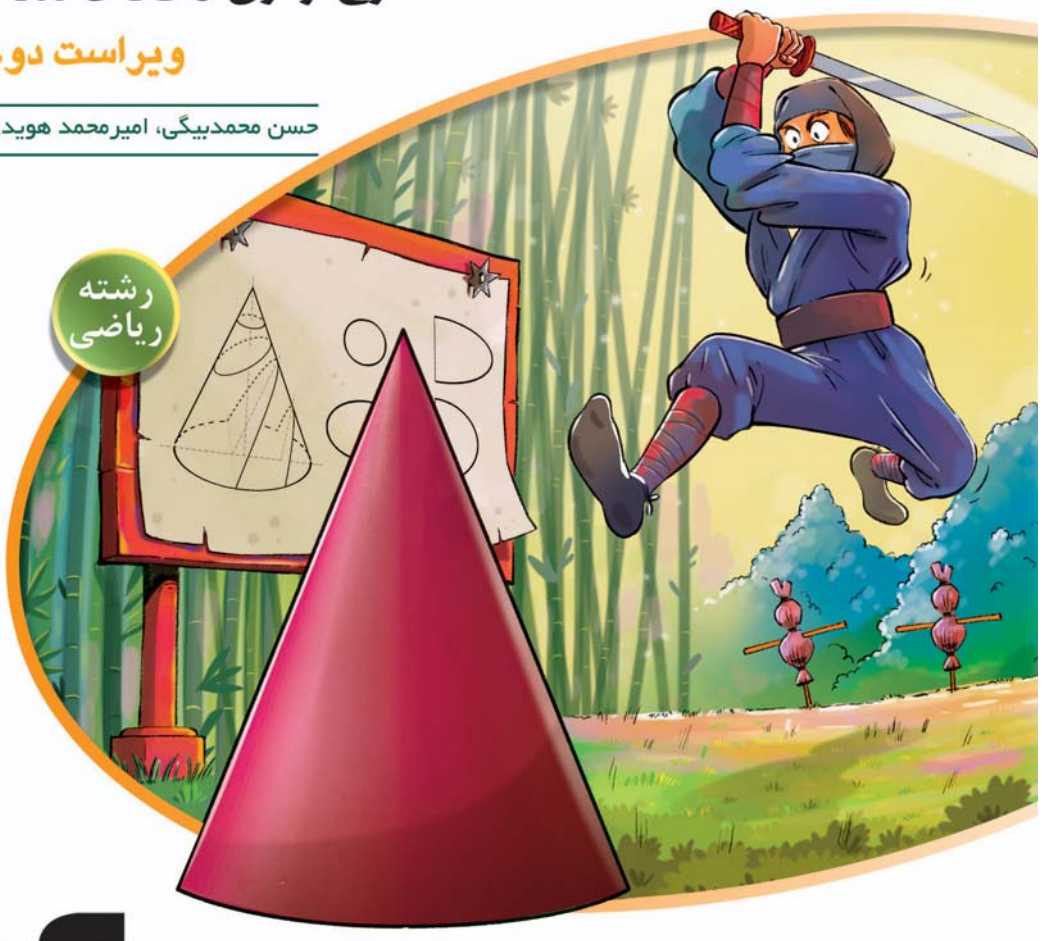
آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

موج آزمون هندسه

ویراست دوم

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی



نشر الگو

پیش‌گفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور سراسری است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست، و البته دشواری‌اش بیشتر به دلیل کوتاه بودن زمان پاسخ‌گویی است تا دشواری سؤال‌ها. از این‌رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به ویژه در سال‌های پایانی دورهٔ متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. با این همه، هر چند که بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از آن نیست!

از طرف دیگر، امتحانات تشریحی هماهنگ ملاک دیگری برای گزینش در دانشگاه‌ها شده است. به همین علت نشر الگو، برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، **کتاب سه‌بعدی** شامل درس‌نامهٔ مفصل و تمرین‌های تشریحی و **کتاب تست** شامل درس‌نامهٔ خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است.

کتاب‌های **موج‌آزمون** ویژهٔ آمادگی برای کنکور سراسری است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های هندسهٔ ۱ سال دهم، هندسهٔ ۲ سال یازدهم و هندسهٔ ۳ سال دوازدهم است. این کتاب چهار بخش دارد. بخش‌های اول، دوم و سوم به ترتیب شامل آزمون‌های هندسهٔ ۱، هندسهٔ ۲ و هندسهٔ ۳ به تفکیک مباحث آموزشی است. در هر آزمون این بخش‌ها ده پرسش مربوط به همان مبحث را آورده‌ایم. توجه کنید که ممکن است تعداد آزمون‌های یک مبحث بیش از یکی باشد. در انتهای بخش‌های اول، دوم و سوم آزمون‌هایی جامع مربوط به آن بخش را آورده‌ایم. در بخش چهارم نیز آزمون‌هایی جامع به همراه آزمون‌های کنکور سال‌های اخیر را آورده‌ایم.

چون تلاش کرده‌ایم که تمام نکات مهم مباحث کتاب‌های درسی را در آزمون‌ها بگنجانیم، توصیه می‌کنیم که تمام آزمون‌ها را پاسخ دهید. بنابراین لازم است به آزمون‌های تشریحی و تستی تسلط کامل پیدا کنید و برای رسیدن به این هدف مطالعهٔ کتاب‌های سه‌بعدی و تست نشر الگو بهترین مسیر است. توجه کنید که کتاب برای فکر کردن است نه حفظ کردن. پس کتاب‌ها را سریع بخرید ولی آرام و با دقت بخوانید.

در پایان وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی، دکتر ابوالفضل علی‌بمانی و دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

بخش اول: آزمون‌های هندسهٔ ۱

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

آزمون ۱: ترسیم‌های هندسی ۲
آزمون ۲: استدلال ۳
آزمون ۳: جامع هندسهٔ ۱ / فصل اول (۱) ۴
آزمون ۴: جامع هندسهٔ ۱ / فصل اول (۲) ۵

فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

آزمون ۵: نسبت و تناسب در هندسه ۶
آزمون ۶: قضیهٔ تالس ۷
آزمون ۷: نسبت و قضیهٔ تالس (۱) ۸
آزمون ۸: نسبت و قضیهٔ تالس (۲) ۹
آزمون ۹: تشابه مثلث‌ها (۱) ۱۱
آزمون ۱۰: تشابه مثلث‌ها (۲) ۱۲
آزمون ۱۱: کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها ۱۳
آزمون ۱۲: جامع تشابه ۱۵
آزمون ۱۳: جامع هندسهٔ ۱ / فصل دوم (۱) ۱۶
آزمون ۱۴: جامع هندسهٔ ۱ / فصل دوم (۲) ۱۷
آزمون ۱۵: جامع هندسهٔ ۱ / فصل دوم (۳) ۱۸
آزمون ۱۶: جامع هندسهٔ ۱ / فصل دوم (۴) ۱۹
آزمون ۱۷: جامع هندسهٔ ۱ / فصل دوم (۵) ۲۰

فصل سوم: چندضلعی‌ها

آزمون ۱۸: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها (۱) ۲۲
آزمون ۱۹: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها (۲) ۲۳
آزمون ۲۰: مساحت و کاربردهای آن (۱) ۲۴
آزمون ۲۱: مساحت و کاربردهای آن (۲) ۲۵
آزمون ۲۲: جامع هندسهٔ ۱ / فصل سوم (۱) ۲۶
آزمون ۲۳: جامع هندسهٔ ۱ / فصل سوم (۲) ۲۸
آزمون ۲۴: جامع هندسهٔ ۱ / فصل سوم (۳) ۲۹

فصل چهارم: تجسم فضایی

آزمون ۲۵: خط، نقطه و صفحه ۳۰
آزمون ۲۶: تفکر تجسمی (۱) ۳۰
آزمون ۲۷: تفکر تجسمی (۲) ۳۲
آزمون ۲۸: جامع هندسهٔ ۱ / فصل چهارم (۱) ۳۳
آزمون ۲۹: جامع هندسهٔ ۱ / فصل چهارم (۲) ۳۴
آزمون ۳۰: جامع هندسهٔ ۱ / فصل چهارم (۳) ۳۵

آزمون‌های جامع

آزمون ۳۱: جامع هندسهٔ ۱ (۱) ۳۶
آزمون ۳۲: جامع هندسهٔ ۱ (۲) ۳۷
آزمون ۳۳: جامع هندسهٔ ۱ (۳) ۳۹
آزمون ۳۴: جامع هندسهٔ ۱ (۴) ۴۰

بخش دوم: آزمون‌های هندسهٔ ۲

فصل اول: دایره

آزمون ۳۵: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (۱) ۴۲
آزمون ۳۶: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (۲) ۴۳
آزمون ۳۷: رابطه‌های طولی در دایره (۱) ۴۴
آزمون ۳۸: رابطه‌های طولی در دایره (۲) ۴۵
آزمون ۳۹: چندضلعی‌های محاطی و محیطی (۱) ۴۷
آزمون ۴۰: چندضلعی‌های محاطی و محیطی (۲) ۴۸
آزمون ۴۱: جامع هندسهٔ ۲ / فصل اول (۱) ۴۹
آزمون ۴۲: جامع هندسهٔ ۲ / فصل اول (۲) ۵۰
آزمون ۴۳: جامع هندسهٔ ۲ / فصل اول (۳) ۵۱
آزمون ۴۴: جامع هندسهٔ ۲ / فصل اول (۴) ۵۲

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

آزمون ۴۵: تعریف تبدیل و نگاشت ۵۳
آزمون ۴۶: بازتاب ۵۴

آزمون ۴۷: انتقال ۵۵
آزمون ۴۸: مقدمات - بازتاب - انتقال ۵۶
آزمون ۴۹: دوران ۵۷
آزمون ۵۰: تجانس ۵۸
آزمون ۵۱: دوران و تجانس ۵۹
آزمون ۵۲: تبدیل‌های هندسی (۱) ۶۰
آزمون ۵۳: تبدیل‌های هندسی (۲) ۶۱
آزمون ۵۴: کاربرد تبدیل‌ها (۱) ۶۲
آزمون ۵۵: کاربرد تبدیل‌ها (۲) ۶۳
آزمون ۵۶: کاربرد تبدیل‌ها (۳) ۶۴
آزمون ۵۷: جامع هندسهٔ ۲ / فصل دوم (۱) ۶۵
آزمون ۵۸: جامع هندسهٔ ۲ / فصل دوم (۲) ۶۶
آزمون ۵۹: جامع هندسهٔ ۲ / فصل دوم (۳) ۶۷
آزمون ۶۰: جامع هندسهٔ ۲ / فصل دوم (۴) ۶۸

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

آزمون ۶۱: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۶۹
آزمون ۶۲: قضیهٔ سینوس‌ها ۷۰
آزمون ۶۳: قضیهٔ کسینوس‌ها ۷۱
آزمون ۶۴: قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها ۷۲
آزمون ۶۵: قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ... ۷۳
آزمون ۶۶: جامع هندسهٔ ۲ / فصل سوم (۱) ۷۴
آزمون ۶۷: جامع هندسهٔ ۲ / فصل سوم (۲) ۷۵
آزمون ۶۸: جامع هندسهٔ ۲ / فصل سوم (۳) ۷۶

آزمون‌های جامع

آزمون ۶۹: جامع هندسهٔ ۲ (۱) ۷۷
آزمون ۷۰: جامع هندسهٔ ۲ (۲) ۷۸
آزمون ۷۱: جامع هندسهٔ ۲ (۳) ۷۹
آزمون ۷۲: جامع هندسهٔ ۱ و ۲ (۱) ۸۰
آزمون ۷۳: جامع هندسهٔ ۱ و ۲ (۲) ۸۲
آزمون ۷۴: جامع هندسهٔ ۱ و ۲ (۳) ۸۳
آزمون ۷۵: جامع هندسهٔ ۱ و ۲ (۴) ۸۴

بخش سوم: آزمون‌های هندسهٔ ۳

فصل اول: ماتریس و کاربردها

آزمون ۷۶: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (تا ابتدای ضرب ماتریس‌ها) ۸۶
آزمون ۷۷: ضرب ماتریس‌ها (۱) ۸۷
آزمون ۷۸: ضرب ماتریس‌ها (۲) ۸۸
آزمون ۷۹: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۱) ۸۹
آزمون ۸۰: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۲) ۹۰
آزمون ۸۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۳) ۹۱
آزمون ۸۲: وارون ماتریس (۱) ۹۲
آزمون ۸۳: وارون ماتریس (۲) ۹۳
آزمون ۸۴: وارون ماتریس (۳) ۹۴
آزمون ۸۵: وارون ماتریس (۴) ۹۵
آزمون ۸۶: دستگاه معادلات ۹۶
آزمون ۸۷: دترمینان (۱) ۹۸
آزمون ۸۸: دترمینان (۲) ۹۹
آزمون ۸۹: دترمینان (۳) ۱۰۰
آزمون ۹۰: وارون ماتریس و دترمینان ۱۰۱
آزمون ۹۱: جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۱) ۱۰۲
آزمون ۹۲: جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۲) ۱۰۴
آزمون ۹۳: جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۳) ۱۰۵
آزمون ۹۴: جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۴) ۱۰۶
آزمون ۹۵: جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۵) ۱۰۷

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

آزمون ۹۶: مکان هندسی (۱) ۱۰۹
آزمون ۹۷: مکان هندسی (۲) ۱۱۰
آزمون ۹۸: دایره (۱) ۱۱۱
آزمون ۹۹: دایره (۲) ۱۱۲
آزمون ۱۰۰: دایره (۳) ۱۱۳
آزمون ۱۰۱: دایره (۴) ۱۱۴
آزمون ۱۰۲: بیضی (۱) ۱۱۵
آزمون ۱۰۳: بیضی (۲) ۱۱۶
آزمون ۱۰۴: سهمی (۱) ۱۱۷
آزمون ۱۰۵: سهمی (۲) ۱۱۸
آزمون ۱۰۶: بیضی و سهمی ۱۱۹
آزمون ۱۰۷: جامع هندسهٔ ۳ / فصل دوم (۱) ۱۲۰

آزمون ۱۰۸: جامع هندسهٔ ۳ / فصل دوم (۲) ۱۲۱
آزمون ۱۰۹: جامع هندسهٔ ۳ / فصل دوم (۳) ۱۲۲
آزمون ۱۱۰: جامع هندسهٔ ۳ / فصل دوم (۴) ۱۲۳
آزمون ۱۱۱: جامع هندسهٔ ۳ / فصل دوم (۵) ۱۲۴

فصل سوم: بردارها

آزمون ۱۱۲: نقطه و بردار در دستگاه مختصات دوبعدی ۱۲۵
آزمون ۱۱۳: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ تا ابتدای بردار (۱) ۱۲۶
آزمون ۱۱۴: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ تا ابتدای بردار (۲) ۱۲۷
آزمون ۱۱۵: بردار (۱) ۱۲۸
آزمون ۱۱۶: بردار (۲) ۱۲۹
آزمون ۱۱۷: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ و بردار ۱۳۰
آزمون ۱۱۸: ضرب داخلی بردارها (۱) ۱۳۱
آزمون ۱۱۹: ضرب داخلی بردارها (۲) ۱۳۲
آزمون ۱۲۰: ضرب خارجی بردارها (۱) ۱۳۳
آزمون ۱۲۱: ضرب خارجی بردارها (۲) ۱۳۴
آزمون ۱۲۲: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها (۱) ... ۱۳۵
آزمون ۱۲۳: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها (۲) ... ۱۳۶
آزمون ۱۲۴: جامع هندسهٔ ۳ / فصل سوم (۱) ۱۳۷
آزمون ۱۲۵: جامع هندسهٔ ۳ / فصل سوم (۲) ۱۳۸
آزمون ۱۲۶: جامع هندسهٔ ۳ / فصل سوم (۳) ۱۳۹

آزمون‌های جامع

آزمون ۱۲۷: جامع هندسهٔ ۳ (۱) ۱۴۰
آزمون ۱۲۸: جامع هندسهٔ ۳ (۲) ۱۴۱
آزمون ۱۲۹: جامع هندسهٔ ۳ (۳) ۱۴۲

بخش چهارم: آزمون‌های جامع

آزمون ۱۳۰: جامع (۱) ۱۴۴
آزمون ۱۳۱: جامع (۲) ۱۴۵
آزمون ۱۳۲: جامع (۳) ۱۴۶
آزمون ۱۳۳: جامع (۴) ۱۴۸
آزمون ۱۳۴: جامع (۵) ۱۴۹
آزمون ۱۳۵: جامع (۶) ۱۵۱
آزمون ۱۳۶: جامع (۷) ۱۵۳
آزمون ۱۳۷: جامع (۸) ۱۵۴
آزمون ۱۳۸: جامع (۹) ۱۵۶
آزمون ۱۳۹: جامع (۱۰) ۱۵۷
آزمون ۱۴۰: جامع (۱۱) ۱۵۸
آزمون ۱۴۱: جامع (۱۲) ۱۶۰
آزمون ۱۴۲: جامع (۱۳) ۱۶۲
آزمون ۱۴۳: جامع (۱۴) ۱۶۳
آزمون ۱۴۴: جامع (۱۵) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۰ - داخل کشور) ۱۶۵
آزمون ۱۴۵: جامع (۱۶) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۰ - خارج از کشور) ۱۶۶
آزمون ۱۴۶: جامع (۱۷) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۱ - داخل کشور) ۱۶۸
آزمون ۱۴۷: جامع (۱۸) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۱ - خارج از کشور) ۱۷۰
آزمون ۱۴۸: جامع (۱۹) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۲ (نوبت اول)) ۱۷۱
آزمون ۱۴۹: جامع (۲۰) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۲ (نوبت دوم) - داخل کشور) ۱۷۲
آزمون ۱۵۰: جامع (۲۱) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۲ (نوبت دوم) - خارج از کشور) ۱۷۴
آزمون ۱۵۱: جامع (۲۲) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۳ (نوبت اول)) ۱۷۵

بخش پنجم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ۱۷۸

بخش ششم: پاسخنامهٔ کلیدی

پاسخنامهٔ کلیدی ۳۸۴

کنکورهای سراسری

آزمون ۱۵۲: جامع (۲۳) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۳ (نوبت دوم) - داخل کشور) ۳۸۹
آزمون ۱۵۳: جامع (۲۴) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۳ (نوبت دوم) - خارج از کشور) ۳۹۰
آزمون ۱۵۴: جامع (۲۵) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۴ (نوبت اول)) ۳۹۱
آزمون ۱۵۵: جامع (۲۶) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۴ (نوبت دوم) - داخل کشور) ۳۹۳
آزمون ۱۵۶: جامع (۲۷) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۴ (نوبت دوم) - خارج از کشور) ۳۹۵
آزمون ۱۵۷: جامع (۲۸) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۵ . ۳۹۶
پاسخ تشریحی کنکور سراسری ۳۹۸

آزمون ۷۶ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (تا ابتدای ضرب ماتریس‌ها)

محاسبات

۷۵۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases} j-i & i\le j \\ j+i & i>j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $b_{ij}=\begin{cases} i+j & i<j \\ i-j & i\ge j \end{cases}$، ماتریس $A+B$ چگونه است؟

۱) دراید‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند. ۲) دراید‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر قرینه‌اند.
۳) قطری ۴) اسکالر

۷۵۲- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} b+۲ & b \\ m^۲+m & ۰ \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۷۵۳- مجموع درایه‌های ماتریس $[ij-۳i^۲]_{۳\times۳}$ برابر کدام است؟

۱) -۹۰ ۲) -۹۲ ۳) -۸۸ ۴) -۸۶

۷۵۴- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases} j-۱ & i<j \\ i+j & i\ge j \end{cases}$، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۷۵۵- در کدام ماتریس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند؟

۱) $[i-j]_{۳\times۳}$ ۲) $[\cos(i-j)]_{۳\times۳}$ ۳) $[\sin(i-j)]_{۳\times۳}$ ۴) $[i+۲j]_{۳\times۳}$

۷۵۶- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ اگر $a_{ij}=[\frac{i}{j}]$، مجموع درایه‌های ستون دوم چقدر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵۷- دراید عمومی ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۸ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $a_{ij}=i^۲-j$ ۲) $a_{ij}=i-j$ ۳) $a_{ij}=۲i-j$ ۴) $a_{ij}=i-j^۲$

۷۵۸- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases} [\frac{i+j}{۳}]-۱ & i>j \\ i-j & i\le j \end{cases}$، کدام درایه در ماتریس A وجود ندارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) -۲ ۴) ۲

۷۵۹- برای دو ماتریس A و B، اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $۲A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس A چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس B است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) ۱

۷۶۰- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ i-۲j & i\ne j \end{cases}$ و ماتریس $B=[b_{ij}]_{۳\times۴}$ با درایه‌های $b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ j^۲-۱ & i\ne j \end{cases}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های ماتریس $۳A+B$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۱۵ ۴) ۱۵

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۷۷ ضرب ماتریس‌ها (۱)

محاسبات

۷۶۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & x\\ -۱ & a\end{bmatrix}$ **و** $A^۲=A$**، مقدار** $a+x$ **برابر کدام است؟**

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۷۶۲- ماتریس M **مقدار علف، کاهو و کلمی را نشان می‌دهد که هر خرگوش و آهو به‌طور متوسط در روز می‌خورند و ماتریس** N **تعداد خرگوش و آهوهایی را که گرگ یا شیر به‌طور متوسط در روز می‌خورند نشان داده است. در روز هر شیر به‌طور غیرمستقیم چقدر کاهو می‌خورد؟**

آهو خرگوش

$$N=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{گرگ}\\ \text{شیر}\end{matrix}$$

علف کاهو کلم

$$M=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{خرگوش}\\ \text{آهو}\end{matrix}$$

۱) ۳۲ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۶

۷۶۳- چند ماتریس به فرم $A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & a & ۰\\ c & b & a\end{bmatrix}$ **وجود دارد به‌طوری که** $A^۲=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۸ & ۴ & ۰\\ ۶ & ۸ & ۴\end{bmatrix}$**؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) نامتناهی

۷۶۴- ماتریس‌های A **و** B **در تساوی** $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ **صدق می‌کنند. در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟**

۱) $AB=I$ ۲) $BA=I$ ۳) $AB=BA$ ۴) $AB=\bar{O}$

۷۶۵- اگر $A^۲=A-۲I$ **و** $A^۵=\alpha A+\beta I$**، مقدار** $\alpha+\beta$ **کدام است؟**

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -۳ ۴) ۶

۷۶۶- اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$**، مجموع درایه‌های ماتریس** $A^{۲n}-A^{۲n+۱}$ **کدام است؟** $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\sqrt{۳}$

۷۶۷- اگر $A=\begin{bmatrix}ab & b^۲\\ -a^۲ & -ab\end{bmatrix}$**، حاصل** $A(A-۵I)^۵$ **برابر کدام است؟**

۱) $۵A$ ۲) $۵^۵I$ ۳) $-۵^۵A$ ۴) $-۵^۵I$

۷۶۸- اگر $A=[(i+j)^\circ]_{۳\times۳}$**، توان** n **اُم** A **برابر کدام است؟**

۱) $۳^{n-۱}A$ ۲) ۳^nA ۳) I ۴) $۳^{n+۱}A$

۷۶۹- ماتریس A **به صورت** $A=[۲i-j]_{۳\times۳}$ **تعریف شده است. مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس** $A^۳$ **برابر کدام است؟**

۱) -۳۶ ۲) -۴۸ ۳) -۷۲ ۴) -۲۴

۷۷۰- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ **را درنظر بگیرید. می‌دانیم** $AB=\bar{O}$**، چند مورد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟**

الف) $c+d=۰$ **ب)** $AB=BA$ **پ) اگر** $AB=BA$**، آن‌گاه ماتریس** B **قطری است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۷۸ ضرب ماتریس‌ها (۲)

محاسبات

۷۷۱- اگر a عددی طبیعی و b عددی صحیح باشد، آن‌گاه از تساوی‌های ماتریسی $\begin{bmatrix}-۲ & ۱ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ a^۲\\ -۱\end{bmatrix}=[۲]$ و $\begin{bmatrix}۲ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ ۱\end{bmatrix}=\bar{O}$ حاصل $a+b$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۳

۷۷۲- ماتریس‌های مربعی A و B در تساوی $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ صدق می‌کنند. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $AB=BA$ ۲) $A^۲B=BA^۲$

۳) $(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$ ۴) $AB=I$

۷۷۳- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)(A-B)+C=۲I$ صدق می‌کنند. ماتریس C کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ -۷ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ ۶ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۳ & -۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$

۷۷۴- ماتریس A ماتریس اسکالر غیرصفر از مرتبهٔ ۳ است. اگر حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی آن ۱۲ برابر مجموع درایه‌های آن باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ برابر کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۹۲ ۳) ۱۰۶ ۴) ۷۲

۷۷۵- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۱ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x & -۲ & m\\ ۱ & y & ۳\\ -۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر -۲ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) -۷ ۴) -۸

۷۷۶- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^{۱۷}+A^{۱۳}+A^۳+A$ کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $۴I$ ۴) $۴A$

۷۷۷- ماتریس‌های A و B در تساوی‌های $AB=A$ و $BA^۲=B$ صدق می‌کنند. ماتریس $A^۵$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $A^۲$ ۴) BA

۷۷۸- اگر ماتریس $\begin{bmatrix}۴ & m\\ n & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ قطری باشد، ماتریس $\begin{bmatrix}۲m & n-۳\\ m-۴ & ۲n+۲\end{bmatrix}$ چگونه است؟

۱) اسکالر ۲) صفر ۳) قطری ۴) همانی

۷۷۹- ماتریس‌های A و B در تساوی‌های $۳A+B=I_۲$ و $B+۲A=\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A^{۱۰}B$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) -۴ ۴) -۶

۷۸۰- اگر $A+B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $A^۲+B^۲=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $AB+BA$ برابر کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۷۹ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۱)

محاسبات

۷۸۱- اگر $A=[i-j]_{۲\times ۲}$، $B=[i+j]_{۲\times ۲}$ و $X+Y=A$، $X-Y=B$، مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۶

۷۸۲- ماتریس مربعی A در تساوی $A^۲-۲A+I=\bar{O}$ صدق می‌کند. ماتریس $A^۵$ برابر کدام است؟

۱) $۲A-I$ ۲) $۴A-۳I$ ۳) $۵A-۴I$ ۴) $۴A+۳I$

۷۸۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $A^۳+\alpha A+\beta I=\bar{O}$، مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۱۰ ۳) -۱۰ ۴) ۷

۷۸۴- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & m & -۱\\ a & ۵ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۲ & ۴\end{bmatrix}$. اگر درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸۵- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & ۰\\ a & b & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ یک‌چهارم مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ باشد، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۷۸۶- اگر $AB+BA=\bar{O}$ و $AB^۲=kB^۲A$، مقدار k کدام است؟ $(AB\neq\bar{O})$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

۷۸۷- در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & ۰\\ a & c & -b\\ -۳ & a & -۵\end{bmatrix}$ درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر هستند و $B=\begin{bmatrix}۱ & c & ۳\\ ۴ & a & -۱\\ a & ۰ & a\end{bmatrix}$.

اگر $C=BA$ و $c_{۲۱}=-۱$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) -۱

۷۸۸- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ -۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، در ماتریس $(A+I)(A-I)$ درایهٔ سطر دوم و ستون دوم کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) صفر

۷۸۹- اگر $A=[i+i^۲]_{۳\times ۴}$ و $B=[۲i-۳j]_{۳\times ۳}$، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم ماتریس BA کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۵ ۳) ۱۸ ۴) -۳۰

۷۹۰- اگر $A=\begin{bmatrix}۱۰۱ & ۱۰۰\\ -۱ & -۱۰۰\end{bmatrix}$، کدام تساوی درست است؟

۱) $A^۲-A=\bar{O}$ ۲) $A^۲-A-۱۰۱I=\bar{O}$ ۳) $A^۲-A-۱۰۰I=\bar{O}$ ۴) $A^۲-A-۱۰^۴I=\bar{O}$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۸۰ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۲)

محاسبات

۷۹۱- در ماتریس مربعی $A=[n+i^{۲}j]_{(۵-n)\times(n+۱)}$ مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس A برابر کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۶

۷۹۲- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$، $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$، $C=[c_{ij}]_{۲\times۲}$ و $B\times(C\times A)=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۱\\ ۵ & -۳ & ۴\\ ۰ & ۱ & -۶\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $(B\times C)\times A$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۲۷

۷۹۳- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲a+c & ۲a-b\\ ۲b+۴ & \frac{b}{۲}\end{bmatrix}$ قطری و ماتریس $A^{۲}$ اسکالر باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{a}{۲}-b+۲c$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۵/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۶

۷۹۴- ماتریس اسکالر B هم‌مرتبه با ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۲\\ ۳ & -۱ & ۴\\ ۱ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B^{۲}$ برابر کدام است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴/۳۲ ۳) ۴/۲۵ ۴) ۳/۶

۷۹۵- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}m & n\\ e & f\end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ صدق می‌کنند. نسبت $\frac{mn}{ef}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۹۶- ماتریس A ماتریس اسکالر از مرتبهٔ ۲ است. اگر $۲A^{۲}-A-۳I=\overline{O}$، آن‌گاه بیشترین مقدار ممکن حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $-\frac{۹}{۴}$

۷۹۷- اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۴} & -۱\\ \frac{۲۵}{۱۶} & -\frac{۳}{۴}\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۴۰۲}$ برابر کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۷۹۸- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}[\frac{۴}{i+j}] & i<j\\ i^{۲}j & i>j\\ ۲i-mj & i=j\end{cases}$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A سه برابر مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی این ماتریس باشد، مقدار m کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۷۹۹- ماتریس $A=\begin{bmatrix} x^{۲}-۱ & ۲x-۴ \\ x^{۲}-۲x & ۲^{x}-y \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر است و $B+۲I=\begin{bmatrix} x+۱ & y \\ y-۱ & x \end{bmatrix}$. در مورد ماتریس B چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) ماتریس اسکالر ب) ماتریس همانی پ) ماتریس قطری ت) ماتریس صفر

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۰۰- ماتریس‌های A و B در تساوی‌های $A+۲B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $۲A-B=C$ صدق می‌کنند. اگر C ماتریس اسکالر و مجموع درایه‌های ماتریس B برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C برابر کدام است؟

۱) -۴۸ ۲) -۷۲ ۳) -۳۶ ۴) -۹۶

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۸۱ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۳)

۸۰۱- در ماتریس غیرمربعی $A=[۷i-۳j-۲ij]_{m\times n}$ درایهٔ سطر آخر و ستون آخر برابر صفر است. این ماتریس چند درایه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۷

۸۰۲- اگر $A_{۳m\times n}$ ماتریس سطری و $B_{۳\times p}$ ماتریس ستونی باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

۱) ماتریس $C=\begin{bmatrix} m-۱ & ۰ & p-۱ \\ ۰ & -m+\frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس صفر است.

۲) ماتریس $D=\begin{bmatrix} ۳m & p-۱ \\ p-۱ & p-۲ \end{bmatrix}$ ماتریس همانی است.

۳) ماتریس $M=\begin{bmatrix} p & m-\frac{۱}{۳} \\ p-۱ & m \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر است.

۴) ماتریس $N=\begin{bmatrix} p-۱ & ۳m-۱ \\ \frac{۱}{۳}-m & p^{۲}-۱ \end{bmatrix}$ ماتریس قطری است.

۸۰۳- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲m & n^{۲}+۱ & ۴ \\ ۳ & mn & -n \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times m}$ مساوی هستند. مجموع درایه‌های ماتریس B چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۲ ۴) ۱۲

۸۰۴- در ماتریس مربعی $A=[۳i+۲j-۳]$ درایهٔ سطر اول و ستون آخر $\frac{۵}{۷}$ برابر درایهٔ سطر آخر و ستون اول است. این ماتریس چند ستون دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

۸۰۵- اگر مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $A=[۲i+j]_{n\times n}$ مساوی ۴۵ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر اول این ماتریس چقدر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۴۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۱۵

محاسبات

۸۰۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & -۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس CBA برابر کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۸۰۷- اگر $A=[ij-۲]_{۳\times ۲}$، $B=[b_{ij}]_{۲\times ۳}$ و $b_{ij}=\begin{cases}j+۱ & i\geq j\\ i-۲ & i<j\end{cases}$، آن‌گاه درایهٔ سطر سوم و ستون اول ماتریس AB کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۸۰۸- اگر $A+I=\bar{O}$، $A^۳+A^۲+A+I=\bar{O}$، آن‌گاه ماتریس $A^{۶۵}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $-A$ ۴) $-I$

۸۰۹- ماتریس‌های A و B مربعی و هم‌مرتبه هستند. از تساوی $(A-B)^۲=B^۲+A^۲$ کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $AB=\bar{O}$ ۲) $AB=BA$ ۳) $BA=\bar{O}$ ۴) $AB=-BA$

۸۱۰- مجموع درایه‌های ماتریس A برابر -۳ است. اگر $(A+I)^۲=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^۵$ برابر کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) -۴۸ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۸۲ وارون ماتریس (۱)

۸۱۱- اگر ماتریس $\begin{bmatrix}-۲ & a-۳\\ a+۱ & ۲\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، آن‌گاه کدام‌یک از ماتریس‌های زیر وارون‌پذیر است؟

۱) $\begin{bmatrix}a^۲ & ۲a\\ ۱ & ۲a\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}a & a+۳\\ a^۳-۱ & ۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}a-۲ & a+۲\\ a-۱ & ۱-a\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}a+۱ & a^۲+۲\\ a & a-۱\end{bmatrix}$

۸۱۲- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x+۲y & -۱\\ t+۱ & z\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & ۲x+۳y\\ y-۱ & ۱-t\end{bmatrix}$ هر دو وارون ماتریس C هستند. حاصل $x-y+z-t$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۸ ۴) ۶

۸۱۳- برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}m & ۱\\ ۱ & ۲-m\end{bmatrix}$ ماتریسی مانند B وجود دارد به‌طوری که $AB=I$. مجموع درایه‌های ماتریس B برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) $m+۲$ ۴) $۴-۲m$

۸۱۴- ماتریس مربعی A در تساوی $A-I=\begin{bmatrix}|A| & -۱\\ ۵|A| & -۲\end{bmatrix}$ صدق می‌کند. ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\frac{۴}{۳} & -۱\\ \frac{۵}{۳} & -۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۳ & ۳\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -\frac{۵}{۳} & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۳ & -۳\\ ۵ & -۴\end{bmatrix}$

۸۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $-۲(۲I+A)^{-۱}$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۸۱۶- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}m & \frac{۳}{۲}\\ -n & ۱\end{bmatrix}$ در تساوی $A^{-۱}B=\frac{۱}{۲}A$ صدق می‌کنند. حاصل $m-n$ برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۱۷- اگر $A^۲=۸I-۴A$ و $A^{-۱}=aA+bI$، آن‌گاه حاصل $۲a-b$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۸۱۸- اگر $\sqrt{۳}A=\begin{bmatrix}|A|+۲ & |A|\\ |A|-۲ & |A|+۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{A^{-۱}}{\sqrt{۳}}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۸۱۹- اگر $(A-۲I)^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A(A-۲I)^{-۱}$ برابر کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) -۸

۸۲۰- اگر $A^۳=\bar{O}$، آن‌گاه وارون ماتریس $۲A+۳I$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}(۴A^۲-۸A+۹I)$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}(۴A^۲-۶A+۹I)$

۳) $\frac{۱}{۹}(۴A^۲+۹I)$ ۴) $\frac{۱}{۹}(۴A^۲-۸A+۹I)$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۸۳ وارون ماتریس (۲)

۸۲۱- A یک ماتریس وارون‌پذیر ۳×۳ است. اگر $A^{-۱}=A$، دترمینان ماتریس $I-\lambda A^۴$ برابر کدام است؟ ($\lambda\in\mathbb{R}$ و I ماتریس همانی ۳×۳ است.)

۱) $۱-\lambda^۲$ ۲) $(۱-\lambda)^۲$ ۳) $۱-\lambda^۳$ ۴) $(۱-\lambda)^۳$

۸۲۲- اگر $A^۳=۲I$، وارون ماتریس $A+۲I$ کدام است؟

۱) $A^۲-I$ ۲) $\frac{۱}{۵}(A^۲-۲A+۴I)$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}(A^۲-I)$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}(A^۲-۲A+۴I)$

۸۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^۳+A^۲-A+I)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $-\sqrt{۳}$

۸۲۴- اگر ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B در رابطهٔ $۲A+۲B=۳AB$ صدق کنند، ماتریس $A^{-۱}+B^{-۱}$ برابر کدام است؟

۱) $۲I$ ۲) $۳I$ ۳) $\frac{۲}{۳}I$ ۴) $\frac{۳}{۲}I$

محاسبات

۸۲۵- اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد به‌طوری که $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس A چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $-\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۷}$

۸۲۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۷|A|^۲ & -|A|\\ -۶ & ۴|A|\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $-A^{-۱}+۲I$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) -۹ ۳) ۱ ۴) -۸

۸۲۷- اگر A ماتریسی ۲×۲ و وارون‌پذیر باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^{-۱}\begin{bmatrix}-\sqrt{۳} & -۱\\ -۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}A)^۸$ کدام است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) -۲ ۴) صفر

۸۲۸- اگر $A^۲=۴A-۳I$ و $A^{-۱}=mA+nI$، مقدار $m+۴n$ کدام است؟ $(A\neq I)$

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۲۹- اگر $(A-I)^{-۱}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & \frac{۱}{۲} & ۱\\ -۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$، حاصل دترمینان ماتریس $A(A-I)^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۸

۸۳۰- ماتریس $A=\begin{bmatrix}|A| & ۳|A|\\ ۱ & |A|\end{bmatrix}$ وارون ماتریس ضرایب دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=-۱\\ cx+dy=۲\end{cases}$ است. مقدار $xy+۴bc$ برابر کدام است؟

۱) ۱۴۳ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۳۹ ۴) ۱۳۵

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۸۴ وارون ماتریس (۳)

۸۳۱- ماتریس $A=\begin{bmatrix}m & ۱\\ -n & ۲\end{bmatrix}$ در تساوی $A^{-۱}=A$ صدق می‌کند. حاصل $m-n$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) ۱

۸۳۲- ماتریس A در تساوی $A^۲-A-I=\bar{O}$ صدق می‌کند. وارون ماتریس $A^۲$ برابر کدام است؟

۱) $۲I-A$ ۲) $I-A$ ۳) $A-I$ ۴) $A-۲I$

۸۳۳- اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۳A$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) ۷

۸۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۳|A| & ۲\\ ۵ & |A|\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل‌ضرب درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ $(|A|>۰)$

۱) ۵/۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۵ ۴) ۲/۵

۸۳۵- اگر $A^۳=۲I$، آن‌گاه وارون ماتریس $A-۲I$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}(A^۲+۲A+۴I)$ ۲) $-\frac{۱}{۳}(A^۲+۲A+۲I)$ ۳) $-\frac{۱}{۲}(A^۲-۲A+۴I)$ ۴) $-\frac{۱}{۸}(A^۲-۲A+۴I)$

محاسبات

۸۳۶- ماتریس وارون‌پذیر $A=\begin{bmatrix}۲ & m\\ n & -۳\end{bmatrix}$ با درایه‌های غیرصفر مفروض است. اگر $A+A^{-۱}$ یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A+A^{-۱}|$ برابر کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۸۳۷- اگر $-۲A=\begin{bmatrix}۴|A| & ۲\\ -۲ & \frac{|-A|}{۴}\end{bmatrix}$، آن‌گاه قدرمطلق تفاضل درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A^{-۱}$ چند برابر قدرمطلق مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{-۱}$ است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۱۷}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

۸۳۸- ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ در تساوی $\alpha A+\beta A^{-۱}=I$ صدق می‌کند. حاصل $۲\alpha-\beta$ برابر کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۳۹- اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد و $A^۲+A=\bar{O}$، آن‌گاه وارون ماتریس $A^۳+A^۲+۲I$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}I$ ۲) $-\frac{۱}{۲}I$ ۳) $۲I$ ۴) $-۲I$

۸۴۰- اگر $\sqrt{۵}A=\begin{bmatrix}|A|+۱ & |A|-۳\\ ۲|A| & |A|\end{bmatrix}$، آن‌گاه در مورد دستگاه معادلات $\begin{cases}|A|x-۵y=۱\\ |۲A|x-|A^{-۱}|y=-۱\end{cases}$ کدام درست است؟

۱) جواب ندارد.
۲) یک جواب منحصر به فرد دارد.
۳) بی‌شمار جواب دارد.
۴) دو جواب متمایز دارد.

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۸۵ وارون ماتریس (۴)

۸۴۱- ماتریس A هم‌مرتبه با ماتریس B است. اگر $B=\begin{bmatrix}|A| & -۴\\ |A| & ۲|A|\end{bmatrix}$ و $AB^{-۱}=۴I$، حاصل $|-\frac{۱}{۲}A^{-۱}|$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۶۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۸}{۶۳}$ ۳) $\frac{۸}{۶۳}$ ۴) $\frac{۶۳}{۸}$

۸۴۲- اگر $A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & -\cos x\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $(A^۵+A^۴-A^۳+I)^{-۱}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $۲I$ ۳) $\frac{۱}{۲}I$ ۴) $\frac{۱}{۳}I$

۸۴۳- اگر $۳(A+B)^{-۱}=۲(A^{-۱}+B^{-۱})$، آن‌گاه ماتریس $A^{-۱}B+B^{-۱}A$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $\bar{O}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}I$ ۴) $-I$

۸۴۴- اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $(A+B^{-۱})^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{۵}{۴} & \frac{۱}{۲}\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۸ & ۴\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & -\frac{۱}{۲}\\ -۲ & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}$

محاسبات

۸۴۵- دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ۳x+my=۲ \\ ۲x+ny=۳ \end{cases}$ برابر ۵ است. مقدار y برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۵

۸۴۶- دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x-(m+۶)y=m-۸ \\ (۳m-۱)x+(۲m+۳)y=m+۴ \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد. کدام‌یک از ماتریس‌های زیر وارون‌پذیر است؟

۱) $\begin{bmatrix} m & ۲ \\ ۲m & -۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲-m \\ m & m \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & m+۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} m+۱ & m^۲+۱ \\ m & m-۱ \end{bmatrix}$

۸۴۷- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۷x+۱ & m+۲ \\ n-۱ & y+۳ \end{bmatrix}$ قطری باشد، آن‌گاه در تساوی $\begin{bmatrix} m & n+۱ \\ ۰ & \frac{m}{۲} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ & -m \\ n & ۱ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس X برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) -۳ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) -۲

۸۴۸- دو ماتریس A و B وارون‌پذیرند، $A^{-۱}+B^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix} -۳ & -\frac{۵}{۲} \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) -۱۲ ۳) -۱۶ ۴) -۸

۸۴۹- مجموع درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ برابر ۹ است. اگر $a_{ij}=\begin{cases} ۲m-۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j \end{cases}$، در مورد دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-۳)x+(۳m-۴)y=۱-۲m \\ mx-۴my=۳m \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

۱) دو خط موازی ۲) دو خط متقاطع ۳) دو خط عمود بر هم ۴) دو خط منطبق

۸۵۰- اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$، آن‌گاه از تساوی ماتریسی $I+AB=۲A^{-۱}$ درایه‌های سطر اول ماتریس B برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۷ & -۱۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲۰ & -۱۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -\frac{۱۳}{۴} & \frac{۱۷}{۸} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۹ & -۲ \end{bmatrix}$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۸۶ دستگاه معادلات

۸۵۱- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (۲-m)x+my=m^۲+۴ \\ (۲m-۱)x+my=m-۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد، آن‌گاه دترمینان وارون ماتریس $\begin{bmatrix} m^۲+۱ & ۳-m \\ \frac{۲}{m} & -m \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۸۵۲- در دستگاه معادلات $AX=B$، اگر $A=\begin{bmatrix} n-۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $۳A^{-۱}=\begin{bmatrix} n-۲ & m \\ -۱ & n-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس X برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

محاسبات

۸۹۴- اگر A ماتریسی قطری با درایه‌های روی قطر اصلی -۱، ۳ و ۲ باشد و $|B|=۲$، حاصل $|A^۲B^۲-۲AB^۲+B^۲|$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) -۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۶۸

۸۹۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۳\\ ۱ & -۱ & ۴\\ ۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۰ & ۸\end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $-۲A^۳B^۲$ کدام است؟

۱) -۳۲ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) -۶۴

۸۹۶- حاصل $\begin{vmatrix}a & a+۱ & a+۲\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) a ۲) $۴a$ ۳) صفر ۴) ۱

۸۹۷- اگر $|A^{-۱}|=m$، حاصل $|kA|$ با فرض ۲×۲ بودن ماتریس A برابر کدام است؟

۱) $\frac{k}{m}$ ۲) $\frac{k}{m^۲}$ ۳) $\frac{k^۲}{m}$ ۴) $\frac{k^۲}{m^۲}$

۸۹۸- اگر ماتریس‌های $۲I+A$ و $I-۳A$ هر دو وارون‌های ماتریس $B_{۳\times۳}$ باشند، دترمینان ماتریس $۸A$ برابر کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) -۱۶ ۴) -۶۴

۸۹۹- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}$، ماتریس $A-A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) I ۳) $\begin{bmatrix}۰ & ۸\\ ۸ & ۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۸ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$

۹۰۰- اگر $A^۳+A^۲+A+I=\bar{O}$، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $A^۳-I$ ۲) $A^۳+I$ ۳) $-A^۳$ ۴) $A^۳$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۹۱ جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۱)

۹۰۱- اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد که $A^۲=I$، $B=A+I$ و $C=A-I$، ماتریس $B^۲+C^۲$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) I ۳) $۲I$ ۴) $۴I$

۹۰۲- اگر درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۰ & ۱ & x\\ ۲ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ را سه برابر کنیم، از حاصل دترمینان آن ۹ واحد کاسته می‌شود. مقدار x کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

محاسبات

۹۰۳- حاصل عبارت $\begin{vmatrix}۱&-۲&۱\\۷&۲&۱\\۶&۴&۵\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}۶&۴&۵\\۷&۲&۱\\۳&-۲&۱\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}۳&۴&۵\\۷&۲&۱\\۶&۴&۵\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}۳&۵&۲\\۷&۴&۱\\۹&۱۵&۶\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) صفر ۴) -۳

۹۰۴- اگر $A=\begin{bmatrix}\sqrt{۳}&۱\\۱&-\sqrt{۳}\end{bmatrix}$ و $P=۲\begin{bmatrix}-۱&۳\\۲&-۵\end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $(P^{-۱}AP)^{۶}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۲}$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۲۴}$ ۴) $۲^{۲۰}$

۹۰۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۰&-\tan\alpha\\\tan\alpha&۰\end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I-A)^{-۱}(I+A)$ کدام است؟ ریاضی ۹۲

۱) $\begin{bmatrix}\cos ۲\alpha&-\sin ۲\alpha\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\cos ۲\alpha&\sin ۲\alpha\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\sin ۲\alpha&\cos ۲\alpha\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-\sin ۲\alpha&\cos ۲\alpha\end{bmatrix}$

۹۰۶- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}[\frac{i}{۲}]+۱ & i<j\\ \log ۱ & i=j\\ [\frac{j}{۲}]+۱ & i>j\end{cases}$ مفروض است. حاصل $\left|-۲|A|A^{۲}\right|$ برابر کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $-۲^{۱۰}$ ۳) $-۲^{۱۳}$ ۴) $۲^{۱۳}$

۹۰۷- اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ ۲ باشند به طوری که $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}$ و $A+B=AB$، وارون ماتریس B کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۱&-۱\\۱&۲\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&-۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۳\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۱&۱\end{bmatrix}$

۹۰۸- اگر $A^{۲}=۲A-۲I$، حاصل $A(۲A-I)^{۲}$ کدام است؟

۱) $A-۸I$ ۲) $A+۸I$ ۳) $۲۰I+A$ ۴) $-۲۰A-I$

۹۰۹- معادلهٔ $\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=k$ مفروض است. اگر به عناصر سطر اول k واحد اضافه کنیم، دترمینان برابر ۶ می‌شود. مقدار k کدام است؟

۱) -۲ و -۳ ۲) ۲ و ۳ ۳) -۲ و ۳ ۴) ۲ و -۳

۹۱۰- اگر در دستگاه $\begin{cases}ax+by=۳\\cx+dy=-۲\end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix}۰&-۱\\۲&۱\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۹۲ جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۲)

محاسبات

۹۱۱- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} e & m+2 & 0 \\ 0 & 3 & 3-2n \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار $2mne$ برابر کدام است؟

۱) -12 ۲) -16 ۳) -8 ۴) -18

۹۱۲- اگر $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$، $B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C=A\times B=[c_{ij}]$، حاصل $c_{23}+2c_{31}$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

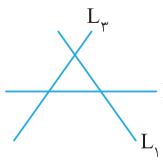
۹۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$، ماتریس A^{1397} برابر کدام است؟

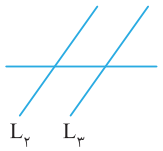
۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $-I$

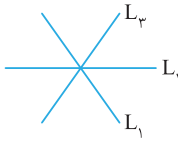
۹۱۴- اگر $3AB+4BA=\bar{O}$ و $AB^3=mB^3A$، مقدار m برابر کدام است؟

۱) $\frac{27}{64}$ ۲) $\frac{64}{27}$ ۳) $-\frac{27}{64}$ ۴) $-\frac{64}{27}$

۹۱۵- کدام‌یک از شکل‌های زیر نمی‌تواند نمایانگر دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=7 \\ ax-y=2 \end{cases}$ باشد؟

۱) L_1, L_3 ۲) 

۳) 

۴) 

۹۱۶- به ازای کدام m دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & m & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ برابر صفر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۱۷- حاصل $\begin{vmatrix} 3x & z-y & d-3z \\ -5 & b & 0 \\ -m & n & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2x & y-z & 3z-d \\ 5 & -b & 0 \\ m & -n & -d \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $5bdx$ ۳) $-3bdx$ ۴) mnd

۹۱۸- اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2\neq\bar{O}$ و $A^3=\bar{O}$، معکوس ماتریس $I-A$ به کدام صورت است؟

۱) A^2-A ۲) A^2+A ۳) A^2-A+I ۴) A^2+A+I

۹۱۹- اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$، حاصل $(A^5+3A^2-A)^{-1}$ کدام است؟ ریاضی ۸۹

۱) $\frac{1}{3}I$ ۲) $3A$ ۳) $\frac{1}{3}A$ ۴) $3I$

۹۲۰- اگر جواب x از دستگاه معادلات $\begin{cases} ax-y=1 \\ bx+2y=3 \end{cases}$ برابر $2/5$ باشد، مقدار $2a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۹۳ جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۳)

محاسبات

۹۲۱- ماتریس‌های $A=[i^۲-۳j]_{۳\times ۳}$ و $B=[\frac{۲ij}{j^۲+۱}]_{۳\times ۳}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های ماتریس $۴A+۱۰B$ برابر کدام است؟

۱) ۹۲ ۲) ۹۸ ۳) ۹۶ ۴) ۹۴

۹۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & -۲ & ۳ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲\\ m\\ ۳\\ n\\ -۱\end{bmatrix}$ و $AB=\frac{۲}{۳}$، مقدار m برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳۸}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۳۴}{۹}$

۹۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$، کدام‌یک از ماتریس‌های زیر برابر ماتریس A نیست؟

۱) $A^{۱۳۸۷}$ ۲) $A^{۱۳۸۸}$ ۳) $A^{۱۳۸۹}$ ۴) $A^{۱۳۹۱}$

۹۲۴- اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $AB-BA=I$، حاصل $AB^۲-B^۲A$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $۲I$ ۳) $۲A$ ۴) $۲B$

۹۲۵- در دترمینان $\begin{vmatrix}۱ & b & ۳\\ a & c & ۲\\ ۴ & d & -۲\end{vmatrix}$ مقدار a چقدر باشد تا با اضافه کردن هر مقدار دلخواه به b دترمینان تغییر نکند؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۹۲۶- اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۲\\ ۱ & k & ۱\\ -۲ & -۱ & ۳\end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $\begin{bmatrix}\frac{۳}{۲} & k\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ برابر باشد، مجموع مقادیر k برابر کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۹}{۲}$

۹۲۷- به ازای کدام مقدار a دو خط D و D' به ترتیب به معادلات $\begin{vmatrix}x & ۱ & -۳\\ y & ۲a & ۲\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=۰$ و $\begin{vmatrix}x & y & ۱\\ a & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۱\end{vmatrix}=۰$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ بر هم عمودند؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۹۲۸- معادلهٔ دترمینانی $\begin{vmatrix}۳ & x & x^۳\\ ۳ & x^۲ & x^۲\\ ۳ & x^۳ & x\end{vmatrix}=۰$ چند جواب متمایز دارد؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) نامتناهی

۹۲۹- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}$ و α و β دو عدد حقیقی باشند به طوری که $\alpha A+\beta I=A^{-۱}$، مقدار β کدام است؟ (I ماتریس همانی است)

ریاضی ۹۳

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

محاسبات

۹۳۰- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ است. حاصل عبارت $bx+cy$ برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۱

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۹۴ جامع هندسهٔ ۳ / فصل اول (۴)

۹۳۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۴ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۰ \\ -۳ & ۲ & ۱ \\ -۵ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس $AB^۲$ برابر کدام است؟

۱) -۳۳ ۲) -۱۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۳

۹۳۲- در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۲x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مجموع مقادیر ممکن x برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۲}{۹}$ ۳) -۱ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۹۳۳- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ \frac{m}{۲} & ۰ & n \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس AB چقدر از مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس AB بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۱

۹۳۴- اگر $۲A=\begin{bmatrix} |A| & ۳ \\ -۱ & |A| \end{bmatrix}$ و $|A|>\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه حاصل $|A^۲-۲A+I|$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۸

۹۳۵- ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & m \\ -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & m & -۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست. حاصل دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} m & ۰ & ۲m-۱ \\ ۱ & -m & m-\frac{۱}{۲} \\ m^۲+۱ & ۷ & ۴ \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) -۴ ۴) -۱

۹۳۶- ماتریس A وارون‌پذیر است و $A=\begin{bmatrix} |A| & ۳|A| \\ ۳ & |A| \end{bmatrix}$. اگر A ماتریس ضرایب دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=۲۰ \\ cx+dy=۵ \end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل xy برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۵ ۳) -۱۰ ۴) ۱۵

۷۵۱ **(۱)** درایه‌های هر دو ماتریس را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&1\\4&5&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&0&5\\2&1&0\end{bmatrix}$$

پس در ماتریس $A+B=\begin{bmatrix}0&4&6\\4&0&6\\6&6&0\end{bmatrix}$ درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند.

۷۵۲ **(۴)** در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطری اصلی صفر هستند، پس

$$m^2+m=0\Rightarrow m(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\m=-1\end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر -1 است.

۷۵۳ **(۱)** ابتدا درایه‌های این ماتریس را با تعریف داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}-2&-1&0\\-10&-8&-6\\-24&-21&-18\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر -90 است.

۷۵۴ **(۳)** درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\3&4&2\\4&5&6\end{bmatrix}\Rightarrow\text{مجموع درایه‌های ماتریس}=29$$

۷۵۵ **(۲)** در ماتریس گزینهٔ (۱) چون $a_{ij}=-a_{ji}$، پس درایه‌های نظیر بالا و پایین قطر اصلی قرینهٔ یکدیگر می‌شوند. پس گزینهٔ (۱) درست نیست.

در ماتریس گزینهٔ (۳) چون $\sin(i-j)=-\sin(j-i)$، پس درایه‌های نظیر بالا و پایین قطر اصلی قرینهٔ یکدیگر می‌شوند، بنابراین گزینه (۳) نیز نمی‌تواند درست باشد.

در ماتریس گزینهٔ (۴) به ازای هر $i\neq j$، $a_{ij}\neq a_{ji}$، به عنوان مثال $a_{12}=1+4=5$ ولی $a_{21}=2+2=4$، پس گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند درست باشد.

در گزینهٔ (۲) به‌ازای هر $i\neq j$، $\cos(i-j)=\cos(j-i)$، پس گزینهٔ (۲) ماتریس مورد نظر است.

$$[\cos(i-j)]_{3\times3}=\begin{bmatrix}\cos0&\cos(-1)&\cos(-2)\\\cos1&\cos0&\cos(-1)\\\cos2&\cos1&\cos0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos0&\cos1&\cos2\\\cos1&\cos0&\cos1\\\cos2&\cos1&\cos0\end{bmatrix}$$

۷۵۶ **(۲)** درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{12}=[\tfrac{1}{2}]=0,\quad a_{22}=[\tfrac{2}{2}]=1,\quad a_{32}=[\tfrac{3}{2}]=1$$

اکنون می‌نویسیم

$$\text{مجموع درایه‌های ستون دوم}=a_{12}+a_{22}+a_{32}=0+1+1=2$$

۷۵۷ **(۱)** برای هر گزینه ماتریس مربوط به ضابطه را می‌نویسیم:

گزینهٔ (۱)
$$A=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\3&2&1\\8&7&6\end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۲)
$$A=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۳)
$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&2&1\\5&4&3\end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۴)
$$A=\begin{bmatrix}0&-3&-8\\1&-2&-7\\2&-1&-6\end{bmatrix}$$

۷۵۸ **(۴)** ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

در این ماتریس درایهٔ ۲ وجود ندارد.

۷۵۹ **(۲)** از دستگاه صورت سؤال ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}A+B=\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\end{bmatrix}\\2A+B=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\end{cases}$$

معادلهٔ بالا را از معادلهٔ پایین کم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&2\\-2&-1\end{bmatrix}$$

ماتریس A را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&2\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-3\\4&1\end{bmatrix}$$

در نهایت می‌نویسیم

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های ماتریس }A}{\text{مجموع درایه‌های ماتریس }B}=-\frac{3}{7}$$

۷۶۰ **۲** ابتدا ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & -۵ & -۷\\ ۰ & ۱ & -۴ & -۶\\ ۱ & -۱ & ۱ & -۵\end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۵ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۳ & ۱۰ & ۱۵\end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

بنابراین

$$۳A+B=۳\begin{bmatrix}۱ & -۳ & -۵ & -۷\\ ۰ & ۱ & -۴ & -۶\\ ۱ & -۱ & ۱ & -۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۵ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۳ & ۱۰ & ۱۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۵ & -۶ & -۷ & -۶\\ ۰ & ۸ & -۴ & -۳\\ ۳ & ۰ & ۱۳ & ۰\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $۳A+B$ مساوی ۳ است.

۷۶۱ **۳** ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم و سپس آن را مساوی A قرار می‌دهیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & x\\ -۱ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & x\\ -۱ & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴-x & ۲x+ax\\ -۲-a & -x+a^۲\end{bmatrix}$$

$$A^۲=A\Rightarrow\begin{bmatrix}۴-x & ۲x+ax\\ -۲-a & -x+a^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & x\\ -۱ & a\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}۴-x=۲\Rightarrow x=۲\\ -۲-a=-۱\Rightarrow a=-۱\end{cases}\Rightarrow a+x=۱$$

۷۶۲ **۳** ماتریس NM را به‌دست می‌آوریم. درایهٔ سطر دوم و ستون دوم این ماتریس میزان کاهویی است که شیر به صورت غیرمستقیم خورده است:

$$NM=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}? & ? & ?\\ ? & ۱۴ & ?\end{bmatrix}$$

۷۶۳ **۲** ماتریس $A^۲$ را محاسبه کرده و با ماتریس $A^۲$ داده شده در صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & a & ۰\\ c & b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & a & ۰\\ c & b & a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^۲ & ۰ & ۰\\ ۲ab & a^۲ & ۰\\ ۲ac+b^۲ & ۲ab & a^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۸ & ۴ & ۰\\ ۶ & ۸ & ۴\end{bmatrix}$$

از این تساوی نتیجه می‌گیریم $a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$

چون $۲ab=۸$، پس به ازای $a=۲$ به دست می‌آید $b=۲$ و به ازای $a=-۲$ به دست می‌آید $b=-۲$. اکنون از تساوی $۲ac+b^۲=۶$ به ازای $a=b=۲$ به دست می‌آید

$$۴c+۴=۶\Rightarrow c=\frac{۱}{۲}$$

و به ازای $a=b=-۲$ به دست می‌آید

$$-۴c+۴=۶\Rightarrow c=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین دو دسته جواب به دست می‌آید

$$(۱)\quad a=b=۲\,,\quad c=\frac{۱}{۲}$$

$$(۲)\quad a=b=-۲\,,\quad c=-\frac{۱}{۲}$$

۷۶۴ **۳** توجه کنید که

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$$

بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A^۲+AB+BA+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲\Rightarrow BA=AB$$

۷۶۵ **۱** دو طرف تساوی $A^۲=A-۲I$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^۴=A^۲-۴A+۴I=(A-۲I)-۴A+۴I=-۳A+۲I$$

دو طرف تساوی را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^۵=-۳A^۲+۲A=-۳(A-۲I)+۲A=-A+۶I$$

با توجه به فرض سؤال چون $A^۵=\alpha A+\beta I$، پس $\alpha=-۱$ و $\beta=۶$.

در نتیجه $\alpha+\beta=۵$.

۷۶۶ **۲** ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{۲n}=I$ و $A^{۲n+۱}=A$، پس

$$A^{۲n}-A^{۲n+۱}=I-A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & ۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها}=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱$$

۷۶۷ **۳** ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}ab & b^۲\\ -a^۲ & -ab\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ab & b^۲\\ -a^۲ & -ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

بنابراین $A^n=\bar{O}\ (n\geq۲)$. پس در محاسبهٔ ماتریس $A(A-۵I)^۵$ تمام جملات به صورت $A^n\ (n\geq۲)$ برابر ماتریس صفر هستند، در نتیجه

$$A(A-۵I)^۵=A(\underbrace{A^۵-۲۵A^۴+\cdots}_{\bar{O}}+۵(۵I)^۴A-۵^۵I)$$

$$=A(۵^۵A-۵^۵I)=\underbrace{۵^۵A^۲}_{\bar{O}}-۵^۵A=-۵^۵A$$

۷۶۸ **۱** عبارت $(i+j)^\circ$ همواره برابر یک است، پس

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\end{bmatrix}=۳A$$

$$A^۳=A^۲\times A=۳A\times A=۳A^۲=۹A=۳^۲A$$

$$A^۴=A^۳\times A=۹A\times A=۹A^۲=۲۷A=۳^۳A$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که $A^n=۳^{n-۱}A$

۷۶۹ (۳) توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۵ & ۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۵ & ۴ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۵ & ۴ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & -۴ & -۴\\ ۱۴ & ۸ & ۲\\ ۳۲ & ۲۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}-۴ & -۴ & -۴\\ ۱۴ & ۸ & ۲\\ ۳۲ & ۲۰ & ۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۵ & ۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۳۶ & -۲۴ & -۱۲\\ ? & ? & ?\\ ? & ? & ?\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های سطر اول $A^۳$ برابر $-۷۲=-۱۲-۲۴-۳۶$ است.

۷۷۰ (۱) چون $AB=\bar{O}$، پس

$$\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow\begin{bmatrix}c & d\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow\begin{cases}c=۰\\ d=۰\end{cases}$$

بنابراین رابطهٔ (الف)، یعنی $c+d=۰$ درست است. اکنون تساوی $AB=BA$ را بررسی می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}a & b\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & a\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

پس رابطهٔ (ب) لزوماً درست نیست.

مسلماً اگر $AB=BA$، آن‌گاه $a=۰$، پس $B=\begin{bmatrix}۰ & b\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و ماتریس B لزوماً قطری نیست. درنتیجه گزارهٔ (پ) نیز درست نیست.

۷۷۱ (۳) از تساوی‌های داده شده به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}-۲ & ۱ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ a^۲\\ -۱\end{bmatrix}=[۲]\Rightarrow[a^۲-a]=[۲]\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

$a=۲$ یا $a=-۱$

چون a عددی طبیعی است، پس $a=-۱$ قابل قبول نیست. در نتیجه

$$\begin{bmatrix}۲ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ ۱\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow ۲b+a=۰\xrightarrow{a=۲}b=-۱$$

بنابراین $a+b=۱$.

۷۷۲ (۴) از تساوی $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ نتیجه می‌گیریم $AB=BA$. چون ضرب ماتریس‌های A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، پس می‌توانیم از اتحادها در ضرب ماتریس‌ها استفاده کنیم. بنابراین تساوی $(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$ درست است. از طرف دیگر،

$$\begin{cases}AB=BA\xrightarrow{\text{از چپ در A ضرب می‌کنیم}}A^۲B=ABA\\ AB=BA\xrightarrow{\text{از راست در A ضرب می‌کنیم}}ABA=BA^۲\end{cases}$$

$$A^۲B=BA^۲$$

بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند ولی رابطهٔ $AB=I$ لزومی ندارد برقرار باشد.

۷۷۳ (۳) از تساوی داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & -۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳ & -۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ -۶ & ۱\end{bmatrix}\quad(۱)$$

بنابراین

$$(A+B)(A-B)+C=۲I\xrightarrow{\text{از (۱)}}\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ -۶ & ۱\end{bmatrix}+C=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ -۶ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ ۶ & ۱\end{bmatrix}$$

۷۷۴ (۱) فرض کنید $A=\begin{bmatrix}m & ۰ & ۰\\ ۰ & m & ۰\\ ۰ & ۰ & m\end{bmatrix}$. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

(مجموع درایه‌های ماتریس A)=۱۲(حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی A)

$$m^۳=۱۲(۳m)\Rightarrow m^۳-۳۶m=۰\Rightarrow m(m^۲-۳۶)=۰$$

$m=۰$ یا $m=۶$ یا $m=-۶$

چون ماتریس A غیرصفر است، پس $m=۰$ قابل قبول نیست. بنابراین

$$m=\pm۶\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\pm۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & \pm۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & \pm۶\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}\pm۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & \pm۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & \pm۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pm۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & \pm۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & \pm۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳۶\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ مساوی $۳\times۳۶=۱۰۸$ است.

۷۷۵ (۳) درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر حاصل‌ضرب سطر دوم A (به عنوان یک ماتریس سطری) در ستون سوم B (به عنوان یک ماتریس ستونی) است:

$$(\text{سطر دوم }A)(\text{ستون سوم }B)=-۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ ۳\\ ۱\end{bmatrix}=-۲$$

$$m+۶-۱=-۲\Rightarrow m=-۷$$

۷۷۶ **۴** با پیدا کردن ماتریس $A^۲$ سعی می‌کنیم الگویی برای محاسبهٔ توان‌های دیگر A به‌دست آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=A$$

بنابراین $A^۲=A$، پس هر توان دیگر ماتریس A برابر A است. بنابراین

$$A^{۱۷}+A^{۱۳}+A^۳+A=A+A+A+A=۴A$$

۷۷۷ **۱** از فرض‌های سؤال به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$BA^۲=B\xrightarrow{A\times}ABA^۲=AB\xrightarrow{AB=A}AA^۲=A\Rightarrow A^۳=A$$

$$\xrightarrow{A\times}A^۴=A^۲\xrightarrow{A\times}A^۵=A^۳\xrightarrow{A^۳=A}A^۵=A$$

۷۷۸ **۱** در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند:

$$\begin{bmatrix}۴ & m\\ n & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳m & -۸+۲m\\ n-۳ & -۲n-۲\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-۸+۲m=۰\Rightarrow m=۴\\ n-۳=۰\Rightarrow n=۳\end{cases}$$

پس ماتریس $\begin{bmatrix}۲m & n-۳\\ m-۴ & ۲n+۲\end{bmatrix}$ برابر $\begin{bmatrix}۸ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$ است که یک ماتریس اسکالر است. (دقت کنید شاید در نظر شما گزینهٔ (۳) یعنی ماتریس قطری هم درست است ولی ماتریس اسکالر گزینهٔ کامل‌تری است).

۷۷۹ **۴** ابتدا ماتریس‌های A و B را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳A+B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\\ ۲A+B=\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-۵ & -۹\\ ۳ & ۷\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^{۱۰}=I$$

$$A^{۱۰}B=IB=B=\begin{bmatrix}-۵ & -۹\\ ۳ & ۷\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A^{۱۰}B$ برابر $-۶+۳=-۹$ است.

۷۸۰ **۳** می‌دانیم $(A+B)^۲$ برابر $A^۲+AB+BA+B^۲$ است، پس

$$A+B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow(A+B)^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A^۲+AB+BA+B^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۲ & ۱۱\end{bmatrix}$$

$$AB+BA+(A^۲+B^۲)=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۲ & ۱۱\end{bmatrix}$$

$$AB+BA+\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۲ & ۱۱\end{bmatrix}$$

$$AB+BA=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۲ & ۱۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $AB+BA$ برابر ۱۲ است.

۷۸۱ **۴** از برابری‌های $X-Y=B$ و $X+Y=A$ به‌دست می‌آید

$$X=\frac{A+B}{۲},\quad Y=\frac{A-B}{۲}$$

در نتیجه

$$۲X+Y=۲\left(\frac{A+B}{۲}\right)+\left(\frac{A-B}{۲}\right)=A+B+\frac{A-B}{۲}=\frac{۲A+۲B+A-B}{۲}$$

$$=\frac{۳A+B}{۲}=\frac{[۳(i-j)+i+j]}{۲}=[۲i-j]=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ برابر ۶ است.

۷۸۲ **۳** توجه کنید که

$$A^۲-۲A+I=\bar{O}\Rightarrow A^۲=۲A-I\Rightarrow A^۴=(۲A-I)^۲$$

$$A^۴=۴A^۲+I-۴A\xrightarrow{A^۲=۲A-I}A^۴=۴(۲A-I)+I-۴A$$

$$A^۴=۴A-۳I\xrightarrow{\text{در A ضرب می‌کنیم}}A^۵=۴A^۲-۳A$$

$$A^۵=۴(۲A-I)-۳A\Rightarrow A^۵=۵A-۴I$$

۷۸۳ **۱** می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه

$$A^۲=(a+d)A-(ad-bc)I$$

در اینجا $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، پس

$$A^۲=۲A-(۱-۲)I=۲A+I\xrightarrow{A\times}$$

$$A^۳=۲A^۲+A=۲(۲A+I)+A=۴A+۲I+A=۵A+۲I$$

بنابراین $A^۳-۵A-۲I=\bar{O}$

با مقایسهٔ این تساوی با $A^۳+\alpha A+\beta I=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=-۵$ و $\beta=-۲$.

بنابراین $\alpha+\beta=-۷$.

۷۸۴ **۱** کافی است درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB را به‌دست آوریم:

$$AB\text{ سوم ستون و دوم سطر }(A)\text{ دوم ستون }(B)=\text{درایهٔ سطر دوم و ستون سوم}$$

$$=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ ۱\\ ۲\end{bmatrix}=۳m+۱+۲=۳m+۳$$

این درایه برابر ۶ است، پس $۳m+۳=۶\Rightarrow ۳m=۳\Rightarrow m=۱$

۷۸۵ **۲** ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & b & ۰\\ a & b & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & ۰\\ a & b & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+ab & ab+b^۲ & ۰\\ a^۲+ab & ab+b^۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

پس

$$(A\text{ درایه‌های مجموع})=\frac{۱}{۴}(A^۲\text{ درایه‌های مجموع})$$

$$۲(a+b)=\frac{۱}{۴}(۲a^۲+۴ab+۲b^۲)\Rightarrow ۴(a+b)=(a+b)^۲\Rightarrow\begin{cases}a+b=۰\\ a+b=۴\end{cases}$$

$a+b=۴$ در بین گزینه‌ها هست، پس گزینهٔ (۲) درست است.

۷۸۶ **۱** با توجه به فرض $AB=-BA$، بنابراین

$$AB=-BA \xrightarrow{\times B} AB^2=-B\underbrace{AB}_{-BA}$$

$$AB^2=-B(-BA)=B^2A \Rightarrow AB^2=B^2A$$

از مقایسهٔ این رابطه و رابطهٔ $AB^2=kB^2A$ نتیجه می‌شود $k=1$.

۷۸۷ **۲** بنابر فرض سؤال درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A صفر است، بنابراین $b=0$. از طرف دیگر طبق فرض تست،

$$c_{21}=-1 \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & a & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\a\\-3\end{bmatrix}=-1 \Rightarrow 4a+a^2+3=-1$$

$$a^2+4a+4=0 \Rightarrow (a+2)^2=0 \Rightarrow a=-2$$

در نتیجه $a+b=-2$.

۷۸۸ **۴** ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$(A+I)(A-I)=A^2-I^2=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(A+I)(A-I)$ برابر صفر است.

۷۸۹ **۴** با فرض $C=BA$ معلوم می‌شود که

$$c_{33}=(\text{سطر سوم B})(\text{ستون سوم A})=\begin{bmatrix}b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\\12\end{bmatrix}=6+0-36=-30$$

۷۹۰ **۴** می‌دانیم هر ماتریس به صورت $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در رابطهٔ

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$ زیر صدق می‌کند

در اینجا $A=\begin{bmatrix}101&100\\-1&-100\end{bmatrix}$، پس

$$a+d=1,\quad ad-bc=-101\times100+1\times100=-10000=-10^4$$

بنابراین ماتریس A در معادلهٔ مقابل صدق می‌کند: $A^2-A-10^4I=\bar{O}$

۷۹۱ **۴** ماتریس A مربعی است، پس

$$5-n=n+1 \Rightarrow n=2 \Rightarrow A=[2+i^2j]_{3\times3}$$

اکنون درایه‌های قطر فرعی ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{13}=2+(1)^2(3)=5\ ,\ a_{22}=2+(2)^2(2)=10\ ,\ a_{31}=2+(3)^2(1)=11$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس A برابر است با

$$a_{13}+a_{22}+a_{31}=5+10+11=26$$

۷۹۲ **۲** ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد، پس $(B\times C)\times A=B\times(C\times A)$، بنابراین

$$(B\times C)\times A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\5&-3&4\\0&1&-6\end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=3$$

۷۹۳ **۳** ماتریس A قطری است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند:

$$\begin{cases}2a-b=0 \Rightarrow 2a+2=0 \Rightarrow a=-1\\ 2b+4=0 \Rightarrow b=-2\end{cases}$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix}2a+c & 2a-b\\ 2b+4 & \frac{b}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+c & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-2+c&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2+c&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2+c)^2&0\\0&(-1)^2\end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال A^2 ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های قطر اصلی A^2 برابرند. در نتیجه

$$(-2+c)^2=1 \Rightarrow \begin{cases}-2+c=1 \Rightarrow c=3 \Rightarrow \frac{a}{2}-b+2c=-\frac{1}{2}+2+6\\ \qquad =\frac{15}{2}=7/5\\ -2+c=-1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow \frac{a}{2}-b+2c=-\frac{1}{2}+2+2\\ \qquad =\frac{7}{2}=3/5\end{cases}$$

۷۹۴ **۲** فرض کنید ماتریس اسکالر B از مرتبهٔ 3×3 به‌صورت $\begin{bmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{bmatrix}$ باشد. در این صورت

$$AB=\begin{bmatrix}1&-2&2\\3&-1&4\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m&-2m&2m\\3m&-m&4m\\m&0&2m\end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس AB}=12 \Rightarrow 10m=12 \Rightarrow m=\frac{12}{10}=1/2$$

بنابراین

$$B=\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}$$

$$B^2=B\times B=\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1/44&0&0\\0&1/44&0\\0&0&1/44\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس B مساوی $3\times1/44=4/32$ است.