فصل سوم

مثلثات

درسنامه‌ی (۱)

یادآوری

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

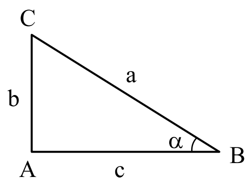
درجه: اگر یک دایره به ۳۶۰ زاویه‌ی مرکزی (زاویه‌ای که رأسش در مرکز دایره باشد) تقسیم شود، اندازه‌ی هر یک از این زاویه‌ها ۱ درجه خواهد بود.

رادیان: اندازه‌ی زاویه‌ای است که طول کمان روبه‌روی آن برابر شعاع دایره باشد.

اگر D و R به ترتیب زوایایی بر حسب درجه و رادیان باشند، بین آن‌ها رابطه‌ی روبه‌رو برقرار است: $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$

تعریف نسبت‌های مثلثاتی با توجه به مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{A}=90^\circ)$، زاویه‌ی حاده‌ی α را درنظر می‌گیریم. نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin\alpha=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}}=\frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}}=\frac{c}{a}$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی } \alpha}=\frac{b}{c}$$

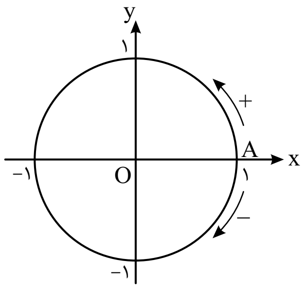
$$\cot\alpha=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی } \alpha}=\frac{c}{b}$$

با توجه به تعاریف فوق، می‌توان اتحادهای مقدماتی را بین نسبت‌های مثلثاتی، به‌دست آورد.

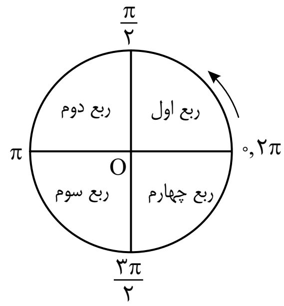
اتحادهای مقدماتی مثلثات

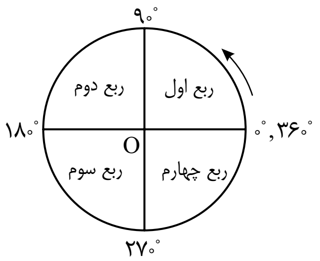
۱) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	۲) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
۳) $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	۴) $\tan\alpha\cot\alpha=1$
۵) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	۶) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
۷) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$	۸) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

دایره‌ی مثلثاتی

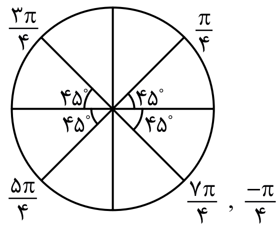


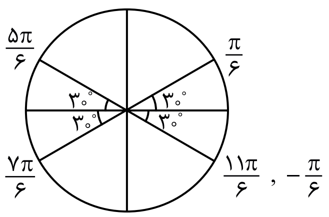
دایره‌ای اســت به مرکز مبدأ مختصات (O) و شــعاع واحد که جهت مثبت آن، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ســاعت باشــد. اگر از نقطه‌ی A در دایــره‌ی مثلثاتی مقابل، در خــلاف جهت عقربه‌های ســاعت حرکت کنیم، کمان و زاویه‌هــای مثبت و اگر در جهت عقربه‌های ســاعت حرکــت کنیم، کمان و زاویه‌های منفی حاصل می‌شــود. هر دور کامل معادل ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که هر نیم دور معادل ۱۸۰ درجه یا π رادیان و هر ربع دور برابر ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است.

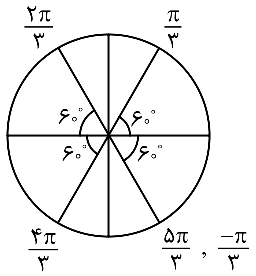




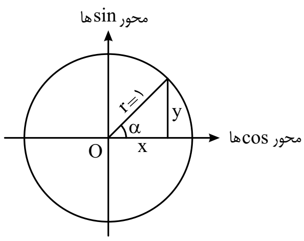
به عنوان مثال انتهای کمان چند زاویه‌ی مهم در زیر مشخص شده است:







نسبت‌های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی

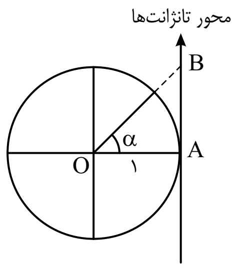


تصویر هر زاویه روی محور yها، سینوس و تصویر هر زاویه روی محور xها، کسینوس آن زاویه را مشخص می‌کند. مطابق دایره‌ی روبه‌رو می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha = \frac{y}{۱} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{۱} = x$$

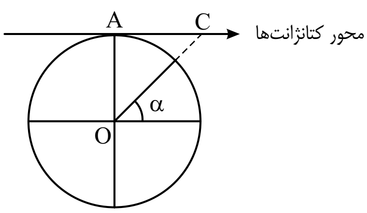
محور افقی را محور کسینوس‌ها و محور عمودی را محور سینوس‌ها می‌گوییم.



در دایره‌ی مثلثاتی مقابل، تانژانت زاویه‌ی α برابر است با:

$$\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{۱} = AB$$

برای به‌دست آوردن مقدار تانژانت یک زاویه کافی است ضلع زاویه را امتداد دهیم تا محور تانژانت‌ها را قطع کند (محور عمودی مماس در کنار دایره را محور تانژانت‌ها می‌نامیم).



در دایره‌ی مثلثاتی مقابل، کتانژانت زاویه‌ی α برابر است با:

$$\cot\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{۱} = AC$$

بــرای یافتــن مقدار کتانژانت یک زاویه کافی اســت ضلع زاویه را امتــداد دهیم تا محور کتانژانت‌ها را قطع کند (محور افقی مماس در بالای دایره را محور کتانژانت‌ها می‌نامیم).

علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ناحیه‌ی مثلثاتی

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی، علامت نسبت‌های مثلثاتی در جدول زیر خلاصه شده است:

ناحیه / نسبت مثلثاتی	اول	دوم	سوم	چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

زاویه									
زاویه	رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
زاویه	درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	−۱	۰
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰	۱
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	نامعین	۰	نامعین

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل

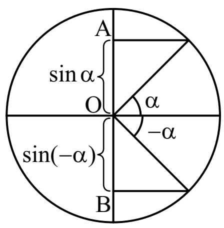
الف) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه:

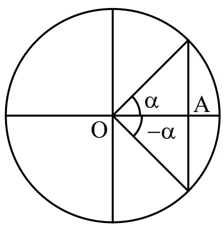
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\qquad$ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

مطابق دایره‌ی مثلثاتی داریم:

$$\begin{cases}\sin\alpha=OA\\ \sin(-\alpha)=OB\end{cases}\xrightarrow[\text{شکل}]{\text{مطابق}}\sin\alpha=-\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\cos(-\alpha)=OA$$





و به همین ترتیب در مورد تانژانت و کتانژانت می‌توانیم این بررسی را انجام دهیم.

ب) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم:

اگر دو زاویه متمم باشند، $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس. همچنین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. یعنی داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\sin\beta\\ \sin\alpha=\cos\beta\\ \tan\alpha=\cot\beta\\ \cot\alpha=\tan\beta\end{cases}$$

به بیان دیگر:

$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$ $\qquad$ $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$ $\qquad$ $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

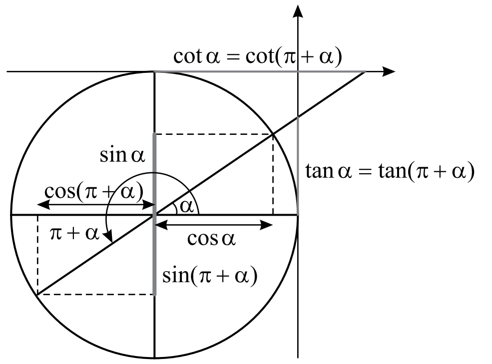
پ) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل:

اگر دو زاویه، مکمل یک‌دیگر باشند، داریم:

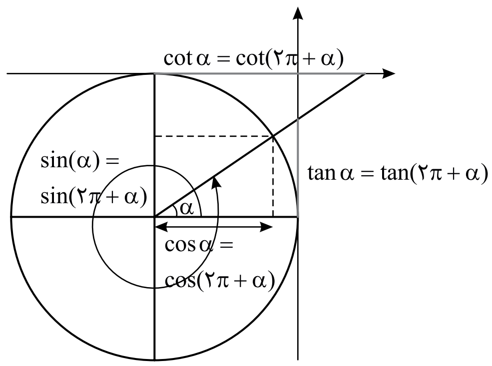
$$\alpha+\beta=\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\sin\beta \\ \cos\alpha=-\cos\beta \\ \tan\alpha=-\tan\beta \\ \cot\alpha=-\cot\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha \\ \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi\pm\alpha)$

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی داریم:



$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$



$\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$	$\tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cos(۲\pi+\alpha)=\cos\alpha$	$\cot(۲\pi+\alpha)=\cot\alpha$

پس سـینوس و کسـینوس زاویه‌ی $k\pi+\alpha$ در صورتی که k فرد باشد به ترتیب با قرینه‌ی سینوس و قرینه‌ی کسینوس زاویه‌ی α برابر است و در صورتی که k زوج باشد به ترتیب با سینوس و کسینوس زاویه‌ی α برابر است. همچنین تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی $k\pi+\alpha$ (k دلخواه) به ترتیب با تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی α برابر است.

مثـال:

$\sin(\alpha-\overset{\pi}{\cancel{۵}\pi})=-\sin\alpha$

$\tan(\cancel{۱۹}\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cos(\overset{\pi}{\cancel{۷}\pi}+\alpha)=-\cos\alpha$

$\cos(\cancel{۱۸}\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\cancel{۸}\pi)=\sin\alpha$

$\tan(\alpha-\cancel{۶}\pi)=\tan\alpha$

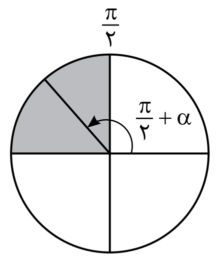
$\cos(\beta-\cancel{۱۶}\pi)=\cos\beta$

$\cot(\cancel{۱۳}\pi+\beta)=\cot\beta$

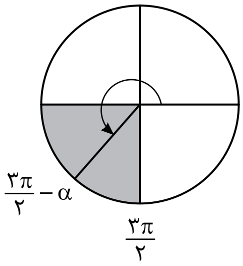
$\tan(\alpha-\cancel{۹}\pi)=\tan\alpha$

تعیین نسبت‌های مثلثاتی $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$

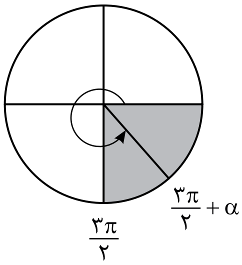
بـــرای تعیین نســـبت‌های مثلثاتی $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$، ابتدا ناحیـــه‌ی موردنظر را انتخاب کرده و علامت نســـبت مثلثاتی در آن ناحیه را می‌نویســـیم. ســـپس با تبدیل سینوس به کســـینوس (و بالعکس) و تبدیل تانژانت به کتانژانت (و بالعکس) جواب را محاسبه می‌کنیم (توجه کنید که $(۲k+۱)$ عددی فرد است).



$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$



$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$
$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$



$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$
$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$	$\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$

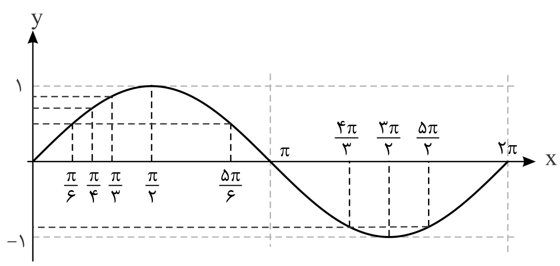
درسنامه‌ی (۲)

توابع مثلثاتی

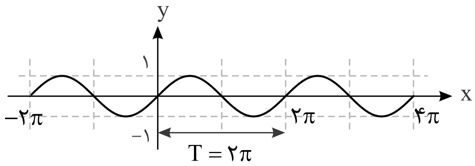
الف) تابع $f(x)=\sin x$

با توجه به جدول مقادیر زیر، نمودار $f(x)=\sin x$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ می‌توان رسم کرد:

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	۲π
sin x	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۰
تغییرات سینوس	↗	↗	↗	↗	↘	↘	↘	↘	↗	↗	



می‌دانیم تابع $f(x)=\sin x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π اســت، پس نمودار آن در بازه‌های با طول ۲π عیناً تکرار می‌شــود، پس می‌توان نمودار فوق را روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر رسم کرد:



ویژگی‌های تابع سینوس

با توجه به نمودار و دیگر ویژگی‌های نسبت مثلثاتی سینوس می‌توان گفت که تابع $f(x)=\sin x$:

۱- تابعی فرد است.

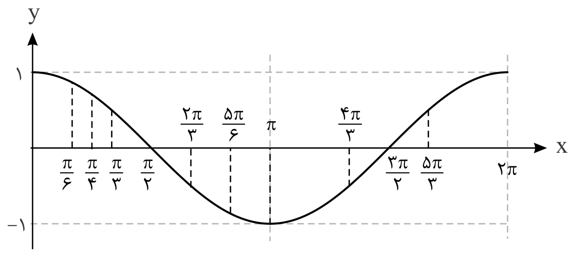
۲- تابعی متناوب بوده، پس یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۳- دارای دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و برد $[-۱,۱]$ است.

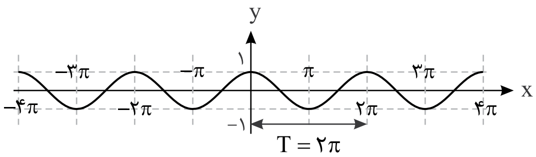
ب) تابع $f(x)=\cos x$

با توجه به جدول مقادیر زیر، نمودار $f(x)=\cos x$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ می‌توان رسم کرد:

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	۲π
cos x	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
تغییرات کسینوس	↘	↘	↘	↘	↘	↘	↘	↗	↗	↗	↗	



تابع $f(x)=\cos x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است، پس نمودار آن در بازه‌های با طول ۲π عیناً تکرار می‌شود، پس می‌توان نمودار آن را روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر رسم کرد:



ویژگی‌های تابع کسینوس

با توجه به نمودار و دیگر ویژگی‌های کسینوس می‌توان گفت که تابع $f(x)=\cos x$:

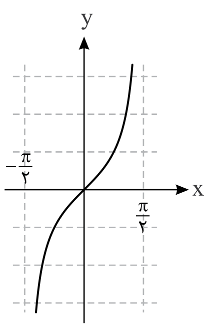
۱- تابعی زوج است.

۲- تابعی متناوب بوده، پس یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۳- دارای دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و برد $[-۱,۱]$ است.

پ) تابع $f(x)=\tan x$

با توجه به جدول مقادیر زیر، نمودار تابع $f(x)=\tan x$ را در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ می‌توان رسم کرد:

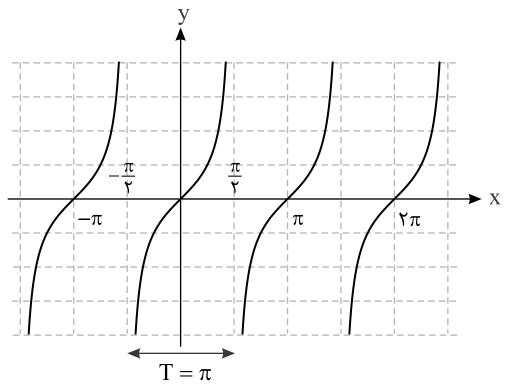


x	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۶}$	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
tan x	$-\infty$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$+\infty$
تغییرات تانژانت		↗	↗	↗	↗	↗	↗		

تابع $f(x)=\tan x$ نیز تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است، زیرا:

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$$

پس می‌توان نمودار آن را روی $\mathbb{R}$ به صورت روبه‌رو رسم کرد:



ویژگی‌های تابع تانژانت

تابع $f(x)=\tan x$:

۱- تابعی فرد است.

۲- تابعی متناوب بوده، پس یک‌به‌یک نمی‌باشد.

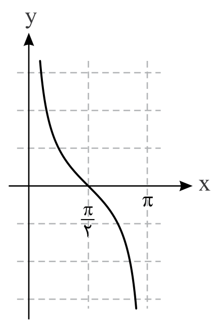
۳- دامنه‌ی آن برابر $\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\}$ و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۴- در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی می‌باشد.

ت) تابع $f(x)=\cot x$

با توجه به جدول مقادیر زیر، نمودار $f(x)=\cot x$ را در بازه‌ی $(۰,\pi)$ می‌توان رسم کرد:

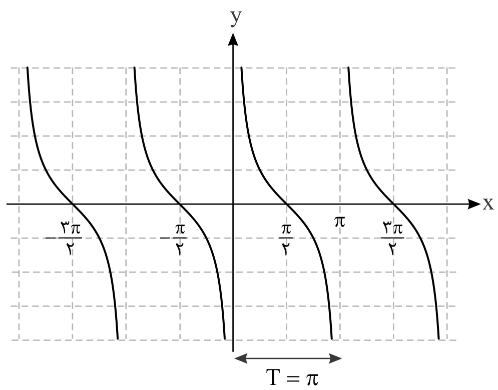
x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
cot x	$+\infty$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$	$-\infty$
تغییرات کتانژانت		↘	↘	↘	↘	↘		



تابع $f(x)=\cot x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است، زیرا:

$$\cot(x+\pi)=\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=\frac{-\cos x}{-\sin x}=\cot x$$

پس می‌توان نمودار آن را روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر رسم کرد:



ویژگی‌های تابع کتانژانت

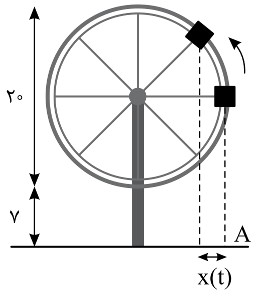
تابع $f(x)=\cot x$:

۱- تابعی فرد است.

۲- تابعی متناوب بوده، پس یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۳- دامنه‌ی آن $\mathbb{R}-\{x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

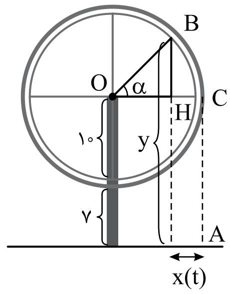
۴- تابع در بازه‌ی $(۰,\pi)$ اکیداً نزولی است.



● **مسأله** **فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ متر داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد و پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد. کابین خاصی از چرخ و فلک را درنظر بگیرید که در لحظه‌ی $t=\circ$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا حرکت می‌کند.**

الف) تابعی که ارتفاع کابین (بر حسب متر) را نسبت به زمان (بر حسب ثانیه) نشان می‌دهد، بنویسید.

ب) اگر در لحظه‌ی t، فاصله‌ی سایه‌ی این کابین روی زمین تا نقطه‌ی A را با $x(t)$ نشان دهیم، این تابع را به‌دست آورید. (کتاب درسی صفحه‌ی ۱۰۴)



راه‌حل: **الف)** چون چرخ و فلک هر دو دقیقه (۱۲۰ ثانیه) یک دور می‌چرخد، می‌توان α را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{۱۲۰}{t}=\frac{۲\pi}{\alpha}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi t}{۶۰}$$

و برای این که فاصله‌ی کابین تا زمین را به‌دست آوریم، می‌توان نوشت:

$$y=۱۷+BH\xrightarrow{BH=۱۰\sin\alpha} y=۱۷+۱۰\sin\alpha\Rightarrow y=۱۷+۱۰\sin(\frac{\pi t}{۶۰})$$

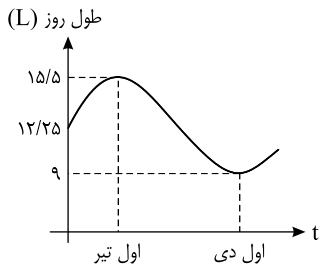
ب) با توجه به شکل $x(t)=CH$، $CH=OC-OH$ و $OH=۱۰\cos\alpha$. پس داریم:

$$x(t)=OC-OH=۱۰-۱۰\cos\alpha=۱۰(۱-\cos(\frac{\pi t}{۶۰}))$$

● **مسأله** **می‌دانیم که تغییرات طول روز در هر سال، مشابه سال قبل تکرار می‌شود. اگر از اول فروردین طول هر روز را یادداشت کنیم، این مقدارها تا اول تابستان در حال افزایش هستند. بعد از اولین روز تابستان طول روزها کاهش می‌یابند تا به اول زمستان برسیم و مجدداً بعد از روز اول زمستان طول روزها افزایش می‌یابند. با توجه به این اطلاعات، جدولی مطابق زیر تهیه شده است:**

روز	اول فروردین	...	اول تیر	...	اول دی	...
طول روز (ساعت)	۱۲/۲۵	↗	۱۵/۵	↘	۹	↗

با توجه به این که این یک حرکت تناوبی است، می‌توانیم با یک تابع مثلثاتی طول روزها را بیان کنیم. با توجه به اطلاعات جدول فوق، نموداری برای این مسأله به صورت مقابل رسم شده است:



نمودار رسم شده به نمودار تابع سینوسی نزدیک بوده و می‌توان برای آن ضابطه‌ای به صورت $L(t)=A\sin(Bt)+C$ درنظر گرفت. با یافتن A ، B و C ضابطه‌ی نمودار را تعیین کنید. (کتاب درسی صفحه‌ی ۱۰۵)

راه‌حل: در رابطه‌ی بالا، t را مساوی با صفر قرار می‌دهیم، $L(\circ)=A\sin B(\circ)+C$ و $L(\circ)=C$، $t=\circ$ مطابق با اول فروردین بوده و طول روز در اول فروردین ۱۲/۲۵ بوده است، پس $C=۱۲/۲۵$. از آن‌جایی که بیش‌ترین مقدار تابع $L(t)$ زمانی رخ می‌دهد که $\sin(Bt)=۱$ پس $\max L(t)=A(۱)+C$ و بیش‌ترین طول روز مطابق جدول فوق ۱۵/۵ می‌باشد، پس $A+C=۱۵/۵$ و همچنین کم‌ترین مقدار تابع $L(t)$ زمانی رخ می‌دهد که $\sin(Bt)=-۱$. پس $\min L(t)=A(-۱)+C$ و طبق جدول فوق کم‌ترین طول روز ۹ ساعت است و خواهیم داشت $-A+C=۹$. با حل دستگاه $\begin{cases}A+C=۱۵/۵\\-A+C=۹\end{cases}$ نتیجه می‌گیریم:

$$A=\frac{\overset{\max}{۱۵/۵}-\overset{\min}{۹}}{۲}=۳/۲۵\quad,\quad C=\frac{\overset{\max}{۱۵/۵}+\overset{\min}{۹}}{۲}=۱۲/۲۵$$ (قبلاً C را از روش دیگری به‌دست آورده بودیم)

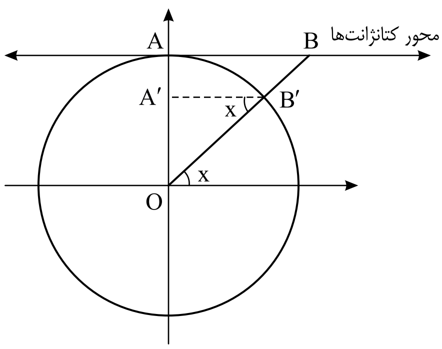
می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع فوق $T=\frac{۲\pi}{B}$ می‌باشد و از آن‌جایی که $T=۳۶۵$، پس:

$$۳۶۵=\frac{۲\pi}{B}\Rightarrow B=\frac{۲\pi}{۳۶۵}=\frac{۲\times۳/۱۴}{۳۶۵}\simeq\circ/\circ۲$$

● **مسأله** **الف) با توجه به دایره‌ی مثلثاتی و محور کتانژانت‌ها درستی تساوی** $\cot x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$ **را به‌دست آورید.**

ب) با استفاده از رسم نمودار، درستی تساوی $\cot x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$ **را بررسی کنید.** (کتاب درسی صفحه‌ی ۱۰۹)

راه‌حل: **الف)** با توجه به دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم بنویسیم:



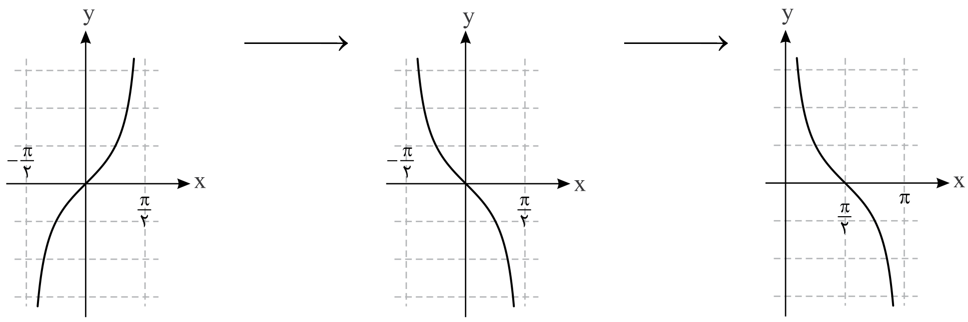
$$\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OA'B'}\Rightarrow\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}\xrightarrow[OA'=\sin x]{A'B'=\cos x}\frac{\cos x}{AB}=\frac{\sin x}{۱}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

از طرفی $A'\hat{O}B'=\frac{\pi}{۲}-x$ و در مثلث OAB داریم:

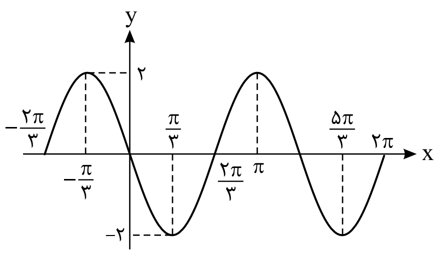
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-x)=\frac{AB}{\underbrace{OA}_{۱}}\xrightarrow{AB=\cot x}\tan(\frac{\pi}{۲}-x)=\cot x$$

ب) برای رسم نمودار $\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$، ابتدا نمودار $\tan x$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ به سمت راست منتقل می‌کنیم، مشخص است که نمودار $\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$ همان نمودار $\cot x$ در بازه‌ی $(۰,\pi)$ می‌باشد.

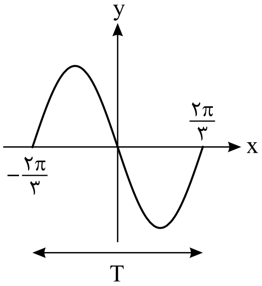


$y=\tan x$ $\quad$ $y=\tan(-x)$ $\quad$ $y=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)=\cot x$

● **مسأله** **با توجه به نمودار مقابل که متعلق به تابع** $f(x)=a\sin b(x+c)$ **می‌باشد، مقادیر مثبت a ، b و c را تعیین کنید.**



راه‌حل: با توجه به max و min تابع مشخص می‌شود که $a=۲$. نمودار سینوسی را از $-\frac{۲\pi}{۳}$ تا $\frac{۲\pi}{۳}$ درنظر می‌گیریم.



پس $T=\frac{۲\pi}{۳}-(-\frac{۲\pi}{۳})$، می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع سینوسی $T=\frac{۲\pi}{b}$ است، پس داریم:

$$\frac{۲\pi}{b}=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

و از آن‌جایی که نمودار فوق، نمودار سینوسی بوده که $\frac{۲\pi}{۳}$ به چپ منتقل شده است، پس $c=+\frac{۲\pi}{۳}$ و معادله‌ی تابع به صورت $f(x)=۲\sin\frac{۳}{۲}(x+\frac{۲\pi}{۳})$ است.

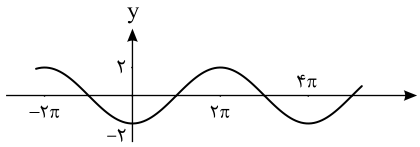
تمرین‌های تکمیلی

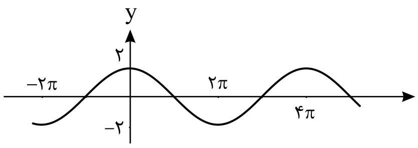
۱- **در مسائل ۱ تا ۵ زیر، ضابطه‌های توابعی مشخص شده است. هر یک از ضابطه‌ها را به یکی از نمودارهای (الف) تا (ث) نسبت دهید.**

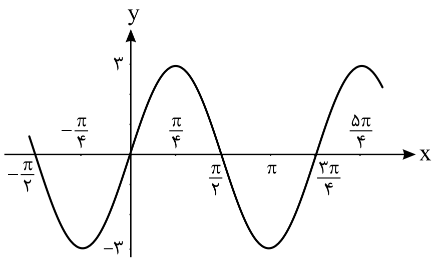
۱) $y=۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)$ **۲)** $y=-۲\cos(\frac{۱}{۲}x)$

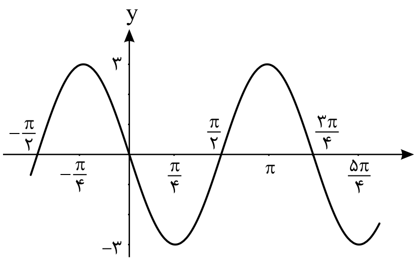
۳) $y=۲\cos(\frac{۱}{۲}x)$ **۴)** $y=-۳\sin(۲x)$

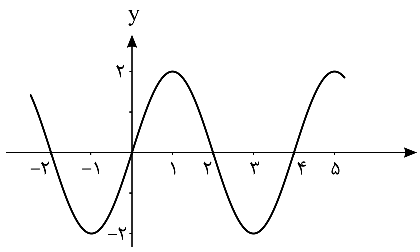
۵) $y=۳\sin ۲x$

الف)


ب)


پ)


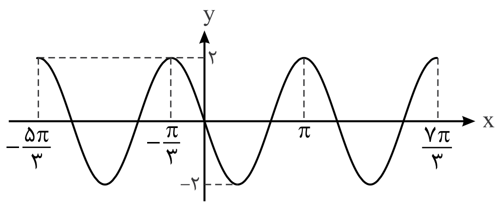
ت)


ث)


۲- **درستی رابطه‌ی** $\sin x=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$ **را با رسم نمودارهای آن‌ها نشان دهید.**

۳- **به کمک رسم، تساوی** $\cos(x-\pi)=-\cos x$ **را بررسی کنید.**

۴- **اگر نمودار زیر دارای ضابطه‌ای به صورت** $f(x)=a\cos b(x+c)$ **باشد،** b, a **و** c **را تعیین کنید.**



۵- **مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:**

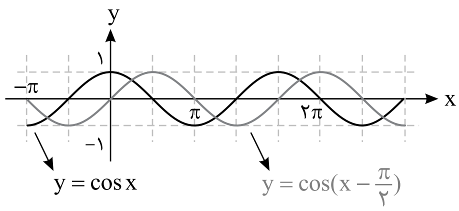
الف) $y=۳\tan x$ **ب)** $y=۴\cot x$ **پ)** $y=\tan(\frac{\pi}{۲}x)$ **ت)** $y=\cot(\frac{۱}{۴}x)$

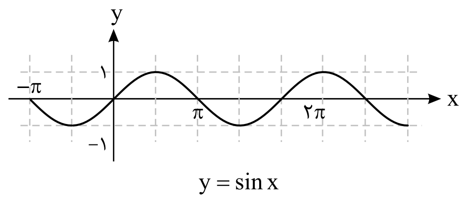
۶- **با رسم نمودار، درستی رابطه‌ی** $\tan x=-\cot(x+\frac{\pi}{۲})$ **را نشان دهید.**

پاسخ تمرین‌های تکمیلی

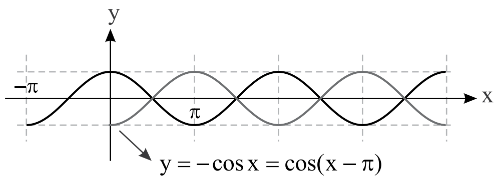
پاسخ ۱ ۱) ث ۲) الف ۳) ب ۴) ت ۵) پ

پاسخ ۲ ابتدا نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و سپس به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ به سمت راست منتقل می‌کنیم. نمودار به‌دست آمده نمودار $y=\sin x$ می‌باشد:

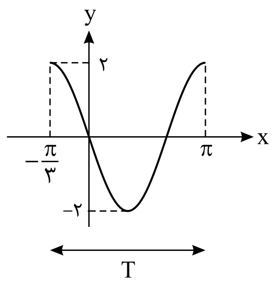




پاسخ ۳ نمودار $\cos x$ را به اندازه‌ی π به سمت راست منتقل می‌کنیم:



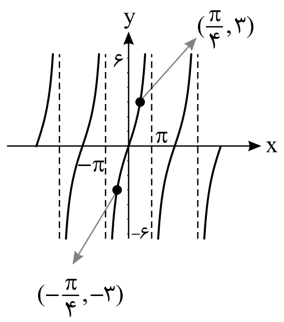
پاسخ ۴ با توجه به max و min تابع می‌توان نتیجه گرفت $a=۲$. نمودار کسینوسی را از $-\frac{\pi}{۳}$ تا π درنظر می‌گیریم:



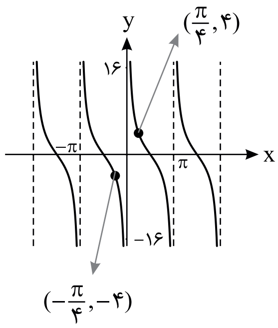
داریم: $T=\pi-(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۴\pi}{۳} \quad , \quad T=\frac{۲\pi}{b} \Rightarrow \frac{۲\pi}{b}=\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$

نمودار این‌گونه نشان می‌دهد که نمودار $\cos x$ به اندازه‌ی $-\frac{\pi}{۳}$ به چپ منتقل شده است، پس $c=-(-\frac{\pi}{۳})=\frac{\pi}{۳}$ و ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=۲\cos\frac{۳}{۲}(x+\frac{\pi}{۳})$ می‌باشد.

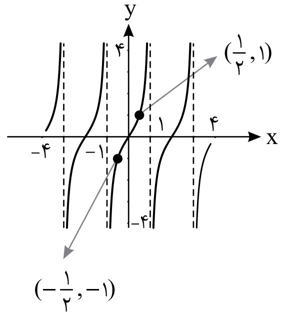
پاسخ ۵ **الف)** نمودار $y=\tan x$ را با ضریب ۳ به صورت عمودی می‌کشیم:



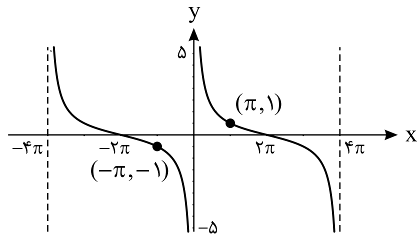
ب) نمودار $y=\cot x$ را با ضریب ۴ به صورت عمودی می‌کشیم:



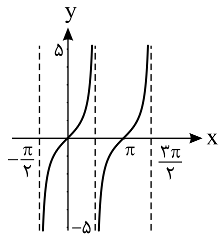
پ) نمودار $y=\tan x$ را با ضریب $\frac{۲}{\pi}=\frac{۱}{\frac{\pi}{۲}}$ به صورت افقی فشرده می‌کنیم:



ت) نمودار $y=\cot x$ را با ضریب $۴=\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}$ به صورت افقی منبسط می‌کنیم:



پاسخ ۶ نمودار $\cot x$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس $\frac{\pi}{۲}$ به چپ انتقال می‌دهیم:



پاسخ ۷

$$\cos ۱۶۵^\circ=\cos(۱۲۰^\circ+۴۵^\circ)=\cos ۱۲۰^\circ \cos ۴۵^\circ-\sin ۱۲۰^\circ \sin ۴۵^\circ=-\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{۱}{۴}(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$$

پاسخ ۸

$$\tan\frac{۷\pi}{۱۲}=\tan(\frac{۴\pi}{۱۲}+\frac{۳\pi}{۱۲})=\tan(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\frac{\pi}{۳}+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan\frac{\pi}{۳}\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{(۱+\sqrt{۳})^۲}{۱-۳}=\frac{۱+۳+۲\sqrt{۳}}{-۲}=\frac{۲(۲+\sqrt{۳})}{-۲}=-۲-\sqrt{۳}$$

پاسخ ۹ **الف)** با کمی دقت متوجه عبارت $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ می‌شویم که با $\sin(\alpha+\beta)$ برابر است و داریم:

$$\sin(۲۰^\circ+۱۰^\circ)=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

ب) با کمی دقت عبارت $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ را مشاهده می‌کنیم که با $\cos(\alpha+\beta)$ برابر است و داریم:

$$\cos(۷۰^\circ+۲۰^\circ)=\cos ۹۰^\circ=۰$$

پ) مانند قسمت (ب) این رابطه فرمول $\cos(\alpha+\beta)$ می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$\cos(\frac{۷\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲})=\cos\frac{۱۲\pi}{۱۲}=\cos\pi=-۱$$

ت) مانند قسمت (الف) این رابطه فرمول $\sin(\alpha+\beta)$ بوده و داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{۱۸}+\frac{۵\pi}{۱۸})=\sin\frac{۶\pi}{۱۸}=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ث) کسر اول، فرمول $\tan(\alpha-\beta)$ و کسر دوم، فرمول $\tan(\alpha+\beta)$ می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$\tan(۴۰^\circ-۱۰^\circ)\times\tan(۲۰^\circ+۲۵^\circ)=\tan ۳۰^\circ\times\tan ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پاسخ ۱۰ می‌دانیم $\tan ۱۰^\circ=\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$، پس می‌توان نوشت:

$$\sin ۲۰^\circ-\tan ۱۰^\circ\cos ۲۰^\circ=\sin ۲۰^\circ-\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}\cos ۲۰^\circ=\frac{\sin ۲۰^\circ\cos ۱۰^\circ-\sin ۱۰^\circ\cos ۲۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{\sin(۲۰^\circ-۱۰^\circ)}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\tan ۱۰^\circ$$