، بنابراین نیروی هسته‌ای را کوتاه‌برد نشان می‌دهد و گزارهٔ (ب) نیز درست است. این طرح‌واره در مورد واپاشیدن هسته چیزی به ما ارائه نمی‌دهد و گزارهٔ (پ) نادرست است.

نمای ۱۱

A ۲۰۱۶ ۴

۲ هنگام تشکیل هسته بخشی از جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هسته به انرژی لازم برای تشکیل هسته تبدیل می‌شود و با یک کاستی جرم هستهٔ روبه‌رو هستیم یعنی مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هستهٔ از جرم هسته بیشتر $(M>M_x)$ است. دقت کنید که در صورت مسأله $N\neq1$ در نظر گرفته شده است.

نمای ۱۲

A ۲۰۱۶ ۱

۳ هنگامی که رادفورد به یک ورقهٔ بسیار نازک طلا ذرات پرانرژی آلفا تاباند، مشاهده کرد که تعداد زیادی از ذرات آلفا بدون هیچ‌گونه انحرافی از ورقهٔ طلا رد شدند و نتیجه گرفت، در اتم یک فضای تهی بزرگ نسبت به هسته وجود دارد که ذرات آلفا از این فضا بدون انحراف می‌گذرند. یعنی فاصلهٔ زیادی بین الکترون‌ها و هسته وجود دارد. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نمای ۶

A ۲۰۱۶ ۲

۴ خطوط فرانهوفر خطوط تاریک جذبی هستند که در طیف‌نما در طیف خورشید دیده می‌شوند و مربوط به طول موج‌های جذب شده توسط عناصر موجود در جو خورشید و جو زمین هستند، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

طیف گسیلی و جذبی هر عنصر که به آن طیف اتمی می‌گویند، منحصر به فرد است و گزینهٔ (۲) درست است.

طیف اتمی توسط لامپ‌های حاوی بخار رقیق عنصر گسیل می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است.

گسیل نور توسط اتم هنگامی صورت می‌گیرد که الکترون برانگیخته از تراز انرژی بالاتر به تراز انرژی پایین‌تر جهش کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

نمای ۸

B ۲۰۱۶ ۳

۵ **خط فکری** در رشتهٔ پاشن $(n'=3)$ اولین طیف اتمی هیدروژن $n=4$، دومین طیف اتمی هیدروژن $n=5$، سومین طیف اتمی هیدروژن $n=6$ و ... است.

دومین طیف اتمی هیدروژن در رشته پاشن برابر $n=5$ است.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۵})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=R\frac{۱۶}{۲۲۵}\Rightarrow\lambda=\frac{۲۲۵}{۱۶}\times\frac{۱}{R}$$

$$\lambda=\frac{۲۲۵}{۱۶}\times۱۰^{۲}nm$$

سومین طیف اتمی هیدروژن در طیف پاشن برابر $n=6$ است

$$\frac{۱}{\lambda'}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda'}=R(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۳۶})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda'}=R(\frac{۳}{۳۶})\Rightarrow\lambda'=\frac{۳۶}{۳}\times\frac{۱}{R}$$

$$\lambda'=۱۲\times۱۰^{۲}nm$$

حال اختلاف دو طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda-\lambda'=\frac{۲۲۵}{۱۶}\times۱۰^{۲}-۱۲\times۱۰^{۲}=۱۰^{۲}(\frac{۲۲۵}{۱۶}-۱۲)=۱۰^{۲}\times(\frac{۳۳}{۱۶})=\frac{۸۲۵}{۴}$$

نمای ۵

B ۲۰۱۶ ۲

۶

نکته اختلاف کوتاه‌ترین و بلندترین طول موج در هر رشته را گسترهٔ طول موج‌های آن رشته می‌نامند.

۱ بلندترین طول موج رشتهٔ پاشن $(n'=3)$ در گذار الکترون از تراز $n=4$ به $n'=3$ گسیل می‌شود و مقدار آن خواهد شد.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max\,P}}=R(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2})\Rightarrow\lambda_{max\,P}=\frac{144}{7R}$$

۲ کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ پاشن در گذار الکترون از تراز $n=\infty$ به $n'=3$ گسیل می‌شود و طول موج آن برابر است با:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min\,P}}=R(\frac{1}{9}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min\,P}=\frac{9}{R}$$

۳ گسترهٔ طول موج‌های رشتهٔ پاشن را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_{max\,P}-\lambda_{min\,P}=\frac{144}{7R}-\frac{9}{R}=\frac{144-63}{7R}=\frac{81}{7R}\Rightarrow\Delta\lambda_P=\frac{81}{7R}$$

۴ بلندترین طول موج رشتهٔ لیمان در گذار الکترون از تراز $n=2$ به $n'=1$ گسیل می‌شود. از این‌رو:

$$\frac{1}{\lambda_{max\,L}}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})=R(\frac{3}{4})\Rightarrow\lambda_{max\,L}=\frac{4}{3R}$$

۵ کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ لیمان در گذار الکترون از $n=\infty$ به $n'=1$ گسیل می‌شود. در نتیجه:

$$\frac{1}{\lambda_{min\,L}}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min\,L}=\frac{1}{R}$$

۶ گسترهٔ طول موجی رشتهٔ لیمان را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_{max\,L}-\lambda_{min\,L}=\frac{4}{3R}-\frac{1}{R}=\frac{4-3}{3R}\Rightarrow\Delta\lambda_L=\frac{1}{3R}$$

۷ نسبت $\frac{\Delta\lambda_P}{\Delta\lambda_L}$ خواهد شد:

$$\frac{\Delta\lambda_P}{\Delta\lambda_L}=\frac{\frac{81}{7R}}{\frac{1}{3R}}=\frac{243}{7}$$

نمای ۵

B ۲۰۱۶ ۲

۷

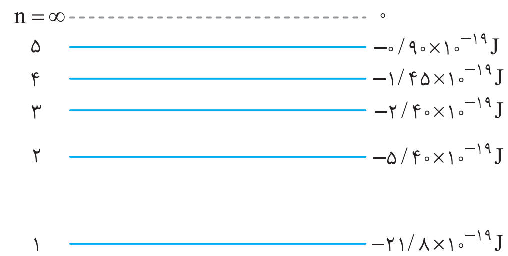
۱ انرژی فوتون گسیلی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=hf\xrightarrow{h=6\times10^{-34}\,J.s,\ f=7.5\times10^{14}\,Hz}E=6\times10^{-34}\times7.5\times10^{14}$$

$$\Rightarrow E=4.5\times10^{-19}J$$

۲ باید بررسی کنید اختلاف انرژی کدام دو تراز برابر انرژی فوتون است. انرژی تراز $n=5$، $-0.9\times10^{-19}J$ و انرژی تراز $n=2$، $-5.4\times10^{-19}J$ است و اختلاف انرژی این دو تراز برابر است با:

$$E_5-E_2=-0.9\times10^{-19}-(-5.4\times10^{-19})=4.5\times10^{-19}J$$



۳ بنابراین الکترون از تراز $n=5$ به تراز $n'=2$ جهش کرده است.

نمای ۷

C ۲۰۱۶ ۳

۸

خط فکری باید ابتدا، انرژی فوتون و انرژی الکترون در تراز $n=3$ را حساب کنید. سپس انرژی فوتون را با انرژی الکترون جمع کنید تا مشخص شود که الکترون به کدام تراز جهش کرده است، سپس می‌توانید تعداد گذارهای $\Delta n\le2$ را که طول موج گسیلی آن فرابنفش است مشخص کنید.

۱ انرژی فوتون را حساب می‌کنیم

$$E=hf\xrightarrow{f=240\times10^{12}Hz}E=4\times10^{-15}\times240\times10^{12}$$

$$\Rightarrow E=960\times10^{-3}eV\Rightarrow E=0.96eV$$

۲ انرژی الکترون در تراز $n=3$ را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow E_3=-\frac{13.5}{3^2}=-1.5eV$$

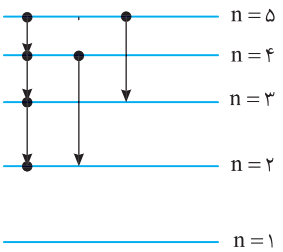
۳ انرژی الکترون بعد از جذب فوتون خواهد شد:

$$E_n=-1.5+0.96\Rightarrow E_n=-0.54eV$$

۴ ترازی که انرژی آن $-0.54eV$ را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow-0.54=-\frac{13.5}{n^2}\Rightarrow n^2=25\Rightarrow n=5$$

۵ در رشتهٔ لیمان $n'=1$ طول موج‌های گسیلی فرابنفش هستند بنابراین در گذار الکترون از $n=5$ به ترازهای پایین‌تر نباید الکترون به تراز ۱ برود. از طرفی گذارها مجاز $\Delta n\le2$ است یعنی اختلاف عدد کوانتومی ترازها نباید بیشتر از ۲ باشد. بنابراین خواهیم داشت:



گذارهای $\Delta n=1$ تا $n=2$: $5\xrightarrow{(1)}4\xrightarrow{(2)}3\xrightarrow{(3)}2$ سه‌نوع فوتون

گذارهای $\Delta n=2$: $5\xrightarrow{(4)}3$ و $4\xrightarrow{(5)}2$ دو نوع فوتون

جمعاً ۵ نوع فوتون

نمای ۷

A ۲۰۱۶ ۳

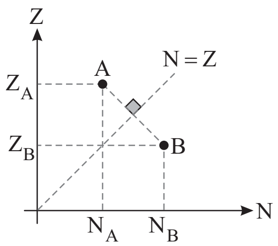
۹ در گسیل القایی در لیزر، انرژی فوتون ورودی دقیقاً با اختلاف انرژی تراز پایه و حالت برانگیخته برابر است و گزینهٔ (۳) درست است.

نمای ۱۱

B ۲۰۱۶ ۱

۱۰ **نکته ریاضی** شیب دو خط عمود بر هم، قرینه وارون یکدیگر است: $mm'=-1$

خط‌چین $Z=N$ نیمساز نمودار $Z-N$ و شیب آن برابر ۱ است. خط AB عمود بر نیمساز رسم شده و دارای شیب -1 خواهد بود. با توجه به نمودار شیب خط AB را نوشته و برابر -1 قرار می‌دهیم.



$$\text{شیب خط AB}=\frac{Z_A-Z_B}{N_A-N_B}=-1$$

$$Z_A-Z_B=N_B-N_A\Rightarrow N_A+Z_A=N_B+Z_B$$

بنابراین عدد جرمی‌های دو اتم A و B با هم برابر می‌باشد.

نمای ۹

پنجره ۴

A ۲۰۱۷ ۴

آلفا، بتا و پوزیترون، ذره و گاما و ایکس موج الکترومغناطیسی هستند.

پرتو گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی است. آلفا ذره‌ای با دو نوترون و دو پروتون است $\alpha\equiv{}^4_2He$.

ذرهٔ بتا، الکترون $(\beta={}^{0}_{-1}e)$ است و پوزیترون نیز ذره‌ای با جرم الکترون و بار مثبت برابر با بار الکترون است $(\beta^+={}^{0}_{+1}e)$ بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست است.

پرتو ایکس مانند پرتو گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی است و گزینهٔ (۴) درست است.

A | ۲۰۱۸ | ۲

پرتو گاما از جنس پرتوهای الکترومغناطیسی بوده و هنگامی که یک هستهٔ برانگیخته با گسیل پرتو گاما به هستهٔ حالت پایه تبدیل می‌شود، عدد جرمی و عدد اتمی آن تغییر نمی‌کند.

$$^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{0}\gamma$$

A | ۲۰۱۹ | ۲

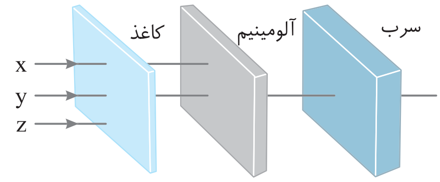
در پرتوزایی طبیعی سه نوع پرتو ایجاد می‌شود. آلفا، بتا، گاما

پرتوهای آلفا کمترین نفوذ را دارند. این ذرات پس از طی مسافت کوتاهی در هوا (۱ تا ۲ سانتی‌متر) و یا با عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند. بنابراین پرتو z، پرتو α و دارای بار مثبت است.

پرتوهای بتا نفوذ بیشتری دارند و در سرب به ضخامت $\approx 0/1mm$ نفوذ می‌کنند.

بنابراین پرتو x که در آلومینیم جذب شده پرتو β بوده و دارای بار منفی است.

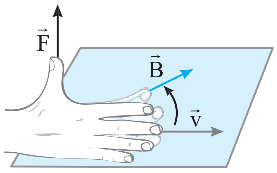
پرتو γ از جنس امواج الکترومغناطیسی است و می‌تواند از ورقه‌ای سربی به ضخامت $\approx 10cm$ بگذرد، بنابراین پرتو y در شکل بدون بار بوده و خنثی است.



B | ۲۰۲۰ | ۲

یادآوری ۱ هرگاه ذرهٔ بارداری از یک میدان مغناطیسی بگذرد و راستای حرکت آن در راستای خطوط میدان نباشد بر آن نیروی مغناطیسی $F=qvB\sin\alpha$ وارد می‌شود.

یادآوری ۲ قاعدهٔ دست راست برای نیروی وارد بر بار متحرک درون میدان مغناطیسی: چهار انگشت باز دست راست را در جهت حرکت بار به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که خم کردن آن‌ها (کف دست) در جهت میدان مغناطیسی قرار گیرد. در این صورت انگشت شست جهت نیروی وارد بر ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد.



نوترون چون بدون بار است از مسیر خود منحرف نمی‌شود. آلفا دارای بار مثبت است، بنابراین با توجه به قاعدهٔ دست راست به سمت بالا منحرف می‌شود. بتا دارای بار منفی است پس با توجه به قاعدهٔ دست راست به سمت پایین منحرف می‌شود.

B | ۲۰۲۱ | ۱

یادآوری بر بار مثبت در جهت میدان الکتریکی و بر بار منفی در خلاف جهت میدان نیرو وارد می‌شود. این نیرو برابر $F=qE$ است.

پرتو γ خنثی است، بنابراین در میدان الکتریکی منحرف نخواهد شد پس پرتو شمارهٔ (۲) γ است. با توجه به اینکه پرتوهای α و β باردار هستند بنابراین در میدان منحرف خواهند شد.

میدان الکتریکی برای هر دو یکسان است، اما با توجه به اینکه جنس α از جنس هستهٔ ${}^{4}_{2}He$ است، بنابراین α دارای ۲ بار مثبت و β دارای یک بار منفی است و نیروی وارد بر آلفا دو برابر نیروی وارد بر β است $(F_\alpha = 2F_\beta)$.

اما جرم پرتو α خیلی بیشتر از β است به این دلیل که α از دو پروتون و دو نوترون ساخته شده در حالی که β از یک الکترون تشکیل می‌شود و طبق قانون دوم نیوتون $F=ma$ چون جرم α خیلی بیشتر از β می‌باشد شتاب آن کمتر بوده و این پرتو کمتر منحرف می‌شود، پس پرتو (۱)، α و پرتو (۳)، β است. پرتو α به سمت پایین منحرف شده بنابراین جهت میدان الکتریکی رو به پایین است.

A | ۲۰۲۲ | ۴

ذرهٔ آلفا دارای ۲ پروتون و ۲ نوترون $({}^{4}_{2}He)$ است و هنگامی که از یک هسته ذرهٔ α گسیل می‌شود، از عدد اتمی آن ۲ واحد و از عدد جرمی آن ۴ واحد کاسته می‌شود.

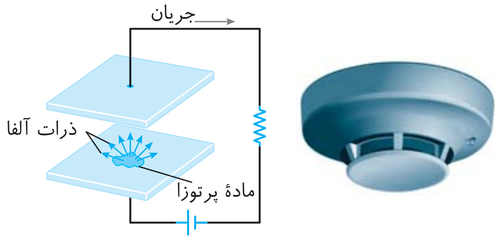
$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

A | ۲۰۲۳ | ۴

ذرهٔ α دارای دو پروتون و دو نوترون بوده در واقع α، هستهٔ اتم هلیم بوده و دارای بار مثبت است. این ذره سنگین و دارای برد کوتاه است، بنابراین گزاره (الف) نادرست است.

در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا مشاهده شده است که تعداد نوکلئون‌ها (مجموع پروتون‌ها و نوترون‌ها) در طی فرایند واپاشی هسته پایسته است یعنی تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند مساوی است. بنابراین گزاره (ب) درست است.

یکی از کاربردهای گستردهٔ واپاشی α، در آشکارسازهای دود است و گزارهٔ (پ) درست است.



واپاشی α در هسته‌های سنگین مانند اورانیوم صورت می‌گیرد و گزارهٔ (ت) نادرست است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A | ۲۰۲۴ | ۳

یادآوری بار الکترون و بار پروتون هم‌اندازه هستند، ابتدا باید در ذهن خود طریقهٔ تولید پوزیترون (β^+) و الکترون (β^-) در واپاشی هسته‌ای را یادآوری کنید.

۱ برای تولید پوزیترون، یک پروتون در هسته به یک نوترون و یک پوزیترون واپاشیده می‌شود. یعنی از تعداد پروتون‌های هسته یکی کم شده و بار هسته به اندازهٔ بار یک پروتون $(1/6\times10^{-19}C)$ کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۲ در گسیل الکترون (β^-) یک نوترون به یک الکترون و یک پروتون واپاشیده می‌شود، الکترون از هسته خارج می‌شود و بر تعداد پروتون‌های هسته یک واحد افزوده می‌شود. بنابراین بار هسته به اندازه بار یک پروتون $(1/6\times10^{-19}C)$ افزایش می‌یابد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

$$\underset{\text{نوترون}}{{}^{1}_{0}n} \rightarrow \underset{\text{پروتون}}{{}^{1}_{1}H} + \underset{\text{پوزیترون}}{{}^{0}_{1}e}$$

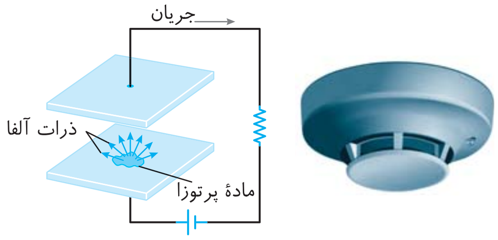
۳ ذرهٔ آلفا، از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده است $(\alpha = {}^{4}_{2}He)$ و هر گاه هستهٔ ذرهٔ آلفا گسیل کند قطعاً از تعداد پروتون‌های هسته دو واحد کاسته می‌شود و بار هسته به اندازه $2\times1/6\times10^{-19} = 3/2\times10^{-19}C$ کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۳) درست است.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

۴ هنگام گسیل گاما که یک موج الکترومغناطیسی، تعداد پروتون‌های هسته تغییر نمی‌کند و بار هسته ثابت می‌ماند، اما در مورد پوزیترون و الکترون همان‌گونه که بیان شد بار هسته تغییر می‌کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A | ۲۰۲۵ | ۳

یکی از کاربردهای گستردهٔ واپاشی α در آشکارسازهای دود است که در آن مقدار اندکی از مادهٔ پرتوزا که ذرات α گسیل می‌کند در وسط صفحه‌ای که بار مثبت دارد (که در اینجا صفحه A است زیرا به پایانهٔ مثبت باتری متصل می‌باشد) می‌گذارند (با توجه به اینکه پرتوهای α مثبت هستند باید در صفحهٔ مثبت قرار بگیرد تا از این صفحه به سمت صفحهٔ منفی حرکت کنند) در طی گسیل پرتوی α، به مولکول‌های هوا برخورد کرده و مولکول‌های هوا را یونیده می‌کند و یون‌های مثبت و منفی ایجاد می‌شود، این یون‌ها بین دو صفحه A و B توسط صفحه‌های ناهمنام خود جذب می‌شوند در نتیجه در مدار جریان برقرار می‌شود. هنگامی که دود در هوا باشد دود موجود بین صفحات جریان را کاهش می‌دهد زیرا یون‌هایی که به ذرات دود برخورد می‌کنند معمولاً خنثی می‌شوند و این باعث می‌شود که آمپرسنج عدد کوچک‌تری نمایش دهد.



A ۲۰۲۶ ۴

در واپاشی بتای منفی (الکترون‌زا) یک نوترون به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود. واپاشی بتای منفی $^{1}_{0}n \to ^{1}_{1}H + ^{0}_{-1}e$

هرگاه هسته β^- گسیل کند عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) آن تغییر نمی‌کند اما عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) یک واحد افزایش می‌یابد.

$$^{A}_{Z}X \to ^{A}_{Z+1}Y + ^{0}_{-1}e$$

در واپاشی پوزیترون یک پروتون به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود. واپاشی بتای مثبت $^{1}_{1}H \to ^{1}_{0}n + ^{0}_{+1}e$

هرگاه هستهٔ β^+ (پوزیترون) گسیل کند عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) ثابت می‌ماند اما عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) یک واحد کاهش می‌یابد.

هر چهار گزاره درست هستند. $^{A}_{Z}X \to ^{A}_{Z-1}Y + ^{0}_{+1}e$

بازی با سؤال در واپاشی بتای منفی .... ریاضی - ۸۵

۱) عدد اتمی ثابت می‌ماند.

۲) جرم اتمی یک واحد زیاد می‌شود.

۳) مجموع نوکلئون‌ها ثابت می‌ماند.

۴) در هسته یک پروتون کم و یک نوترون اضافه می‌شود.

پاسخ **در واپاشی بتای منفی $(^{0}_{-1}e)$، عدد جرمی بدون تغییر می‌ماند و به عدد اتمی یک واحد افزوده می‌شود.**

در واقع یک نوترون در هستهٔ عنصر پرتوزا واپاشیده شده و به یک پروتون و یک الکترون (بتای منفی) تبدیل می‌شود که بتا از هسته خارج می‌گردد. بنابراین مجموع نوکلئون‌ها $(A=Z+N)$ ثابت می‌ماند، اما به تعداد پروتون‌های هسته یک واحد افزوده می‌شود.

گزینهٔ ۳

A ۲۰۲۷ ۲

در گسیل الکترون‌زا و پوزیترون به‌ترتیب به عدد اتمی عنصر یک واحد اضافه و کم می‌شود. در گسیل آلفا، دو واحد از عدد اتمی کاسته می‌شود و در تابش گاما تنها انرژی آزاد شده و عدد اتمی تغییری نمی‌کند، بنابراین بیشترین تغییر عدد اتمی مربوط به گسیل α و کمترین تغییر عدد اتمی برای گسیل γ می‌باشد.

A ۲۰۲۸ ۴

پرتوهای α در عمق ۰/۰۱mm و ذرات بتا تا عمق ۰/۱mm و پرتو گاما تا عمق ۱۰۰mm سرب نفوذ می‌کنند. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. در واپاشی $\alpha(^{4}_{2}He)$ دو نوترون و دو پروتون از هسته کاسته می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

ذره‌های آلفا دارای بار مثبت بوده و ذرات سنگین شامل دو نوترون و دو پروتون هستند بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

برد ذره‌های آلفا کوتاه بوده و بعد از جدایی از هسته پس از طی مسافتی کوتاه در هوا (در حدود ۱ تا ۲cm) و یا با عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شود و اگر این ذره‌ها از راه تنفس یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند باعث آسیب شدیدی به بافت‌های بدن می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۰۲۹ ۱

یادآوری در گسیل پوزیترون $(^{0}_{+1}e)$ از پروتون‌های هسته (عدد اتمی) یک واحد کاسته و عدد جرمی تغییر نمی‌کند.

در واکنش‌های هسته‌ای تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند مساوی است.

در واکنش‌های هسته‌ای بار الکتریکی پایسته می‌ماند یعنی مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش برابر است.

با توجه به قوانین پایستگی در واکنش هسته‌ای می‌توان نوشت.

$$^{11}_{6}C \to ^{A}_{Z}X + (^{0}_{+1}e) \Rightarrow \begin{cases} 11=A+0 \Rightarrow A=11 \\ 6=Z+1 \Rightarrow Z=5 \end{cases} \Rightarrow ^{11}_{5}B$$

A ۲۰۳۰ ۴

معادلهٔ واپاشی ایزوتوپ $^{15}_{8}O$ را می‌نویسیم. $^{15}_{8}O \to X + ^{0}_{+1}\beta^+ \Rightarrow ^{15}_{7}X$

که با توجه به $^{0}_{+1}\beta$، عدد اتمی و عدد جرمی X به صورت $^{15}_{7}X$ می‌شود و مطابق جدول مندلیف عدد اتمی ۷ مربوط به ایزوتوپ‌های نیتروژن است.

معادلهٔ واپاشی $^{18}_{9}F$ را می‌نویسیم. $^{18}_{9}F \to Y + ^{0}_{-1}\beta^- \Rightarrow ^{18}_{10}Y$

که با توجه به $^{0}_{-1}\beta$، عدد اتمی و عدد جرمی Y به صورت $^{18}_{10}Y$ می‌شود مطابق جدول مندلیف عدد اتمی ۱۰ مربوط به ایزوتوپ‌های نئون است.

A ۲۰۳۱ ۴

هرگاه هسته بتای منفی $(^{0}_{-1}e)$ گسیل می‌کند، به عدد اتمی آن یک واحد افزوده می‌شود و عدد جرمی آن ثابت می‌ماند. بنابراین وقتی $^{239}_{93}Np$ واپاشی الکترون‌زا انجام می‌دهد در جدول تناوبی تبدیل به عنصر خانهٔ بعدی یعنی پلوتونیم می‌شود.

$$^{239}_{93}Np \to ^{0}_{-1}e^- + ^{239}_{94}Pu$$

A ۲۰۳۲ ۱

ذرهٔ آلفا هستهٔ هلیم است و دارای دو نوترون و دو پروتون است $(^{4}_{2}He)$. هرگاه هستهٔ عنصر پرتوزا، آلفا گسیل کند از تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن هر کدام دو واحد کم می‌شود. تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های $^{238}_{92}U$ به ترتیب $Z=92$ و $N=238-92=146$ است. بنابراین: $N'=146-2=144$ ، $Z'=92-2=90$

A ۲۰۳۳ ۳

در واکنش $^{60}Ni^* \to ^{60}Ni + \cdots$ نوع هسته تغییر نکرده است. بنابراین، هسته برانگیخته $^{60}Ni^*$، پرتو گاما گسیل کرده است.

B ۲۰۳۴ ۴

یادآوری در واپاشی بتای منفی، یک نوترون در هسته واپاشی شده و یک پروتون و یک الکترون (β^-) ایجاد می‌شود.

$$\underset{\text{نوترون}}{^{1}_{0}n} \to \underset{\text{پروتون}}{^{1}_{1}P} + \underset{\text{بتای منفی}}{^{0}_{-1}e}$$

۱ تعداد نوترون‌های هسته $^{234}_{90}Th$ برابر است با:

$$A=Z+N \Rightarrow 234=90+N \Rightarrow N=144$$

۲ با واپاشی بتای منفی، تعداد نوترون‌های هسته یک واحد کاهش می‌یابد $N'=144-1=143$ و بر تعداد پروتون‌های هسته یک واحد افزوده می‌شود.

$$Z'=Z+1=90+1=91$$

۳ نسبت عدد اتمی و عدد نوترونی هستهٔ دختر خواهد شد: $\frac{Z'}{N'}=\frac{91}{143}$

بازی با سؤال در واکنش $^{239}_{92}U \to X + ^{239}_{93}Np$، X کدام است؟ خارج ریاضی - ۸۹

۱) الکترون ۲) پروتون ۳) نوترون ۴) پوزیترون

پاسخ طبق قوانین پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای داریم:

$$^{239}_{92}U \to ^{a}_{b}X + ^{239}_{93}Np \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow {}_{-1}e$$

گزینهٔ ۱

A ۲۰۳۵ ۱

$$^{239}_{92}U \to ^{138}_{56}Ba + ^{98}_{36}Kr + \boxed{?}$$

به جمع عدد اتمی در دو طرف واکنش دقت کنید. $56+36=92$

بنابراین عدد اتمی علامت سؤال صفر است یعنی علامت سؤال باید نوترون $^{1}_{0}n$ باشد.

اکنون به تعداد نوکلئون‌ها در دو طرف واکنش دقت کنید.

$$239=138+98+c \Rightarrow c=3$$

در نتیجه باید در جای علامت ?، سه نوترون $(3^{1}_{0}n)$ قرار بگیرد.

$$^{239}_{92}U \to ^{138}_{56}Ba + ^{98}_{36}Kr + 3^{1}_{0}n$$

A ۲۰۳۶ | ۴

بار الکتریکی در واکنش هسته‌ای پایسته است یعنی مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش یکسان است، بنابراین می‌نویسیم:

$$^{241}_{95}Am \to ^{237}_{Z}Np + ^{4}_{2}He \Rightarrow 95 = Z+2 \Rightarrow Z=93$$

عدد اتمی نپتونیم $Z=93$ شده از این تعداد نوترون‌های آن خواهد شد:

$$A=Z+N \Rightarrow 237=93+N \Rightarrow N=237-93 \Rightarrow N=144$$

A ۲۰۳۷ | ۳

با توجه به قانون پایستگی بار و پایستگی تعداد نوکلئون‌ها در واکنش‌های هسته‌ای مجموع نوکلئون‌ها و مجموع عدد اتمی‌ها را در دو طرف واکنش برابر قرار می‌دهیم. می‌توان نوشت:

$$^{4}_{2}He + ^{27}_{13}Al \to ^{A}_{Z}X + ^{1}_{0}n \Rightarrow \begin{cases} 4+27=A+1 \Rightarrow A=30 \\ 2+13=Z+0 \Rightarrow Z=15 \end{cases}$$

بازی با سؤال کدام گزینه واکنش هسته‌ای زیر را کامل می‌کند؟

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \to ^{141}_{55}Cs + ^{93}_{37}Rb + \cdots\cdots\cdots$$

۱) $^{0}_{+1}e$ ۲) $2\,^{1}_{0}n$ ۳) $^{0}_{-1}e$ ۴) $^{1}_{0}n$

پاسخ

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \to ^{141}_{55}Cs + ^{93}_{37}Rb + \cdots \Rightarrow \begin{cases} 1+235=141+93+a \Rightarrow a=2 \\ 0+92=55+37+b \Rightarrow b=0 \end{cases} \Rightarrow 2\,^{1}_{0}n$$

گزینهٔ ۲

A ۲۰۳۸ | ۳

در واکنش هسته‌ای تعداد نوکلئون‌ها پیش از فرایند و پس از فرایند با هم برابر هستند. هم‌چنین مجموع عدد اتمی پیش و پس از فرایند یکسان هستند بنابراین معادلات زیر را می‌نویسیم و A و Z را به دست می‌آوریم.

$$^{30}_{15}P + ^{A}_{Z}X \to ^{27}_{13}Al + ^{4}_{2}He \Rightarrow \begin{cases} 30+A=27+4 \Rightarrow A=1 \\ 15+Z=13+2 \Rightarrow Z=0 \end{cases}$$

در این صورت X ذرهٔ نوترون $^{1}_{0}n$ است.

A ۲۰۳۹ | ۱

به جای نقطه‌چین هسته $^{A}_{Z}X$ را قرار می‌دهیم. سپس به کمک پایستگی تعداد نوکلئون‌ها و پایستگی بار الکتریکی (عدد اتمی) A و Z را تعیین می‌کنیم و ذرهٔ X را مشخص می‌کنیم.

$$^{14}_{7}N + ^{A}_{Z}X \to ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H \Rightarrow \begin{cases} 14+A=17+1 \Rightarrow A=4 \\ 7+Z=8+1 \Rightarrow Z=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow ^{A}_{Z}X = ^{4}_{2}He$ یک ذرهٔ آلفا

می‌بینید که با بمباران هسته‌های نیتروژن با ذره‌های آلفا ($^{4}_{2}He$) می‌توان یکی از ایزوتوپ‌های عنصر اکسیژن را ایجاد کرد.

B ۲۰۴۰ | ۱

اگر هسته‌ای ذرهٔ آلفا ($^{4}_{2}He$) گسیل کند، عدد جرمی آن ۴ واحد و عدد اتمی آن دو واحد کاهش می‌یابد. بنابراین هسته‌ای که با گسیل آلفا به $^{A}_{Z}Pb$ تبدیل شده است، دارای عدد جرمی $A'=A+4$ و عدد اتمی $Z'=Z+2$ خواهد بود.

$$^{A+4}_{Z+2}X \to ^{A}_{Z}Pb + ^{4}_{2}He$$

هستهٔ مادر

اگر هسته $^{A}_{Z}Pb$ ذرهٔ بتای منفی ($^{0}_{-1}e$) گسیل کند عدد جرمی آن ثابت می‌ماند و عدد اتمی آن یک واحد افزایش می‌یابد.

$$^{A}_{Z-1}Y \to ^{A}_{Z}Pb + ^{0}_{-1}e$$

هستهٔ مادر

بنابراین اختلاف عدد جرمی در هسته‌های مادر، ۴ واحد است.

B ۲۰۴۱ | ۳

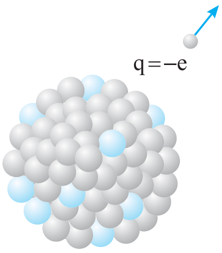
در واپاشی بتازا یکی از نوترون‌های درون هسته به یک پروتون و یک بتا تبدیل می‌شود $^{1}_{0}n \to ^{1}_{1}H + ^{0}_{-1}e$. بنابراین تعداد پروتون‌ها یک واحد افزایش می‌یابد و به ۱۲=۱+۱۱ رسیده و تعداد نوترون‌ها یک واحد کاهش می‌یابد و به ۱۲=۱−۱۳ می‌رسد. در این صورت تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های هستهٔ دختر $Z=N=12$ است.

۱۲ Z
۱۲ N

A ۲۰۴۲ | ۱

هسته واپاشی الکترون‌زا انجام داده است.

هرگاه هسته بتای منفی ($^{0}_{-1}e$) گسیل کند، در واقع یک نوترون در هسته به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود یعنی تعداد پروتون‌ها یک واحد افزایش و تعداد نوترون‌ها یک واحد کاهش می‌یابد. $^{1}_{0}n \to ^{1}_{1}H + ^{0}_{-1}e$



A ۲۰۴۳ | ۲

۱ در واکنش‌های هسته‌ای تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند و پس از فرایند مساوی است.

۲ مجموع جبری عدد اتمی در دو طرف واکنش برابر است.

در گزینهٔ (۱) $^{107}_{48}Cd + ^{0}_{-1}e \to ^{106}_{47}Ag$ تعداد نوکلئون‌ها برابر نیست ($107 \neq 0+106$) و این گزینه نادرست است.

در گزینهٔ (۲) $^{239}_{93}Np \to ^{239}_{94}Pu + ^{0}_{-1}\beta^{-}$ هر دو قانون پایستگی برقرار است و این گزینه درست است.

در گزینهٔ (۳) $^{12}_{6}C + ^{1}_{1}H \to ^{12}_{6}C + ^{0}_{+1}e$، تعداد نوکلئون‌ها برابر نیست ($12+1 \neq 12+0$) و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در گزینهٔ (۴) $^{2}_{1}H + ^{2}_{1}H \to ^{3}_{1}H + ^{1}_{0}n$، مجموع عدد اتمی برابر نیست ($1+1 \neq 1+0$) و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **کدام‌یک از واکنش‌های زیر بنا بر قانون‌های پایستگی بار الکتریکی یا عدد جرمی، ممنوع هستند؟**

۱) $^{4}_{2}He + ^{10}_{5}B \to ^{13}_{6}C + ^{1}_{0}n$ ۲) $^{1}_{0}n + ^{27}_{13}Al \to ^{27}_{11}Na + ^{4}_{2}He$

۳) $^{2}_{1}H + ^{12}_{6}C \to ^{4}_{2}He + ^{10}_{5}B$ ۴) گزینه‌های (۱) و (۲)

پاسخ **در واکنش گزینهٔ (۱) مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش یکسان نیست ($2+5 \neq 6+0$)، بنابراین این واکنش ممنوع است. در واکنش گزینهٔ (۲) مجموع عدد جرمی در دو طرف واکنش یکسان نیست ($1+27 \neq 27+4$)، بنابراین این واکنش نیز ممنوع است.**

گزینهٔ ۴

B ۲۰۴۴ | ۳

راه‌حل اول: به ازای گسیل هر ذره آلفا، دو نوترون از هسته کاسته می‌شود بنابراین به ازای گسیل سه ذرهٔ آلفا، ۶ نوترون از هسته کاسته خواهد شد. از طرفی در گسیل بتای منفی (الکترون) یک نوترون به پروتون و الکترون تبدیل شده و از تعداد نوترون‌های هسته یکی کم می‌شود بنابراین جمعاً ۷=۱+۶ نوترون از هسته کاسته می‌شود.

راه‌حل دوم: اگر عنصر را به صورت $^{A}_{Z}X$ درنظر بگیریم واکنش به صورت:

$$^{A}_{Z}X \to ^{\bigcirc}_{\square}Y + 3\,^{4}_{2}He + _{-1}\beta$$

مجموع عدد اتمی‌ها و عدد جرمی‌ها در دو طرف باید یکسان باشند.

$$Z=\square+3\times2-1 \Rightarrow \square=Z-5 \quad , \quad A=\bigcirc+3\times4+0 \Rightarrow \bigcirc=A-12$$

تعداد نوترون‌های اولیه برابر $A-Z$ و تعداد نوترون‌های عنصر حاصل برابر $(A-12)-(Z-5)=A-Z-7$ است. پس تعداد نوترون‌ها ۷ واحد کم می‌شود.

B ۲۰۴۵ ۱

خط فکری باید واکنش هسته‌ای که در صورت مسئله بیان شده را بنویسیم.
تعداد ذرات α را با حرف a و تعداد ذرات بتا را با حرف b نمایش می‌دهیم و قانون‌های پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای را می‌نویسیم و a و b را حساب می‌کنیم.

$$^{۲۰۷}_{۸۲}Pb \to {}^{۱۹۷}_{۷۹}Au + ۲{}^{۱}_{۰}n + a{}^{۴}_{۲}He + b{}^{۰}_{-۱}e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{پایستگی تعداد نوکلئون‌ها} \quad ۲۰۷=۱۹۷+۲+۴a+۰ \Rightarrow a=۲ \\ \text{پایستگی عدد اتمی} \quad ۸۲=۷۹+۰+۲a-b \Rightarrow ۳=۲\times۲-b \Rightarrow b=۱ \end{cases}$$

دو ذرهٔ آلفا و یک ذرهٔ بتای منفی گسیل شده است.

بازی با سؤال اگر هستهٔ عنصر $^{۸}_{۳}Li$ یک پرتو آلفا و همزمان یک پرتو بتا (الکترون) گسیل کند، به کدام‌یک از عناصر زیر تبدیل می‌شود؟ ریاضی - ۹۰

۱) $^{۷}_{۳}Li$ ۲) $^{۸}_{۴}Be$ ۳) $^{۴}_{۲}He$ ۴) $^{۶}_{۳}Li$

پاسخ

$$^{۸}_{۳}Li \to {}^{A'}_{Z'}X + {}^{۴}_{۲}He + {}^{۰}_{-۱}e \Rightarrow \begin{cases} ۸=A'+۴+۰ \Rightarrow A'=۴ \\ ۳=Z'+۲+(-۱) \Rightarrow Z'=۲ \end{cases}$$

بنابراین هسته به اتم هلیم $^{۴}_{۲}He$ تبدیل می‌شود. **گزینهٔ ۳**

A ۲۰۴۶ ۳

با توجه به فرض مسئله:

۱ واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم. $^{A}_{Z}X \to {}^{۲۰۸}_{۸۱}Tl + {}^{۰}_{+۱}e + {}^{۴}_{۲}He$

۲ با توجه به پایستگی تعداد نوکلئون‌ها خواهیم داشت:
$A=۲۰۸+۰+۴ \Rightarrow A=۲۱۲$

۳ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را با هم برابر قرار می‌دهیم و عدد اتمی Z را به‌دست می‌آوریم.
$Z=۸۱+۱+۲ \Rightarrow Z=۸۴$

بازی با سؤال در فعل و انفعال هسته‌ای $^{۱}_{۰}n + {}^{۲۳۵}_{۹۲}U \to {}^{۱۴۱}_{۵۶}Ba + {}^{A}_{Z}X + ۳({}^{۱}_{۰}n)$، برای عنصر X، تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها کدام است؟ تجربی - ۹۶

۱) ۵۸ و ۳۶ ۲) ۵۶ و ۳۶ ۳) ۹۴ و ۵۴ ۴) ۹۲ و ۵۴

پاسخ با توجه به پایستگی تعداد نوکلئون‌ها و پایستگی بار الکتریکی در واکنش‌های هسته‌ای می‌توان نوشت:

$$^{۱}_{۰}n + {}^{۲۳۵}_{۹۲}U \to {}^{۱۴۱}_{۵۶}Ba + {}^{A}_{Z}X + ۳({}^{۱}_{۰}n) \Rightarrow \begin{cases} ۱+۲۳۵=۱۴۱+A+۳ \Rightarrow A=۹۲ \\ ۰+۹۲=۵۶+Z \Rightarrow Z=۳۶ \end{cases}$$

اما تعداد نوترون‌ها برابر است با: $A=Z+N \Rightarrow ۹۲=۳۶+N \Rightarrow N=۵۶$

گزینهٔ ۲

B ۲۰۴۷ ۴

نکته پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم $({}^{۴}_{۲}He)$ هستند و با گسیل هر ذرهٔ α، ۲ واحد از عدد اتمی و ۴ واحد از عدد جرمی کم می‌شود.

نکته ذرهٔ β^- از جنس الکترون است و گسیل بتای منفی سبب می‌گردد که عدد اتمی یک واحد افزایش یابد و عدد جرمی بدون تغییر بماند.

۱ معادلهٔ این واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم.

$$^{۲۳۷}_{۹۳}Np \to {}^{A}_{Z}X + \underbrace{۳{}^{۴}_{۲}He}_{\text{ذرهٔ آلفا}} + \underbrace{{}^{۰}_{-۱}e}_{\text{ذره بتای منفی}}$$

۲ باید مجموع عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) در دو طرف واکنش و همچنین مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش هسته‌ای یکسان باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$۲۳۷=A+(۳\times۴)+۰ \Rightarrow A=۲۲۵$

$۹۳=Z+(۳\times۲)+(-۱) \Rightarrow Z=۸۸$

نکته عدد جرمی برابر مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های هسته است.

تعداد نوترون‌ها خواهد شد: $A=Z+N \Rightarrow ۲۲۵=۸۸+N \Rightarrow N=۱۳۷$

B ۲۰۴۸ ۲

یادآوری در واکنش‌های هسته‌ای مجموع عدد اتمی و مجموع عدد جرمی در دو طرف واکنش یکسان است.

خط فکری باید مجموع عدد اتمی و عدد جرمی در دو طرف واکنش را باهم برابر قرار داده تا بتوانید تعداد ذرات آلفا و بتای منفی را حساب کنید.

ذرهٔ α هستهٔ هلیوم $({}^{۴}_{۲}He)$ و ذرهٔ بتای منفی، الکترون $({}^{۰}_{-۱}e)$ است. واکنش را به‌طور کامل می‌نویسیم و تعداد α ها را با حرف M و تعداد β^- با حرف N مشخص می‌کنیم.

$$^{A}_{Z}X \to {}^{A-۸}_{Z}Y + M{}^{۴}_{۲}\alpha + N{}^{۰}_{-۱}\beta$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم:

عدد جرمی: $A=A-۸+۴M+۰ \Rightarrow M=۲$

عدد اتمی: $Z=Z+۲M-N \Rightarrow ۲M=N \xrightarrow{M=۲} N=۴$

بنابراین به جای نقطه چین باید ۲ ذرهٔ آلفا و ۴ ذره بتا قرار داد.

B ۲۰۴۹ ۳

۱ ذرهٔ α از جنس هستهٔ $^{۴}_{۲}He$ می‌باشد.

$$^{۲۳۷}_{۹۳}Np \to m{}^{۴}_{۲}He + n{}^{۰}_{-۱}\beta + {}^{۲۲۵}_{۸۸}Ra$$

۲ عدد اتمی دو طرف واکنش با هم برابر است:
$۹۳=۲m-n+۸۸ \Rightarrow ۲m-n=۵ \quad (۱)$

۳ عدد جرمی دو طرف واکنش با هم برابر است:
$۲۳۷=۴m+۲۲۵ \Rightarrow ۴m=۱۲ \Rightarrow m=۳ \quad (۲)$

۴ با توجه به معادله‌های (۱) و (۲): $m=۳\ ,\ n=۱$

بنابراین $\frac{m}{n}=۳$ است.

B ۲۰۵۰ ۱

با توجه به واکنش هسته‌ای زیر قوانین پایستگی را می‌نویسیم.

$$^{۲۳۹}_{۹۲}U \to {}^{۲۰۷}_{۸۲}Pb + A({}^{۴}_{۲}He) + B\beta$$

۱ دقت کنید که در گسیل ذرهٔ β^+ و β^- توسط هسته، عدد جرمی هسته تغییر نمی‌کند، بنابراین قانون پایستگی تعداد نوکلئون در این واکنش به صورت زیر است:
$۲۳۹=۲۰۷+۴A \Rightarrow A=۸$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش هسته‌ای را با هم برابر قرار می‌دهیم:
$۹۲=۸۲+۸\times۲+B \Rightarrow B=-۶$

مفهوم منفی این است که در این واکنش هسته ۶ ذرهٔ الکترون (بتای منفی) گسیل می‌کند.

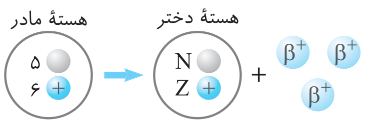
B ۲۰۵۱ ۱

۱ معادلهٔ واپاشی کربن را براساس نمایش نشان داده شده می نویسیم

$$^{۵+۶}_{۶}C \to \underbrace{{}^{Z+N}_{Z}X}_{\text{هستهٔ دختر}} + ۳{}^{۰}_{+۱}e$$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم
$۶=Z+۳\times۱ \Rightarrow Z=۳$

۳ قانون پایستگی تعداد نوکلئون‌ها را می‌نویسیم. $۱۱=۳+N+۰ \Rightarrow N=۸$



B ۲۰۵۲ ۱

۱ با توجه به طرحواره معادلهٔ واپاشی شکل زیر می‌نویسیم:

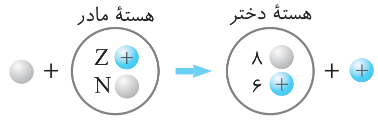
$$^{۱}_{۰}n + {}^{N+Z}_{Z}X \to {}^{۸+۶}_{۶}Y + {}^{۱}_{۱}H$$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش هسته‌ای را برابر قرار می‌دهیم.
پروتون $۰+Z=۶+۱ \Rightarrow Z=۷$

B ۲۰۵۲ ... ادامه

۳ پایستگی تعداد نوکلئون‌ها را می‌نویسیم. $1+N+7=14+1\Rightarrow N=7$

نسبت $\frac{N}{Z}$ خواهد شد. $\frac{N}{Z}=\frac{7}{7}=1$



B ۲۰۵۳ | ۳

خط فکری واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم. برای ذرهٔ بتای منفی ضریب a و برای ذرهٔ آلفا ضریب $\frac{a}{2}$ قرار می‌دهیم. سپس به کمک قوانین پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای عدد جرمی و عدد اتمی هستهٔ دختر را به دست می‌آوریم.

۱ واکنش هسته‌ای به صورت زیر است:

$$\underset{\text{هستهٔ مادر}}{{}^{A}_{Z}X}\rightarrow\frac{a}{2}({}^{4}_{2}He)+a({}^{0}_{-1}e)+\underset{\text{هستهٔ دختر}}{{}^{A'}_{Z'}Y}$$

۲ پایستگی تعداد نوکلئون‌ها خواهد شد: $A=2a+0+A'\Rightarrow A'=A-2a$

۳ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم.

$Z=a+(-a)+Z'\Rightarrow Z'=Z$

بنابراین عدد جرمی کاهش می‌یابد و عدد اتمی ثابت می‌ماند.

B ۲۰۵۴ | ۲

۱ معادلهٔ واپاشی آلفازا برای عنصر دلخواه ${}^{A}_{Z}X$ به صورت زیر است.

${}^{A}_{Z}X\rightarrow{}^{A-4}_{Z-2}X+{}^{4}_{2}He$

۲ عدد اتمی عنصر حاصل $(Z-2)$، $\frac{2}{3}$ برابر عدد اتمی عنصر اولیه (Z) است:

$\frac{Z-2}{Z}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3Z-6=2Z\Rightarrow Z=6$

۳ عدد جرمی عنصر حاصل $(A-4)$، $\frac{5}{7}$ برابر عدد جرمی عنصر اولیه (A) است.

$\frac{A-4}{A}=\frac{5}{7}\Rightarrow 7A-28=5A\Rightarrow A=14$

۴ تعداد نوترون‌های عنصر اولیه به صورت: $N=A-Z=14-6=8$

۵ تعداد نوترون‌های عنصر حاصل به صورت: $N'=(A-4)-(Z-2)=10-4=6$

۶ بنابراین نسبت تعداد نوترون‌های عنصر حاصل به تعداد نوترون‌های عنصر اولیه به صورت: $\frac{N'}{N}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

B ۲۰۵۵ | ۳

ابتدا نوع پرتو X را به کمک قوانین پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای مشخص می‌کنیم.

${}^{1}_{0}n+{}^{10}_{5}B\rightarrow{}^{7}_{3}Li+{}^{A}_{Z}X$

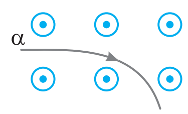
مجموع عدد اتمی‌های سمت راست = مجموع عدد اتمی‌های سمت چپ

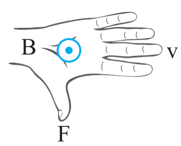
$: 5+0=3+Z\Rightarrow Z=2$

مجموع عدد جرمی‌های سمت راست = مجموع عدد جرمی‌های سمت چپ

$: 1+10=7+A\Rightarrow A=4$

بنابراین پرتو ${}^{4}_{2}X$ همان پرتو α است که دارای بار مثبت است و درون میدان برونسو شکل با توجه به قاعدهٔ دست راست به صورت روبه‌رو منحرف می‌شود.





A ۲۰۵۶ | ۳

برای فعل و انفعال هسته‌ای $({}^{137}_{55}Cs\rightarrow{}^{137}_{56}Ba+X+\text{انرژی})$ قوانین پایستگی را می‌نویسیم:

۱ قانون پایستگی تعداد نوکلئون‌ها:

$137=137+A_X\Rightarrow A_X=0$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم.

$55=56+Z_X\Rightarrow Z_X=-1$

بنابراین ${}^{0}_{-1}X$ بتای منفی است.

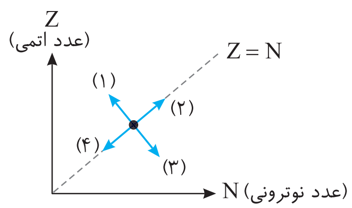
۳ اختلاف جرم را بر حسب kg به‌دست می‌آوریم و در رابطهٔ اینشتین جای‌گذاری می‌کنیم:

$E=mc^2\Rightarrow E=0/001\times1/7\times10^{-27}\times(3\times10^{8})^2$

$\Rightarrow E=15/3\times10^{-14}J=1/53\times10^{-13}J$

B ۲۰۵۷ | ۳

پوزیترون (β^+) در اثر واپاشی یک پروتون در هسته، گسیل می‌شود.



${}^{1}_{1}H\rightarrow{}^{1}_{0}n+{}^{0}_{+1}e$

در این صورت از عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) یک واحد کاسته می‌شود $(Z'=Z-1)$ و عدد نوترونی یک واحد افزایش می‌یابد $(N'=N+1)$.

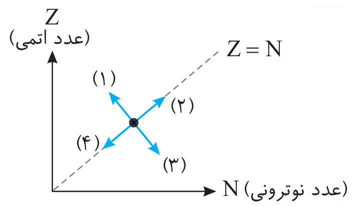
در انتقال (۱)، Z افزایش و N کاهش یافته بنابراین این انتقال صحیح نیست.

در انتقال (۲)، تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون افزایش یافته و این انتقال نیز نادرست است.

در انتقال (۳)، عدد نوترونی افزایش و تعداد پروتون‌ها کاهش می‌یابد و این انتقال درست است.

در انتقال (۴)، تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌ها کاهش می‌یابد و این انتقال نادرست است.

بازی با سؤال **هرگاه هسته‌ای بتا گسیل کند، در جهت کدام فلش منتقل می‌شود؟**



۱) (۴) ۲) (۲) ۳) (۳) ۴) (۱)

پاسخ **با گسیل بتا، عدد اتمی، یک واحد افزایش و عدد نوترونی، یک واحد کاهش می‌یابد، بنابراین در سوی فلش (۱) منتقل می‌شود.** گزینهٔ ۴

B ۲۰۵۸ | ۴

ذرهٔ آلفا $({}^{4}_{2}He)$ دارای دو نوترون و دو پروتون است و هرگاه هسته آلفا گسیل کند، عدد اتمی و عدد نوترونی هر کدام دو واحد کاهش می‌یابند. بنابراین در سوی فلش (۴) منتقل می‌شود.

A ۲۰۵۹ | ۱

به جای نقطه‌چین هسته ${}^{A}_{Z}X$ را قرار می‌دهیم.

${}^{235}_{92}U+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{140}_{54}Xe+{}^{94}_{38}Sr+{}^{1}_{0}n+{}^{A}_{Z}X$

۱ پایستگی تعداد نوکلئون‌ها را می‌نویسیم.

$235+1=140+94+1+A\Rightarrow A=1$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم.

$92+0=54+38+0+Z\Rightarrow Z=0$

۳ بنابراین ${}^{A}_{Z}X$، نوترون ${}^{1}_{0}n$ است.

A ۲۰۶۰ ۲

در واکنش هسته‌ای $^{۱۲}_{۶}C+^{A}_{Z}X\rightarrow ^{۴}_{۲}He+^{۱۰}_{۵}B$ قوانین پایستگی تعداد نوکلئون‌ها و عدد اتمی را می‌نویسیم

$$\begin{cases} ۱۲+A=۴+۱۰\Rightarrow A=۲ \\ ۶+Z=۲+۵\Rightarrow Z=۱ \end{cases}$$

بنابراین هستهٔ ایزوتوپ $^{۲}_{۱}H$ یعنی دوتریم، واکنش را کامل می‌کند.

A ۲۰۶۱ ۳

سدیم عنصر شمارهٔ ۱۱ جدول و Ne عنصر شمارهٔ ۱۰ جدول است، بنابراین عدد اتمی یک واحد کاهش یافته و عدد جرمی بدون تغییر است، پس پوزیترون گسیل شده است.

$$^{۲۲}_{۱۱}Na\rightarrow ^{۲۲}_{۱۰}Ne+ ^{۰}_{+۱}e$$

B ۲۰۶۲ ۳

عدد اتمی هستهٔ $^{۲۳۲}_{۹۰}Th$ برابر $Z=۹۰$ است یعنی در هستهٔ این عنصر ۹۰ پروتون وجود دارد، بنابراین بار هستهٔ آن برابر $q=Ze=۹۰e$ است و میدان الکتریکی هسته خواهد شد:

$$E=k\frac{q}{r^{۲}}\Rightarrow E=k\frac{۹۰e}{r^{۲}}$$

در زنجیرهٔ واپاشی هسته دو بار ذرهٔ α، دو بار الکترون (β^-) و همچنین پرتو γ گسیل کرده است.

با هر بار گسیل ذرهٔ α، $(^{۴}_{۲}He)$ هسته دو پروتون از دست می‌دهد، بنابراین در دو بار گسیل α، هسته ۴ پروتون از دست داده است. در واپاشی الکترون‌زا یک نوترون در هسته به یک پروتون و یک الکترون (β^-) تبدیل می‌شود. $^{۱}_{۰}n\rightarrow ^{۱}_{۱}H+^{۰}_{-۱}e$

بنابراین در هر واپاشی الکترون‌زا بر تعداد پروتون‌ها یک واحد افزوده می‌شود. در نتیجه به‌طور کلی در این زنجیره تعداد پروتون‌ها $۴-۲=۲$ واحد کاهش می‌یابد و برابر $Z'=۹۰-۲=۸۸$ می‌شود و میدان هسته در این حالت برابر است با:

$$E'=k\frac{q'}{r^{۲}}\xrightarrow{q'=۸۸e}E'=k\frac{۸۸e}{r^{۲}}$$

از این رو نسبت $\frac{E'}{E}$ خواهد شد.

$$\frac{E'}{E}=\frac{k\frac{۸۸e}{r^{۲}}}{k\frac{۹۰e}{r^{۲}}}=\frac{۸۸}{۹۰}=\frac{۴۴}{۴۵}$$

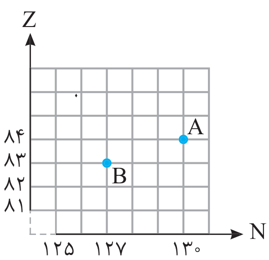
B ۲۰۶۳ ۱

این پدیده برخورد ماده و ضد ماده است که در آن تمام جرم به انرژی تبدیل می‌شود. با توجه به رابطهٔ اینشتین، انرژی هر فوتون خواهد شد:

$$E=mc^{۲}\Rightarrow E=(۹\times۱۰^{-۳۱})\times(۳\times۱۰^{۸})^{۲}$$

$$\Rightarrow E=۸۱\times۱۰^{-۱۵}J=\underbrace{\frac{۸۱\times۱۰^{-۱۵}}{۱/۶۲\times۱۰^{-۱۹}}}_{\text{برای تبدیل به eV}}eV=۵۰۰۰۰۰\ eV=۵۰۰keV$$

C ۲۰۶۴ ۳



۱ عدد اتمی عنصر A، $Z_A=۸۴$ و عدد نوترونی آن $N_A=۱۳۰$ بوده و عدد جرمی آن خواهد شد.

$$A_A=Z_A+N_A\Rightarrow A_A=۸۴+۱۳۰$$

$$\Rightarrow A_A=۲۱۴\Rightarrow ^{۲۱۴}_{۸۴}A$$

۲ عدد اتمی عنصر B، $Z_B=۸۳$ و عدد نوترونی آن $N_B=۱۲۷$ بوده و عدد جرمی آن خواهد شد:

$$A_B=Z_B+N_B\Rightarrow A_B=۸۳+۱۲۷\Rightarrow A_B=۲۱۰\Rightarrow ^{۲۱۰}_{۸۳}B$$

۳ عدد جرمی A برای تبدیل به B $(۲۱۴-۲۱۰=۴)$ واحد کاهش یافته بنابراین گسیل یک نوترون صورت نگرفته است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۴ اگر یک ذرهٔ آلفا گسیل کند از عدد نوترونی و همچنین عدد اتمی آن دو واحد کاسته می‌شود. از طرفی هنگام گسیل بتا از تعداد نوترون یک واحد کاسته و بر تعداد پروتون‌ها یک واحد افزوده می‌شود، در نتیجه با گسیل یک آلفا و یک بتای منفی جمعاً ۳ واحد از عدد نوترونی و یک واحد از عدد اتمی کاسته می‌شود.

$$^{۲۱۴}_{۸۴}A\rightarrow ^{۲۱۰}_{۸۳}B+^{۴}_{۲}He+^{۰}_{-۱}e$$

B ۲۰۶۵ ۴

نکته هرگاه جرمی برابر یکای جرم اتمی $(۱u)$ به انرژی تبدیل شود انرژی آزاد شده برابر ۹۳۱/۵ مگاالکترون‌ولت (MeV) است.

خط فکری هستهٔ کربن $(^{۱۲}_{۶}C)$ واپاشیده شده و سه ذرهٔ آلفا ایجاد شده است. برای آنکه انرژی مورد نیاز این فرایند را حساب کنیم، باید اختلاف جرم هستهٔ کربن با سه ذرهٔ آلفا را پیدا کرده آن را در ۹۳۱/۵ ضرب کنیم تا انرژی برحسب MeV را به دست بیاوریم.

$$\Delta m=۳m_{\alpha}-m_C\xrightarrow{m_C=۱۲u,m_{\alpha}=۴/۰۰۲۶u}$$

$$\Delta m=۳\times۴/۰۰۲۶u-۱۲/۰۰۰۰u=۰/۰۰۷۸u$$

انرژی حاصل خواهد شد: $E=۰/۰۰۷۸\times۹۳۱/۵\approx۷/۲۷MeV$

C ۲۰۶۶ ۴

خط فکری در واپاشی الکترون‌زا (β^-)، یک نوترون $(^{۱}_{۰}n)$ به یک پروتون $(^{۱}_{۱}H)$ و یک ذرهٔ β واپاشیده می‌شود و مقداری انرژی آزاد می‌گردد جرم پروتون ایجاد شده بسیار سنگین‌تر از جرم الکترون ایجاد شده است و پروتون در هسته ساکن یا تقریباً ساکن می‌ماند و انرژی ایجاد شده به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود، بنابراین شما باید تغییر جرمی را حساب کرده و مشخص کنید این جرم چند مگاالکترون‌ولت انرژی تولید می‌کند.

۱ جرمی که به انرژی جنبشی تبدیل شده است:

$$\Delta M=M_n-(M_p+M_e)=۱/۰۰۸۶۶-(۱/۰۰۷۲۸+۰/۰۰۰۵۴۹)$$

$$\Rightarrow\Delta M=۰/۰۰۰۸۳۱u$$

نکته هرگاه جرمی برابر $۱\ u$ به انرژی تبدیل شود به اندازهٔ $۹۳۱/۵MeV$ انرژی تولید می‌کند.

۲ بیشینه انرژی جنبشی ذره‌های بتا برابر است با:

$$E=۰/۰۰۰۸۳۱\times۹۳۱/۵=۰/۷۷۴MeV$$

پنجره ۵

A ۲۰۶۷ ۳

نکته نیمه‌عمر یک عنصر پرتوزا به جنس هستهٔ آن بستگی دارد و با فشار، دما یا زمان تغییر نمی‌کند.

با واپاشی جسم پرتوزا نیمه‌عمر ثابت می‌ماند.

A ۲۰۶۸ ۳

یادآوری اتم‌ها با تعداد پروتون یکسان و تعداد نوترون‌های مختلف را ایزوتوپ (هم‌مکان) می‌نامند، زیرا همگی در جدول مندلیف یک خانه را اشغال می‌کنند.

نیمه‌عمر به نوع هسته بستگی دارد و ایزوتوپ‌های یک عنصر ممکن است نیمه‌عمر متفاوتی داشته باشند و حتی ممکن است یک ایزوتوپ پایدار باشد مانند $^{۱}_{۱}H$ و ایزوتوپ دیگر ناپایدار باشد مانند $^{۳}_{۱}T$ و گزینهٔ (۱) نادرست است.

انرژی بستگی هسته به تعداد نوکلئون‌های هسته بستگی دارد و برای ایزوتوپ‌های یک عنصر که تعداد نوکلئون‌های متفاوتی دارند یکسان نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.

ایزوتوپ‌ها دارای عدد اتمی (Z) یکسان و عدد جرمی (A) و تعداد نوترون (N) متفاوت هستند. بنابراین گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۰۶۹ ۲

نیمه‌عمر یک عنصر پرتوزا، تنها تابع نوع هستهٔ واپاشیده است و عامل‌های خارجی مانند دما، فشار، یا میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تأثیری در آن ندارند و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

در اثر پرتوزایی بتازا، عدد اتمی هسته افزایش می‌یابد $(^{A}_{Z}X\rightarrow ^{A}_{Z+۱}Y+^{۰}_{-۱}e)$ بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

هر چه انرژی بستگی هسته بیشتر باشد، یعنی برای جدا کردن نوکلئون از هسته، انرژی بیشتری لازم است و هسته پایدارتر است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.
آلفا هستهٔ هلیم بوده و دارای دو پروتون و دو نوترون است. هرگاه هستهٔ پرتوزا، آلفا گسیل کند، عدد اتمی آن دو واحد و عدد جرمی آن ۴ واحد کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۰۷۰ ۱

یادآوری نیمه‌عمر مدت زمانی است که طول می‌کشد تا نیمی از هسته‌های عنصر پرتوزا واپاشیده شود.

$$\text{تعداد هسته‌های باقیمانده }N=\frac{\text{تعداد هسته‌های اولیه }N_0}{2^n}\rightarrow n=\frac{t}{T}\text{ تعداد نیمه‌عمرها}$$

۱ تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم. $n=\frac{t}{T}\xrightarrow{t=4h,T=1h}n=4$

۲ تعداد هسته‌های باقیماندهٔ بیسموت خواهد شد: $N=\frac{N_0}{2^4}\Rightarrow N=\frac{N_0}{16}$

A ۲۰۷۱ ۳

۱ با توجه به رابطهٔ نیمه‌عمر تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده را حساب می‌کنیم:

$$N=\frac{N_0}{2^n}\xrightarrow{N=\frac{N_0}{128}}\frac{N_0}{128}=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow 2^7=2^n\Rightarrow n=7$$

۲ هر نیمه‌عمر 2h است. بنابراین ۷ نیمه‌عمر خواهد شد:

$$t=nT\Rightarrow t=7\times2=14h$$

A ۲۰۷۲ ۲

۱ با توجه به رابطهٔ نیمه‌عمر تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده را حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{m_0}{2^n}\xrightarrow{m=1/5g,m_0=12g}\frac{3}{2}=\frac{12}{2^n}\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow n=3$$

۲ کل مدت واپاشی ۱۸ روز بوده است. یعنی در مدت ۱۸ روز سه نیمه‌عمر طی شده بنابراین

$$\text{نیمه‌عمر}:T=\frac{t}{n}\Rightarrow T=\frac{18}{3}=6\text{ روز}$$

A ۲۰۷۳ ۱

راه‌حل اول: با توجه به تعریف نیمه‌عمر:

$$\text{جرم اولیه }M_0\xrightarrow{10h}\frac{M_0}{2}\xrightarrow{10h}\frac{M_0}{4}\xrightarrow{10h}\frac{M_0}{8}\xrightarrow{10h}\frac{M_0}{16}\text{ جرم باقی‌مانده}$$

جرم واپاشیده = جرم اولیه − جرم عنصر پرتوزای باقی‌مانده

$$\Rightarrow\frac{M_0}{16}=M_0-15\Rightarrow\frac{15M_0}{16}=15\Rightarrow M_0=16g$$

راه‌حل دوم:

۱ ابتدا تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم.

$$n=\frac{t}{T}\xrightarrow{t=40h,T=10h}n=\frac{40}{10}=4\text{ نیمه‌عمر}$$

۲ جرم واپاشیده شده برابر است با: $M=M_0-15$

رابطهٔ نیمه‌عمر را نوشته جرم اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$M=\frac{M_0}{2^n}\xrightarrow{M=M_0-15g}M_0-15=\frac{M_0}{2^4}\Rightarrow M_0-15=\frac{M_0}{16}$$

$$\frac{15}{16}M_0=15\Rightarrow M_0=16g$$

A ۲۰۷۴ ۳

۱ با توجه به تعریف نیمه‌عمر، ابتدا تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow 0/125=\frac{2}{2^n}\Rightarrow 2^n=\frac{2}{0/125}\Rightarrow 2^n=16\Rightarrow n=4$$

۲ زمان سپری شده: $n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow 4=\frac{t}{28}\Rightarrow t=112$ سال

B ۲۰۷۵ ۱

۱ با توجه به تعریف نیمه‌عمر یک مادهٔ پرتوزا پس از گذشت سه نیمه‌عمر خواهیم داشت:

$$\text{جرم اولیه}:M_0\xrightarrow{t}\frac{M_0}{2}\xrightarrow{t}\frac{M_0}{4}\xrightarrow{t}\frac{M_0}{8}\text{ جرم باقی‌مانده}$$

۲ جرم واپاشیده شده برابر است با: $\text{جرم واپاشیده}:M_0-\frac{M_0}{8}=\frac{7}{8}M_0$

۳ نسبت خواسته شده را حساب می‌کنیم. $\frac{\text{جرم واپاشیده}}{\text{جرم باقی‌مانده}}=\frac{\frac{7}{8}M_0}{\frac{M_0}{8}}=7$

A ۲۰۷۶ ۴

با توجه به تعریف نیمه‌عمر:

۱ مقدار هسته‌های فعال باقی‌مانده در مدت $n=5$ نیمه‌عمر خواهد شد:

$$N=\frac{N_0}{2^n}\xrightarrow{n=5}N=\frac{N_0}{32}$$

۲ تعداد هسته‌های واپاشیده را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{هسته‌های واپاشیده}=N_0-\frac{N_0}{32}=\frac{31}{32}N_0$$

۳ درصد هسته‌های واپاشیده شده خواهد شد: $\frac{31}{32}N_0\sim97\%N_0$

A ۲۰۷۷ ۴

بنا بر تعریف نیمه‌عمر:

۱ تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم. $n=\frac{t}{T}\xrightarrow[T=8\text{ روز}]{t=32\text{ روز}}n=\frac{32}{8}=4$

۲ تعداد هسته‌های باقی‌مانده فعال را به‌دست می‌آوریم.

$$N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow N=\frac{N_0}{2^4}\Rightarrow N=\frac{N_0}{16}=6/25\%N_0$$

۳ درصد هسته‌های واپاشیده شده خواهد شد:

$$\text{درصد تعداد هسته‌های واپاشیده}\ \Delta N=N_0-6/25N_0\%\Rightarrow\Delta N=93/75\%N_0$$

بازی با سؤال **چند درصد از هسته‌های مادهٔ رادیواکتیوی پس از واپاشی در مدت ۴ نیمه‌عمر به‌صورت فعال باقی می‌ماند؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۱۲/۵

پاسخ **در مدت ۴ نیمه‌عمر خواهیم داشت:**

گزینه ۳ $N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow N=\frac{N_0}{2^4}\Rightarrow N=\frac{N_0}{16}\Rightarrow\frac{N}{N_0}=\frac{1}{16}=6/25\%$

A ۲۰۷۸ ۴

۱ ۸۷/۵ درصد از هسته‌های اولیه واپاشیده شده بنابراین ۱۲/۵ درصد از هسته‌های اولیه باقی مانده است. $(N=\frac{12/5}{100}N_0)$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow\frac{12/5}{100}N_0=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow\frac{1}{8}=\frac{1}{2^n}\Rightarrow n=3$$

در مدت 24h، سه نیمه‌عمر طی شده است. از این‌رو نیمه‌عمر این ماده پرتوزا برابر است با: $T=\frac{t}{n}\Rightarrow T=\frac{24}{3}=8h$

B ۲۰۷۹ ۳

یادآوری برای به‌دست آوردن درصد هسته‌های پرتوزا باقی‌مانده می‌توان از رابطه $\frac{N}{N_0}=(\frac{1}{2})^n\times100$ استفاده کرد که در آن $n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$ است.

راه‌حل اول: نیمه‌عمر کربن ۵۷۳۰ سال است، بنابراین پس از ۲۲۹۲۰ سال، ۴ نیمه‌عمر گذشته است. $n=\frac{22920}{5730}=4$

حال با توجه به رابطهٔ گفته شده در یادآوری درصد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد باقی‌مانده}\ \frac{N}{N_0}=(\frac{1}{2})^4\times100=6/25\%$$

راه‌حل‌دوم: پس از هر نیمه‌عمر مقدار باقیماندهٔ یک عنصر نصف می‌شود:

$$N \xrightarrow{\text{یک نیمه‌عمر}} \underset{50\%}{\frac{N}{2}} \xrightarrow{\text{دو نیمه‌عمر}} \underset{25\%}{\frac{N}{4}} \xrightarrow{\text{سه‌نیمه‌عمر}}$$

$$\underset{12/5\%}{\frac{N}{8}} \xrightarrow{\text{چهارنیمه‌عمر}} \underset{6/25\%}{\frac{N}{16}}$$

A ۲۰۸۰ ۲

۱ تعداد نیمه‌عمر A و B را حساب می‌کنیم.

$$n=\frac{t}{T}\begin{cases} A: t=600\ \text{روز},\ T_A=100\ \text{روز} \longrightarrow n_A=\frac{600}{100}=6\ \text{نیمه‌عمر}\\ B: t=600\ \text{روز},\ T_B=150\ \text{روز} \longrightarrow n_B=\frac{600}{150}=4\ \text{نیمه‌عمر}\end{cases}$$

۲ تعداد هسته‌های فعال A و B با هم برابر شده است. $(N_A=N_B)$

$$N_A=N_B\Rightarrow \frac{N_{0A}}{2^{n_A}}=\frac{N_{0B}}{2^{n_B}}\Rightarrow \frac{N_{0A}}{2^6}=\frac{N_{0B}}{2^4}\Rightarrow \frac{N_{0A}}{N_{0B}}=2^2=4$$

A ۲۰۸۱ ۴

با توجه به فرض‌های مسئله تعداد هسته‌های باقی‌مانده A، ۴ برابر تعداد هسته‌های باقی‌مانده B است:

$$N_A=4N_B \xrightarrow{N=\frac{N_0}{2^n}} \frac{N_{0A}}{2^{n_A}}=4\frac{N_{0B}}{2^{n_B}} \xrightarrow{N_{0A}=N_{0B}} \frac{2^{n_B}}{2^{n_A}}=4$$

$$\Rightarrow 2^{n_B-n_A}=2^2\Rightarrow n_B-n_A=2$$

A ۲۰۸۲ ۳

۱ در مدت ۳۰۰۰ سال تعداد هسته‌های باقیمانده $N=N_0/8$ است. نیمه‌عمر را به‌دست می‌آوریم:

$$N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow\frac{N_0}{8}=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow n=3 \quad , \quad T_{\frac12}=\frac{t}{n}=\frac{3000}{3}=1000y$$

۲ از ۳۰۰۰ سال تا ۶۰۰۰ سال نیز تعداد نیمه‌عمر $n=3$ خواهد بود و تعداد هسته‌های باقی‌مانده خواهد شد:

$$\frac{N_0}{8}\xrightarrow{T_{\frac12}=1000}\frac{N_0}{16}\xrightarrow{T_{\frac12}=1000}\frac{N_0}{32}\xrightarrow{T_{\frac12}=1000}\frac{N_0}{64}$$

۳ بنابراین تعداد هسته‌های واپاشیده در این مدت برابر است با:

$$\frac{N_0}{8}-\frac{N_0}{64}=\frac{8N_0-N_0}{64}=\frac{7N_0}{64}$$

B ۲۰۸۳ ۳

خط فکری مسئله را از قسمت دوم آن یعنی باقی ماندن $\frac{m_1}{8}$ مادهٔ فعال از مقدار m_1 باید شروع کنید و مشخص کنید در بازه $300h$ تا $450h$ چند نیمه‌عمر گذشته است، سپس نیمه‌عمر را حساب کرده به سراغ ماده اولیه بروید.

۱ در مدت ۳۰۰ ساعت تا ۴۵۰ ساعت، جرم فعال از m_1 به $\frac{m_1}{8}$ رسیده است از این‌رو:

$$m=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow\frac{m_1}{8}=\frac{m_1}{2^n}\Rightarrow n=3$$

۲ نیمه‌عمر خواهد شد: $T=\frac{t}{n}\Rightarrow T=\frac{450-300}{3}\Rightarrow T=50h$

۳ اکنون مقدار عنصر فعال باقیمانده پس از گذشت ۴۵۰ ساعت را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow\frac{450}{50}\Rightarrow n=9\ ,\ m=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow m=\frac{m_0}{2^9}\Rightarrow m=\frac{m_0}{512}$$

۴ مقدار ماده واپاشیده برابر است با: $m_0-m_x=m_0-\frac{m_0}{512}=\frac{511}{512}m_0$

A ۲۰۸۴ ۴

با توجه به فرض مسأله:

۱ اگر جرم باقیمانده را m و جرم اولیه را m_0 فرض کنیم جرم مادهٔ واپاشیده $\Delta m=m_0-m$ خواهد بود که در صورت مسئله بیان شده $\Delta m=15m$ است. بنابراین:

$$\Delta m=\text{جرم واپاشیده شده}=15\times\text{جرم باقی‌مانده}\Rightarrow 15m=m_0-m$$

$$\Rightarrow m_0=16m\Rightarrow m=\frac{m_0}{16}$$

۲ تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم. $m=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow\frac{m_0}{16}=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow n=4$

۳ زمان سپری شده خواهد شد: $n=\frac{t}{T}\Rightarrow t=nT\Rightarrow t=4\times16\Rightarrow t=64$ روز

B ۲۰۸۵ ۲

خط فکری وقتی ماده پرتوزای X واپاشیده شده و به مادهٔ پرتوزای Y تبدیل می‌شود، در واقع تعداد هسته‌های ایجاد شدهٔ Y برابر تعداد هسته‌های واپاشیدهٔ X است و وقتی در صورت مسئله بیان می‌کند که تعداد هسته‌های Y (N_Y) ایجاد شده ۱۵ برابر تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ X است یعنی $\Delta N_X=15N_X$ است. حال با دانستن این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

۱ تعداد ذره‌های تولید شدهٔ Y برابر تعداد ذره‌های واپاشیدهٔ X است از این‌رو:

$$N_Y=\Delta N_X\Rightarrow N_Y=N_{0X}-N_X\Rightarrow N_X+N_Y=N_{0X}$$

۲ با توجه به فرض مسئله N_Y، ۱۵ برابر N_X است.

$$N_X+15N_X=N_{0X}\Rightarrow N_X=\frac{N_{0X}}{16}$$

۳ تعداد نیمه‌عمرها را به‌دست می‌آوریم.

$$N=\frac{N_x}{2^n}\Rightarrow\frac{N_x}{16}=\frac{N_{0x}}{2^n}\Rightarrow 2^n=16\Rightarrow n=4$$

۴ بنابراین عمر قطعه سنگ برابر می‌شود با چهار نیمه‌عمر:

$t=5000\times4=2\times10^4$ سال $=20$ هزار سال

$n=\frac{t}{T}\Rightarrow4=\frac{t}{5000}\Rightarrow t=20000$ سال $=200$ قرن

A ۲۰۸۶ ۳

۱ تعداد هسته‌های موجود A و B در هر مرحله از واپاشیدن برابر تعداد هسته‌های اولیه عنصر پرتوزای A است، بنابراین:

N_{0A} : تعداد هسته‌های اولیه A و N_{MB} : تعداد هسته‌های B در نقطه M و

N_{MA} : تعداد هسته‌های A در نقطه M $\qquad N_{0A}=(N_{MA}+N_{MB})$

۲ با توجه به فرض مسئله تعداد هسته‌های B در نقطه M، ۱۵ برابر تعداد هسته‌های A است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$N_{0A}=(N_{MA}+15N_{MA})\Rightarrow N_{0A}=16N_{MA}\Rightarrow N_{MA}=\frac{1}{16}N_{0A}$$

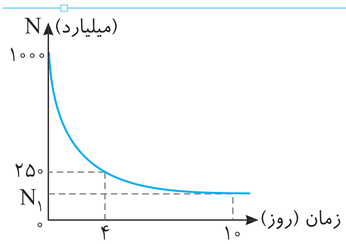
۳ تعداد نیمه‌عمر A را به‌دست می‌آوریم:

$$N_A=\frac{N_{0A}}{2^n}\Rightarrow\frac{1}{16}N_{0A}=\frac{N_{0A}}{2^n}\Rightarrow2^n=16\Rightarrow n=4\ \text{نیمه عمر}$$

۴ بعد از گذشت ۴ نیمه‌عمر به حالت M می‌رسد و زمان سپری‌شده خواهد شد:

$4\times1/2\times10^9=4/8\times10^9$ سال یا ۴/۸ میلیارد سال

A ۲۰۸۷ ۴



۱ به نمودار نگاه کنید. در مدت ۴ روز تعداد هسته‌های ماده فعال از 1000×10^9 به 250×10^9 هسته می‌رسد یعنی تعداد نیمه‌عمر سپری شده خواهد شد:

$$N=N_0\left(\frac12\right)^n\Rightarrow250\times10^9=\frac{1000\times10^9}{2^n}\Rightarrow2^n=4\Rightarrow n=2$$

۲ نیمه‌عمر را به‌دست می‌آوریم. $n=\frac{t}{T}\Rightarrow 2=\frac{4}{T}\Rightarrow T=2$ روز

۳ برای به‌دست آوردن N_1 باید بررسی کنیم در مدت ۱۰ روز چند نیمه‌عمر سپری شده است. $n=\frac{t}{T}=\frac{10}{2}=5$

۴ N_1 را حساب می‌کنیم.

$$N=N_0(\tfrac{1}{2})^n\Rightarrow N_1=\frac{N_0}{2^5}\Rightarrow N_1=\frac{N_0}{32}=\frac{1000}{32}=31/25\times10^9$$

B ۲۰۸۸ ۱

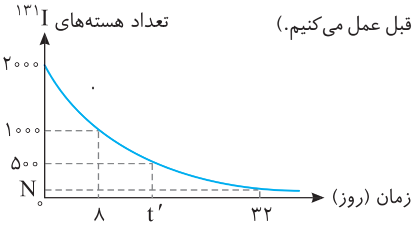
راه‌حل اول: با توجه به نمودار تعداد هسته‌های فعال در مدت ۸ روز، نصف شده است. بنابراین نیمه‌عمر آن ۸ روز می‌باشد. بنابراین t' که برابر دو نیمه‌عمر است، $2\times8=16$ روز است. بعد از گذشت ۳۲ روز، داریم:

$$2000\xrightarrow{8\text{ روز}}1000\xrightarrow{8\text{ روز}}500\xrightarrow{8\text{ روز}}250\xrightarrow{8\text{ روز}}N=125$$

راه‌حل دوم:

$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}=\frac{32}{8}=4\ ,\quad N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow N=\frac{N_0}{2^4}\Rightarrow N=\frac{2000}{16}\Rightarrow N=125$$

(در مورد t' مانند راه‌حل قبل عمل می‌کنیم.)



B ۲۰۸۹ ۲

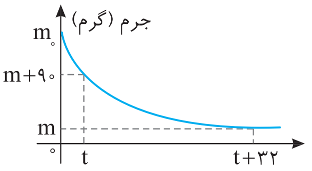
۱ نیمه‌عمر این ماده بنا به فرض مسئله $8h$ است.

۲ در بازه t تا t+۳۲، ۳۲ ساعت زمان سپری شده، اکنون مشخص می‌کنیم این ۳۲ ساعت چند نیمه‌عمر است. $n=\frac{t}{T}\Rightarrow n=\frac{32}{8}\Rightarrow n=4$ نیمه‌عمر

۳ در مدت ۴ نیمه‌عمر جرم ماده فعال پرتوزا از مقدار اولیه $(m+90)$ به m رسیده است. بنابراین می‌توان نوشت

$$m=\frac{m+90}{2^n}\Rightarrow m=\frac{m+90}{2^4}\Rightarrow16m=m+90\Rightarrow15m=90\Rightarrow m=\frac{90}{15}\Rightarrow m=6g$$

۴ در $t+32$ جرم مادهٔ فعال $6g$ است و در $t+48$ زمان سپری شده $48-32=16h$ بوده که این زمان برابر دو نیمه‌عمر است. بنابراین جرم فعال در $t+48$ خواهد شد.



$$6g\xrightarrow{T=8h}3g\xrightarrow{T=8h}1/5g$$

B ۲۰۹۰ ۳

یادآوری نیمه‌عمر یک مادهٔ پرتوزا مدت زمانی است که طول می‌کشد تا نیمی از هسته‌های مادهٔ پرتوزا واپاشیده شود.

با توجه به نمودار می‌توان مسیر تحولات ماده پرتوزا را در مدت ۱۶ روز نشان داد. تعداد نیمه‌عمرها در مدت ۱۶ روز برابر ۴ نیمه‌عمر است، بنابراین:

$$N_0\xrightarrow{T_{\frac{1}{2}}}\frac{N_0}{2}\xrightarrow{T_{\frac{1}{2}}}\frac{N_0}{4}\xrightarrow{T_{\frac{1}{2}}}\frac{N_0}{8}\xrightarrow{T_{\frac{1}{2}}}\frac{N_0}{16}$$

$$4T_{\frac{1}{2}}=16\Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=4\ \text{روز}$$

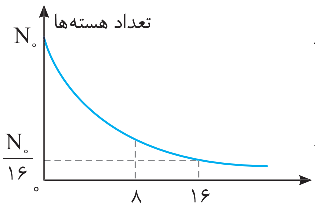
در مدت ۸ روز دو نیمه‌عمر می‌گذرد و تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده خواهد شد:

$$N=\frac{N_0}{2^2}\Rightarrow N=\frac{N_0}{4}\Rightarrow\frac{N}{N_0}=\%25$$

روش دیگر: با توجه به رابطهٔ $N=N_0(\frac{1}{2})^n$ داریم:

$$\frac{N_0}{16}=N_0(\tfrac{1}{2})^n\Rightarrow n=4$$

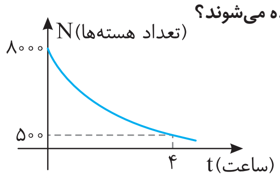
$$\xrightarrow{n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}4=\frac{16}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=4\ \text{روز}$$



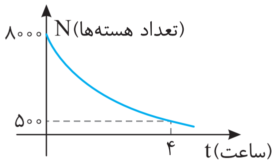
حال تعداد هسته‌های باقی‌مانده پس از ۸ روز را به‌دست می‌آوریم. $n'=\frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}}=\frac{8}{4}=2$

بنابراین پس از ۸ روز، $\frac{1}{2^2}$ هسته فعال باقی‌مانده که همان ۲۵٪ می‌باشد.

بازی با سؤال **نمودار تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده در یک نمونهٔ رادیواکتیو برحسب زمان مطابق شکل زیر است. پس از مدت ۳ ساعت از شروع واپاشی چند درصد از هسته‌های اولیه واپاشیده می‌شوند؟**



۱) ۱۲/۵ درصد
۲) ۸۷/۵ درصد
۳) ۶/۲۵ درصد
۴) ۹۳/۷۵ درصد



پاسخ با توجه به رابطهٔ $N=N_0(\frac{1}{2})^n$ که در آن $n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$ است داریم:

$$500=8000(\tfrac{1}{2})^n\Rightarrow\frac{1}{16}=(\tfrac{1}{2})^n\Rightarrow n=4\ ,\ n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow4=\frac{4}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=1h$$

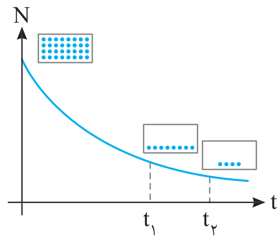
بنابراین نیمه‌عمر برابر 1h می‌باشد:

$$n=\frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}}\xrightarrow{t'=3h}n=\frac{3}{1}=3\quad,\quad N'=8000(\tfrac{1}{2})^3\Rightarrow N'=1000$$

بنابراین از ۸۰۰۰ هسته بعد از ۳ ساعت ۱۰۰۰ هسته باقی‌مانده است یعنی ۷۰۰۰ هسته واپاشی شده است. $\frac{7000}{8000}\times100=87/5\%$ گزینه ۲

B ۲۰۹۱ ۱

خط فکری باید تعداد هسته‌های درون هر مستطیل را بشمارید تا مشخص شود در مدت t_1 چه تعداد از هسته‌ها و در مدت t_1 تا t_2 نیز چه تعداد از هسته‌ها واپاشیده و چه تعداد باقی‌مانده است.



۱ با توجه به تعداد هسته‌های اولیه درون مستطیل اول $N_0=32$ و تعداد هسته‌ها در لحظهٔ t_1، $N_1=8$ است، بنابراین t_1 خواهد شد:

$$N_1=N_0(\tfrac{1}{2})^{n_1}\Rightarrow8=32(\tfrac{1}{2})^{n_1}\Rightarrow n_1=2\quad,\quad n_1=\frac{t_1}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow t_1=2T_{\frac{1}{2}}$$

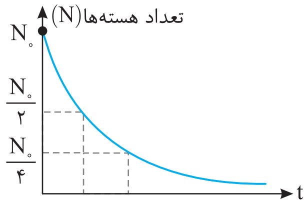
۲ در لحظهٔ t_2 تعداد هسته‌ها، ۴ شده است. بنابراین t_2 خواهد شد:

$$N_2=N_0(\tfrac{1}{2})^{n_2}\Rightarrow4=32(\tfrac{1}{2})^{n_2}\Rightarrow n_2=3\quad,\quad n_2=\frac{t_2}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow t_2=3T_{\frac{1}{2}}$$

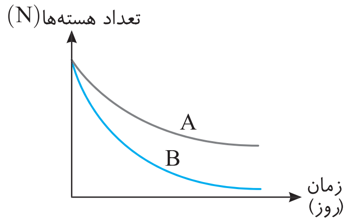
۳ نسبت t_2/t_1 برابر است با: $\frac{t_2}{t_1}=\frac{3T_{\frac{1}{2}}}{2T_{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2}$

A ۲۰۹۲ ۲

نکته با توجه به نمودار روبه‌رو هرچه نیمه‌عمر کوتاه‌تر باشد تعداد هسته‌های فعال در زمان کوتاه‌تری واپاشیده شده و تعداد هسته‌های باقیماندهٔ فعال به سرعت کاهش می‌یابد و شیب تغییرات آن تندتر است.



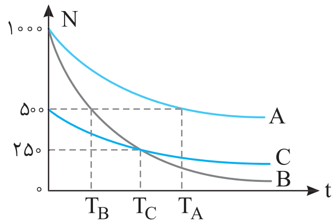
با توجه به نمودار شیب تغییرات B بسیار تندتر از A است. بنابراین نیمه‌عمر B کوتاه‌تر از نیمه‌عمر A است. $(T_{\frac{۱}{۲}})_A > (T_{\frac{۱}{۲}})_B$



A ۲۰۹۳ ۴

با توجه به تعریف نیمه‌عمر می‌دانیم در مدت یک نیمه‌عمر تعداد هسته‌های پرتوزا نصف می‌شود. بنابراین با پیداکردن زمان‌های مربوط به هر نمودار وقتی که تعداد هسته‌های آن ماده پرتوزا نصف می‌شود مشخص است که:

$T_B < T_C < T_A$



B ۲۰۹۴ ۳

۱ با توجه به نمودار، تعداد هسته‌های A در مدت ۳ روز از ۱۰۰۰ هسته به ۵۰۰ هسته رسیده بنابراین نیمه‌عمر A، سه روز می‌باشد، پس ۹ روز معادل ۳ نیمه‌عمر عنصر A است.

۲ تعداد هسته‌های A بعد از ۹ روز خواهد شد:

$$N = N_۰(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow N = N_۰(\frac{۱}{۲})^۳ \Rightarrow N = \frac{۱۰۰۰}{۲^۳} = ۱۲۵ \text{ هسته}$$

۳ برای عنصر B در مدت ۳ روز، تعداد هسته‌های فعال از ۱۰۰۰ به ۱۲۵ رسیده است، از این‌رو تعداد نیمه‌عمرها خواهد شد:

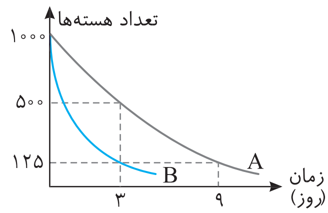
$$N_B = N_{۰B}(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow ۱۲۵ = \frac{۱۰۰۰}{۲^n} \Rightarrow n = ۳$$

۴ نیمه‌عمر عنصر B خواهد شد:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{۳}{۳} = ۱ \text{ روز}$$

۵ اکنون مشخص می‌کنیم که پس از چند روز $\frac{۱}{۳۲}$ هسته‌های B فعال می‌ماند.

$$N = N_۰(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow \frac{N_۰}{۳۲} = \frac{N_۰}{۲^n} \Rightarrow n = ۵ , T = \frac{t}{n} \Rightarrow ۱ = \frac{t}{۵} \Rightarrow t = ۵ \text{ روز}$$



B ۲۰۹۵ ۲

۱ با توجه به نمودار ۷۵ سال برای هسته‌های B برابر $(n = \frac{۷۵}{۲۵} = ۳)$ سه نیمه‌عمر است و تعداد هسته‌های B بعد از ۷۵ سال خواهد شد:

$$N_B = N_{۰B}(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow N_B = \frac{۱۶ \times ۱۰^{۲۴}}{۲^۳} = ۲ \times ۱۰^{۲۴}$$

۲ با توجه به نمودار پس از ۷۵ سال تعداد هسته‌های فعال A و B یکسان است از این‌رو:

$$N_A = N_B = ۲ \times ۱۰^{۲۴} , N_A = \frac{N_{۰A}}{۲^n} \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{۲۴} = \frac{۳/۲ \times ۱۰^{۲۵}}{۲^n} \Rightarrow ۲^n = ۱۶$$
$$\Rightarrow n = ۴$$

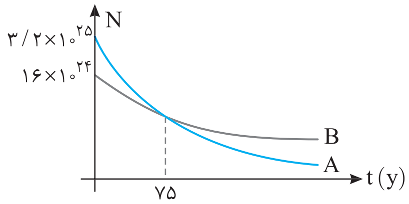
۳ نیمه‌عمر عنصر A خواهد شد:

$$T_{\frac{۱}{۲}A} = \frac{t}{n} = \frac{۷۵}{۴} = ۱۸/۷۵ y$$

۴ اکنون تعداد هسته‌های فعال A را بعد از ۱۱۲/۵ سال به‌دست می‌آوریم:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{۱۱۲/۵}{\frac{۷۵}{۴}} = \frac{۴۵۰}{۷۵} = ۶$$

$$N = \frac{N_۰}{۲^n} \Rightarrow N_A = \frac{۳/۲ \times ۱۰^{۲۵}}{۲^۶} \Rightarrow N_A = \frac{۳۲ \times ۱۰^{۲۴}}{۶۴} \Rightarrow N_A = ۵ \times ۱۰^{۲۳}$$



B ۲۰۹۶ ۳

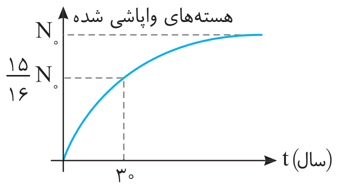
خط فکری دقت کنید که محور قائم این نمودار جرم واپاشی شده است و به همین دلیل در $t = ۰$، جرم واپاشیده صفر است و در نهایت اگر کل ماده پرتوزا واپاشیده شود، تعداد هسته‌های واپاشیده $N_۰$ یعنی همان تعداد هسته‌های اولیه است. وقتی روی نمودار تعداد هسته‌های واپاشی شده $\frac{۱۵}{۱۶}N_۰$ است یعنی تعداد هسته‌های فعال $N_۰ - \frac{۱۵}{۱۶}N_۰ = \frac{N_۰}{۱۶}$ است. از اینجا به بعد دیگر مسئله قابل حل است.

۱ تعداد نیمه‌عمرها خواهد شد: $N = N_۰(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow \frac{۱}{۱۶}N_۰ = N_۰(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow n = ۴$

۲ نیمه‌عمر برابر است با: $n = \frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow ۴ = \frac{۳۰}{T_{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow T_{\frac{۱}{۲}} = ۷/۵$ سال

۳ اکنون زمانی که $N = \frac{۱}{۳۲}N_۰$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۳۲}N_۰ = N_۰(\frac{۱}{۲})^{n'} \Rightarrow n' = ۵ \quad , \quad n' = \frac{t'}{T_{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow ۵ = \frac{t'}{۷/۵} \Rightarrow t' = ۳۷/۵ \text{ سال}$$



A ۲۰۹۷ ۲

برای هر یک از دو عنصر، هسته‌های فعال P و Q را بعد از گذشت 1h حساب می‌کنیم:

۱ نیمه‌عمر عنصر P، ۲۰ دقیقه است. تعداد هسته‌های فعال آن بعد از $1h = ۶۰ min$ یعنی سه نیمه‌عمر $(n = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳)$ را حساب می‌کنیم.

$$N_{۰P} \xrightarrow{۲۰min} \frac{N_{۰P}}{۲} \xrightarrow{۲۰min} \frac{N_{۰P}}{۴} \xrightarrow{۲۰min} \frac{N_{۰P}}{۸}$$

۲ نیمه‌عمر عنصر Q، ۳۰ دقیقه است. تعداد هسته‌های فعال عنصر Q را بعد از گذشت $1h = ۶۰ min$ یعنی دو نیمه‌عمر $(n = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲)$ به‌دست می‌آوریم.

$$N_{۰Q} \xrightarrow{۳۰min} \frac{N_{۰Q}}{۲} \xrightarrow{۳۰min} \frac{N_{۰Q}}{۴}$$

۳ نسبت N_P / N_Q خواهد شد:

$$\frac{N_P}{N_Q} = \frac{\frac{N_{۰P}}{۸}}{\frac{N_{۰Q}}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$

B ۲۰۹۸ ۲

۱ تعداد نیمه‌عمرهای دو عنصر را در مدت t دقیقه برحسب t به‌دست می‌آوریم.

$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\begin{cases}\xrightarrow{\text{عنصر x}: T_{\frac{1}{2}}=50\,\text{min}} n_x=\frac{t}{50}\\ \xrightarrow{\text{عنصر y}: T_{\frac{1}{2}}=100\,\text{min}} n_y=\frac{t}{100}\end{cases}\Rightarrow\frac{n_x}{n_y}=2\Rightarrow n_x=2n_y$$

۲ جرم هسته‌های فعال باقی‌مانده x و y را برحسب t حساب می‌کنیم.

$$M=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{cases}\xrightarrow{x} M_x=100\left(\frac{1}{2}\right)^{n_x}\Rightarrow M_x=\frac{100}{2^{n_x}}\\ \xrightarrow{y} M_y=100\left(\frac{1}{2}\right)^{n_y}\Rightarrow M_y=\frac{100}{2^{n_y}}\end{cases}$$

۳ نیمه‌عمر y بزرگ‌تر است و در مدت t تعداد نیمه‌های کمتری گذرانده و جرم فعال باقیمانده آن بزرگ‌تر است و بنا به فرض مسئله خواهیم داشت.

$$M_y-M_x=18/75g\Rightarrow\frac{100}{2^{n_y}}-\frac{100}{2^{n_x}}=18/75\xrightarrow{n_x=2n_y}$$

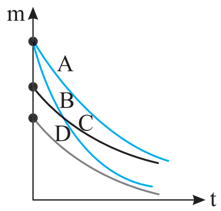
$$\frac{1}{2^{n_y}}-\frac{1}{2^{2n_y}}=\frac{18/75}{100}\Rightarrow\frac{2^{n_y}-1}{2^{2n_y}}=\frac{3}{16}\Rightarrow 2^{2n_y}=16$$

$$2n_y=4\Rightarrow n_y=2$$

بنابرایـن در مدت t، دو نیمه‌عمر برای عنصر y با نیمه‌عمر ۱۰۰ دقیقه می‌گذرد و t برابر $2\times 100=200$ دقیقه است.

B ۲۰۹۹ ۲

با توجه به شکل مسئله، نیمه‌عمر B از همه کوتاه‌تر و سرعت واپاشی آن از بقیه بیشتر است.



نکته در نمودار جرم (یا تعداد هسته‌های) فعال برحسب زمان: هرچه شیب نمودار تندتر باشد و سرعت کاهش جرم فعال بیشتر باشد، نیمه‌عمر کوتاه‌تر است.

بـه نمودار دقت کنید. سـرعت کاهش جرم فعال عنصـر B از بقیه بیشـتر اسـت. به همیـن دلیل نیمه‌عمر آن از بقیه کوتاه‌تر است و واپاشی آن سریع‌تر صورت می‌گیرد.

پنجره ۴ روبه‌روی ۵

A ۲۰۹۹ ۱

۱ ایزوتوپ‌های عناصر اغلب ناپایدارند و با گذشـت زمان واپاشیـده می‌شـوند و گزینهٔ (۱) درست است. نیروهای هسته‌ای کوتاه‌بُرد هستند و گزینهٔ (۲) نادرست است. جرم هسته همواره از مجموع جرم نوکلئون‌های تشـکیل‌دهندهٔ آن کمتر اسـت و گزینهٔ (۳) نادرست اسـت. هر چه هسـتهٔ عناصر سـنگین‌تر می‌شـود، نسـبت $\frac{N}{Z}$ افزایش می‌یابـد و برای هسته‌های مختلف یکسان نیست و گزینهٔ (۴) نادرست است. نمای ۱۱، ۱۲ و ۱۳

A ۲۰۹۹ ۲

۲ در پرتوزایی طبیعی سه پرتو توسط هسته پرتوزا گسیل می شود. آلفا، بتا، گاما. آلفا دارای دو نوترون و دو پروتون بوده و دارای بار مثبت است و بتا از جنس الکترون بوده و منفی است و گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی است و در میدان مغناطیسی بر آن نیرو وارد نمی‌شود. جرم الکترون نسبت به ذرهٔ آلفا بسیار کم است. به همین علت در گذر از میدان مغناطیسی بیشتر منحرف می‌شود. بنابراین جنس پرتو Z باید الکترون (بتای منفی β^-) باشد.

چون الکترون دارای بار منفی است از دست چپ استفاده می‌کنیم.

چهار انگشت باز دست چپ را به سمت بالای صفحه در جهت خروج الکترون از چشمه به گونه‌ای قرار دهید که انگشـت باز شسـت به سـمت راست باشـد. در این حالت کف دست شما رو به صفحه کاغذ بوده و میدان مغناطیسی درونسو است. نمای ۱۳

B ۲۰۹۹ ۱

۳ **نکته** واپاشـی β: این واپاشـی، متداول‌ترین نوع واپاشـی در هسته‌هاست. دو نوع واپاشی β با نام‌های β^- و β^+ رخ می‌دهند.

- در واپاشـی β^-، الکترون گسیل‌شـده حاصل تبدیل نوترون درون هسته به پروتون و الکترون اسـت. در نتیجه عدد جرمی ثابت مانده و عدد اتمی به اضافه (۱) می‌شـود. ایـن الکتـرون نه در هسـته و نه در مدار اتم وجود نداشـته اسـت. در واپاشـی β^+، ذره‌ای هم‌جرم با الکترون اما با بار مثبت از هسـته گسـیل می‌شود که پوزیترون نام دارد. در واپاشی β^+، یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود. اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتوگاما، به حالت پایه می‌رسند.

در واپاشـی β^-، الکترون گسیل شده حاصل تبدیل یک نوترون به پروتون است و گزارهٔ (الف) درست است.

در واپاشـی β^+، ذرهٔ گسیل‌شـده دارای جرمی یکسان با الکترون، اما باری مثبت است و گزارهٔ (ب) درست است.

هسـته‌های برانگیختـه بـرای رسـیدن به پایـداری پرتو گامـا می‌تابانند پس گـزارهٔ (پ) نادرست است.

در واپاشـی β^+، پروتـون به یـک نوترون و یـک پوزیترون تبدیل می‌شـود و گزارهٔ (ت) نادرست است. نمای ۱۳

B ۲۰۹۹ ۴

۴ **نکته** در واپاشـی β^- که از جنس الکترون اسـت یک نوترون واپاشیده شده و یـک پروتـون و یک الکتـرون (β^-) تولید می‌شـود $({}^{1}_{0}H\to{}^{1}_{1}H+{}^{0}_{-1}e^-)$. به همین دلیل عدد جرمی تغییر نمی‌کند. اما به تعداد پروتون‌ها یکی اضافه شده و عدد اتمی یک واحد افزایش می‌یابد و خواهیم داشت: ${}^{A}_{Z}X\to{}^{A}_{Z+1}Y+{}^{0}_{-1}e^-$

سـدیم ${}^{24}_{11}Na$ دارای ۱۱ پروتـون و $24-11=13$ نوترون اسـت. با گسـیل β^-، از نوترون‌هـا یکـی کـم می‌شـود $13-1=12$ و بر تعـداد پروتون‌هـا یکی اضافه می‌شـود. $11+1=12$ نمای ۱۳

B ۲۰۹۹ ۲

۵ **یادآوری** آلفـا هسـته هلیم $(\alpha={}^{4}_{2}He)$ و بتـای منفی، الکتـرون $({}^{0}_{-1}e)$ و نوترون $({}^{1}_{0}n)$ اسـت و در واکنش‌های هسـته‌ای مجموع عدد اتمی طرف چپ معادله با طرف راست و همچنین مجموع عدد جرمی طرف چپ با طرف راست یکسان است.

بـا توجـه به پایسـتگی مجموع عدد اتمـی و عدد جرمـی در دو طرف واکنش هسـته‌ای خواهیم داشت:

$${}^{207}_{82}X\to{}^{197}_{79}Y+N({}^{4}_{2}He)+M({}^{0}_{-1}e)+2({}^{1}_{0}n)$$

$$\text{عدد جرمی}: 207=197+4N+0+2\Rightarrow 8=4N\Rightarrow N=2$$

$$\text{عدد اتمی}: 82=79+2N-M+0\xrightarrow{N=2}82=79+2\times 2-M\Rightarrow M=1$$

نمای ۱۳

A ۲۰۹۹ ۲

۶ معادلهٔ واکنش را می‌نویسیم، تعداد ذرات α را با حرف a و تعداد ذرات β^- را با حرف b نمایش می‌دهیم. a و b ضرایب α و β هستند.

$${}^{243}_{95}X\to{}^{223}_{91}Y+a\,{}^{4}_{2}He+b\,{}^{0}_{-1}e$$

قانون پایستگی تعداد نوکلئون‌ها را می‌نویسیم:

$$243=223+4a+0\Rightarrow 20=4a\Rightarrow a=5$$

مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم.

$$95=91+2a-b\Rightarrow 95=91+2\times 5-b\Rightarrow b=6$$

نمای ۱۳

A ۲۰۹۹ ۲

۷ با توجه به رابطهٔ نیمه‌عمر، تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم.

$$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\xrightarrow{N_0=1600,\,N=200}200=\frac{1600}{2^n}\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow n=3$$

زمان سپری شده خواهد شد: نمای ۱۴

$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow 3=\frac{t}{6}\Rightarrow t=18h$$

B ۲۰۹۹ ۲

۸ ۷۵ درصد از هسته‌های ماده پرتوزا واپاشیده شده است یعنی ۲۵٪ از آن ماده فعال باقی مانده است:

$$N=N_\circ-\frac{۷۵}{۱۰۰}N_\circ\Rightarrow N=\frac{۲۵N_\circ}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow N=\frac{N_\circ}{۴}=\frac{N_\circ}{۲^۲}\xrightarrow{N=N_\circ(\frac{۱}{۲})^n}\frac{N_\circ}{۲^۲}=\frac{N_\circ}{۲^n}\Rightarrow n=۲$$

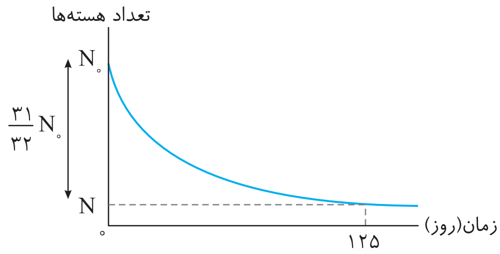
در هر نیمه‌عمر نصف ماده واپاشیده می‌شود پس برای آنکه مقدار ماده به $\frac{۱}{۴}$ حالت اولیه برسد باید دو نیمه‌عمر بگذرد. زمان واپاشی خواهد شد:

$$t=nT_{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow t=۲\times۸=۱۶day$$

نمای ۱۴

B ۲۰۹۹ ۲

۹ با توجه به نمودار اختلاف تعداد هسته‌های اولیه و تعداد هسته‌های فعال باقی مانده یعنی $N_\circ-N$ برابر فیزیک هسته‌ای $\frac{۳۱}{۳۲}N_\circ$ شده، درواقع $\frac{۳۱}{۳۲}N_\circ$ از هسته واپاشیده شده و تعداد هستهٔ فعال باقی مانده برابر است با:



$$N_\circ-N=\frac{۳۱}{۳۲}N_\circ\Rightarrow N=N_\circ-\frac{۳۱}{۳۲}N_\circ=\frac{۱}{۳۲}N_\circ\Rightarrow$$

$$N=\frac{N_\circ}{۲^۵}\xrightarrow{N=\frac{N_\circ}{۲^n}}۲^۵=۲^n\Rightarrow n=۵$$

۵ نیمه‌عمر ۱۲۵ روز طول کشیده است، پس هر نیمه‌عمر برابر است با:

$$۵T_{\frac{۱}{۲}}=۱۲۵day\Rightarrow T_{\frac{۱}{۲}}=۲۵\,day$$

نمای ۱۴

A ۲۰۹۹ ۲

۱۰ وقتی تعداد هسته‌های پرتوزای فعال با تعداد هسته‌های واپاشیده برابر می‌شود، یعنی یک نیمه‌عمر از مدت واپاشی گذشته است. به راه‌حل زیر دقت کنید:

$$\frac{N_Y}{N_X}=\frac{N_{\circ X}-N_X}{N_X}=۱\Rightarrow N_{\circ X}=۲N_X\Rightarrow N_X=\frac{N_{\circ X}}{۲}\Rightarrow n=۱$$

اکنون زمان لازم برای آن که این نسبت ۱۵ شود را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{N'_Y}{N'_X}=\frac{N_{\circ X}-N'_X}{N'_X}=۱۵\Rightarrow N_{\circ X}=۱۶N'_X\Rightarrow N'_X=\frac{N_{\circ X}}{۱۶}$$

$$\Rightarrow\frac{N_\circ}{۲^n}=\frac{N_\circ}{۱۶}\Rightarrow n=۴$$

بنابرایـن از آغاز واپاشـی ۴ نیمه‌عمر و از زمانی که $\frac{N_Y}{N_X}=۱$ اسـت سـه نیمه‌عمر یعنی $۳\times۲۰=۶۰$ روز می‌گذرد.

دقت کنید وقتی عنصر پرتوزای X واپاشـیده می‌شـود و به عنصر Y تبدیل می‌شـود، در واقع تعداد هسته‌های عنصر Y (N_Y) همان تعداد هسته‌های واپاشیده شده عنصر X $(N_{\circ X}-N_X)$ است.

نمای ۱۴

پنجره تو در تو

A ۲۱۰۰ ۳

۱ در پدیـدهٔ فوتوالکتریـک هر الکترون تنهـا با یک فوتون برهم کنش دارد و اگر بسـامد نور فـرودی (انرژی فوتون) از بسـامد آسـتانه (حداقـل انرژی لازم برای جداشـدن الکترون) بیشـتر باشـد، الکترون از سـطح فلز جدا شده و بخشـی از انرژی فوتون به انرژی جنبشی فوتوالکترون‌هـا تبدیـل می‌شـود. با افزایش شـدت نور، تعـداد فوتون‌هـا افزایش می‌یابد امـا انـرژی آن‌ها ثابـت می‌ماند. بنابراین افزایش شـدت نـور، تأثیری در انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ندارد و گزینهٔ (۱) درست است.

بسامد آستانه به جنس فلزی که نور بر آن می‌تابد بستگی دارد و گزینهٔ (۲) درست است.

با افزایش بسامد نور، انرژی فوتون‌ها افزایش می‌یابد اما انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها به همان نسبت افزایش نمی‌یابد. یعنی اگر f دو برابر شود، K بیشتر از دو برابر خواهد شد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

بسـامد آستانه یعنی حداقل بسـامدی که با آن پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

نمای ۱ و ۳

B ۲۱۰۰ ۴

۲ با توجه به تعریف توان می‌توانیم بنویسیم:

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=Pt\ (I)$$

بنا به رابطهٔ اینشتین انرژی پرتوهای الکترومغناطیسی برابر است با:

$$E=\frac{nhc}{\lambda}\ \ (II)$$

از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$Pt=n\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow n=\frac{Pt\lambda}{hc}$$

بنا به فرض مسئله تعداد فوتون‌ها برابر است، از این‌رو:

$$n_A=n_B\Rightarrow\frac{P_At_A\lambda_A}{hc}=\frac{P_Bt_B\lambda_B}{hc}\xrightarrow{P_B=۲P_A\text{ و }\lambda_B=۲\lambda_A}$$

$$P_At_A\lambda_A=۲P_A(t_B)۲\lambda_A\Rightarrow\frac{t_A}{t_B}=۴$$

نمای ۲

C ۲۱۰۰ ۴

۳ با دو برابر شدن توان تعداد فوتون‌های نور دو برابر شده و میزان گسیل فوتوالکترون‌ها دو برابر می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

با دو برابر شـدن طول موج ممکن اسـت انرژی فوتون $(E=h\frac{c}{\lambda})$ از تابع کار فلز $(W_\circ)$ کمتر شده و پدیده فوتوالکتریک متوقف شود بنابراین گزینهٔ (۲) در حالت کلی نادرست است.

با نصف شـدن طول موج، انرژی هر فوتون $(E=h\frac{c}{\lambda})$ دو برابر می‌شـود و برای ثابت ماندن $P=\frac{nh\frac{c}{\lambda}}{t}$ باید n نصف شده بنابراین فوتوالکترون‌های جدا شده نصف می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است.

اگر توان دو برابر و طول موج نصف شود در این صورت:

$$P=\frac{nh\frac{c}{\lambda}}{t}\xrightarrow[\lambda'=\frac{\lambda}{۲}]{P'=۲P}n'=n$$

نمای ۲

A ۲۱۰۰ ۴

۴ **خط فکری** در حل این مسائل راه‌حلی که مستقیماً به شما اعداد n و n' را بدهد، وجود ندارد. شما باید رابطهٔ ریدبرگ را نوشته، آن‌قدر آن را ساده کنید تا بتوانید در مورد n و n' حدس دقیق بزنید. به حل دقت کنید.

در رابطهٔ بالمر - ریدبرگ طول موج $\frac{۱۶۰۰}{۱۵}nm$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\frac{۱۶۰۰}{۱۵}}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱۵}{۱۶}=(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$$

$$\Rightarrow۱-\frac{۱}{۱۶}=(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow n=۴\ ,\ n'=۱$$

دقت کنید عدد $\frac{۱۵}{۱۶}$ تفاضل $۱-\frac{۱}{۱۶}$ است. بنابراین اگر به جای $n'=۱$ و به جای $n=۴$ قرار دهیم، عدد $\frac{۱۵}{۱۶}$ به‌دست می‌آید.

نمای ۵

۵ B ۲۱۰۰ ۴

با توجه به رابطهٔ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ همواره n و n′ عدد طبیعی بوده و $n>n'$ است، در صورت سؤال $n=۱$ بوده و الکترون در تراز پایه است، بنابراین تراز پایین‌تری وجود ندارد که الکترون با گذار به آن موج الکترومغناطیسی گسیل کند. از این‌رو الکترون نمی‌تواند تابش گسیل کند و گزینهٔ (۴) درست است.

نمای ۵

۶ A ۲۱۰۰ ۱

طول موج ۷۲۰nm طول موج مرئی است. از طرفی $n'=۲$ یعنی طول موج گسیلی مربوط به رشتهٔ بالمر است. برای به دست آوردن n از رابطهٔ ریدبرگ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\xrightarrow[\lambda=۷۲۰nm,n'=۲]{R=۰/۰۱nm^{-۱}}\frac{۱}{۷۲۰}=۰/۰۱\times(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow n=۳$$

نمای ۵

۷ B ۲۱۰۰ ۳

یادآوری با توجه به مدل اتمی بور هرگاه الکترون از یک حالت مانا با انرژی E_U به حالت مانای دیگری با انرژی پایین‌تر E_L برود، اختلاف انرژی دو تراز را به‌صورت یک فوتون گسیل می‌کند. $(E_U-E_L=hf)$

خط فکری در حل این مسئله شما باید ابتدا به کمک مدل اتمی بور، یک رابطه بین طول موج و شمارهٔ مدارها (عدد کوانتومی مدارها) پیدا کنید و رابطهٔ به‌دست آمده را با رابطهٔ ریدبرگ - بالمر مقایسه کنید و رابطه‌ای بین E_R و R به‌دست آورید.

در مدل اتمی بور انرژی الکترون در تراز با عدد کوانتومی n برابر $E_n=\frac{-E_R}{n^۲}$ است.

اکنون به جای E_U و E_L مقدارهای آن‌ها را قرار می‌دهیم:

$$E_U-E_L=hf\Rightarrow\frac{-E_R}{n_U^۲}-(\frac{-E_R}{n_L^۲})=hf$$

$$hf=\frac{E_R}{n_L^۲}-\frac{E_R}{n_U^۲}\Rightarrow hf=E_R(\frac{۱}{n_L^۲}-\frac{۱}{n_U^۲})$$

$$\Rightarrow\frac{hc}{\lambda}=E_R(\frac{۱}{n_L^۲}-\frac{۱}{n_U^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{E_R}{hc}(\frac{۱}{n_L^۲}-\frac{۱}{n_U^۲})\qquad(I)$$

رابطهٔ (I) را با رابطهٔ ریدبرگ - بالمر $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ مقایسه می‌کنیم. از این‌رو خواهیم داشت:

$$R=\frac{E_R}{hc}\Rightarrow\frac{E_R}{R}=hc$$

نمای ۷

۸ B ۲۱۰۰ ۱

۱ انرژی الکترون در مدل اتمی بور، در مداری با عدد کوانتومی n از رابطهٔ $E_n=\frac{-E_R}{n^۲}$ به‌دست می‌آید. با توجه به این مطلب عدد کوانتومی مدارهایی را که انرژی الکترون در آن‌ها $-۰/۸۵eV$ و $-۳/۴eV$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow\begin{cases}-۰/۸۵=\frac{-۱۳/۶}{n^۲}\Rightarrow n^۲=۱۶\Rightarrow n=۴\\-۳/۴=\frac{-۱۳/۶}{n'^۲}\Rightarrow n'^۲=۴\Rightarrow n'=۲\end{cases}$$

۲ شعاع مدار الکترون به گرد هسته بنا به مدل اتمی بور خواهد بود:

$$r_n=n^۲a_۰\Rightarrow\begin{cases}r_۴=۱۶a_۰\\r_۲=۴a_۰\end{cases}\Rightarrow\frac{r_۲}{r_۴}=\frac{۱}{۴}$$

نمای ۷

۹ B ۲۱۰۰ ۱

از رابطهٔ انرژی الکترون در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن عدد کوانتومی n را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\xrightarrow{E_n=\frac{-۱}{۹}E_R}-\frac{۱}{۹}E_R=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow n=۳$$

اکنون به کمک رابطهٔ بالمر - ریدبرگ n′ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\xrightarrow{\lambda=\frac{۹۰۰}{۸}nm}\frac{۱}{\frac{۹۰۰}{۸}}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow n'=۱$$

نمای ۷

۱۰ B ۲۱۰۰ ۲

۱ کمینهٔ بسامد گسیلی یعنی بلندترین طول موج $(\lambda=\frac{c}{f\downarrow}\uparrow)$. بلندترین طول موج در رشتهٔ لیمان هنگام گذار الکترون از تراز $n=۲$ به تراز $n'=۱$ گسیل می‌شود. به کمک رابطهٔ ریدبرگ - طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{max\,L}}=R(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲^۲})\Rightarrow\lambda_{max\,L}=\frac{۴}{۳R}$$

$$f_{min\,L}=\frac{c}{\lambda_{max\,L}}=\frac{c}{\frac{۴}{۳R}}\Rightarrow f_{min\,L}=\frac{۳Rc}{۴}$$

۲ بیشینهٔ بسامد گسیلی یعنی کوتاه‌ترین طول موج $(\lambda=\frac{c}{f\uparrow}\downarrow)$. کوتاه‌ترین طول موج در رشتهٔ براکت هنگام گذار الکترون از تراز $n=\infty$ به تراز $n'=۴$ گسیل می‌شود. طول موج گسیلی را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{min\,B}}=R(\frac{۱}{۴^۲}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min\,B}=\frac{۱۶}{R}$$

$$f_{max\,B}=\frac{c}{\lambda_{min\,B}}=\frac{c}{\frac{۱۶}{R}}\Rightarrow f_{max\,B}=\frac{Rc}{۱۶}$$

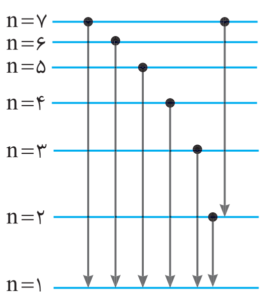
۳ نسبت بسامدها خواهد شد:

$$\frac{f_{min\,L}}{f_{max\,B}}=\frac{\frac{۳Rc}{۴}}{\frac{Rc}{۱۶}}\Rightarrow\frac{f_{min\,L}}{f_{max\,B}}=۱۲$$

نمای ۵

۱۱ B ۲۱۰۰ ۲

در رشته‌های گسیلی هیدروژن تمام طول موج‌های رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ فرابنفش هستند و در رشتهٔ بالمر در گذار الکترون از تراز $n=۷$ به تراز $n'=۲$ طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است. بنابراین باید الکترون در تراز با عدد کوانتومی $n=۷$ باشد تا ۶ گذار از ترازهای ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ به تراز $n'=۱$ و یک گذار از تراز $n=۷$ به تراز $n'=۲$ صورت بگیرد و جمعاً ۷ فوتون با طول موج‌های مختلف گسیل شود.



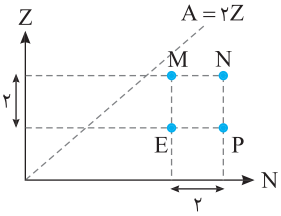
نمای ۷

۱۲ A | ۲۱۰۰ | ۴

هرچه هسته سنگین‌تر شود یعنی عدد اتمی افزایش یابد نسبت $\frac{N}{Z}$ بیشتر می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.
نیروی هسته‌ای بین دو نوکلئون وجود دارد، دو نوکلئون می‌توانند هر دو پروتون یا هر دو نوترون و یا یک نوترون و یک پروتون باشند یعنی نیروی هسته‌ای به نوع نوکلئون بستگی ندارد و گزینهٔ (۲) درست است.
هسته‌های سنگین با عدد اتمی بزرگ‌تر از $Z=۸۳$ که متعلق به بیسموت $(^{۲۰۹}_{۸۳}Bi)$ است، ناپایدارند و گزینهٔ (۳) درست است.
رفتار شیمیایی ایزوتوپ‌های یک عنصر به دلیل داشتن عدد اتمی یکسان و ساختار ترازهای انرژی اتمی یکسان، شبیه به هم است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

نمای ۱۱

۱۳ B | ۲۱۰۰ | ۲



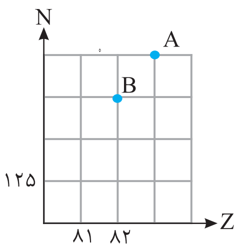
گزارهٔ (الف): خط $A=۲Z$ یعنی خطی که هسته‌های روی آن دارای تعداد پروتون و نوترون یکسان $(Z=N)$ است و این خط نیمساز نمودار $Z-N$ بوده است.

نکته تمام هسته‌های واقع بر خط عمود بر نیمساز دارای عدد جرمی یکسانی هستند.

اکنون به نمودار دقت کنید، خط PM قطر مربع MNPE بوده و دقیقاً امتداد آن بر خط نیمساز عمود است. بنابراین دو عنصر M و P دارای عدد جرمی یکسانی بوده و گزارهٔ (الف) درست است.
گزارهٔ (ب): هستهٔ N، دو نوترون و دو پروتون بیشتر از هستهٔ E دارد، یعنی مجموع نوترون‌ها و پروتون‌های N (عدد جرمی)، چهار واحد از E بیشتر است و گزارهٔ (ب) نادرست است.
گزارهٔ (پ): عدد اتمی دو عنصر M و N یکسان و عدد نوترونی آن‌ها متفاوت است. بنابراین M و N ایزوتوپ‌های یک عنصر هستند. ایزوتوپ‌های یک عنصر دارای ترازهای الکترونی (اتمی) یکسانی بوده و خواص شیمیایی آن‌ها یکسان است و گزارهٔ (پ) درست است.
گزارهٔ (ت): عدد اتمی هسته‌های N و P متفاوت است: $Z_N=Z_P+۲$. بنابراین N و P دو عنصر متفاوت هستند و ایزوتوپ یکدیگر نیستند و گزارهٔ (ت) نادرست است.

نمای ۱۱

۱۴ A | ۲۱۰۰ | ۳



عنصر A یک نوترون و یک پروتون از دست می‌دهد تا به عنصر B تبدیل شود. ذره‌ای که دارای یک نوترون و یک پروتون است، هستهٔ دوتریم $^{۲}_{۱}D$ بوده و گزینهٔ (۳) پاسخ مسئله است.

نمای ۱۳

۱۵ A | ۲۱۰۰ | ۴

معادلهٔ واکنش را می‌نویسیم و تعداد ذرات α را با حرف a و تعداد ذرات بتا را با حرف b در معادله قرار می‌دهیم:

$$^{A}_{Z}X \to {}^{A'}_{Z'}Y + a\,{}^{۴}_{۲}He + b\,{}^{۰}_{-۱}e$$

۱ بنا به پایستگی تعداد نوکلئون‌ها خواهیم داشت: $A=A'+۴a$

در فرض مسئله بیان شده که عدد جرمی ۴ واحد کم شده $(A'=A-۴)$ بنابراین:

$A=A-۴+۴a \Rightarrow a=۱$ یک ذرهٔ آلفا

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم، بنا به فرض مسئله عدد اتمی ثابت مانده است $(Z=Z')$:

$Z=Z'+۲a-b \xrightarrow[a=۱]{Z=Z'} ۰=۲-b \Rightarrow b=۲$ دو ذرهٔ بتا

نمای ۱۳

۱۶ A | ۲۱۰۰ | ۱

جرم اتم مجموع جرم الکترون‌های اتم و هستهٔ اتم است. از طرف اندازه‌گیری‌های دقیق نشان می‌دهد که جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها (ZM_p) و جرم نوترون‌های (NM_n) تشکیل‌دهنده‌اش اندکی کمتر است، یعنی هنگام تشکیل هسته، از جرم نوکلئون‌های هسته مقداری کاسته می‌شود و این جرم به انرژی لازم برای تشکیل هسته (انرژی بستگی هسته) تبدیل می‌شود و هر چه این کاستی جرم هسته بیشتر باشد نشان‌دهندهٔ بزرگی انرژی بستگی هسته است.

نمای ۱۲

۱۷ B | ۲۱۰۰ | ۳

۱ با توجه به رابطهٔ بین جرم و انرژی، انرژی تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$E=mc^{۲} \xrightarrow{m=۲mg=۲\times۱۰^{-۶}kg} E=۲\times۱۰^{-۶}\times(۳\times۱۰^{۸})^{۲}$$

$$\Rightarrow E=۱۸\times۱۰^{۱۰}J$$

یادآوری ۱kWh برابر $۳/۶\times۱۰^{۶}J$ است.

۲ انرژی را بر حسب kWh می‌نویسیم:

۱ kWh	$۳/۶\times۱۰^{۶}J$
E=?	$۱۸\times۱۰^{۱۰}J$

$$E=\frac{۱۸\times۱۰^{۱۰}}{۳/۶\times۱۰^{۶}}\Rightarrow E=۵\times۱۰^{۴}kWh$$

نمای ۱۲

۱۸ A | ۲۱۰۰ | ۴

۱ با استفاده از رابطهٔ نیمه‌عمر، تعداد هسته‌های باقیمانده را برحسب تعداد هسته‌های اولیه $(N_۰)$ به‌دست می‌آوریم:

$$N=N_۰(\frac{۱}{۲})^{n}\Rightarrow N=\frac{N_۰}{۲^{n}}\xrightarrow{n=۵}N=\frac{N_۰}{۲^{۵}}\Rightarrow N=\frac{N_۰}{۳۲}$$

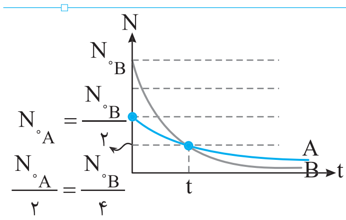
۲ تعداد هسته‌های واپاشیده شده را برحسب تعداد هسته‌های اولیه حساب می‌کنیم:

تعداد هسته‌های واپاشیده: $\Delta N=N_۰-N=N_۰-\frac{N_۰}{۳۲}\Rightarrow \Delta N=\frac{۳۱}{۳۲}N_۰$

درصد تعداد هسته‌های واپاشیده خواهد شد: $\frac{\Delta N}{N_۰}\times۱۰۰=\frac{۳۱}{۳۲}\times۱۰۰\simeq ٪۹۷$

نمای ۱۴

۱۹ A | ۲۱۰۰ | ۳



با توجه به نمودار در مدت t برای عنصر پرتوزای A یک نیمه‌عمر و برای عنصر پرتوزای B، ۲ نیمه‌عمر گذشته است. بنابراین:

$$\frac{T_{\frac{۱}{۲},A}}{T_{\frac{۱}{۲},B}}=\frac{\frac{t}{n_A}}{\frac{t}{n_B}}\Rightarrow\frac{T_{\frac{۱}{۲},A}}{T_{\frac{۱}{۲},B}}=\frac{n_B}{n_A}=۲$$

نمای ۱۴

۲۰ A | ۲۱۰۰ | ۲

برای حل این مسئله مقدار ۱/۵۶ درصد را به‌طور تقریبی برابر $\frac{۱}{۶۴}$ می‌گیریم تا بتوانیم سن تقریبی زغال را حساب کنیم.

۱ با توجه به رابطه تعداد هسته‌های فعال با نیمه‌عمر، تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را حساب می‌کنیم:

$$N=N_۰(\frac{۱}{۲})^{n}\Rightarrow N=\frac{N_۰}{۲^{n}}\xrightarrow{N=۱/۵۶٪N_۰}\frac{۱/۵۶N_۰}{۱۰۰}=\frac{N_۰}{۲^{n}}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۶۴}=\frac{۱}{۲^{n}}\Rightarrow ۲^{n}=۶۴\Rightarrow n=۶$$

۲ زمان سپری شده (یا سن تقریبی زغال قدیمی) خواهد شد:

$t=nT\Rightarrow t=۶\times۵۷۳۰\Rightarrow t=۳۴۳۸۰$ سال

نمای ۱۴

جامع فیزیک پایه تجربی (جلد ۱ و ۲)

مؤلفان: رضا خالو، امیرعلی میری

- درس‌نامهٔ کاربردی بر اساس مفاهیم کتاب درسی
- تقسیم هر فصل به ۵ پنجره و هر پنجره به چندین نما
- بیش از ۲۵۰۰ تست با چینش آموزشی (ساده به سخت)
- ارائهٔ تست‌های چالشی در پنجرهٔ دو جداره
- ۴ پنجرهٔ روبه‌رو و ۱ پنجرهٔ تودرتو بدون طبقه‌بندی در هر فصل برای عمق بخشیدن به یادگیری
- مشخص کردن تست‌های مهم برای جمع‌بندی سریع
- تست‌های مشابه با عنوان بازی با سؤال در برخی پاسخ‌ها
- پاسخ‌های تشریحی با ارائهٔ خط فکری برای حل مسائل
- راه‌حل‌های کوتاه و خلاقانه با عنوان میانبر در پاسخ‌ها