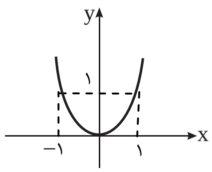
۲–۱: مفهوم و ضابطه‌ی تابع

پاسخ ۱)

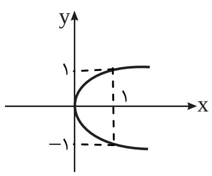
هیچ‌کدام از موارد تابع نیستند.

پاسخ ۲)

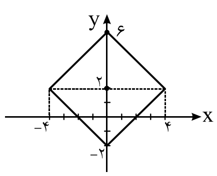
الف) تابع y بر حسب x را توصیف می‌کند.



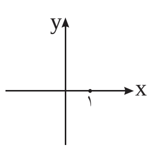
ب) y بر حسب x تابع نیست.



پ) y بر حسب x تابع نیست.



ت) تابع y بر حسب xرا توصیف می‌کند. نمودار تنها شامل نقطه‌ی $(۱,۰)$ است.



پاسخ ۳)

ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x)=(x+۱)^۲-۸$ می‌توانیم بنویسیم. حال داریم:

الف) $\dfrac{f(-۱)+f(۲)}{f(۳)}=\dfrac{۰-۸+۹-۸}{۱۶-۸}=-\dfrac{۷}{۸}$

ب) $f(\sqrt{a+b}-۱)=(\sqrt{a+b})^۲-۸=a+b-۸$

پ) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h+۱)^۲-۸-(x+۱)^۲+۸}{h}=\dfrac{(x+h+۱-x-۱)(x+h+۱+x+۱)}{h}=۲x+h+۲$

پاسخ ۴)

$$f(x+y)=\frac{a^{x+y}+a^{-(x+y)}}{۲}\quad,\quad f(x-y)=\frac{a^{x-y}+a^{y-x}}{۲}$$

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{a^x\times a^y+a^{-x}\times a^{-y}+a^x\times a^{-y}+a^y\times a^{-x}}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x+y)+f(x-y)=\frac{a^x(a^y+a^{-y})+a^{-x}(a^y+a^{-y})}{۲}=\frac{(a^y+a^{-y})(a^x+a^{-x})}{۲}$$

از طرفی داریم: $۲f(x)f(y) = ۲ \times \frac{a^x + a^{-x}}{۲} \times \frac{a^y + a^{-y}}{۲} = \frac{(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y})}{۲}$

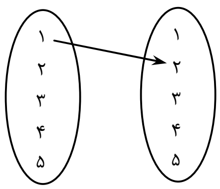
پاسخ ۵)

واضح است که $f(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۹}(a + ۳b + ۹c)$، پس کافی است مقدار $۹f(\frac{۱}{۳})$ را به‌دست آوریم. با جای‌گذاری $x = -\frac{۸}{۳}$ در رابطه‌ی $f(x + ۳)$ داریم:

$$f(\frac{۱}{۳}) = ۳(-\frac{۸}{۳})^۲ - \frac{۵۶}{۳} + ۱ = \frac{۱۱}{۳} \Rightarrow ۹f(\frac{۱}{۳}) = ۳۳$$

پاسخ ۶)

نمودار پیکانی تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که $f(۱) = ۲$، شکل روبه‌رو را داریم. حال برای هر کدام از ۴ عضو دیگر A، پیکانی که باید از آن‌ها خارج شود، ۵ حالت دارد (به هر یک از ۵ عضو مجموعه‌ی مقصد می‌تواند برود). پس روی هم $۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۴$ حالت برای تشکیل تابع وجود دارد.



پاسخ ۷)

الف) $x = ۳ \Rightarrow f(۳) + f(۳) = ۳^۲ - ۱ \Rightarrow ۲f(۳) = ۸ \Rightarrow f(۳) = ۴ \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۱ - ۴ = x^۲ - ۵$

ب) $\begin{cases} x = ۳ \Rightarrow f(۳) + f(۳) - ۳f(۱) = ۳۴ \\ x = ۱ \Rightarrow f(۱) + f(۳) - ۳f(۱) = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲f(۳) - ۳f(۱) = ۳۴ \\ -۲f(۱) + f(۳) = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = ۱۴ \\ f(۳) = ۳۸ \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = ۳x^۲ + ۷ + ۳ \times ۱۴ - ۳۸ = ۳x^۲ + ۱۱$

پ) $\frac{۲x + ۱}{x - ۲} = z \Rightarrow ۲x + ۱ = zx - ۲z \Rightarrow zx - ۲x = ۲z + ۱ \Rightarrow x = \frac{۲z + ۱}{z - ۲} \Rightarrow f(z) = \frac{(\frac{۲z + ۱}{z - ۲})^۲ + ۳}{(\frac{۲z + ۱}{z - ۲}) - ۲}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(\frac{۲x + ۱}{x - ۲})^۲ + ۳}{(\frac{۲x + ۱}{x - ۲}) - ۲}$$

ت) $x^۲ - ۳ = z \xrightarrow{x < ۰} x = -\sqrt{z + ۳} \Rightarrow f(z) = (-\sqrt{z + ۳})^۲ - ۳(-\sqrt{z + ۳}) = z + ۳ + ۳\sqrt{z + ۳}$

$\Rightarrow f(x) = x + ۳ + ۳\sqrt{x + ۳}$

پاسخ ۸)

الف) $$x \to \frac{۱}{x} \begin{cases} af(x) + bf(\frac{۱}{x}) = cx \\ af(\frac{۱}{x}) + bf(x) = \frac{c}{x} \end{cases} \xrightarrow{\times -\frac{b}{a}} \begin{cases} af(x) + bf(\frac{۱}{x}) = cx \\ -bf(\frac{۱}{x}) - \frac{b^۲}{a} f(x) = -\frac{bc}{ax} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - \frac{b^۲}{a})f(x) = cx - \frac{bc}{ax} \Rightarrow f(x) = (cx - \frac{bc}{ax}) \times \frac{a}{a^۲ - b^۲} = \frac{c(ax^۲ - b)}{x(a^۲ - b^۲)}$$

ب) $$x \to -x \begin{cases} ۲f(\frac{x + ۱}{۱ - x}) + f(\frac{۱ - x}{۱ + x}) = ۳x - ۲ \\ ۲f(\frac{۱ - x}{۱ + x}) + f(\frac{x + ۱}{۱ - x}) = -۳x - ۲ \end{cases} \Rightarrow \xrightarrow{\times(-۲)} \begin{cases} ۲f(\frac{x + ۱}{۱ - x}) + f(\frac{۱ - x}{۱ + x}) = ۳x - ۲ \\ -۲f(\frac{x + ۱}{۱ - x}) - ۴f(\frac{۱ - x}{۱ + x}) = ۶x + ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۳f(\frac{۱ - x}{۱ + x}) = ۹x + ۲ \Rightarrow f(\frac{۱ - x}{۱ + x}) = -۳x - \frac{۲}{۳}$$

قرار می‌دهیم $a = \frac{1-x}{1+x}$، بنابراین $x = \frac{1-a}{1+a}$ و داریم:

$$f(a) = -3(\frac{1-a}{1+a}) - \frac{2}{3}$$

پ) $\tan x = a \Rightarrow \cot x = \frac{1}{a}$

$$a \to \frac{1}{a} \begin{cases} f(a) + 3f(\frac{1}{a}) = a - \frac{1}{a} \\ f(\frac{1}{a}) + 3f(a) = \frac{1}{a} - a \end{cases} \Rightarrow \xrightarrow{\times -3} \begin{cases} f(a) + 3f(\frac{1}{a}) = a - \frac{1}{a} \\ -9f(a) - 3f(\frac{1}{a}) = -3(-a + \frac{1}{a}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -8f(a) = 4(a - \frac{1}{a}) \Rightarrow f(a) = -\frac{1}{2}(a - \frac{1}{a}) \Rightarrow f(a) = \frac{1-a^2}{2a}$$

پس $f(x) = \frac{1-x^2}{2x}$ و این نتیجه برای $x \in (0, \infty)$ برقرار است. (زیرا $a = \tan x$ و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ پس $a \in (0, +\infty)$)

پاسخ ۹)

الف) $f(\frac{1}{x + \frac{1}{x}}) = x^4 + \frac{1}{x^4} = ((x + \frac{1}{x})^2 - 2)^2 - 2 \Rightarrow f(a) = ((\frac{1}{a})^2 - 2)^2 - 2 \Rightarrow f(a) = (\frac{1}{a})^4 + 4 - \frac{4}{a^2} - 2$

$$\Rightarrow f(a) = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{a^2} + 2$$

دقت کنید که نتیجه‌ی بالا برای $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] - \{0\}$ برقرار است. (زیرا $a = \frac{x}{x^2+1}$)

ب) اگر در عبارت $\frac{2x+29}{x-2}$ به جای x، $\frac{2x+29}{x-2}$ قرار دهیم، عبارت پس از ساده شدن به همان x تبدیل می‌شود. بنابراین با جای‌گذاری $\frac{2x+29}{x-2}$ به‌جای x در معادله به یک دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(\frac{2x+29}{x-2}) = 100x + 80 \\ 2f(\frac{2x+29}{x-2}) + 3f(x) = 100(\frac{2x+29}{x-2}) + 80 \end{cases}$$

با حل دستگاه (ضرب معادله‌ی دوم در -3 و معادله‌ی اول در ۲ و جمع طرفین) نتیجه می‌گیریم:

$$-5f(x) = -300(\frac{2x+29}{x-2}) + 200x - 80 \Rightarrow f(x) = 60(\frac{2x+29}{x-2}) - 40x + 16$$

پاسخ ۱۰)

به راحتی می‌توانید نشان بدهید $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 1$، بنابراین با دسته‌بندی عبارت مورد نظر حاصل آن برابر ۹ می‌شود. (زیرا $f(\frac{1}{10}) + f(10) = 1$، $f(\frac{1}{9}) + f(9) = 1$ و ...)

پاسخ ۱۱)

می‌توان ثابت کرد $f(x) + f(1-x) = 1$، زیرا:

$$f(x) + f(1-x) = \frac{2}{4^x + 2} + \frac{2}{4^{1-x} + 2} = \frac{2}{4^x + 2} + \frac{2 \times 4^x}{4 + 2 \times 4^x}$$

$$= \frac{2}{4^x + 2} + \frac{4^x}{2 + 4^x} = \frac{2 + 4^x}{2 + 4^x} = 1$$

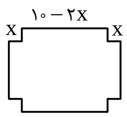
به این ترتیب عبارت مورد نظر را می‌توانیم دسته‌بندی کنیم:

$$\underbrace{f(\frac{1}{100}) + f(\frac{99}{100})}_{1} + \underbrace{f(\frac{2}{100}) + f(\frac{98}{100})}_{1} + \dots + \underbrace{f(\frac{49}{100}) + f(\frac{51}{100})}_{1} + f(\frac{50}{100}) + f(\frac{100}{100})$$

$$= ۴۹ + f(\frac{۱}{۲}) + f(۱) = ۴۹ + \frac{۲}{۲+۲} + \frac{۲}{۴+۲} = \frac{۲۹۹}{۶}$$

پاسخ ۱۲)

جعبه‌ای با کف مربع‌شکل به ضلع $(۱۰ - ۲x)$ و با ارتفاع x درست می‌شود. بنابراین:



$$V = (۱۰ - ۲x)^۲ \times x = (۱۰۰ + ۴x^۲ - ۴۰x) \times x = ۴x^۳ - ۴۰x^۲ + ۱۰۰x$$

پاسخ ۱۳)

طول مستطیل را x، محیط آن را P و مساحت آن را S می‌نامیم. داریم:

$$P = ۲(x+۳) \Rightarrow x = \frac{P}{۲} - ۳$$

$$S = ۳x \Rightarrow S = ۳(\frac{P}{۲} - ۳)$$

به این ترتیب با رابطه‌ی $S = \frac{۳}{۲}P - ۹$، S به‌صورت تابعی برحسب P بیان شده است.

پاسخ ۱۴)

شعاع کره را با R، مساحت رویه‌ی آن را با S و حجم آن را با V نشان می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} S = ۴\pi R^۲ \\ V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \end{cases}$$

برای آن‌که S را به‌صورت تابعی از V نشان دهیم، باید R را بر حسب V پیدا کنیم و در معادله‌ی اول جای‌گذاری کنیم:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow R = (\frac{۳V}{۴\pi})^{\frac{۱}{۳}} \xrightarrow{S=۴\pi R^۲} S = ۴\pi(\frac{۳V}{۴\pi})^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow S = \sqrt[۳]{۳۶\pi V^۲}$$

پاسخ ۱۵)

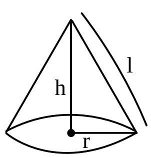
ارتفاع استوانه را h و شعاع قاعده‌ی آن را r می‌نامیم. داریم:

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^۲ h = ۳۶\pi \Rightarrow r^۲ = \frac{۳۶}{h} \Rightarrow r = \frac{۶}{\sqrt{h}}$$

$$\text{مساحت جانبی} = ۲\pi r h = ۲\pi \times \frac{۶}{\sqrt{h}} \times h = ۱۲\pi\sqrt{h}$$

پاسخ ۱۶)

مساحت قاعده را S، ارتفاع مخروط را h و شعاع قاعده را r در نظر می‌گیریم. داریم:



$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = ۲۴\pi \Rightarrow r^۲ h = ۷۲ \Rightarrow r^۲ = \frac{۷۲}{h} \Rightarrow \quad S = \pi r^۲ = \pi \times \frac{۷۲}{h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{۷۲\pi}{S} \ , \ \frac{۷۲}{h} = \frac{S}{\pi}$$

$$l^۲ = h^۲ + r^۲ = h^۲ + \frac{۷۲}{h} \Rightarrow l = \sqrt{h^۲ + \frac{۷۲}{h}} \Rightarrow l = \sqrt{(\frac{۷۲\pi}{S})^۲ + \frac{S}{\pi}}$$

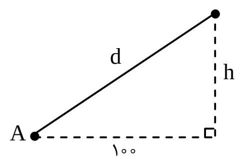
پاسخ ۱۷)

الف) قیمت نشریه پس از افزایش n واحد ۲۵۰ تومانی برابر $۱۰۰۰۰ + ۲۵۰n$ و تعداد مشترکان $۵۰۰ - ۲n$ است، بنابراین درآمد نشریه برابر است با:

$$f(n) = (۱۰۰۰۰ + ۲۵۰n)(۵۰۰ - ۲n) = -۵۰۰n^۲ + ۱۰۵۰۰۰n + ۵ \times ۱۰^۶$$

ب) به ازای $n = \frac{۱۰۵۰۰۰}{۲ \times ۵۰۰}$، یعنی $n = ۱۰۵$ بیش‌ترین سود را به‌دست می‌آوریم (ماکزیمم عبارت درجه‌ی ۲). در این‌صورت قیمت نشریه برابر ۳۶۲۵۰ تومان می‌شود!

پاسخ ۱۸)

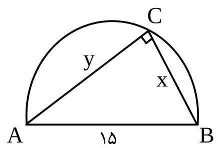


اگر فاصله‌ی بالن با زمین را h نشان بدهیم و در لحظه‌ی $t = ۰$ (زمان ۱ بعدازظهر) فرض کنیم $h = ۰$، پس از گذشت t ثانیه داریم: $h = ۲t$

حال طبق قضیه‌ی فیثاغورث می‌توانیم بنویسیم:

$$d = \sqrt{۱۰۰^۲ + h^۲} = \sqrt{۱۰۰^۲ + (۲t)^۲} \Rightarrow d = ۲\sqrt{۲۵۰۰ + t^۲}$$

پاسخ ۱۹)



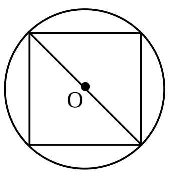
طول ضلع AC را y می‌گیریم. طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۱۵^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۲۲۵ - x^۲}$$

بنابراین: $S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}x\sqrt{۲۲۵ - x^۲}$

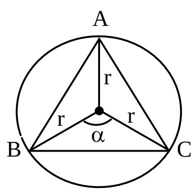
پاسخ ۲۰)

الف) قطر دایره و قطر مربع یکسان‌اند، بنابراین قطر مربع $۲r$ می‌شود و مساحت آن:



$$S = \frac{۲r \times ۲r}{۲} = ۲r^۲$$

ب) با توجه به شکل، مثلث را به سه مثلث کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم که زاویه‌ی رأس هر کدام $\alpha = ۱۲۰^\circ$ است.



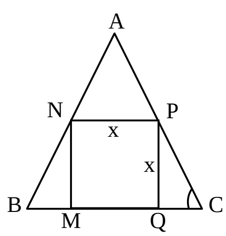
مساحت هر کدام $\frac{۱}{۲}r \times r \times \sin ۱۲۰^\circ$ (یا همان $\frac{\sqrt{۳}}{۴}r^۲$) می‌شود، بنابراین:

$$S(r) = ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}r^۲ \Rightarrow S(۴) = ۱۲\sqrt{۳}$$

پاسخ ۲۱)

با توجه به شکل روبه‌رو، مثلث ANP متساوی‌الاضلاع و مثلث PQC، قائم‌الزاویه با $\hat{C} = ۶۰^\circ$ است. بنابراین $AP = x$ و $PC = \frac{۲x}{\sqrt{۳}}$.

حال داریم:



$$AP + PC = a \Rightarrow x + \frac{۲x}{\sqrt{۳}} = a \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{۳}}{۲ + \sqrt{۳}}$$

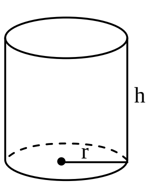
از طرفی اگر h ارتفاع مثلث ABC باشد، داریم $h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$، بنابراین:

$$a\sqrt{۳} = ۲h \Rightarrow x = \frac{۲h}{۲ + \sqrt{۳}} \Rightarrow x = ۲h(۲ - \sqrt{۳})$$

به این ترتیب x به صورت تابعی از h بیان شده است.

پاسخ ۲۲)

شعاع قاعده را r و ارتفاع را h می‌گیریم. با توجه به حجم مخزن داریم:



$$\pi r^۲ h = ۲۴\pi \Rightarrow h = \frac{۲۴}{r^۲}$$

سطح جانبی استوانه برابر است با $۲\pi rh$ و سطح قاعده‌ی آن $\pi r^۲$، بنابراین هزینه‌ی آلیاژ برابر است با:

$$C = ۵۰۰ \times \pi r^۲ + ۳۰۰ \times ۲\pi rh \xrightarrow{h = \frac{۲۴}{r^۲}} C(r) = ۵۰۰\pi r^۲ + \frac{۱۴۴۰۰\pi}{r}$$

پاسخ ۲۳)

الف) مقطع ناودان مستطیلی به عرض x و طول $۳۶ - ۲x$ است، پس سطح مقطع آن برابر است با:

$$S(x) = x(۳۶ - ۲x) \Rightarrow S(x) = -۲x^۲ + ۳۶x$$

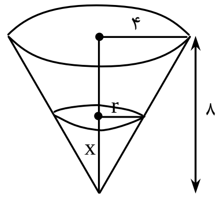
ب) به ازای $x = \frac{۳۶}{۴}$ (یا همان $x = ۹$ سانتی‌متر) بیش‌ترین مقدار S به‌دست می‌آید (ماکزیمم عبارت درجه‌ی ۲). بنـابراین مقـدار آب گذرنـده از ناودان نیز ماکزیمم می‌شود.

پاسخ ۲۴)

می‌دانیم همواره مجموع حجم آب داخل فنجان و قیف روی هم ۵۰ سانتی‌متر مکعب است، بنابراین:

$$\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}x + \pi \times ۴^{۲} \times y = ۵۰$$

باید r، یعنی شعاع قاعده‌ی آب درون قیف را بر حسب x بیان کنیم تا به رابطه‌ای برسیم که فقط x و y داشته باشد. با توجه به شکل مقابـل و با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{r}{۴} = \frac{x}{۸} \Rightarrow r = \frac{x}{۲}$$

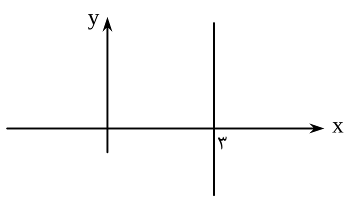
حال با جای‌گذاری نتیجه‌ی بالا در تساوی اول به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۱۲}\pi x^{۳} + ۱۶\pi y = ۵۰ \Rightarrow y = \frac{۵۰}{۱۶\pi} - \frac{۱}{۱۹۲}x^{۳}$$

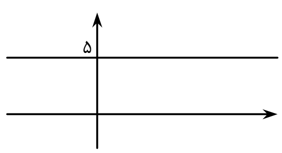
به این ترتیب y به‌صورت تابعی از x بیان شده است.

پاسخ ۲۵)

الف) نمودار رابطه را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، این رابطه تابع نیست.



ب) با توجه به نمودار مشخص است که با یک تابع مواجه‌ایم.



پ) از رابطه نتیجه می‌گیریم $x^{۲} + y^{۶} = -۱$. به‌وضوح این رابطه برای هیچ مقدار حقیقی x و y برقرار نیست. پس رابطه تهی اسـت، بنـابراین تابع است.

ت) رابطه را می‌توانیم به‌صورت $|y-۱| + (x-۲)^{۲} = ۰$ بنویسیم. چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است، پس $y = ۱$ و $x = ۲$، در نتیجه رابطه فقط یک عضو دارد: $(۲,۱)$، بنابراین تابع است.

ث) فرض کنید $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ در این رابطه صدق می‌کنند و $x_۱ = x_۲$، بنابراین داریم:

$$\frac{y_۱}{۱ + y_۱^{۲}} = \frac{y_۲}{۱ + y_۲^{۲}} \Rightarrow y_۲ + y_۱^{۲}y_۲ = y_۱ + y_۱y_۲^{۲} \Rightarrow y_۱^{۲}y_۲ - y_۱ = y_۲^{۲}y_۱ - y_۲$$

$$\Rightarrow (y_۱y_۲ - ۱)(y_۱ - y_۲) = ۰ \Rightarrow y_۱y_۲ = ۱ \quad \text{یا} \quad y_۱ = y_۲$$

پس رابطه‌ی مورد نظر، تابع نیست.

ج) با توجه به آن‌که همواره $۳\sin x \le ۳$ و $۴\cos y \le ۴$، برای آن‌که تساوی مورد نظر برقرار باشد باید $\sin x = \cos y = ۱$. بنـابراین بـه‌ازای یک x مانند $x = \frac{\pi}{۲}$ بیش‌تر از یک y (مثلاً $y = ۰$ و $y = ۲\pi$) داریم، در نتیجه این رابطه معرف یک تابع نیست.

چ) با جای‌گذاری $x = -۱$ در رابطه به‌دست می‌آوریم $y = \pm ۱$، پس این رابطه معرف یک تابع نیست.

ح) با توجه به حضور رادیکال باید $-\cos^{۲} x \ge ۰$، در نتیجه $\cos^{۲} x = ۰$. در این صورت داریم $y^{۲} = ۱$، بنابراین $y = \pm ۱$. پس مـثلاً بـه‌ازای $x = \frac{\pi}{۲}$ داریم $y = \pm ۱$، بنابراین رابطه‌ی مورد نظر، تابع نیست.

خ) دو زوج مرتب (x,y_1) و (x,y_2) را در رابطه در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x^5 + y_1^5 = 1 \\ x^5 + y_2^5 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_1^5 - y_2^5 = 0 \Rightarrow y_1^5 = y_2^5 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \text{تابع است}$$

د) دو زوج مرتب (x,y_1) و (x,y_2) را در رابطه درنظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x = y_1^3 + y_1 + 2 \\ x = y_2^3 + y_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow (y_1^3 - y_2^3) + (y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow (y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + 1) = 0$$

چون عبارت داخل پرانتز بزرگ‌تر به‌صورت $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + 1$ قابل نوشتن است، پس همواره بزرگ‌تر از صفر است، بنابراین $y_1 - y_2 = 0$، در نتیجه $y_1 = y_2$، پس با یک تابع مواجه‌ایم.

ذ) به ازای $x = 1$ در رابطه‌ی مورد نظر داریم:

$$-3y + y^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین رابطه‌ی مورد نظر، تابع نیست.

پاسخ ۲۶)

الف) $2(xy-1)^2 + (x+2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

ب) $\frac{x}{y} + \frac{4y}{x} = 4 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy = 0 \Rightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

۲–۲: دامنه‌ی توابع حقیقی

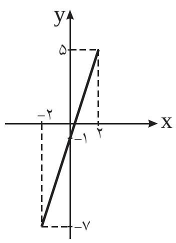
پاسخ ۱)

الف) $D = [-7,3)$

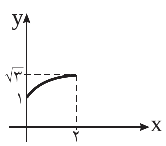
ب) $D = (-3,2) \bigcup (2,5]$

پاسخ ۲)

الف) $D_f = [-2,2]$



ب) $D_f = [0,2]$



پاسخ ۳)

$$y = f(x-3) \Rightarrow -2 \le x-3 \le 5 \Rightarrow 1 \le x \le 8 \Rightarrow D_y = [1,8]$$

$$y = 3 + f(x+2) \Rightarrow -2 \le x+2 \le 5 \Rightarrow -4 \le x \le 3 \Rightarrow D_y = [-4,3]$$

$$y = |f(x+1)| \Rightarrow -2 \le x+1 \le 5 \Rightarrow -3 \le x \le 4 \Rightarrow D_y = [-3,4]$$

پاسخ ۴)

الف) $2x^3 - x + 1 \neq 0 \Rightarrow (x+1)(2x^2 - 2x + 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

ب) $x - 2 \neq 0 \ , \ x \neq 0 \ , \ x^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 2\}$

پ) $||x| - 2| - 1 \neq 0 \Rightarrow |x| - 2 \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \pm 3, \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm 3\}$

پاسخ ۵)

الف) $-x^2 + 2x + 3 \ge 0 \Rightarrow -1 \le x \le 3 \Rightarrow D_f = [-1,3]$

ب) $\dfrac{-x^2 - 3x - 4}{-x^2 + 2x + 3} \ge 0 \xrightarrow{\text{همواره منفی } -x^2-3x-4} -x^2 + 2x + 3 < 0 \Rightarrow (x < -1) \text{ یا } (x > 3) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-1,3]$

پ) $-x^4 + 5x^3 - 6x^2 \ge 0 \Rightarrow -x^2(x^2 - 5x + 6) \ge 0 \xrightarrow{-x^2 \le 0} x^2 - 5x + 6 \le 0 \Rightarrow (2 \le x \le 3)$

ت) $\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ 2 - \sqrt{x+1} \ge 0 \\ 3 - \sqrt{2 - \sqrt{x+1}} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x + 1 \le 4 \\ 2 - \sqrt{x+1} \le 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \le 3 \\ \sqrt{x+1} \ge -7 \ \text{همواره برقرار است} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 \le x \le 3$

ث) $||x+1| - 3| - 2 \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} |x+1| - 3 \ge 2 \\ |x+1| - 3 \le -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+1| \ge 5 \\ |x+1| \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \le -5 \ \text{یا} \ x + 1 \ge 5 \\ -1 \le x + 1 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -6 \ \text{یا} \ x \ge 4 \\ -2 \le x \le 0 \end{cases}$

پاسخ نهایی اجتماع دو محدوده‌ی بالا است، پس $D_f=(-\infty,-۶]\cup[-۲,۰]\cup[۴,+\infty)$.

ج) $\frac{x^۲-|x|-۲}{|x|-۳}\ge ۰, |x|\ne ۳ \Rightarrow \frac{(|x|-۲)(|x|+۱)}{|x|-۳}\ge ۰, x\ne\pm ۳ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{|x|+۱} \frac{|x|-۲}{|x|-۳}\ge ۰, x\ne \pm ۳ \Rightarrow |x|>۳$ یا $|x|\le ۲$

بنابراین $D_f=(-\infty,-۳)\cup[-۲,۲]\cup(۳,+\infty)$.

پاسخ ۶)

به دلیل حضور $\sqrt{f(x)}$ در مخرج کسر باید $f(x)>۰$. با توجه به نمودار این امر به ازای $x\in(-۱,۳)$ رخ می‌دهد. از طرفی به دلیل حضور $g(x)$ و این‌که $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، نتیجه می‌گیریم $-۲\le x\le ۲$، اشتراک این دو شرط به دامنه‌ی h منجر می‌شود: $D_h=(-۱,۲]$

پاسخ ۷)

الف) $\cos x-۱\ne ۰\Rightarrow \cos x\ne ۱\Rightarrow x\ne ۲k\pi$

ب) $۲\sin x+۱\ne ۰\Rightarrow \sin x\ne -\frac{۱}{۲}\Rightarrow x\ne ۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\ ,\ x\ne ۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}$

پ) $\begin{cases}\sin x+۲\ne ۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}\\ \cos x\ne ۰\Rightarrow x\ne k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\ne k\pi+\frac{\pi}{۲}$

ت) $\sin x,\cos x\ne ۰\Rightarrow x\ne k\frac{\pi}{۲}$

ث) $\begin{cases}\cos x\ne -\sqrt{۳}<-۱\Rightarrow x\in\mathbb{R}\\ \cos x\ne ۰\Rightarrow x\ne k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\ne k\pi+\frac{\pi}{۲}$

ج) $۲\sin x-\sqrt{۳}\ge ۰\Rightarrow \sin x\ge\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$$\xrightarrow{-۲\pi\le x\le ۴\pi} x\in[-۲\pi+\frac{\pi}{۳},-۲\pi+\frac{۲\pi}{۳}]\cup[\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}]\cup[۲\pi+\frac{\pi}{۳},۲\pi+\frac{۲\pi}{۳}]$$

پاسخ ۸)

الف) $x^۲-۳>۰\Rightarrow x>\sqrt{۳}$ یا $x<-\sqrt{۳}$

ب) $۴-x^۲>۰\ ,\ \log_۲(۴-x^۲)>۰\Rightarrow ۴-x^۲>۱\Rightarrow -\sqrt{۳}<x<\sqrt{۳}$

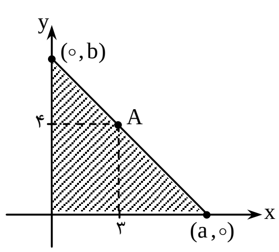
پ) $\frac{۴x-۱}{۲x+۴}>۰\ ,\ \log(\frac{۴x-۱}{۲x+۴})\ge ۰\ ,\ \frac{۴x-۱}{۲x+۴}\ge ۱\Rightarrow\frac{۲x-۵}{۲x+۴}\ge ۰\Rightarrow x<-۲$ یا $x\ge\frac{۵}{۲}$

ت) $\sin x-۱>۰\Rightarrow \sin x>۱\xrightarrow{\text{همواره } \sin x\le ۱} D_f=\varnothing$

ث) $\log_{x-۱}(x^۲-۱)\ge ۰\ ,\ x^۲-۱>۰\ ,\ x-۱>۰\ ,\ x-۱\ne ۱\Rightarrow \log_{x-۱}(x^۲-۱)\ge ۰\ ,\ x>۱\ ,\ x\ne ۲$

$\begin{cases}\text{اگر } ۰<x-۱<۱: x^۲-۱\le ۱\Rightarrow -\sqrt{۲}\le x\le\sqrt{۲}\xrightarrow{۱<x<۲}۱<x\le\sqrt{۲}\\ \text{اگر } x-۱>۱: x^۲-۱\ge ۱\Rightarrow x\ge\sqrt{۲}\text{ یا } x\le-\sqrt{۲}\xrightarrow{x>۲}x>۲\end{cases}\Rightarrow D_f=(۱,\sqrt{۲}]\cup(۲,+\infty)$

پاسخ ۹)



الف) نقطه‌ی برخورد خط با محور yها را $(۰,b)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین $S=\frac{۱}{۲}ab$، حال کافی است b را بر حسب a بیابیم تا مساحت زیر نمودار بر حسب a بیان شود. معادله‌ی خط عبارت است از:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$

و چون این خط از نقطه‌ی $A(۳,۴)$ می‌گذرد، نتیجه می‌گیریم:

$\frac{۳}{a}+\frac{۴}{b}=۱\Rightarrow\frac{۴}{b}=۱-\frac{۳}{a}\Rightarrow b=\frac{۴a}{a-۳}$

بنابراین: $S=\frac{۲a^۲}{a-۳}$

ب) از ضابطه‌ی تابع ظاهراً نتیجه می‌گیریم که دامنه $\mathbb{R}-\{۳\}$ است، ولی به این دقت کنید که محل برخورد خط با محور xها نمی‌تواند طولی کم‌تر از ۳ داشته باشد، بنابراین $a > ۳$، در نتیجه دامنه‌ی تابع $(۳,+\infty)$ می‌شود. این نتیجه را با توجه به این نکته نیز می‌توانید به‌دست آورید که باید $S > ۰$ (زیرا مساحت مثلث نمی‌تواند عددی منفی یا صفر باشد).

پاسخ ۱۰)

الف) مخرج کسر ضابطه‌ی تابع f، یعنی $x^۲ - x + ۱$ همیشه مثبت است، بنابراین دامنه‌ی هر دو تابع $\mathbb{R}$ است. از طرفی به‌دلیل اتحاد $(x+۱)(x^۲-x+۱) = x^۳+۱$ هر دو رابطه یکسان‌اند، بنابراین دو تابع مساوی هستند.

ب) ریشه‌ی مخرج تابع $f(x)$، $x = ۲$ است، بنابراین دامنه‌های این دو تابع فرق می‌کند. بنابراین این دو تابع مساوی نیستند.

پ) دامنه‌ی هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است. از طرفی به‌ازای $x \neq ۰$ داریم:

$$f(x) = \frac{x(x-۳)}{x} = x - ۳ = g(x)$$

به ازای $x = ۰$ نیز داریم $f(۰) = -۳ = g(۰)$، بنابراین دو تابع با هم برابرند.

ت) دامنه‌ی هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است و همواره $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$، بنابراین دو تابع برابرند.

ث) چون دقیقاً می‌توان به جای $\tan x$، $\frac{\sin x}{\cos x}$ قرار داد، بنابراین دو تابع با دامنه‌ی یکسان با هم مساویند.

ج) چون $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، پس $f(x) = \sin x$. ولی دامنه‌ی تابع f شامل xهایی نیست که به‌ازای آن‌ها $\cos x = ۰$، بنابراین $D_f \neq \mathbb{R}$، ولی $D_g = \mathbb{R}$. در نتیجه دو تابع نابرابرند.

چ) دامنه‌ی دو تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = \log x^۲ \Rightarrow x^۲ > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{۰\} \\ g(x) = ۲\log x \Rightarrow x > ۰ \end{cases}$$

چون دامنه‌ی $f(x)$ و $g(x)$ برابر نمی‌باشد پس دو تابع با هم برابر نیستند.

ح) دامنه‌ی هر دو تابع بازه‌ی $[۰,۲]$ است. به‌ازای $x \in [۰,۲]$ نیز به‌وضوح $f(x) = g(x)$. پس دو تابع با هم برابرند.

خ) با توجه به آن‌که $x^۲ - ۲x + ۱ = (x-۱)^۲$، داریم $g(x) = |x-۱|$. بنابراین دو تابع برابرند.

پاسخ ۱۱)

الف) با توجه به قوانین لگاریتم، ضابطه‌ی دو تابع یکسان است. پس باید اشتراک دامنه‌های آن دو را پیدا کنیم.

$$f(x) = \log(\frac{۱+x}{۱-x}) \Rightarrow \frac{۱+x}{۱-x} > ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

$$g(x) = \log(۱+x) - \log(۱-x) \Rightarrow \begin{cases} ۱+x > ۰ \Rightarrow x > -۱ \\ ۱-x > ۰ \Rightarrow x < ۱ \end{cases} \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

پس در محدوده‌ی $-۱ < x < ۱$ دو تابع برابرند.

ب) دامنه‌ی هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است. باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sin^۲ x - \cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

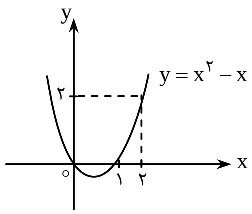
۲–۳: برد توابع حقیقی

پاسخ ۱)

الف) $R = (-۲,۵]$

ب) $R = (۰,۴]$

پاسخ ۲)



طبق نمودار داریم $R_f = [۲,+\infty)$. نمودار تابع g از انتقال تابع f به اندازه‌ی ۳ واحد به پایین به‌دست می‌آید. پس پایین‌ترین نقطه‌ی نمودار عرض ۱- می‌گیرد و در نتیجه $R_g = [-۱,+\infty)$.

برای به‌دست آوردن برد تابع h، به نمودار تابع $y = x^۲ - x$ دقت کنید. با توجه به نمودار اگر $x \geq ۲$، آن‌گاه $y \geq ۲$ می‌دانیم همواره $f(x) \geq ۲$، پس بنابر نتیجه‌ی بالا $f^۲(x) - f(x) \geq ۲$. بنابراین همواره $h(x) \geq ۲$ و برد تابع h، $[۲,+\infty)$ می‌شود.

پاسخ ۳)

الف) با توجه به نمودار تابع، در محدوده‌ی $-۱۰ \leq x \leq ۱۰$ داریم: $f(-۱۰) \leq f(x) \leq f(۱۰)$. چون $f(-۱۰) = -۱۳۰۰$ و $f(۱۰) = ۷۰۰$، پس محدوده‌ی تغییرات $f(x)$، بازه‌ی $[-۱۳۰۰,۷۰۰]$ می‌شود.

ب) با توجه به نتیجه‌ی قسمت (الف)، به ازای $x \in [-۱۰,۱۰]$ داریم:

$$f(-۱۰) \leq f(x) \leq f(۱۰) \Rightarrow \begin{cases} | f(-۱۰) - f(x) |= f(x) - f(-۱۰) \\ | f(x) - f(۱۰) |= f(۱۰) - f(x) \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = f(۱۰) - f(-۱۰) = ۲۰۰۰$$

پاسخ ۴)

الف) می‌توانیم بنویسیم $f(x) = \sqrt{(x-۱)^۲ + ۲}$، حال داریم:

$$(x-۱)^۲ \geq ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ + ۲ \geq ۲ \Rightarrow f(x) \geq \sqrt{۲}$$

ب) ابتدا محدوده‌ی تغییرات عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم:

$$y = ۳ + ۴x - x^۲ \Rightarrow y = -(x^۲ - ۴x - ۳) \Rightarrow y = -(x-۲)^۲ + ۷ \Rightarrow y \leq ۷$$

با توجه به آن‌که $f(x) = \sqrt{y} + ۲$، داریم: $۲ \leq f(x) \leq \sqrt{۷} + ۲$

پ) $f(x) = ۳ - \sqrt{۴ - x^۲}$

$$۴ - x^۲ \leq ۴ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{۴ - x^۲} \leq ۲ \Rightarrow ۱ \leq f(x) \leq ۳$$

ت) ابتدا دامنه را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = ۳ - \sqrt{۲ - \sqrt{x+۲}}$$

$$\text{شرایط}: \begin{cases} x \geq -۲ \\ ۲ - \sqrt{x+۲} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۲} \leq ۲ \Rightarrow x + ۲ \leq ۴ \Rightarrow x \leq ۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲ \leq x \leq ۲$$

$$-۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq ۲ - \sqrt{x+۲} \leq ۲ \Rightarrow -\sqrt{۲} \leq -\sqrt{۲ - \sqrt{x+۲}} \leq ۰ \Rightarrow ۳ - \sqrt{۲} \leq f(x) \leq ۳$$

ث) $y = \dfrac{x+۳}{x^۲ - x + ۱} \Rightarrow yx^۲ - yx + y = x + ۳ \Rightarrow yx^۲ - (۱+y)x + y - ۳ = ۰$

$$\xrightarrow{\Delta \geq ۰} (۱+y)^۲ - ۴y(y-۳) \geq ۰ \Rightarrow ۱ + y^۲ + ۲y - ۴y^۲ + ۱۲y \geq ۰ \Rightarrow -۳y^۲ + ۱۴y + ۱ \geq ۰$$

معادله‌ی $-۳y^۲ + ۱۴y + ۱ = ۰$ دو ریشه دارد $y_{۱,۲} = \dfrac{-۷ \pm \sqrt{۴۹+۳}}{-۳}$، پس برد تابع $[y_۱, y_۲]$ می‌شود. دقت کنید که $y = ۰$ به‌ازای $x = -۳$ تولید می‌شود، پس نباید صفر را از برد حذف کنیم.

ج) ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲ + ۲}$ می‌توانیم بنویسیم. حال داریم:

$$x^۲ + ۲ \ge ۲ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{x^۲ + ۲} \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le -\frac{۱}{x^۲ + ۲} < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le f(x) < ۱$$

چ) ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x) = ۱ + \frac{۲}{|x| - ۱}$ می‌توانیم بنویسیم. حال داریم:

$$y = ۱ + \frac{۲}{|x| - ۱} \Rightarrow \frac{y - ۱}{۲} = \frac{۱}{|x| - ۱} \Rightarrow |x| = \frac{۲}{y - ۱} + ۱ \Rightarrow |x| = \frac{y + ۱}{y - ۱}$$

$$|x| \ge ۰ \Rightarrow \frac{y + ۱}{y - ۱} \ge ۰ \Rightarrow y \le -۱ \text{ یا } y > ۱ \Rightarrow R_f = (-\infty, -۱] \cup (۱, +\infty)$$

ح) عبارت زیر رادیکال را به‌صورت $-۱ + \frac{۲}{۱ + x^۲}$ می‌توانیم بنویسیم. حال داریم:

$$۱ + x^۲ \ge ۱ \Rightarrow ۰ < \frac{۲}{۱ + x^۲} \le ۲ \Rightarrow -۱ < -۱ + \frac{۲}{۱ + x^۲} \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{-۱ + \frac{۲}{۱ + x^۲}} \le ۱ \Rightarrow R_f = [۰, ۱]$$

خ)

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^۲ + ۱}$$

$$x \ge ۰ \Rightarrow f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} = ۱ - \frac{۱}{x^۲ + ۱} \Rightarrow ۰ \le f(x) < ۱$$

$$x < ۰ \Rightarrow f(x) = \frac{-x^۲}{x^۲ + ۱} = -۱ + \frac{۱}{x^۲ + ۱} \Rightarrow -۱ < f(x) < ۰$$

بنابراین برد تابع بازه‌ی $(-۱, ۱)$ می‌شود.

د) فرض می‌کنیم $y = x - \sqrt{x^۲ - ۱}$. بنابراین $y - x = -\sqrt{x^۲ - ۱}$، پس $y - x \le ۰$ (در نتیجه $y \le x$) و داریم:

$$(y - x)^۲ = x^۲ - ۱ \Rightarrow ۲xy = y^۲ + ۱ \Rightarrow x = \frac{y^۲ + ۱}{۲y}$$

$$y \le x \Rightarrow y \le \frac{y^۲ + ۱}{۲y} \Rightarrow \frac{y^۲ + ۱ - ۲y^۲}{۲y} \ge ۰ \Rightarrow \frac{۱ - y^۲}{۲y} \ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} y \in (-\infty, -۱] \cup (۰, ۱]$$

پاسخ ۵)

دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است. برای یافتن برد، x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{ax + b}{x^۲ + ۱} \Rightarrow yx^۲ - ax + y - b = ۰ \xrightarrow{\Delta \ge ۰} -۴y^۲ + ۴by + a^۲ \ge ۰$$

با توجه به این‌که ضریب $y^۲$ منفی است، در فاصله‌ی بین دو ریشه‌ی عبارت درجه‌ی دوم آخر (بر حسب y)، علامت عبارت مثبت یا صفر است. با توجه به فرض مسأله این فاصله باید $[-۱, ۴]$ باشد، پس دو ریشه -۱ و ۴ هستند. بنابراین طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$\begin{cases} -\frac{۴b}{-۴} = -۱ + ۴ \\ \frac{a^۲}{-۴} = -۱ \times ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۳ \\ a = \pm ۴ \end{cases}$$

پاسخ ۶)

الف) معادله‌ی نیم‌دایره $y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$ است. با توجه به قرار گرفتن A روی نیم‌دایره، مختصات آن در معادله‌ی نیم‌دایره صدق می‌کند. حال مساحت مستطیل به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$S = ۲xy \Rightarrow S = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$

ب) دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(۰, ۶)$ است (چون نقطه‌ی A روی ربع دایره‌ی واقع در ربع اول می‌تواند حرکت کند). برای یافتن برد ضابطه‌ی تابع را

به‌صورت $S = ۲\sqrt{x^{۲}(۳۶-x^{۲})}$ می‌نویسیم.

حال طبق نامساوی واسطه‌های حسابی و هندسی داریم:

$$\sqrt{x^{۲}(۳۶-x^{۲})} \leq \frac{x^{۲}+۳۶-x^{۲}}{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{x^{۲}(۳۶-x^{۲})} \leq ۳۶ \Rightarrow S \leq ۳۶$$

پس برد تابع $[۰,۳۶]$ است. (دقت کنید که همواره $S > ۰$)

۲–۴: توابع چندضابطه‌ای

پاسخ ۱)

الف) $f(\sqrt{3}-1)=-3(\sqrt{3}-1)-2=-3\sqrt{3}+1$

$$f(f(-2))=f(6-2)=f(4)=\frac{16}{7}$$

ب) $\sin^2 x\geq 0\Rightarrow f(\sin^2 x)=\sin^2 x-1=-\cos^2 x$

$$\cos x-2<0\Rightarrow f(\cos x-2)=\cos x-2+1=\cos x-1$$

پ) چون $2007\in\mathbb{Q}$ و $2008-\sqrt{2008}\notin\mathbb{Q}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} f(2007)=2007-2007=0 \\ f(2008-\sqrt{2008})=2008-2008+\sqrt{2008}=\sqrt{2008} \end{cases}\Rightarrow \text{حاصل عبارت}=\sqrt{2008}$$

ت) داریم $f(-2010)=2^{-2010}$، پس $0<f(-2010)<1$، در نتیجه:

$$f(f(-2010))=\sqrt{3}\Rightarrow f(f(f(-2010)))=f(\sqrt{3})=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=\frac{\log\sqrt{3}}{-\log 3}=-\frac{1}{2}$$

پاسخ ۲)

با جای‌گذاری $x=2$ و $x=-2$ در تساوی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} af(2)+bf(-2)=3+2 \\ af(-2)+bf(2)=-3+2 \end{cases}\xrightarrow[f(-2)=-3]{f(2)=-1}\begin{cases} -a-3b=5 \\ -3a-b=-1 \end{cases}$$

با حل دستگاه حاصل نتیجه می‌گیریم: $a=1$ و $b=-2$

پاسخ ۳)

n را تعداد داوطلبان می‌گیریم. با توجه به اطلاعات مسأله می‌توانیم تابع زیر را بنویسیم:

$$f(n)=\begin{cases} 100n & 0\leq n\leq 50 \\ (100-(n-50))\times n & 50<n\leq 70 \\ 80n & n>70 \end{cases}\Rightarrow f(n)=\begin{cases} 100n & 0\leq n\leq 50 \\ 150n-n^2 & 50<n\leq 70 \\ 80n & n>70 \end{cases}$$

دقت کنید که درآمد را بر حسب هزار تومان نوشته‌ایم.

پاسخ ۴)

الف) پولی را که به نویسنده تعلق می‌گیرد با $f(n)$ نشان می‌دهیم که n شماره‌ی نوبت چاپ است. داریم $f(1)=\frac{15}{100}\times 9000\times 3000$، بنابراین $f(1)=4.05\times 10^6$. برای $n>1$ داریم:

$$f(n)=\frac{12}{100}(n-1)\times 10000\times 3000+f(1)=3.6\times 10^6(n-1)+4.05\times 10^6=3.6\times 10^6 n+0.45\times 10^6$$

بنابراین:

$$f(n)=\begin{cases} 4.05\times 10^6 & n=1 \\ 3.6\times 10^6 n+0.45\times 10^6 & n>1, n\in N \end{cases}$$

با توجه به آن‌که ضابطه‌ی دوم به ازای $n=1$ همان مقدار ضابطه‌ی اول را به عنوان خروجی می‌دهد، پس می‌توانیم به طور کلی برای هر

$n \in \mathbb{N}$ ضابطه‌ی تابع را با $f(n) = ۳/۶\times ۱۰^{۶} n + ۰/۴۵ \times ۱۰^{۶}$ نشان دهیم.

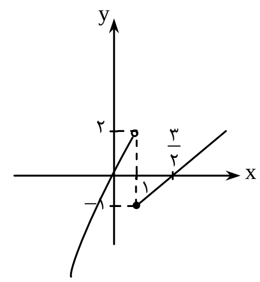
ب) باید نامعادله‌ی $f(n) \geq ۱۰ \times ۱۰^{۶}$ را حل کنیم.

$$f(n) \geq ۱۰\times ۱۰^{۶} \Rightarrow ۳/۶n + ۰/۴۵ \geq ۱۰ \Rightarrow n \geq ۲/۶۵ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \geq ۳$$

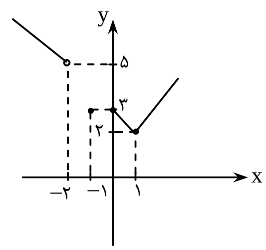
پس باید حداقل ۳ نوبت از چاپ کتاب بگذرد.

پاسخ ۵)

الف) $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۳ & x \geq ۱ \\ -x^{۲} + ۳x & x < ۱ \end{cases}$

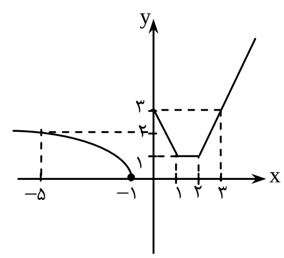


ب) $f(x) = \begin{cases} |x-۱| + ۲ & x \geq ۰ \\ ۳ & x = -۱ \\ -x + ۳ & x < -۲ \end{cases}$



پ) $f(x) = \begin{cases} |x-۱| + |x-۲| & x \geq ۰ \\ \sqrt{-x-۱} & x < ۰ \end{cases}$

$-x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -۱$



پاسخ ۶)

الف) معادله‌ی هر خط را با داشتن دو نقطه‌ی آن می‌توانیم بنویسیم. مثلاً به ازای $۵ \leq x \leq ۱۵$ بـا خطـی بـه معادلـه‌ی $y - ۱ = \frac{۳-۱}{۱۵-۵}(x-۵)$ مواجه‌ایم. به این ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq x \leq ۵ \\ ۰/۲x & ۵ \leq x \leq ۱۵ \\ -۰/۶x + ۱۲ & ۱۵ \leq x \leq ۲۰ \end{cases}$$

ب) برای $x \geq ۱$ با یک سهمی مواجه‌ایم که رأس آن نقطه‌ی $(۳,۵)$ است، پس معادله‌ی آن به شکل $y = a(x-۳)^{۲} + ۵$ می‌شود. سـهمی از $(۱,۱)$ می‌گذرد که با صدق دادن آن در معادله نتیجه می‌گیریم $a = -۱$. به این ترتیب ضابطه‌ی تابع به‌دست می‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq ۱ \\ ۵ - (x-۳)^{۲} & x \geq ۱ \end{cases}$$

پاسخ ۷)

الف) اگر $D_۱$، معرف دامنه‌ی ضابطه‌ی اول و $D_۲$ نشان‌دهنده‌ی دامنه‌ی ضابطه‌ی دوم باشد، آن‌گاه داریم:

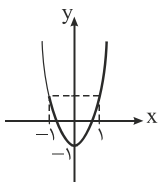
$$\begin{cases} x^{۲} - ۲x \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۰\,,\,۲ \xrightarrow{x\geq ۱} D_۱ = [۱,+\infty) - \{۲\} \\ ۲x - ۳ \neq ۰ \Rightarrow x \neq \frac{۳}{۲} \xrightarrow{x<۱} D_۲ = (-\infty,۱) \end{cases}$$

به این ترتیب دامنه‌ی تابع $D_۱ \cup D_۲ = \mathbb{R} - \{۲\}$ می‌شود.

ب) دامنه‌ی دو ضابطه را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (-x+۱) > ۰ \Rightarrow x < ۱ \xrightarrow{x>۰} ۰ < x < ۱ \\ x^۲ - ۲x \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \text{ یا } x \leq ۰ \xrightarrow{x<-۱} x < -۱ \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, -۱) \cup (۰, ۱)$$

پاسخ ۸)

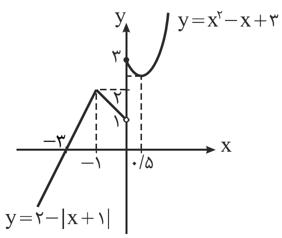


الف) با توجه به نمودار $y = ۲x^۲ - ۱$ برای $x \geq -۱$ داریم $y \geq -۱$. بنابراین برد ضابطه‌ی اول $[-۱, +\infty)$ است.

حال برد ضابطه‌ی دوم را می‌یابیم:

$$x < -۱ \Rightarrow -x > ۱ \Rightarrow ۳ - x > ۴$$

پس برد ضابطه‌ی دوم $(۴, +\infty)$ است. برد تابع اصلی اجتماع این دو برد می‌شود، یعنی همان $[-۱, +\infty)$ است.

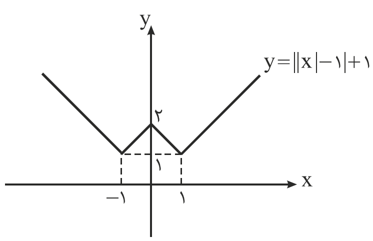


ب) در شکل روبه‌رو نمودارهای دو تابع $y = x^۲ - x + ۳$ (برای $x \geq ۰$) و $y = ۲ - |x+۱|$ را (برای $x < ۰$) رسم کرده‌ایم. با توجه به این نمودارها، برد ضابطه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

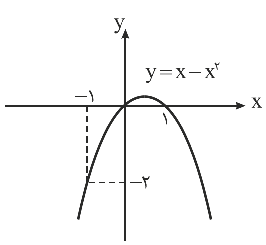
$$y = \sqrt{x^۲ - x + ۳} \Rightarrow y_{\min} = \sqrt{(۰/۵)^۲ - ۰/۵ + ۳} = \frac{\sqrt{۱۱}}{۲} \Rightarrow R_۱ = [\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}, +\infty)$$

$$y = ۲ - |x+۱| \Rightarrow y_{\max} = ۲ \Rightarrow R_۲ = (-\infty, ۲]$$

برد تابع اصلی اجتماع دو برد بالا می‌شود، یعنی برابر $\mathbb{R}$ است. (دقت کنید که $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲} < ۲$)



پ) با توجه به نمودار تابع $y = ||x| - ۱| + ۱$ به ازای $x \geq -\frac{۱}{۲}$ داریم $y \geq ۱$، بنابراین برد ضابطه‌ی اول $[۱, +\infty)$ است.



همچنین با توجه به نمودار $y = x - x^۲$ به ازای $x < -۱$ داریم $y < (-۱) - (-۱)^۲$، پس $y < -۲$ و برد ضابطه‌ی دوم $(-\infty, -۲)$ می‌شود.

به این ترتیب برد تابع اصلی برابر است با $(-\infty, -۲) \cup [۱, +\infty)$

پاسخ ۹)

می‌توانیم برد f را به کمک نابرابری‌ها به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} -۳ \leq x \leq -۱ \Rightarrow -۱ \leq ۲ + x \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq f(x) \leq ۱ \\ -۱ < x < ۲ \Rightarrow -۴ < -۲x < ۲ \Rightarrow -۵ < f(x) < ۱ \\ ۲ \leq x < ۵ \Rightarrow ۶ \leq ۳x < ۱۵ \Rightarrow -۵ \leq f(x) < ۴ \end{cases}$$

در دو حالت اول داریم $f(x) \leq ۱$، پس $-۳ \leq x \leq -۱$ و $-۱ < x < ۲$ جزء جواب‌های نامعادله‌اند. در محدوده‌ی سوم باید نامعادله را حل کنیم:

$$f(x) \leq ۱ \Rightarrow ۳x - ۱۱ \leq ۱ \Rightarrow ۳x \leq ۱۲ \Rightarrow x \leq ۴ \xrightarrow{۲ \leq x < ۵} ۲ \leq x \leq ۴$$

پس جواب نامعادله اجتماع سه بازه‌ی بالا، یعنی $[-۳, ۴]$ می‌شود.

پاسخ ۱۰)

با برهان خلف ثابت می‌کنیم چنین تابعی وجود ندارد. اگر وجود داشته باشد، $f(\sqrt{۲})$ دو حالت دارد، یا گویا است یا گنگ.

۱- اگر $f(\sqrt{۲}) \in \mathbb{Q}$، آن‌گاه با جای‌گذاری $x = f(\sqrt{۲})$ در ضابطه‌ی تابع به‌دست می‌آوریم:

$$f(f(f(\sqrt{۲}))) = \sqrt{۲}$$

از طرفی طبق ضابطه $f(f(\sqrt{۲})) = ۱$، با جای‌گذاری این نتیجه در تساوی بالا به‌دست می‌آوریم $f(۱) = \sqrt{۲}$، حال طبق ضابطه

$f(f(۱)) = \sqrt{۲}$ و چون $f(۱) = \sqrt{۲}$، نتیجه می‌گیریم: $f(\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}$. این نتیجه با فرض $f(\sqrt{۲}) \in \mathbb{Q}$ تناقض دارد.

۲- اگر $f(\sqrt{۲}) \notin \mathbb{Q}$، آن‌گاه با جای‌گذاری $x = f(\sqrt{۲})$ در ضابطه‌ی تابع به‌دست می‌آوریم:

$$f(f(f(\sqrt{۲}))) = ۱ \xrightarrow{f(f(\sqrt{۲}))=۱} f(۱) = ۱ \xrightarrow{f(f(۱))=\sqrt{۲}} f(۱) = \sqrt{۲}$$

می‌بینید که هر دو نتیجه‌ی $f(۱) = \sqrt{۲}$ و $f(۱) = ۱$ باید درست باشند که تناقض دیگری است!

پاسخ ۱۱)

$$f(x+۱) = \begin{cases} ۲(x+۱)+۱ & x \geq ۰ \\ -(x+۱)+۱ & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f(x+۱) = \begin{cases} ۲x+۳ & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{۲x+۳-۳}{x} & x > ۰ \\ \dfrac{-x-۳}{x} & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} ۲ & x > ۰ \\ -۱-\dfrac{۳}{x} & x < ۰ \end{cases}$$

$$h(x) = f(x^۲) = \begin{cases} ۲x^۲+۱ & |x| \geq ۱ \\ -x^۲+۱ & |x| < ۱ \end{cases}$$

پاسخ ۱۲)

می‌دانیم $h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)+۳ & g(x) > ۱ \\ g(x)-۱ & g(x) < ۱ \end{cases}$. بنابراین باید برد تابع g را محدوده‌بندی کنیم. داریم:

$$\begin{cases} x > ۱ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow x^۲ - ۳ > -۲ \Rightarrow g(x) > -۲ \\ x < ۱ \Rightarrow -x^۲ \leq ۰ \Rightarrow -x^۲ - ۲ \leq -۲ \Rightarrow g(x) \leq -۲ \end{cases}$$

پس اولاً به ازای همه‌ی مقادیر $x < ۱$، داریم $g(x) < ۱$، پس:

$$f(g(x)) = g(x) - ۱ = -x^۲ - ۲ - ۱ = -x^۲ - ۳$$

ثانیاً به ازای $x > ۱$ باید محدوده‌های $g(x) > ۱$ و $g(x) < ۱$ را مشخص کنیم:

$$\begin{cases} g(x) > ۱ \Rightarrow x^۲ - ۳ > ۱ \Rightarrow x^۲ > ۴ \Rightarrow |x| > ۲ \xrightarrow{x>۱} x > ۲ \\ g(x) < ۱ \Rightarrow x^۲ - ۳ < ۱ \Rightarrow x^۲ < ۴ \Rightarrow |x| < ۲ \xrightarrow{x>۱} ۱ < x < ۲ \end{cases}$$

به این ترتیب می‌توانیم بنویسیم:

$$f(g(x)) = \begin{cases} -x^۲ - ۳ & x < ۱ \\ x^۲ - ۳ - ۱ & ۱ < x < ۲ \\ x^۲ - ۳ + ۳ & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow h(x) = \begin{cases} -x^۲ - ۳ & x < ۱ \\ x^۲ - ۴ & ۱ < x < ۲ \\ x^۲ & x > ۲ \end{cases}$$

پاسخ ۱۳)

با جای‌گذاری $۱ - x$ به جای x در تساوی فرض به‌دست می‌آوریم:

$$af(۱-x) + bf(x) = \begin{cases} ۱-x & x \geq ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $g(x) = \begin{cases} x & x \leq ۰ \\ ۱-x & x > ۰ \end{cases}$ و $h(x) = \begin{cases} ۱-x & x \geq ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$ داریم:

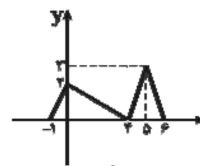
$$\begin{cases} af(x) + bf(۱-x) = g(x) \\ af(۱-x) + bf(x) = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^۲f(x) + abf(۱-x) = ag(x) \\ abf(۱-x) + b^۲f(x) = bh(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{a^۲ - b^۲}(ag(x) - bh(x))$$

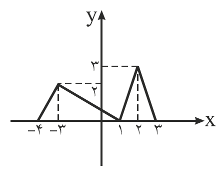
با توجه به ضابطه‌های g و h ضابطه‌ی نهایی f به‌دست می‌آید:

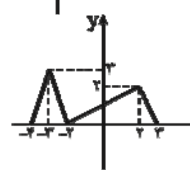
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{a^۲ - b^۲}(a(۱-x) - b(۱-x)) & x \geq ۱ \\ \dfrac{۱}{a^۲ - b^۲}(a(۱-x) - bx) & ۰ < x < ۱ \\ \dfrac{۱}{a^۲ - b^۲}(ax - bx) & x \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{a+b}(۱-x) & x \geq ۱ \\ \dfrac{۱}{a^۲ - b^۲}(a - (a+b)x) & ۰ < x < ۱ \\ \dfrac{۱}{a+b}x & x \leq ۰ \end{cases}$$

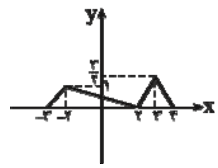
۲–۵: رسم نمودار توابع

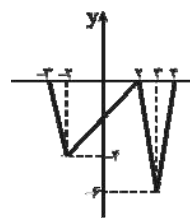
پاسخ ۱)

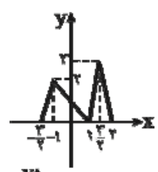
الف) 

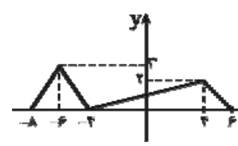
ب) 

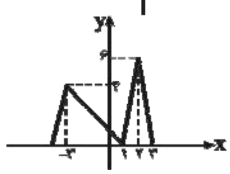
پ) 

ت) 

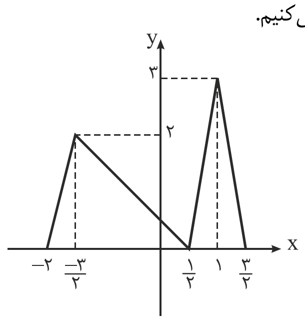
ث) 

ج) 

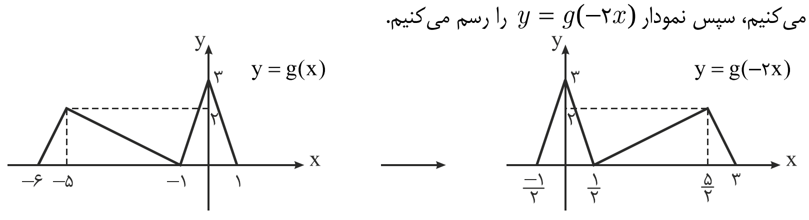
چ) 

ح) 

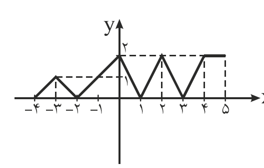
خ) ابتدا نمودار $g(x) = f(x + ۱)$ را رسم می‌کنیم (نمودار قسمت ب)، سپس نمودار $y = g(۲x)$ را رسم می‌کنیم.

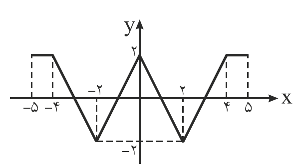


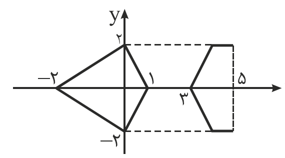
د) ابتدا نمودار $g(x) = f(۳ + x)$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = g(-۲x)$ را رسم می‌کنیم.

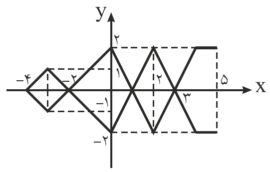


پاسخ ۲)

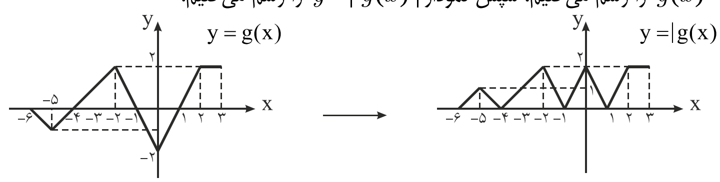
الف) 

ب) 

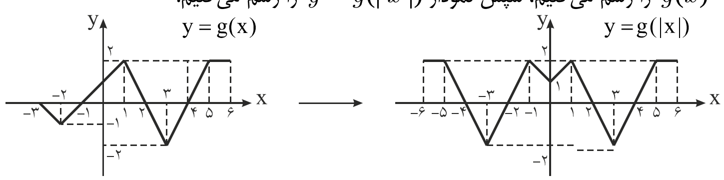
پ) 

ت) 

ث) ابتدا نمودار $g(x) = f(x+۲)$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = |g(x)|$ را رسم می‌کنیم.

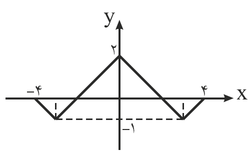


ج) ابتدا نمودار $g(x) = f(x-۱)$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = g(|x|)$ را رسم می‌کنیم.

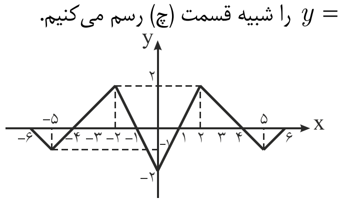


چ) کافی است بخش $x \le ۰$ را در نمودار تابع اصلی نگه داریم و قرینه‌ی آن را نسبت به محور yها به نمودار اضافه کنیم.

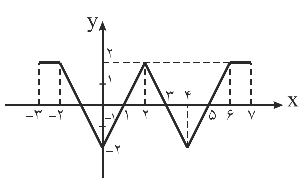
زیرا: $f(-|x|) = \begin{cases} f(-x) & x \ge ۰ \\ f(x) & x < ۰ \end{cases}$



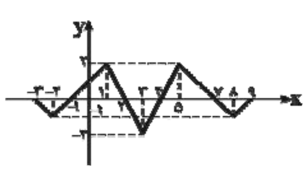
ح) ابتدا نمودار $g(x) = f(۲+x)$ را رسم می‌کنیم (به قسمت ث نگاه کنید)، سپس نمودار $y = g(-|x|)$ را شبیه قسمت (چ) رسم می‌کنیم.



خ) ابتدا نمودار $g(x) = f(|x|)$ را رسم می‌کنیم (به قسمت ب نگاه کنید)، سپس نمودار $y = g(x-۲)$ را رسم می‌کنیم. می‌بینید که نمودار نسبت به خط $x = ۲$ متقارن است.



د) ابتدا نمودار $g(x) = f(۲-|-x|)$ را رسم می‌کنیم. چون $|x| = |-x|$، این نمودار نمودار قسمت (ح) می‌شود. حال نمودار $y = g(x-۳)$ را رسم می‌کنیم.



پاسخ ۳)

الف) برای رسم نمودار $y = f(۶-۳x)$ از یکی از دو راه زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

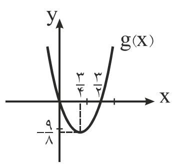
۱- ابتدا نمودار $g(x) = f(۶+x)$ را رسم می‌کنیم (نمودار f را به اندازه‌ی ۶ واحد به چپ انتقال می‌دهیم)، سپس نمودار $y = g(-۳x)$ را رسم می‌کنیم (نمودار g را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس طول نقاط را $\frac{۱}{۳}$ برابر می‌کنیم.

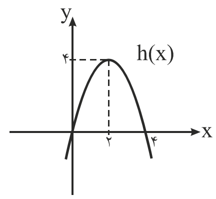
۲- با توجه به آن‌که $y = f(-3(x-2))$، ابتدا نمودار $g(x) = f(-3x)$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = g(x-2)$ را رسم می‌کنیم. یعنی دانش‌آموز باید نمودار $f(-3x)$ را به اندازه‌ی ۲ واحد به راست انتقال بدهد.

ب) دانش‌آموز با روش اشتباه خود نمودار $y = f(-3x+18)$ را رسم می‌کند.

پاسخ ۴)

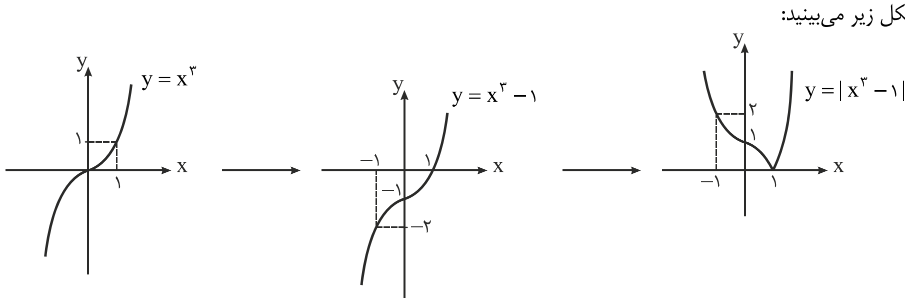
در واقع باید نمودار دو تابع $g(x) = 2(x-\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{8}$ و $h(x) = -(x-2)^2 + 4$ را رسم نماییم.



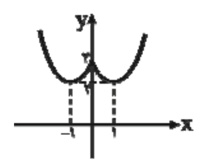


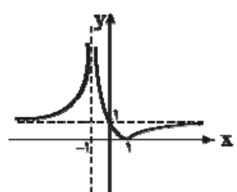
پاسخ ۵)

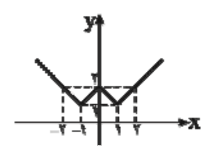
الف) مراحل رسم نمودار را در شکل زیر می‌بینید:

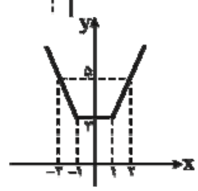


برای رسم نمودار نهایی، باید نمودار سوم را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم.

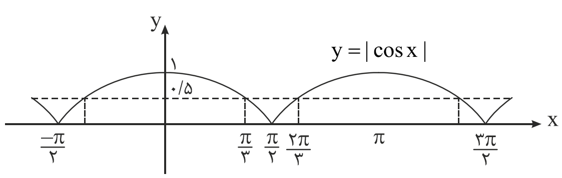
ب)


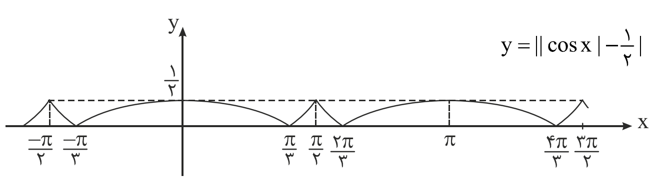
پ)


ت)


ث)


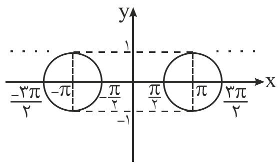
ج) مراحل رسم نمودار را در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



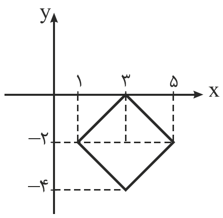


پاسخ ۶)

الف) $|y| = -\cos x \Rightarrow \cos x \le 0 \Rightarrow x$ در ناحیه‌ی دوم و سوم قرار دارد.



ب)



پاسخ ۷)

$$f(x)=\begin{cases}-(x-۲)^{۲}+\frac{۵}{۳} & x\geq ۲\\ \frac{۱}{۳}x+۱ & -۳\leq x<۲\\ \sqrt{-x-۳} & x<-۳\end{cases}$$

پاسخ ۸)

در حالت کلی با اعمال موردنظر، نمودار تابع $af(x+b)+c$ به‌دست می‌آید. یعنی در هر حالت داریم $g(x)=af(x+b)+c$ و باید مقادیر a، b و c را به‌دست می‌آوریم.

الف) چون با یک سهمی با رأس $(۲,۰)$ مواجه‌ایم، پس $g(x)=a(x-۲)^{۲}+۰$. با توجه به نمودار $g(۰)=-۴$، بنابراین $۴a=-۴$، پس $a=-۱$ و در نتیجه $g(x)=-(x-۲)^{۲}$.

ب) داریم $g(x)=a\sqrt{x+b}+c$. با توجه به نمودار دامنه‌ی تابع $x\geq -۴$ است، پس $b=۴$ و $g(x)=a\sqrt{x+۴}+c$. حال از این‌که نقاط $(-۴,۵)$ و $(۵,-۱)$ روی نمودار قرار دارند، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}c=۵\\ ۳a+c=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=۵\\ a=-۲\end{cases}\Rightarrow g(x)=-۲\sqrt{x+۴}+۵$$

۲-۶: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

پاسخ ۱)

$f+g=\{(۱,۵),(۴,۹),(۵,۱۶),(۷,۳)\}$

$f-۲g=\{(۱,-۴),(۴,۹),(۵,-۱۴),(۷,-۳)\}$

$fg=\{(۱,۶),(۴,۰),(۵,۶۰),(۷,۲)\}$

$\frac{۱}{f}+۳g=\{(۱,\frac{۱۹}{۲}),(۴,\frac{۱}{۹}),(۵,\frac{۱۸۱}{۶}),(۷,۷)\}$

$fog=\{(۱,۵),(۷,۰)\}$

$\frac{g}{f}=\{(۱,\frac{۳}{۲}),(۴,۰),(۵,\frac{۱۰}{۶}),(۷,۲)\} \Rightarrow \frac{g}{f}of=\{(۳,\frac{۱۰}{۶}),(۷,\frac{۳}{۲})\}$

$fofof=\{(۷,۰)\}$

پاسخ ۲)

$$(f+g)(x)=\frac{۲x+۳}{x-۴}+\frac{x-۴}{۲x+۳}=\frac{(۲x+۳)^۲+(x-۴)^۲}{(x-۴)(۲x+۳)}=\frac{۵x^۲+۴x+۲۵}{۲x^۲-۵x-۱۲}$$

$$D_{f+g}=\mathbb{R}-\{۴,-\frac{۳}{۲}\}$$

$$(fg)(x)=۱ \qquad D_{fg}=\mathbb{R}-\{۴,-\frac{۳}{۲}\}$$

$$(\frac{f}{g})(x)=(\frac{۲x+۳}{x-۴})^۲ \qquad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۴,-\frac{۳}{۲}\}$$

$$(fog)(x)=\frac{۲g(x)+۳}{g(x)-۴}=\frac{۲(\frac{x-۴}{۲x+۳})+۳}{\frac{x-۴}{۲x+۳}-۴}=\frac{۸x+۱}{-۷x-۱۶}$$

$$g(x)=۴ \Rightarrow \frac{x-۴}{۲x+۳}=۴ \Rightarrow ۸x+۱۲=x-۴ \Rightarrow ۷x=-۱۶ \Rightarrow x=-\frac{۱۶}{۷}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\mathbb{R}-\{-\frac{۳}{۲},\frac{-۱۶}{۷}\}$$

$$(gof)(x)=\frac{f(x)-۴}{۲f(x)+۳}=\frac{-۲x+۱۹}{۷x-۶}$$

$$۲f(x)=-۳ \Rightarrow f(x)=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۲x+۳}{x-۴}=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow x=\frac{۶}{۷} \Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}-\{۴,\frac{۶}{۷}\}$$

پاسخ ۳)

$$(fog)(x)=۴\times(\frac{\sqrt{x+۹}}{۲})^۲-۹=x \qquad D_{fog}=[-۹,+\infty)$$

$$(gof)(x)=\frac{\sqrt{f(x)+۹}}{۲}=|x| \ , \ f(x)\geq -۹ \Rightarrow ۴x^۲\geq ۰ \Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}$$

همان‌طور که می‌بینیم چون $D_{fog}\neq D_{gof}$ ، بنابراین $fog\neq gof$.

پاسخ ۴)

الف) $f(g(x))=\dfrac{۲}{|x-۳|}$

$f(x)=\dfrac{۲}{|۲x-۳|} \qquad g(x)=\dfrac{x}{۲}$

$f(x)=\dfrac{۲}{|x+۱|} \qquad g(x)=x-۴$

ب) $f(g(x))=\dfrac{\sqrt{x}}{۳\sqrt{x}+۲}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{۳x}}{۳\sqrt{۳x}+۲} \qquad g(x)=\dfrac{x}{۳}$

$f(x)=\dfrac{x}{۳x+۲} \qquad g(x)=\sqrt{x}$

پاسخ ۵)

دامنه‌ی f، $(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$ است و دامنه‌ی g، بازه‌ی $[۱,+\infty)$. حال دامنه‌ی دو تابع مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

الف) دامنه‌ی fog:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \,|\, g(x)\in D_f\}=\{x\in[۱,+\infty)\,|\,\sqrt{\log x}\in(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)\}$$

با توجه به آن‌که همواره $\sqrt{\log x}\geq ۰$، شرط بالا به معنی $\sqrt{\log x}\geq ۱$ است، بنابراین:

$$\log x\geq ۱\Rightarrow x\geq ۱۰ \xrightarrow{x\in[۱,+\infty)} D_{fog}=[۱۰,+\infty)$$

ب) دامنه‌ی gof:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_g\}$$

$$f(x)\in D_g\Rightarrow\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}\geq ۱\Rightarrow\frac{x-۱}{x+۱}-۱\geq ۰\Rightarrow\frac{-۲}{x+۱}\geq ۰\Rightarrow x<-۱ \xrightarrow{x\in D_f} D_{gof}=(-\infty,-۱)$$

پاسخ ۶)

الف) $D_f=(۷,۱۲)\Rightarrow ۷<۳x-۱<۱۲\Rightarrow\dfrac{۸}{۳}<x<\dfrac{۱۳}{۳}\Rightarrow D_g=(\dfrac{۸}{۳},\dfrac{۱۳}{۳})$

ب) $D_f=(۱,۴)\Rightarrow ۱<\dfrac{۱-x}{۲+x}<۴\Rightarrow(\dfrac{۱-x}{۲+x}-۱)(\dfrac{۱-x}{۲+x}-۴)<۰\Rightarrow\dfrac{(۲x+۱)(۵x+۷)}{(۲+x)^۲}<۰$

$\Rightarrow D_g=(-\dfrac{۷}{۵},-\dfrac{۱}{۲})$

پ) $D_f=(-۱,۵)\Rightarrow -۱<\sqrt{\dfrac{۱-x}{۱+x}}<۵\Rightarrow ۰\leq\dfrac{۱-x}{۱+x}<۲۵\Rightarrow(\dfrac{۱-x}{۱+x})(\dfrac{۱-x}{۱+x}-۲۵)<۰$

$\Rightarrow\dfrac{(x-۱)(۲۶x+۲۴)}{(۱+x)^۲}<۰\Rightarrow D_g=(\dfrac{-۲۴}{۲۶},۱]$

ت) $D_f=(۰,۱)\Rightarrow ۰<\log x<۱\Rightarrow\log ۱<\log x<\log ۱۰\Rightarrow ۱<x<۱۰\Rightarrow D_g=(۱,۱۰)$

ث) $D_f=(۰,۱)\Rightarrow ۰<\sin x<۱\Rightarrow ۲k\pi<x<(۲k+۱)\pi \ ,\ x\neq ۲k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

ج) $D_f=[-۲,۲]\Rightarrow -۲\leq ۲\cos\pi x\leq ۲\Rightarrow -۱\leq\cos\pi x\leq ۱\Rightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$

پاسخ ۷)

الف) مساحت دایره از رابطه‌ی $S=\pi r^۲$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$S(r)=\pi r^۲$$

ب) $(Sor)(t)$، مساحت لکه را بر حسب زمان مشخص می‌کند، داریم:

$$(Sor)(t)=S(r(t))=S(۵۰\sqrt{t})=۲۵۰۰\pi t$$

پاسخ ۸)

الف) باید برای به‌دست آوردن درآمد، هزینه را از میزان فروش کم کنیم، بنابراین:

$$R(x)=xP(x)-C(x)=x(۱۰۰۰۰-\frac{۱}{۴}x)-(۳۰۰۰۰+۵x)=-\frac{۱}{۴}x^۲+۹۹۹۵x-۳۰۰۰۰$$

ب) باید تابع C را بر حسب P بنویسیم:

$$P(x)=۱۰۰۰۰-\frac{۱}{۴}x\Rightarrow x=۴(۱۰۰۰۰-P(x))$$

$$C(x)=۳۰۰۰۰+۵x\Rightarrow C(P)=۳۰۰۰۰+۵\times۴(۱۰۰۰۰-P)=-۲۰P+۲۳۰۰۰۰$$

پ) حال باید $R(P)$ را به دست آوریم، داریم:

$$R(P)=-\frac{۱}{۴}(۴(۱۰۰۰۰-P))^۲+۹۹۹۵(۴(۱۰۰۰۰-P))-۳۰۰۰۰$$

پاسخ ۹)

$$(fog)(x)=\begin{cases}۳(۲x-۱) & x\geq\frac{۳}{۲}\\ ۲(۲x-۱)^۲ & ۰\leq x<\frac{۳}{۲}\\ ۲(x^۲+۱)^۲ & -۱<x<۰\\ ۳(x^۲+۱) & x\leq-۱\end{cases}$$

$$(gof)(x)=\begin{cases}۶x-۱ & x\geq۲\\ ۴x^۲-۱ & x<۲\end{cases}$$

۲–۷: توابع زوج و توابع فرد

پاسخ ۱)

الف) نه زوج و نه فرد　　ب) زوج　　پ) فرد　　ت) نه زوج و نه فرد

پاسخ ۲)

الف) $f(-x)=x^{۴}-|-x|=x^{۴}-|x|$　　زوج

ب) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$ است، پس دامنه نسبت به مبدأ متقارن است و داریم:

$$f(x)=\frac{x^{۶}-۱}{x^{۲}-۱}\Rightarrow f(-x)=f(x)$$ زوج

پ) $f(-x)=|-x|\sin(-x)=|x|(-\sin x)=-f(x)$　　فرد

ت) $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-f(x)$　　فرد

ث) با توجه به آن‌که $x^{۴}-x^{۲}=x^{۲}(x^{۲}-۱)$، پس دامنه نسبت به مبدأ متقارن است و داریم $f(-x)=f(x)$، پس تابع زوج است.

ج) $x<۰$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، پس تابع نه زوج است و نه فرد.

چ) عبارات صورت و مخرج کسر هر دو به توابعی فرد اشاره دارند (مانند مثال‌های بخش آموزش ثابت کنید) پس حاصل تقسیم آن‌ها تابعی زوج است.

ح) داریم $D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$ و $f(x)=\frac{۱+x}{۱-x}+\frac{۱-x}{۱+x}-۱$، پس f تابعی زوج است.

خ) داریم $D_f=(۰,+\infty)$، پس f نه زوج است و نه فرد.

د) داریم $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ و علاوه بر آن:

$$f(-x)=\frac{\frac{۱}{a^x}+۱}{\frac{۱}{a^x}-۱}=\frac{۱+a^x}{۱-a^x}=-f(x)$$ فرد

پاسخ ۳)

الف) $$f(-x)=\begin{cases}\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}} & -۱\le x\le ۰\\ \sqrt{۱-\sqrt{۱-x}} & ۰\le x\le ۱\end{cases}\Rightarrow f(-x)=f(x)$$ زوج

ب) $$f(-x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{x^{۲}-۳x-۱} & x<۰\\ \dfrac{-x}{x^{۲}+۳x-۱} & x>۰\end{cases}\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$ فرد

پاسخ ۴)

الف) در توابع چندجمله‌ای باید تمامی جملات از درجه‌ی فرد باشند تا تابع فرد شود، بنابراین:

$$a+b-۴=۰\ ,\ a-b=۰\Rightarrow a=b=۲$$

ب) با تبدیل x به $-x$ داریم:

$f(-x) = |-x+a| - |-x+۲| + b|-x+۵|$

$\xrightarrow{f(-x)=-f(x)} |x-a| - |x-۲| + b|x-۵| = -|x+a| + |x+۲| - b|x+۵|$

تساوی بالا باید به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد، در نتیجه:

$a = -۲\ ,\ b = ۰$

پاسخ ۵)

الف) ۱) $f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) \Rightarrow$ $f+g$ زوج است

۲) $f(-x)-g(-x) = f(x)-g(x) \Rightarrow$ $f-g$ زوج است

۳) $f(-x)g(-x) = f(x)g(x) \Rightarrow$ fg زوج است

۴) $\dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ زوج است

۵) $f(g(-x)) = f(g(x)) \Rightarrow$ fog زوج است

۶) $g(f(-x)) = g(f(x)) \Rightarrow$ gof زوج است

ب) ۱) $f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) \Rightarrow$ $f+g$ فرد است

۲) $f(-x)-g(-x) = -f(x)+g(x) \Rightarrow$ $f-g$ فرد است

۳) $f(-x)g(-x) = -f(x)\times -g(x) = f(x)g(x) \Rightarrow$ fg زوج است

۴) $\dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{-f(x)}{-g(x)} \Rightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ زوج است

۵) $f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) \Rightarrow$ fog فرد است

۶) $g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) \Rightarrow$ gof فرد است

پ) ۱) $f(-x)+g(-x) = f(x)-g(x) \Rightarrow$ $f+g$ لزوماً فرد یا زوج نیست

۲) $f(-x)-g(-x) = f(x)+g(x) \Rightarrow$ $f-g$ لزوماً فرد یا زوج نیست

۳) $f(-x)g(-x) = f(x)\times -g(x) = -f(x)g(x) \Rightarrow$ fg فرد است

۴) $\dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{f(x)}{-g(x)} \Rightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ فرد است

۵) $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) \Rightarrow$ fog زوج است

۶) $g(f(-x)) = g(f(x)) \Rightarrow$ gof زوج است

ت) تمامی موارد مانند قسمت «پ» می‌شود.

پاسخ ۶)

الف) $f(-x) = \dfrac{x^۲ - \sin x}{x^۲ - ۱} \Rightarrow$ $f(x)$ نه زوج است و نه فرد

تابع $f(x)$ را می‌توان به‌صورت $\dfrac{f(x)+f(-x)}{۲} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{۲}$ نوشت که عبارت اول زوج و عبارت دوم فرد می‌باشد.

$$f(x) = \frac{\dfrac{x^۲+\sin x}{x^۲-۱} + \dfrac{x^۲-\sin x}{x^۲-۱}}{۲} + \frac{\dfrac{x^۲+\sin x}{x^۲-۱} - \dfrac{x^۲-\sin x}{x^۲-۱}}{۲} = \frac{x^۲}{x^۲-۱} + \frac{\sin x}{x^۲-۱}$$

ب) $f(-x) = \dfrac{-x \times -\sin x}{x^۲ - x} \Rightarrow$ f نه زوج است و نه فرد

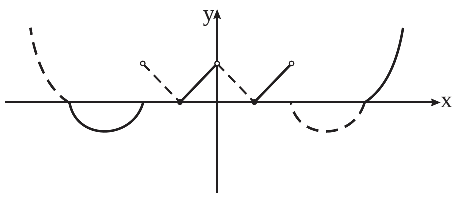
چون دامنه‌ی f نسبت به مبدأ متقارن نیست، پس نمی‌توانیم f را به‌صورت مجموع دو تابع بنویسیم که یکی زوج و دیگری فردباشد.

پ) $f(-x) = ۳^{-x} \Rightarrow$ f نه زوج است و نه فرد

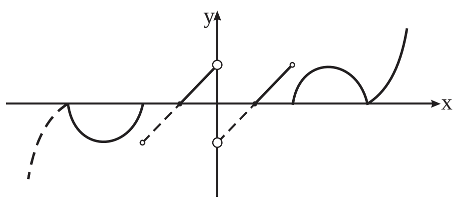
$$f(x)=\frac{۳^{x}+۳^{-x}}{۲}+\frac{۳^{x}-۳^{-x}}{۲}$$

پاسخ ۷)

الف) باید تابع را نسبت به محور yها متقارن کنیم.



ب) باید تابع نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشد.



پ) معادله‌ی قسمت «الف» برابر است با:

$$f(x)=\begin{cases}||x|-۱| & ۰<|x|<۲\\ -\sqrt{۱-(|x|-۳)^{۲}} & ۲\le|x|\le ۴\\ (|x|-۴)^{۲} & |x|\ge ۴\end{cases}$$

معادله‌ی قسمت «ب» برابر است با:

$$g(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x}{|x|} & ۰<|x|<۲\\ \dfrac{x}{|x|}\sqrt{۱-(|x|-۳)^{۲}} & ۲\le|x|\le ۴\\ \dfrac{x}{|x|}(|x|-۴)^{۲} & |x|\ge ۴\end{cases}$$

پاسخ ۸)

الف) باید ثابت کنید اگر $x\in D_{fog}$، آن‌گاه $-x\in D_{fog}$. حال می‌توان نوشت:

$$x\in D_{fog}\Rightarrow\begin{cases}x\in D_g \xrightarrow{g\text{ زوج است}} -x\in D_g\\ g(x)\in D_f \xrightarrow{g(-x)=g(x)} g(-x)\in D_g\end{cases}\Rightarrow -x\in D_{fog}$$

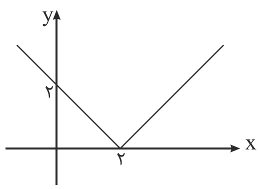
ب) می‌توان نوشت:

$$x\in D_{fog}\Rightarrow\begin{cases}x\in D_g \xrightarrow{g\text{ فرد است}} -x\in D_g\\ g(x)\in D_f \xrightarrow{f\text{ فرد است}} -g(x)\in D_f \xrightarrow{g\text{ فرد است}} g(-x)\in D_f\end{cases}\Rightarrow -x\in D_{fog}$$

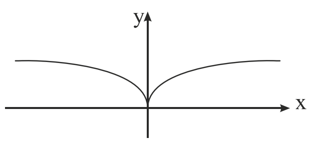
۲–۸: توابع صعودی و توابع نزولی

پاسخ ۱)

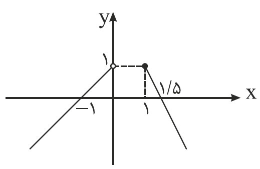
الف) با توجه به نمودار تابع، برای $x \geq 2$ تابع صعودی و برای $x \leq 2$ تابع نزولی است.



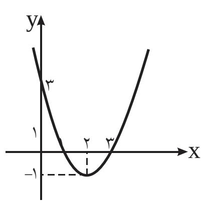
ب) با توجه به نمودار تابع، برای $x \geq 0$ تابع صعودی و برای $x \leq 0$ نزولی است.



پ) با توجه به نمودار تابع، برای $x \geq 1$ تابع نزولی و برای $x < 0$ تابع صعودی است.



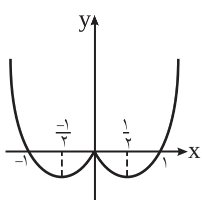
ت) با توجه به شکل، برای $x \geq 2$ تابع صعودی و برای $x \leq 2$ تابع نزولی است.



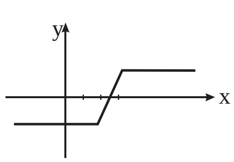
ث) ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x) = (x-1)^3 + 1$ می‌توانیم بنویسیم. ثابت می‌کنیم تابع صعودی است:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 < (x_2 - 1)^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

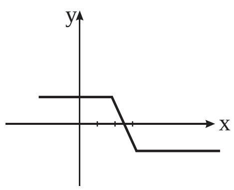
ج) با توجه به شکل، برای $x \geq \frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ تابع صعودی و برای $x \leq -\frac{1}{2}$ و $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ نزولی است.



چ) با توجه به نمودار، برای $2 \leq x \leq 3$ تابع صعودی اکید و برای $x \geq 3$ و برای $x \leq 2$، تابع هم صعودی و هم نزولی (ثابت) است.



ح) با توجه به شکل، برای $۲ \le x < ۳$ تابع نزولی اکید و برای $x \ge ۳$ و $x \le ۲$ تابع هم نزولی و هم صعودی (ثابت) است.



پاسخ ۲)

با توجه به ضابطه $f(۰) = ۱$ و $f(۱) = ۰$، پس تابع نمی‌تواند صعودی باشد. هم‌چنین چون $f(\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}$ و $f(۱) = ۰$، پس تابع نزولی نیز نیست.
دقت کنید که در هر بازه‌ای (هر چقدر کوچک که باشد) می‌توان چنین اعدادی یافت، پس هیچ بازه‌ای نیز وجود ندارد که تابع در آن صعودی یا نزولی باشد.

پاسخ ۳)

الف) $f(|۲x-۱|) \le f(x^۲) \Rightarrow |۲x-۱| \ge x^۲ \Rightarrow (۲x-۱)^۲ - x^۴ \ge ۰ \Rightarrow (۲x-۱-x^۲)(۲x-۱+x^۲) \ge ۰$
$\Rightarrow -(x-۱)^۲(x^۲+۲x-۱) \ge ۰ \Rightarrow -۱-\sqrt{۲} \le x \le -۱+\sqrt{۲}$ یا $x = ۱$

ب) $f(\sqrt{۲x-۱}) \ge f(x-۳) \Rightarrow \sqrt{۲x-۱} \le x-۳ \xrightarrow{x\ge ۳} ۲x-۱ \le x^۲-۶x+۹ \Rightarrow x^۲-۸x+۱۰ \ge ۰$
$\Rightarrow x \ge ۴+\sqrt{۶}$ یا $x \le ۴-\sqrt{۶} \xrightarrow{x\ge ۳} x \ge ۴+\sqrt{۶}$

پاسخ ۴)

الف) $x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)\ ,\ g(x_۲) < g(x_۱) \Rightarrow f(x_۲)+g(x_۲) < f(x_۱)+g(x_۱) \Rightarrow$ $f+g$ نزولی است
$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)\ ,\ -g(x_۲) > -g(x_۱)$
از این دو رابطه نمی‌توان نتیجه گرفت $f-g$ صعودی یا نزولی است.
$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)\ ,\ g(x_۲) < g(x_۱)$
از این دو رابطه نمی‌توان نتیجه گرفت fg صعودی یا نزولی است.

ب) $x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) > f(x_۱)\ ,\ g(x_۲) < g(x_۱) \Rightarrow$ $f+g$ نه لزوماً صعودی و نه نزولی است
$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) > f(x_۱)\ ,\ -g(x_۲) > -g(x_۱) \Rightarrow f(x_۲)-g(x_۲) > f(x_۱)-g(x_۱) \Rightarrow$ $f-g$ صعودی است
$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) > f(x_۱)\ ,\ g(x_۲) < g(x_۱) \Rightarrow$ fg نه لزوماً صعودی است و نه نزولی

پاسخ ۵)

الف) $x_۲ > x_۱ \Rightarrow g(x_۲) > g(x_۱) \Rightarrow f(g(x_۲)) > f(g(x_۱)) \Rightarrow$ fog صعودی است

ب) $x_۲ > x_۱ \Rightarrow g(x_۲) < g(x_۱) \Rightarrow f(g(x_۲)) > f(g(x_۱)) \Rightarrow$ fog صعودی است

پ) $x_۲ > x_۱ \Rightarrow g(x_۲) < g(x_۱) \Rightarrow f(g(x_۲)) < f(g(x_۱)) \Rightarrow$ fog نزولی است

ت) $x_۲ > x_۱ \Rightarrow g(x_۲) > g(x_۱) \Rightarrow f(g(x_۲)) < f(g(x_۱)) \Rightarrow$ fog نزولی است

پاسخ ۶)

با توجه به نزولی بودن تابع داریم: $x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)\ ,\ m = \dfrac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$

صورت کسر عددی منفی و مخرج آن مثبت است، بنابراین $m < ۰$.

پاسخ ۷)
چون تابعی که نمودار آن سهمی شکل است قبل از رأس سهمی صعودی (نزولی) و بعد رأس سهمی، نزولی (صعودی) است، بنابراین در این‌جا باید رأس این سهمی قبل از $x = ۱$ قرار گیرد، بنابراین:

$$\frac{-b}{۶} \le ۱ \Rightarrow b \ge -۶$$

پاسخ ۸)
در شرط (الف) به ترتیب قرار می‌دهیم $n = ۱$، $n = ۲$ و ...، نتیجه می‌گیریم:

$$f(۱) < f(۲) < f(۳) < f(۴) < \cdots$$

پس تابع f یک تابع صعودی اکید است. اکنون اگر در رابطه‌ی (ب) قرار دهیم $n = ۱$، نتیجه می‌گیریم:

$$f(f(۱)) = ۳$$

می‌توانیم ادعا کنیم که $f(۱) > ۱$. زیرا اگر $f(۱) = ۱$، آن‌گاه داریم:

$$f(f(۱)) = f(۱) = ۱$$

در حالی که $f(f(۱)) = ۳$، پس $f(۱) > ۱$. چون f اکیداً صعودی است، نتیجه می‌گیریم $f(f(۱)) > f(۱)$، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۳ > f(۱) \\ f(۱) > ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳ > f(۱) > ۱ \Rightarrow f(۱) = ۲$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی (ب)، نتایج زیر را به دست آورید:

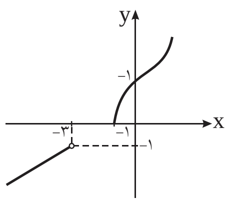
$$f(۱) = ۲ \Rightarrow f(f(۱)) = f(۲)\ ,\ f(f(۱)) = ۳ \Rightarrow f(۲) = ۳$$
$$f(f(۲)) = ۳ \times ۲ = ۶\ ,\ f(۲) = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۶$$
$$f(f(۳)) = ۳ \times ۳ = ۹\ ,\ f(۳) = ۶ \Rightarrow f(۶) = ۹$$
$$f(f(۶)) = ۳ \times ۶ = ۱۸\ ,\ f(۶) = ۹ \Rightarrow f(۹) = ۱۸$$

که پاسخ مسأله است.

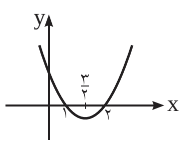
۲-۹: توابع یک به یک و تابع وارون

پاسخ ۱)

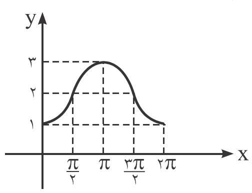
الف) با توجه به شکل تابع یک به یک است.



ب) با توجه به شکل، تابع در بازه‌های $(-\infty,\frac{3}{2}]$ یا $[\frac{3}{2},+\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این بازه‌ها یک به یک است.

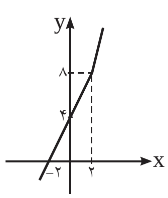


پ) با توجه به شکل، این تابع در محدوده‌های $2k\pi \le x \le (2k+1)\pi$ یا $(2k+1)\pi \le x \le (2k+2)\pi$ یک به یک است.

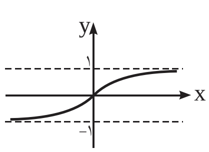


ت) $y_1 = y_2 \Rightarrow \log x_1 = \log x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ تابع یک به یک است

ث) با توجه به شکل، تابع یک به یک است.



ج) با توجه به شکل، تابع یک به یک است.

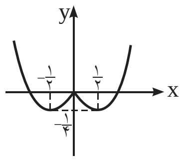


چ) $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^3 + 2x_1 - 1 = x_2^3 + 2x_2 - 1 \Rightarrow (x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ یا $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 2 = 0$

عبارت دوم به‌صورت $(x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 2$ می‌باشد که همواره مثبت است، بنابراین $x_1 = x_2$، پس تابع یک به یک است.

ح) با توجه به شکل، این تابع در محدوده‌های $x \geq \frac{1}{2}$، $\frac{1}{2} \geq x \geq 0$، $0 \geq x \geq -\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2} \geq x$ جداگانه یک به یک است.



پاسخ ۲)

الف) $y_1 = y_2 \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_1 + 1} = \dfrac{x_2}{x_2^2 + x_2 + 1} \Rightarrow x_1 x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 = x_2 x_1^2 + x_1 x_2 + x_2$

$\Rightarrow x_1 x_2 (x_2 - x_1) + x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$ یا $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow$ تابع یک به یک نیست

ب) $y_1 = y_2 \Rightarrow \dfrac{2^{x_1}}{2^{x_1} + 1} = \dfrac{2^{x_2}}{2^{x_2} + 1} \Rightarrow 2^{x_1 + x_2} + 2^{x_1} = 2^{x_1 + x_2} + 2^{x_2} \Rightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ تابع یک به یک است

پ) با توجه به ضابطه داریم $f(0) = f(\pi) = 1$، پس تابع یک به یک نیست.

پاسخ ۳)

الف) فرض می‌کنیم $f(x)$ یک به یک نباشد، بنابراین $x_1 \neq x_2$ وجود دارد که:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow gof$ یک به یک نیست

نتیجه‌ی به دست آمده با فرض تناقض دارد، بنابراین $f(x)$ یک به یک است.

ب) با در نظر گرفتن $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ داریم: $(gof)(x) = x$ (برای $x \geq 0$)، به این ترتیب f و gof یک‌به‌یک‌اند، اما g یک‌به‌یک نیست.

پاسخ ۴)

الف) $h(x_2) = h(x_1) \Rightarrow f(x_2) - g(x_2) = f(x_1) - g(x_1) \Rightarrow$ لزوماً یک به یک نیست

مثال نقض: $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x + 2$

ب) $h(x_2) = h(x_1) \Rightarrow f(x_2)g(x_2) = f(x_1)g(x_1) \Rightarrow$ لزوماً یک به یک نیست

مثال نقض: $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x - 1$

پ) $h(x_2) = h(x_1) \Rightarrow \dfrac{f(x_2)}{g(x_2)} = \dfrac{f(x_1)}{g(x_1)} \Rightarrow$ لزوماً یک به یک نیست

مثال نقض: $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

ت) $f(g(x_2)) = f(g(x_1)) \Rightarrow g(x_2) = g(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow fog$ یک به یک است

ث) $g(f(x_2)) = g(f(x_1)) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow gof$ یک به یک است

پاسخ ۵)

یک به یک بودن را بررسی می‌کنیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{-x_1}{2} = \frac{-x_2}{2} \text{ یا } \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 1}{2} \text{ یا } \frac{-x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{یا} \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

معادله‌ی دوم با شرط $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ جواب ندارد، بنابراین: $x_1 = x_2$، پس تابع یک‌به‌یک است.

پاسخ ۶)

فرض کنید $f(n_۱)=f(n_۲)$، حال از معادله‌ی فرض داریم:

$$\begin{cases} f(f(n_۱)+f(m)+f(k))=n_۱+m+k \\ f(f(n_۲)+f(m)+f(k))=n_۲+m+k \end{cases} \xrightarrow{f(n_۱)=f(n_۲)} n_۱+m+k=n_۲+m+k$$

پس $n_۱=n_۲$، در نتیجه تابع یک به یک است. حال دقت کنید که:

$$\begin{cases} f(f(n+۱)+f(۱)+f(k))=n+۲+k \\ f(f(n)+f(۲)+f(k))=n+۲+k \end{cases}$$

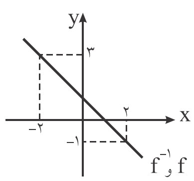
با توجه به دو تساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

$$f(f(n+۱)+f(۱)+f(k))=f(f(n)+f(۲)+f(k))$$

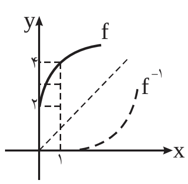
$$\xrightarrow{f \text{ یک به یک}} f(n+۱)+f(۱)+f(k)=f(n)+f(۲)+f(k) \Rightarrow f(n+۱)-f(n)=f(۲)-f(۱)$$

پاسخ ۷)

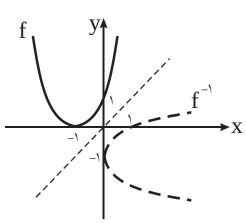
الف) $f^{-۱}$ تابع وارون f است.



ب) $f^{-۱}$ تابع وارون f است.



پ) $f^{-۱}$ تابع وارون f نیست.



پاسخ ۸)

باید در هر مورد یک‌به‌یک بودن توابع را بررسی کنیم:

الف)با توجه به آن‌که $f(۰)=f(۱)=۱$، پس تابع یک‌به‌یک نیست، در نتیجه وارون‌پذیر نیز نمی‌باشد.

ب) چندجمله‌ای‌های درجه‌ی زوج قطعاً غیریک‌به‌یک‌اند. با استفاده از مثال $f(۰)=f(-۱)=۱$ نیز این مطلب را می‌توانید نشان دهید.

پاسخ ۹)

وارون تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=mx+n \Rightarrow x=\frac{f(x)-n}{m} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{m}x-\frac{n}{m} \xrightarrow{f^{-۱}(x)=ax+b} a=\frac{۱}{m}$$

پاسخ ۱۰)

فرض می‌کنیم f یک‌به‌یک نباشد، در این صورت $x_۱ \neq x_۲$ وجود دارد که:

$$f(x_۱)=f(x_۲)$$

در این صورت $x_۱<x_۲$ یا $x_۱>x_۲$ که با توجه به نزولی اکید بودن f در هر صورت $f(x_۱)\neq f(x_۲)$ که با نتیجه‌ی بالا متناقض است، بنابراین f یک‌به‌یک است.

$f^{-۱}$ نیز نزولی اکید است. برای اثبات فرض کنید $a_۱<a_۲$ دو عدد در دامنه‌ی $f^{-۱}$ باشند. در این صورت اعداد $x_۱$ و $x_۲$ وجود دارند که $f(x_۱)=a_۱$ و $f(x_۲)=a_۲$. چون $a_۱<a_۲$، از نزولی اکید بودن f نتیجه می‌گیریم $x_۱>x_۲$. هم‌چنین با توجه به تعریف تابع وارون

داریم $f^{-۱}(a_۱)=x_۱$ و $f^{-۱}(a_۲)=x_۲$. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که اگر $a_۱<a_۲$، آن‌گاه $f^{-۱}(a_۱)>f^{-۱}(a_۲)$. پس تابع $f^{-۱}$ نزولی اکید است.

پاسخ ۱۱)

الف) از طرفین رابطه‌ی $f(-x)=-f(x)$، $f^{-۱}$ می‌گیریم، داریم:

$$f^{-۱}(f(-x))=f^{-۱}(-f(x))\Rightarrow -x=f^{-۱}(-f(x))$$

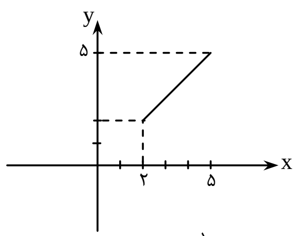
با توجه به رابطه‌ی $f^{-۱}(f(x))=x$ داریم:

$$-f^{-۱}(f(x))=f^{-۱}(-f(x))\xrightarrow{f(x)=a}-f^{-۱}(a)=f^{-۱}(-a)\Rightarrow$$ فرد است $f^{-۱}$

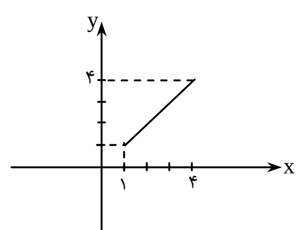
ب) اگر دامنه‌ی تابعی زوج، بیش‌تر از یک عضو داشته باشد، قطعاً اعدادی چون a و $-a$ در دامنه‌ی آن حضور دارند که $f(a)=f(-a)$. پس تابع یک‌به‌یک نیست، در نتیجه وارون‌پذیر هم نیست. پس دامنه‌ی تابع زوج وارون‌پذیر یا شامل یک عضو است، یا عضوی ندارد. پس هر تابع زوج وارون‌پذیر یا فقط شامل یک زوج مرتب $(۰,b)$ است $(b\in R)$ یا تابعی تهی است. اگر بخواهیم وارون یک تابع زوج غیرتهی، خود تابعی زوج باشد باید داشته باشیم $b=۰$.

پاسخ ۱۲)

هر دو عبارت $(fof^{-۱})(x)$ و $(f^{-۱}of)(x)$ برابر x می‌شوند. ولی دامنه‌ی $fof^{-۱}$ برابر دامنه‌ی $f^{-۱}$ (یا همان برد f) است و دامنه‌ی $f^{-۱}of$ برابر دامنه‌ی f است.



$y=(f^{-۱}of)(x)$



$y=(fof^{-۱})(x)$

پاسخ ۱۳)

الف) $y=x^۵\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است $\Rightarrow$ وارون‌پذیر است $\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۵]{x}$

ب) ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x)=(x-۲)^۳+۸$ می‌توانیم بنویسیم. تابع به وضوح وارون‌پذیر است و داریم:

$$y=(x-۲)^۳+۸\Rightarrow x-۲=\sqrt[۳]{y-۸}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x-۸}$$

پ) $y_۱=y_۲\Rightarrow \dfrac{۳}{x_۱^۳+۲}=\dfrac{۳}{x_۲^۳+۲}\Rightarrow x_۱^۳+۲=x_۲^۳+۲\Rightarrow x_۱^۳=x_۲^۳\Rightarrow x_۱=x_۲\Rightarrow$ تابع وارون‌پذیر است

$$y=\frac{۳}{x^۳+۲}\Rightarrow x^۳+۲=\frac{۳}{y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{۳}{y}-۲}$$

ت) چون $f(۰)=f(\sqrt{۲})=۰$، پس تابع وارون‌پذیر نیست.

ث) دامنه‌ی تابع $x\geq\sqrt{۲}$ است و برای اثبات یک‌به‌یک بودن تابع داریم:

$$f(x_۱)=f(x_۲)=\sqrt[۴]{x_۱}\times\sqrt[۴]{{x_۱}^۳-۲x_۱}=\sqrt[۴]{x_۲}\times\sqrt{{x_۲}^۳-۲x_۲}\Rightarrow\sqrt[۴]{{x_۱}^۴-۲{x_۱}^۲}=\sqrt[۴]{x_۲^۴-۲{x_۲}^۲}$$

$$\Rightarrow {x_۱}^۴-۲{x_۱}^۲={x_۲}^۴-۲{x_۲}^۲\Rightarrow {x_۱}^۴-{x_۲}^۴-۲({x_۱}^۲-{x_۲}^۲)=۰\Rightarrow({x_۱}^۲-{x_۲}^۲)({x_۱}^۲+{x_۲}^۲-۲)=۰$$

از آن‌جا که $x\geq\sqrt{۲}$، پرانتز دوم همواره بزرگ‌تر از صفر است، بنابراین باید داشته باشیم:

$${x_۱}^۲-{x_۲}^۲=۰\xrightarrow{x\geq\sqrt{۲}}x_۱=x_۲$$

بنابراین این تابع یک‌به‌یک است. برای به دست آوردن معکوس تابع این‌گونه عمل می‌کنیم:

$$y=\sqrt[۴]{\frac{x^۲}{x}}\times\sqrt[۴]{x^۳-۲x}=\sqrt[۴]{x^۴-۲x^۲}=\sqrt[۴]{x^۴-۲x^۲+۱-۱}=\sqrt[۴]{(x^۲-۱)^۲-۱}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt[۴]{(x^۲-۱)^۲-۱}\Rightarrow y^۴=(x^۲-۱)^۲-۱\Rightarrow(x^۲-۱)=\sqrt{y^۴+۱}\Rightarrow x=\sqrt[۲]{\sqrt{y^۴+۱}+۱}$$

بنابراین: $f^{-۱}(x)=\sqrt[۲]{\sqrt{x^۴+۱}+۱}$

ج) ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x)=\sqrt{(\sqrt{x+۱}+۱)^۲-۱}$ می‌توانیم بنویسیم.

$$y=\sqrt{(\sqrt{x+۱}+۱)^۲-۱}\Rightarrow y^۲+۱=(\sqrt{x+۱}+۱)^۲\Rightarrow\sqrt{x+۱}+۱=\sqrt{y^۲+۱}$$
$$\Rightarrow x=(\sqrt{y^۲+۱}-۱)^۲-۱$$

در روند بالا چون x به صورت منحصربه‌فرد برحسب y به دست آمده است، پس تابع وارون‌پذیر است. هم‌چنین نتیجه می‌گیریم:

$$f^{-۱}(x)=(\sqrt{x^۲+۱}-۱)^۲-۱$$

چ) تابع وارون‌پذیر است و داریم:

$$y=\log(x^۳-۱)\Rightarrow x^۳-۱=۱۰^y\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۱۰^y+۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۱۰^x+۱}$$

خ) ابتدا نشان می‌دهیم تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow ۱۲(x_۱^۲-x_۲^۲)-۳(\frac{۱}{x_۲^۲}-\frac{۱}{x_۱^۲})=۰\Rightarrow ۳(x_۱^۲-x_۲^۲)(\frac{۴x_۱^۲x_۲^۲-۱}{x_۱^۲x_۲^۲})=۰$$

چون $x_۱,x_۲\le -۲$، پس پرانتز دوم همواره غیرصفر است، بنابراین $x_۱^۲=x_۲^۲$، در نتیجه $x_۱=x_۲$.

حال ضابطه‌ی تابع وارون را به‌دست می‌آوریم:

$$y=۱۲x^۲+\frac{۳}{x^۲}\Rightarrow ۱۲x^۴-x^۲y+۳=۰\Rightarrow x^۲=\frac{y\pm\sqrt{y^۲-۱۴۴}}{۲۴}$$
$$\xrightarrow{x^۲\ge۴}x^۲=\frac{y+\sqrt{y^۲-۱۴۴}}{۲۴}$$
$$\xrightarrow{x<۰}x=-\sqrt{\frac{y+\sqrt{y^۲-۱۴۴}}{۲۴}}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^۲-۱۴۴}}{۲۴}}$$

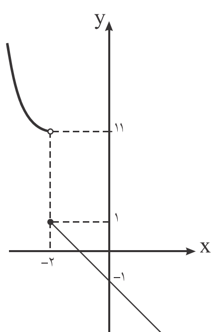
پاسخ ۱۴)

الف) هر دو ضابطه به تنهایی یک‌به‌یک‌اند، ولی تابع در کل $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر نیست، زیرا محدوده‌ی برد دو ضابطه اشتراک دارد. مثلاً داریم $f(۰)=f(۱)=۱$.

ب) هر دو ضابطه به تنهایی یک‌به‌یک‌اند و برد آن‌ها اشتراکی ندارد، پس تابع وارون‌پذیر است.

حال داریم:

$$\begin{cases} x<۰: \frac{۱}{x}=y\Rightarrow x=\frac{۱}{y} & y<۰\\ x\ge۰: y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^۲ & y\ge۰\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x<۰\\ x^۲ & x\ge۰\end{cases}$$



پ) با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع وارون‌پذیر است. حال ضابطه‌ی تابع وارون را به‌دست می‌آوریم:

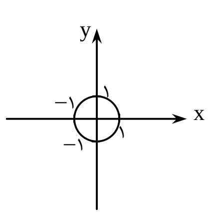
$$\begin{cases} x<-۲: y=(x-۱)^۲+۲\Rightarrow|x-۱|=\sqrt{y-۲}\Rightarrow x=-\sqrt{y-۲}+۱ & y>۱۱\\ x\ge-۲: y=-|x+۳|+۲\xrightarrow{x+۳\ge۱}y=-x-۱\Rightarrow x=-y-۱ & y\le۱\end{cases}$$

بنابراین:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}۱-\sqrt{x-۲} & x>۱۱\\ -x-۱ & x\le۱\end{cases}$$

ت) با توجه به آن‌که $f(۱)=f(-۱)=۱$، تابع وارون پذیر نیست.

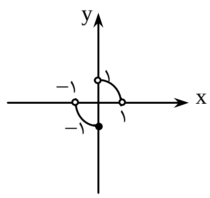
پاسخ ۱۵)



می‌توان ربع دایره‌های ناحیه‌ی دوم و چهارم را حذف کرد. در این صورت شکل دوم به دست می‌آید که تابعی وارون‌پذیر را نشان می‌دهد. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^{۲}} & ۰<x<۱\\ -\sqrt{۱-x^{۲}} & -۱<x\leq ۰\end{cases}$$

از طرفی چون این نمودار نسبت به خط $y=x$ متقارن است، ضابطه‌ی تابع وارون نیز همین ضابطه‌ی f می‌شود، تنها با این فرق که در ضابطه‌ی دوم آن محدوده به $-۱\leq x<۰$ تغییر می‌کند.



پاسخ ۱۶)

$$(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=\frac{x}{۳}+۱+۲=\frac{x}{۳}+۳$$

برای به دست آوردن ضابطه‌ی gof، ابتدا ضابطه‌ی $(gof)^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم، سپس آن را وارون می‌کنیم:

$$(gof)^{-۱}(x)=f^{-۱}(g^{-۱}(x))=\frac{x+۲}{۳}+۱$$

$$y=\frac{x+۲}{۳}+۱\Rightarrow ۳(y-۱)=x+۲\Rightarrow x=۳y-۵$$

پس $(gof)(x)=۳x-۵$.

پاسخ ۱۷)

$$f_۱(x)=f_۲(x)\Rightarrow \frac{x_۱^{۲}-۳}{x_۱^{۲}+۳}=\frac{x_۲^{۲}-۳}{x_۲^{۲}+۳}\Rightarrow x_۱=\pm x_۲\Rightarrow$$ یک‌به‌یک نیست، بنابراین وارون‌پذیر نیست

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{\sqrt{۱-۲x}-۳}{\sqrt{۱-۲x}+۳}$$

$$(fog)(x_۱)=(fog)(x_۲)\xrightarrow{t=\sqrt{۱-۲x}}\frac{t_۱-۳}{t_۱+۳}=\frac{t_۲-۳}{t_۲+۳}\Rightarrow t_۱=t_۲$$

$$\Rightarrow\sqrt{۱-۲x_۱}=\sqrt{۱-۲x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲\Rightarrow$$ یک به یک است.

برای به دست آوردن دامنه‌ی $(fog)^{-۱}$ کافی است برد fog را به دست آوریم. داریم:

$$(fog)(x)=\frac{\sqrt{۱-۲x}-۳}{\sqrt{۱-۲x}+۳}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۱-۲x}-۳}{\sqrt{۱-۲x}+۳}\Rightarrow y=۱-\frac{۶}{\sqrt{۱-۲x}+۳}$$

$$\sqrt{۱-۲x}+۳\geq ۳\Rightarrow ۰<\frac{۶}{\sqrt{۱-۲x}+۳}\leq ۲\Rightarrow -۱\leq y<۱$$

پس $D_{(fog)^{-۱}}=[-۱,۱)$.

پاسخ ۱۸)

الف) $$g(x)=۲f(x+۵)+۳\Rightarrow f(x+۵)=\frac{g(x)-۳}{۲}\Rightarrow (f^{-۱}of)(x+۵)=f^{-۱}(\frac{g(x)-۳}{۲})$$

$$\Rightarrow x+۵=f^{-۱}(\frac{g(x)-۳}{۲})\Rightarrow x=f^{-۱}(\frac{g(x)-۳}{۲})-۵\Rightarrow g^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{x-۳}{۲})-۵$$

ب) $$\frac{۱}{۲}g(x)=f(\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}+۳)\Rightarrow f^{-۱}(\frac{۱}{۲}g(x))=\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}+۳\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=f^{-۱}(\frac{۱}{۲}g(x))-۳$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{x}}=\frac{۱}{f^{-۱}(\frac{۱}{۲}g(x))-۳}-۱\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{x}}=\frac{-f^{-۱}(\frac{۱}{۲}g(x))+۴}{f^{-۱}(\frac{۱}{۲}g(x))-۳}\Rightarrow x=(\frac{f^{-۱}(\frac{۱}{۲}g(x))-۳}{۴-f^{-۱}(\frac{۱}{۲}g(x))})^{۲}\Rightarrow g^{-۱}(x)=(\frac{f^{-۱}(\frac{۱}{۲}x)-۳}{۴-f^{-۱}(\frac{۱}{۲}x)})^{۲}$$

پاسخ ۱۹)

الف) درست است، زیرا نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند. پس اگر نقطه‌ی A هم روی نمودار f و هم روی نمودار $f^{-۱}$ باشد،

قرینه‌ی A نسبت به خط $y=x$ (که آن‌را A' می‌نامیم) نیز روی هر نمودار واقع است.

ب) مثال نقض $y=-x+۱$ را داریم. وارون این تابع با خود تابع یکسان است، پس دو نمودار بی‌شمار نقطه‌ی تلاقی دارند.

پاسخ ۲۰)

الف) تابع صعودی اکید است، پس تمام نقاط تلاقی f و $f^{-۱}$ روی خط $y=x$ واقع‌اند. پس نمودار تابع و خط $y=x$ را قطع می‌دهیم.

$$x^{۳}+۲x+۲=x \Rightarrow x^{۳}+x+۲=۰ \Rightarrow (x+۱)(x^{۲}-x+۲)=۰ \Rightarrow x=-۱$$

ب) با رسم نمودار تابع مشخص می‌شود که نمودار تابع نسبت به خط $y=x$ متقارن است. پس نمودارهای f و $f^{-۱}$ برهم منطبق می‌شوند. بنابراین همه‌ی نقاط روی نمودار f، همان نقاط تلاقی نمودارهای f و $f^{-۱}$ هستند.

پاسخ ۲۱)

با یک سهمی مواجه‌ایم که به ازای $x \geq \frac{۱}{۲}$ به وضوح تابع یک‌به‌یک می‌شود (نمودار تابع را رسم کنید). حال x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=x^{۲}-x+۱ \Rightarrow y=(x-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴} \Rightarrow |x-\frac{۱}{۲}|=\sqrt{y-\frac{۳}{۴}} \xrightarrow{x\geq\frac{۱}{۲}} x-\frac{۱}{۲}=\sqrt{y-\frac{۳}{۴}} \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}+\sqrt{y-\frac{۳}{۴}}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}+\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}$$

برای به‌دست آوردن نقاط تلاقی دو نمودار به این توجه می‌کنیم که اگر نقطه‌ی (x,y) هم در f و هم در $f^{-۱}$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}(x,y)\in f \Rightarrow y=x^{۲}-x+۱\\(x,y)\in f^{-۱} \Rightarrow (y,x)\in f \Rightarrow x=y^{۲}-y+۱\end{cases} \Rightarrow y-x=x^{۲}-x-y^{۲}+y \Rightarrow x^{۲}-y^{۲}=۰ \Rightarrow x=\pm y$$

اگر $x=-y$، داریم:

$$y=-x \ ,\ y=x^{۲}-x+۱ \Rightarrow x^{۲}+۱=۰ \Rightarrow \text{غیر ممکن}$$

پس $x=y$ و در نتیجه:

$$x^{۲}-x+۱=x \Rightarrow (x-۱)^{۲}=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=۱$$

پس نقطه‌ی $(۱,۱)$ نقطه‌ی تلاقی دو نمودار تابع است.

پاسخ ۲۲)

الف) اگر t دمای هوای بر حسب سانتی‌گراد باشد، دمای هوا بر حسب فارنهایت $\frac{۹}{۵}t+۳۲$ می‌شود. پس می‌توانیم تابع را با ضابطه‌ی $f(t)=\frac{۹}{۵}t+۳۲$ در نظر بگیریم. چون $۲۰ \leq t \leq ۳۰$، داریم: $D_f=[۲۰,۳۰]$ و برای برد تابع داریم:

$$۲۰ \leq t \leq ۳۰ \Rightarrow ۳۶ \leq \frac{۹}{۵}t \leq ۵۴ \Rightarrow ۶۸ \leq \frac{۹}{۵}t+۳۲ \leq ۸۶ \Rightarrow ۶۸ \leq f(t) \leq ۸۶ \Rightarrow R_f=[۶۸,۸۶]$$

ب) برای به‌دست آوردن سانتی‌گراد بر حسب فارنهایت داریم:

$$F=\frac{۹}{۵}C+۳۲ \Rightarrow ۵F=۹C+۱۶۰ \Rightarrow C=\frac{۵F-۱۶۰}{۹}$$

پس اگر قرار دهیم: $g(t)=\frac{۵t-۱۶۰}{۹}$، این تابع دمای هوا بر حسب فارنهایت را به دما بر حسب سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. واضح است که $D_g=[۶۸,۸۶]$ و $R_g=[۲۰,۳۰]$، زیرا ورودی تابع g دمای هوا بر حسب فارنهایت است و خروجی آن دما بر حسب سانتی‌گراد.

پ) واضح است که عملکرد دو تابع وارون یکدیگر است. برای اطمینان fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

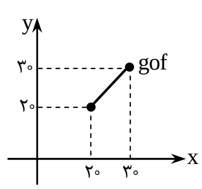
$$(fog)(t)=f(g(t))=\frac{۹}{۵}(\frac{۵t-۱۶۰}{۹})+۳۲=t$$

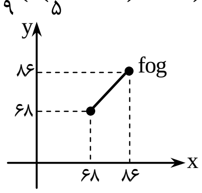
$$(gof)(t)=g(f(t))=\frac{۱}{۹}(۵(\frac{۹}{۵}t+۳۲)-۱۶۰)=t$$

می‌بینید که $(fog)(x)=x$ و $(gof)(x)=x$.

داریم: $D_{fog}=D_g=[۶۸,۸۶]$ و $D_{gof}=D_f=[۲۰,۳۰]$.

نمودار دو تابع ترکیب را نیز مشاهده می‌کنید:





۲–۱۰: توابع متناوب

پاسخ ۱)
باید کوچک‌ترین عدد مثبت T را بیابیم، به گونه‌ای که $f(x+T)=f(x)$. داریم:

$$\tan(-(۳x+۳T))=\tan(-۳x)\Rightarrow -(۳x+۳T)=k\pi-۳x\Rightarrow T=-k\frac{\pi}{۳}$$

پس $T\in\{\cdots,\frac{-۲\pi}{۳},\frac{-\pi}{۳},۰,\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳},\cdots\}$ که کوچک‌ترین عدد مثبت در این مجموعه $\frac{\pi}{۳}$ است.

پاسخ ۲)
برای $k=۱$ داریم:

$$k=۱: f(x+T)=f(x)$$

$$\begin{cases}\text{فرض}: k=n: f(x+nT)=f(x)\\ \text{حکم}: k=n+۱: f(x+(n+۱)T)=f(x)\end{cases}$$

با توجه به فرض $f(x+nT)=f(x)$ و با استفاده از نتیجه‌ی $f(x+T)=f(x)$ داریم:

$$f(x+nT+T)=f(x)\Rightarrow f(x+(n+۱)T)=f(x)$$

در نتیجه اگر T دوره‌ی تناوب تابع f باشد، nT نیز دوره‌ی تناوب تابع f است.

پاسخ ۳)
با توجه به فرض داریم:

$$f(x+T)=-f(x)\xrightarrow{x\to x+T}f((x+T)+T)=-(f(x+T))\Rightarrow f(x+۲T)=-f(x+T)=f(x)$$

در نتیجه $۲T$ دوره‌ی تناوب تابع f می‌باشد.

پاسخ ۴)

الف) $T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi \quad , \quad T_۲=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow T_۱=\frac{۱۲\pi}{۳},T_۲=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow T=۴\pi$

ب) $T_۱=\frac{\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\pi}{۳} \quad , \quad T_۲=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{۳},T_۲=\frac{۳\pi}{۳}\Rightarrow T=\frac{۶\pi}{۳}\Rightarrow T=۲\pi$

پ) $T_۱=\frac{۲\pi}{۲}=\pi \quad , \quad T_۲=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow T=\pi$

ت) $T_۱=\frac{\pi}{\pi}=۱ \quad , \quad T_۲=\frac{\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۲\Rightarrow T=۲$

ث) $T_۱=\frac{۲\pi}{\pi}=۲ \quad , \quad T_۲=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow$ تابع متناوب نیست.

ج) $f(x)=۱\Rightarrow$ دوره‌ی تناوب اصلی ندارد

پاسخ ۵)

الف) $f(x)=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}+۱\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$

ب) $T=\frac{\pi}{۳}$

پ) داریم $T_1 = \frac{\pi}{۲}, T_۲ = \frac{\pi}{۲}$، ولی چون در وسط این فاصله، سینوس و کسینوس به یک‌دیگر تبدیل می‌شوند نتیجه می‌گیریم $T = \frac{\pi}{۴}$. در واقع:

$$f(x+\frac{\pi}{۴}) = |\sin(۲x+\frac{\pi}{۲})| + |\cos(۲x+\frac{\pi}{۲})| = |\cos ۲x| + |\sin ۲x| = f(x)$$

ت) $T_۱ = \frac{\pi}{۲} \ , \ T_۲ = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow T = \frac{\pi}{۲}$

ث) $f(x) = (\underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱})(\sin^۴ x - \sin^۲ x\cos^۲ x + \cos^۴ x)$

$$\Rightarrow f(x) = (\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۲ - ۳\sin^۲ x\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x \Rightarrow T = \frac{\pi}{۲}$$

ج) $T_۱ = ۲\pi , T_۲ = \pi \Rightarrow T = ۲\pi$

چ) چون $۲x$ دوره‌ی تناوب ندارد، بنابراین f متناوب نیست.

ح) $f(x) = \frac{۱}{۲}(\sin(۴x+۶x) + \sin(۴x-۶x)) = \frac{۱}{۲}\sin ۱۰x - \frac{۱}{۲}\sin ۲x \Rightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{۱۰} \ , \ T_۲ = \frac{۲\pi}{۲} \Rightarrow T = \pi$

خ) $f(x) = \frac{۱-\cos x}{۱+\cos x} = \frac{۲\sin^۲ \frac{x}{۲}}{۲\cos^۲ \frac{x}{۲}} = \tan^۲ \frac{x}{۲} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۲\pi$

د) $f(x) = \tan ۲x - \cot ۲x = -۲\cot ۴x \Rightarrow T = \frac{\pi}{۴}$

پاسخ ۶)

الف) $f(x) = ۲(\frac{x}{۲} - [\frac{x}{۲}]) \Rightarrow T = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$

ب) $f(x) = \underbrace{۳x - [۳x]}_{T_۱} + \underbrace{x - [x]}_{T_۲} \Rightarrow T_۱ = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۳ \ , \ T_۲ = ۱ \Rightarrow T = ۳$

پ) $f(x) = \underbrace{۲x - [۲x]}_{T_۱} - \underbrace{\tan(-\pi x)}_{T_۲} \Rightarrow T_۱ = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲ \ , \ T_۲ = \frac{\pi}{\pi} = ۱ \Rightarrow T = ۲$

پاسخ ۷)

الف) دوره‌ی تناوب $y = \sin^۲(\frac{\pi}{۲}x)$ برابر ۲ است. پس برای مقادیر گویای x با دوره‌ی تناوب ۲ داریم $f(x+۲) = f(x)$. هم‌چنین برای مقادیر گنگ x نیز به وضوح داریم $f(x+۲) = f(x)$، پس دوره‌ی تناوب تابع ۲ است.

ب) دوره‌ی تناوب $y = \sin(\frac{۲\pi}{۳}x)$ برابر ۳ است، پس برای مقادیر گویای x داریم $f(x+۳) = f(x)$. دوره‌ی تناوب $y = \cos^۲(\frac{۳\pi}{۴}x)$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس برای مقادیر گنگ x داریم $f(x+\frac{۴}{۳}) = f(x)$. به این ترتیب دوره‌ی تناوب تابع اصلی از روش ک.م.گیری به‌دست می‌آید:

$$T_۱ = ۳ = \frac{۹}{۳} \ , \ T_۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow T = \frac{۳۶}{۳} \Rightarrow T = ۱۲$$

۲–۱۱: تابع جزء صحیح

پاسخ ۱)

الف) $[\pi] - ۴ = ۳ - ۴ = -۱$

ب) $[\log ۴۰] + [\log \sqrt{۱۳}] = ۱ + ۰ = ۱$

پ) $[\sqrt[۳]{۷۱}] + [\sqrt[۴]{۶۷}] = ۴ + ۲ = ۶$

پاسخ ۲)

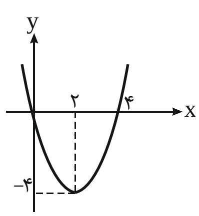
از فرض نتیجه می‌گیریم:

$$-۲ \le \frac{۱-۴x}{۳} < -۱ \Rightarrow -۶ \le ۱-۴x < -۳ \Rightarrow -۷ \le -۴x < -۴ \Rightarrow \frac{-۷}{۴} \le -x < -۱$$

با توجه به آن‌که $-۲ < -\frac{۷}{۴}$، پس $[-x] = -۲$.

ب) ابتدا محدوده‌ی تغییر x را به‌دست می‌آوریم:

$$[۲x+۱] = ۵ \Rightarrow ۵ \le ۲x+۱ < ۶ \Rightarrow ۲ \le x < \frac{۵}{۲}$$



حال باید محدوده‌ی تغییر عبارت $x^۲ - ۴x$ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به نمودار $y = x^۲ - ۴x$، به ازای $۲ \le x < \frac{۵}{۲}$ داریم:

$$-۴ \le x^۲ - ۴x < \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ - ۴ \times \frac{۵}{۲} \Rightarrow -۴ \le x^۲ - ۴x < -۳/۷۵ \Rightarrow [x^۲ - ۴x] = -۴$$

پاسخ ۳)

الف) می‌دانیم:

$$[\sqrt{۱}] = [\sqrt{۲}] = [\sqrt{۳}] = ۱$$
$$[\sqrt{۴}] = [\sqrt{۵}] = \cdots = [\sqrt{۸}] = ۲$$
$$\vdots$$
$$[\sqrt{(n-۱)^۲}] = [\sqrt{(n-۱)^۲+۱}] = \cdots = [\sqrt{n^۲-۱}] = (n-۱)$$

به این ترتیب مجموع مورد نظر برابر است با:

$$۳ \times ۱ + ۵ \times ۲ + \cdots + (۲n-۱)(n-۱)$$
$$= (۲\times۱+۱)\times۱ + (۲\times۲+۱)\times۲ + \cdots + (۲(n-۱)+۱)(n-۱)$$
$$= ۲(۱^۲+۲^۲+\cdots+(n-۱)^۲) + (۱+۲+\cdots+(n-۱))$$
$$= ۲\times\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶} + \frac{(n-۱)n}{۲} = \frac{n(n-۱)(۴n+۱)}{۶}$$

ب) با توجه به آن‌که $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲+۳n}] = [\sqrt[۳]{(n+۱)^۳-۱}] = n$ (زیرا $n < \sqrt[۳]{(n+۱)^۳-۱} < n+۱$)، قسمت اول مسأله واضح است.

به این ترتیب داریم:

$[\sqrt[۳]{۱}] = [\sqrt[۳]{۲}] = \cdots = [\sqrt[۳]{۷}] = ۱ \leftarrow$ ۷ جمله

$[\sqrt[۳]{۸}] = [\sqrt[۳]{۹}] = \cdots = [\sqrt[۳]{۲۶}] = ۲ \leftarrow$ ۱۹ جمله

$[\sqrt[۳]{n^۳}] = \cdots = [\sqrt[۳]{(n+۱)^۳-۱}] = n \leftarrow$ $۳n^۲+۳n+۱$ جمله

(دقت کنید که $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$). به این ترتیب مجموع S برابر است با:

$$(3\times 1^2 + 3\times 1 + 1)\times 1 + (3\times 2^2 + 3\times 2 + 1)\times 2 + \cdots + (3n^2 + 3n + 1)n$$
$$= 3(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n)$$
$$= 3\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

پاسخ ۴)

از فرض‌های سؤال نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} 20 \le 10x < 21 \\ 20 \le 2x^2 - 2x + 8 < 21 \end{cases} \Rightarrow 40 \le 2x^2 + 8x + 8 < 42$$

حال با تقسیم دو طرف نامساوی‌ها بر ۲ داریم:

$$20 \le x^2 + 4x + 4 < 21 \Rightarrow 21 \le x^2 + 4x + 5 < 22 \Rightarrow [x^2 + 4x + 5] = 21$$

پاسخ ۵)

اگر $x \ge 0$، آن‌گاه نامساوی به $[x] \ge [x]$ تبدیل می‌شود که به وضوح برقرار است.

اگر $x < 0$، آن‌گاه نامساوی به $-[x] \ge [-x]$ تبدیل می‌شود. چون $[x] + [-x]$ برابر -1 یا 0 است، این نامساوی نیز برقرار است.

پاسخ ۶)

الف) با فرض $[\frac{x}{n}] = k$ داریم:

$$k \le \frac{x}{n} < k + 1 \Rightarrow nk \le x < nk + n \Rightarrow [x] \in \{nk, nk+1, nk+2, \ldots, nk+n-1\}$$

بنابراین $[x] = nk + r$ که r عددی صحیح است و $0 \le r \le n-1$. حال می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \frac{[x]}{n} = \frac{nk+r}{n} = k + \frac{r}{n} \\ 0 \le r \le n-1 \Rightarrow 0 \le \frac{r}{n} \le \frac{n-1}{n} < 1 \end{cases} \Rightarrow k \le \frac{[x]}{n} < k+1 \Rightarrow [\frac{[x]}{n}] = k$$

با مقایسه‌ی نتیجه‌ی بالا و فرض اولیه‌ی $[\frac{x}{n}] = k$ حکم ثابت می‌شود.

ب) کافی است در نتیجه‌ی قسمت (الف) به جای x، $a + x$ قرار دهید. در این صورت می‌توان نوشت:

$$[\frac{a+x}{n}] = [\frac{[a+x]}{n}] \xrightarrow[a\in\mathbb{Z}]{[a+x]=a+[x]} [\frac{a+x}{n}] = [\frac{a+[x]}{n}]$$

پاسخ ۷)

الف) $10 \le \frac{4x-1}{3} < 11 \Rightarrow 30 \le 4x - 1 < 33 \Rightarrow 31 \le 4x < 34 \Rightarrow \frac{31}{4} \le x < \frac{34}{4}$

ب) $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$

پ) $[\frac{3}{x} - 1] = 6 \Rightarrow [\frac{3}{x}] = 7 \Rightarrow 7 \le \frac{3}{x} < 8 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{x}{3} \le \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{3}{8} < x \le \frac{3}{7}$

ت) $[2x^2 + 4] = x + 10 \Rightarrow$ باید $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x^2 + 4 = x + 10 \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

ث) قرار می‌دهیم $[x] = \frac{3x}{5} = k$ که $k \in \mathbb{Z}$. حال داریم:

$$[x] = k \Rightarrow k \le x < k+1 \xrightarrow{x=\frac{5k}{3}} k \le \frac{5k}{3} < k+1 \Rightarrow \begin{cases} k \le \frac{5k}{3} \Rightarrow \frac{2k}{3} \ge 0 \Rightarrow k \ge 0 \\ \frac{5k}{3} < k+1 \Rightarrow 2k < 3 \Rightarrow k < \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{0, 1\}$$

پس با توجه به $x = \frac{5k}{3}$ نتیجه می‌گیریم $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{5}{3}$.

ج) با توجه به آن‌که $[\sin x] \in \{0, 1, -1\}$، از معادله نتیجه می‌گیریم $[x] \in \{0, 1, -1\}$، بنابراین $-1 \le x < 2$. حال در سه محدوده معادله را

حل می‌کنیم:

$$1)\ -1 \le x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ -1 < \sin x < 0 \Rightarrow [\sin x] = -1 \end{cases} \Rightarrow$$ $-1 \le x < 0$ جواب معادله است.

$$2)\ 0 \le x < 1 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \\ 0 \le \sin x < 1 \Rightarrow [\sin x] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ $0 \le x < 1$ جواب معادله است.

$$3)\ 1 \le x < 2 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \\ 0 < \sin x \le 1 \Rightarrow [\sin x] \in \{0,1\} \end{cases}$$

در محدوده‌ی سوم فقط در حالتی که $[\sin x] = 1$ معادله برقرار است. به ازای $1 \le x < 2$، این شرط برای $x = \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد. پس مجموعه جواب نهایی معادله $[-1,1) \cup \{\frac{\pi}{2}\}$ می‌شود.

چ) $[x] + [x] + [x] - [x] = 10 \Rightarrow 2[x] = 10 \Rightarrow [x] = 5 \Rightarrow 5 \le x < 6$

ح) $[2x + \frac{1}{2}] + [2x + \frac{1}{2} - 1] = 4 \Rightarrow [2x + \frac{1}{2}] + [2x + \frac{1}{2}] = 5 \Rightarrow 2[2x + \frac{1}{2}] = 5 \Rightarrow [2x + \frac{1}{2}] = \frac{5}{2}$ غ ق ق

$\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

خ) $[\frac{x}{2}] + 3 + [-\frac{x}{2}] = 5 \Rightarrow [\frac{x}{2}] + [-\frac{x}{2}] = 2$ غ ق ق $\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

د) معادله را به‌صورت $[x] = 2 + [-x] + [2x]$ می‌توانیم بنویسیم. حال در دو حالت معادله را حل می‌کنیم:

۱- اگر $x \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه:

$2x + (-x) + 2 = x \Rightarrow 2 = 0 \Rightarrow$ تناقض $\Rightarrow$ معادله ریشه ندارد

۲- اگر $x \notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه $[-x] = -1 - [x]$، بنابراین:

$[2x] + 1 = 2[x]$

حال با فرض $k \in \mathbb{Z}$، در دو حالت جدید معادله‌ی بالا را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} k < x < k + \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = k\ ,\ [2x] = 2k \xrightarrow{\text{معادله}} 2k + 1 = 2k \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ k + \frac{1}{2} < x < k + 1 \Rightarrow [x] = k\ ,\ [2x] = 2k + 1 \xrightarrow{\text{معادله}} 2k + 2 = 2k \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس معادله هیچ ریشه‌ای ندارد.

پاسخ ۸)

الف) در دو حالت نامعادله را حل می‌کنیم.

$1)\ -1 < x < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow$ نامعادله برقرار است.

$2)\ |x| \ge 1 \Rightarrow [x^2] > 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نامعادله}} [x] \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \xrightarrow{|x| \ge 1} x \ge 1$

پس مجموعه جواب نهایی نامعادله $(-1,+\infty)$ می‌شود.

ب) مقدار $[3x]$ در بازه‌هایی با طول $\frac{1}{3}$ و مقدار $[4x]$ در بازه‌هایی با طول $\frac{1}{4}$ تغییر می‌کند. به این ترتیب جدول زیر قابل تشکیل است:

x	…	-2	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{6}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$…
$[3x]$	-7	-6		-5		-4		-3		-2		-1		0		1
$[4x]$	-9	-8	-7		-6		-5	-4	-3		-2		-1	0	1	
$[3x] - [4x]$	2	2	1	2	1	2	1	1	0	1	0	1	0	0	-1	0
جواب			✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

$[-\frac{7}{4},-\frac{5}{3}) \cup [-\frac{6}{4},-\frac{4}{3}) \cup [-\frac{5}{4},+\infty)$ می‌شود.

پ) نامعادله را در دو حالت حل می‌کنیم:

۱- اگر $x \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه نامعادله به $۲x < ۱$ تبدیل می‌شود، پس $x < \frac{۱}{۲}$، در نتیجه $x \in \mathbb{Z}$ با شرط $x \le ۰$ جزو جواب‌های نامعادله‌اند.

۲- اگر $x \notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x] + [-x] = -۱$، بنابراین نامعادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$-۱ + [۲x] < ۱ \Rightarrow [۲x] < ۲ \Rightarrow [۲x] \le ۱ \Rightarrow ۲x < ۲ \Rightarrow x < ۱,\ x \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین مجموعه جواب نهایی $(-\infty, ۱)$ می‌شود.

ت) اگر $\sqrt[۴]{۲} \le x < \sqrt[۴]{۳}$، آن‌گاه $[x^۴] = ۲$ و $[x] = ۱$ و نامعادله برقرار نیست. هم‌چنین واضح است که با افزایش x، اختلاف مقـدار $[x^۴]$ از $[x]$ مرتباً بیش‌تر می‌شود، پس باید $x < \sqrt[۴]{۲}$ را بررسی می‌کنیم. حال داریم:

۱- اگر $۱ \le x < \sqrt[۴]{۲}$، آن‌گاه $[x] = [x^۴] = ۱$ و نامعادله برقرار است.

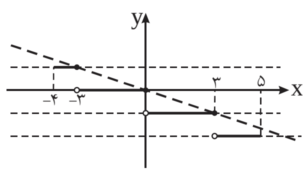
۲- اگر $۰ \le x < ۱$، آن‌گاه $[x] = [x^۴] = ۰$ و نامعادله برقرار است.

۳- اگر $x < ۰$، آن‌گاه $[x^۴] \ge ۰$ و $[x] < ۰$، پس نامعادله برقرار نیست.

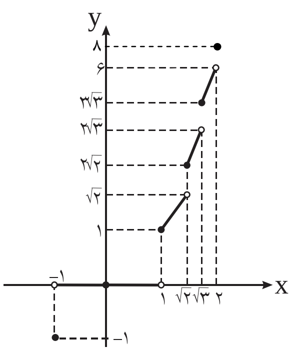
به این ترتیب مجموعه جواب نهایی نامعادله $[۰, \sqrt[۴]{۲})$ می‌شود.

پاسخ ۹)

الف)



ب)



پاسخ ۱۰)

الف) باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$([x] + \frac{۵}{۲})([x] - ۱) \ge ۰ \Rightarrow \begin{cases} [x] \ge ۱ \Rightarrow x \ge ۱ \\ [x] \le -\frac{۵}{۲} \Rightarrow [x] \le -۳ \Rightarrow x < -۲ \end{cases}$$

دامنه‌ی تابع برابر $(-\infty, -۲) \cup [۱, +\infty)$ است.

ب) باید $[x^۲] \ne ۰$، پس $[x^۲] \ge ۱$. بنابراین $x \ge ۱$ یا $x \le -۱$. حال باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\frac{[x]}{[x^۲]} \ge ۰ \xrightarrow{[x^۲] \ge ۱} [x] \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۰ \xrightarrow{|x| \ge ۱} x \ge ۱$$

پس دامنه‌ی تابع برابر $[۱, +\infty)$ است.

پ) باید $[x]^۳ - [x] \ge ۰$، بنابراین با جای‌گذاری $t = [x]$ داریم:

$$t^۳ - t \ge ۰ \Rightarrow t(t-۱)(t+۱) \ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \le t \le ۰ \ \text{یا}\ t \ge ۱$$

$$\begin{cases} -۱ \le [x] \le ۰ \Rightarrow -۱ \le x < ۱ \\ [x] \ge ۱ \Rightarrow x \ge ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} D_f = [-۱, +\infty)$$

پاسخ ۱۱)

الف) ابتدا برد تابع $g(x)=x^{۲}-۳x$ را می‌یابیم:

$$g(x)=(x-\frac{۳}{۲})^{۲}-\frac{۹}{۴}\Rightarrow g(x)\geq -\frac{۹}{۴}\Rightarrow [g(x)]\geq -۳$$

بنابراین برد تابع f مجموعه‌ی اعداد صحیح بزرگ‌تر از یا مساوی با -۳ است.

ب) ابتدا برد تابع $g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ را می‌یابیم که برابر است با $\mathbb{R}-\{۲\}$. بنابراین $[g(x)]$ هر عدد صحیحی می‌تواند باشد. پس برد تابع f برابر $\mathbb{Z}$ است.

پ) ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x)=(x+\frac{۱}{۲})-[x+\frac{۱}{۲}]-\frac{۱}{۲}$ می‌توانیم بنویسیم. حال داریم:

$$۰\leq u-[u]<۱\Rightarrow ۰\leq (x+\frac{۱}{۲})-[x+\frac{۱}{۲}]<۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\leq f(x)<\frac{۱}{۲}\Rightarrow R_f=[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$$

ت) به ازای مقادیر زوج یا فرد $[x]$ دو حالت برای تابع f پیش می‌آید که با توجه به آن‌که همواره $۰\leq x-[x]<۱$، داریم: $-۱<f(x)<۱$، پس $R_f=(-۱,۱)$.

ث) با توجه به آن‌که همواره $x=[x]+P_x$ (که $۰\leq P_x<۱$ جزء اعشاری x است)، بنابراین $f(x)=۲[x]+P_x$. بنابراین اگر قرار دهیم $[x]=k$، داریم: $f(x)=۲k+P_x$. با توجه به آن‌که k هر مقدار صحیحی می‌تواند باشد، نتیجه می‌گیریم:

$$R_f=\cdots\bigcup[-۴,-۳)\bigcup[-۲,-۱)\bigcup[۰,۱)\bigcup[۲,۳)\bigcup\cdots$$

ج) در سه حالت برد را بررسی می‌کنیم:

۱- اگر $x\geq ۱$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $[x]=n$ که $n\in\mathbb{N}$. در این صورت $f(x)=\frac{n}{x}$ و در نتیجه:

$$n\leq x<n+۱\Rightarrow \frac{n}{n+۱}<\frac{n}{x}\leq ۱\Rightarrow \frac{n}{n+۱}<f(x)\leq ۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$۱\leq x<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<f(x)\leq ۱$$

$$۲\leq x<۳\Rightarrow \frac{۲}{۳}<f(x)\leq ۱$$

با ادامه‌ی این روند نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x\geq ۱$ داریم: $\frac{۱}{۲}<f(x)\leq ۱$

۲- اگر $۰<x<۱$، آن‌گاه $f(x)=۰$.

۳- اگر $x<۰$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $[x]=-n$ که $n\in\mathbb{N}$. در این صورت $f(x)=\frac{x}{n}$ و در نتیجه شبیه قسمت (۱) نتیجه می‌گریم $-۱\leq f(x)<۰$، بنابراین برد تابع برابر $[-۱,۰]\bigcup(\frac{۱}{۲},۱]$ است.

پاسخ ۱۲)

برای برابری دو تابع، باید دامنه و ضابطه‌ی آن‌ها با هم برابر باشد. دامنه‌ی f و g هر دو $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس فقط باید ضابطه‌های آن‌ها را بررسی کنیم، داریم:

$$\begin{cases} x^{۲}<۱+x^{۲}\Rightarrow ۰\leq \frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}<۱\Rightarrow [\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}]=۰\Rightarrow f(x)=۰ \\ \sin^{۲}x<۲+\sin^{۲}x\Rightarrow ۰\leq \frac{\sin^{۲}x}{۲+\sin^{۲}x}<۱\Rightarrow [\frac{\sin^{۲}x}{۱+\sin^{۲}x}]=۰\Rightarrow g(x)=۰ \end{cases}$$

در نتیجه توابع f و g با هم برابرند.

پاسخ ۱۳)

دامنه‌ی دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است، پس فقط ضابطه‌ی آن دو را بررسی می‌کنیم، برای ضابطه‌ی $[x]$ زوج داریم:

$$[x]=۲k\Rightarrow ۲k\leq x<۲k+۱\Rightarrow k\leq \frac{x}{۲}<k+\frac{۱}{۲}\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=k$$
$$\Rightarrow f(x)=x-۲k\quad ,\quad g(x)=|x-۲k|$$

دو ضابطه‌ی بالا را باید در بازه‌ی $[۲k,۲k+۱)$ بررسی کرد که در آن داریم: $g(x)=x-۲k$ و $f(x)=x-۲k$، پس این ضابطه‌ی

f و g منطبق بر هم می‌شوند.
برای قسمت $[x]$ فرد داریم:

$$[x] = 2k+1 \Rightarrow 2k+1 \le x < 2k+2 \Rightarrow k+1 \le \frac{x+1}{2} < k+\frac{3}{2} \Rightarrow [\frac{x+1}{2}] = k+1$$
$$\Rightarrow f(x) = 2(k+1) - x = -x+2k+2 \quad , \quad g(x) = |x-(2k+2)|$$

این دو ضابطه را در بازه‌ی $[2k+1, 2k+2)$ بررسی می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = -x+2k+2 \quad , \quad g(x) = -(x-(2k+2)) = -x+2k+2$$

بنابراین این دو تابع با هم برابرند.

پاسخ ۱۴)

الف) $g: D_f = [-3,2] \Rightarrow -3 \le [x] \le 2 \Rightarrow -3 \le x < 3 \Rightarrow D_g = [-3,3)$

ب) $h: D_f = [-3,2] \Rightarrow -3 \le [x^2] \le 2 \Rightarrow 0 \le [x^2] \le 2 \Rightarrow 0 \le x^2 < 3 \Rightarrow D_h = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

ب) باید نامعادله‌ی $0 < \frac{[x]}{x} < 1$ را حل کنیم. می‌دانیم همواره $[x] \le x$. حال در سه حالت نامعادله را بررسی می‌کنیم:

۱- اگر $x < 0$، آن‌گاه داریم:

$[x] \le x \Rightarrow \frac{[x]}{x} \ge 1 \Rightarrow$ $x < 0$ جزء مجموعه جواب نامعادله نیست

۲- اگر $0 < x < 1$، آن‌گاه $\frac{[x]}{x} = 0$، بنابراین $0 < x < 1$ جزء مجمموعه جواب نامعادله نیست.

۳- اگر $x \ge 1$، آن‌گاه داریم:

$0 < [x] \le x \Rightarrow 0 < \frac{[x]}{x} \le 1 \Rightarrow$ $x \ge 1$ جزء مجموعه جـواب نامعادلـه اسـت.

پس دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[1,+\infty)$ است.

پاسخ ۱۵)

الف) ابتدا تابع f را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = [\frac{x+1+x-1}{1-x}] + [\frac{1-x}{1+x}] = [\frac{1+x}{1-x} - 1] + [\frac{1-x}{1+x}] = [\frac{1+x}{1-x}] + [\frac{1-x}{1+x}] - 1$$
$\Rightarrow f(-x) = [\frac{1-x}{1+x}] + [\frac{1+x}{1-x}] - 1 = f(x) \Rightarrow$ f زوج اسـت

ب) با توجه به آن‌که $[x]$ عددی صحیح است داریم:

$$f(x) = \cos(\pi x - \pi[x]) = (-1)^{[x]}\cos \pi x$$

حال در دو حالت جداگانه $f(-x)$ و $f(x)$ را مقایسه می‌کنیم:

۱- اگر $x \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه:

$$f(x) = (-1)^{-x}(-1)^{x} = 1 \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

۲- اگر $x \notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه:

$$f(-x) = (-1)^{-[-x]}\cos(-\pi x) = (-1)^{-(-1-[x])}\cos(\pi x) = (-1)^{1+[x]}\cos(\pi x)$$

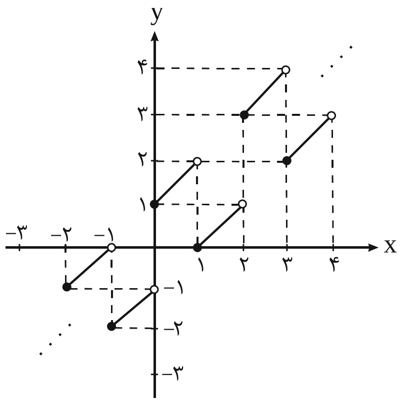
چون $(-1)^{1+[x]} \times (-1)^{-[x]} = -1$، پس $f(-x) = -f(x)$

به این ترتیب f نه زوج است و نه فرد.

پاسخ ۱۶)

اگر $2k \le x < 2k+1$، آن‌گاه $f(x) = x + 1$ و اگر $2k+1 \le x < 2k+2$، آن‌گاه $f(x) = x - 1$ (که $k \in \mathbb{Z}$). به این ترتیب می‌توانیم نمودار تابع را رسم کنیم.

از نمودار تابع مشخص است که تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. از طرفی قرینه‌ی نمودار نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم بر آن منطبق می‌شود، پس $f^{-1} = f$.



پاسخ ۱۷)

با توجه به ضابطه، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

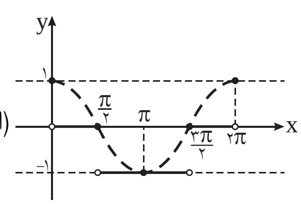
$$y = [x] + \sqrt{x - [x]} \Rightarrow [y] = [[x] + \sqrt{x - [x]}] \Rightarrow [y] = [x] + [\sqrt{x - [x]}]$$

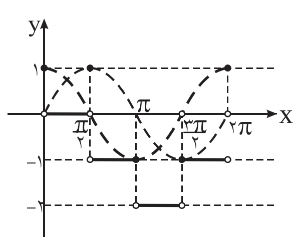
با توجه به آن‌که همواره $0 \le x - [x] < 1$، از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم $[x] = [y]$، با جای‌گذاری این نتیجه در ضابطه‌ی اول داریم:

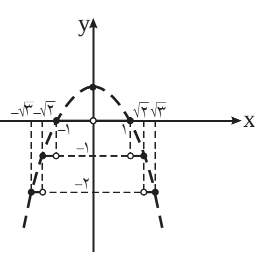
$$y = [y] + \sqrt{x - [y]} \Rightarrow x - [y] = (y - [y])^2 \Rightarrow x = [y] + (y - [y])^2$$

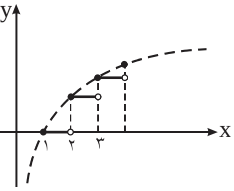
چون x به‌صورت منحصر به فرد برحسب y به‌دست آمده است، پس تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است و داریم: $f^{-1}(x) = [x] + (x - [x])^2$

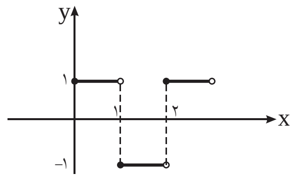
پاسخ ۱۸)

الف) 

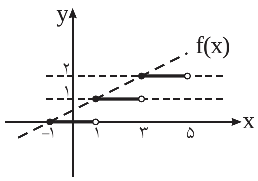
ب) 

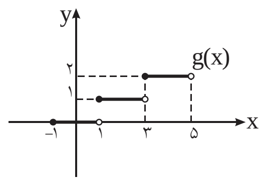
پ) 

ت) 

ث) 

پاسخ ۱۹)





پاسخ ۲۰)

الف) $(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۶}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۶}$

$$=((\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲})((\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۴}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۴}-(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲})$$

$$=۱۰((\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲})^{۲}-۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲}-۱)$$

$$=۱۰(۱۰^{۲}-۲-۱)=۹۷۰$$

حال $[(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۶}]$ را می‌یابیم:

$$(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۶}=۹۷۰-(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۶}\Rightarrow[(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۶}]=[۹۷۰-(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۶}]$$

می‌دانیم $۰<(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۶}<۱$، پس $۹۶۹<۹۷۰-(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۶}<۹۷۰$، در نتیجه داریم:

$$[(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۶}]=۹۶۹$$

ب) ابتدا حاصل $(\sqrt{۲}+۱)^{n}-(\sqrt{۲}-۱)^{n}$ را می‌یابیم:

$$(\sqrt{۲}+۱)^{n}=(\sqrt{۲})^{n}+\binom{n}{۱}(\sqrt{۲})^{n-۱}+\binom{n}{۲}(\sqrt{۲})^{n-۲}+\ldots+۱$$

$$(\sqrt{۲}-۱)^{n}=(\sqrt{۲})^{n}-\binom{n}{۱}(\sqrt{۲})^{n-۱}+\binom{n}{۲}(\sqrt{۲})^{n-۲}-\ldots-۱$$

$$\Rightarrow(\sqrt{۲}+۱)^{n}-(\sqrt{۲}-۱)^{n}=۲\binom{n}{۱}(\sqrt{۲})^{n-۱}+۲\binom{n}{۳}(\sqrt{۲})^{n-۳}+\ldots+۲$$

می‌دانیم n عددی فرد است، پس تمام توان‌های $\sqrt{۲}$ در عبارت بالا زوج می‌باشد و می‌توان عبارت بالا را به‌صورت $۲k$ در نظر گرفت، داریم:

$$(\sqrt{۲}+۱)^{n}-(\sqrt{۲}-۱)^{n}=۲k\Rightarrow(\sqrt{۲}+۱)^{n}=۲k+(\sqrt{۲}-۱)^{n}\Rightarrow[(\sqrt{۲}+۱)^{n}]=[۲k+(\sqrt{۲}-۱)^{n}]$$

می‌دانیم $۰<(\sqrt{۲}-۱)^{n}<۱$، پس $۲k<۲k+(\sqrt{۲}-۱)^{n}<۲k+۱$، در نتیجه داریم:

$$[(\sqrt{۲}+۱)^{n}]=۲k$$

پاسخ ۲۱)

با یک معادله بر حسب a مواجهیم. هر کدام از اعداد $[\frac{۱}{۲}a]$ و $[\frac{۲}{۳}a]$ یک عدد صحیح‌اند، بنابراین مجموع آن‌ها نیز عددی صحیح است، پس $a\in\mathbb{Z}$.

چون در عبارات $\frac{۱}{۲}a$ و $\frac{۲}{۳}a$ داریم، بهتر است از داخل عدد a مضارب ۶ را بیرون بکشیم. فرض کنید $a=۶k+r$ که r باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۶ است. (می‌دانیم هر عدد صحیح را می‌توان بر عدد ۶ تقسیم کرد و باقی‌مانده‌ای از صفر تا ۵ به‌دست آورد، یعنی $a=۶k+r$ که k خارج‌قسمت و $۰\leq r\leq ۵$ باقی‌مانده است). داریم:

$$[\frac{۲}{۳}a]+[\frac{۱}{۲}a]=[\frac{۲}{۳}(۶k+r)]+[\frac{۱}{۲}(۶k+r)]=[۴k+\frac{۲}{۳}r]+[۳k+\frac{r}{۲}]=۴k+[\frac{۲}{۳}r]+۳k+[\frac{۱}{۲}r]$$

با برابر قرار دادن عبارت فوق با $a=۶k+r$ به دست می‌آوریم:

$$۷k+[\frac{۲}{۳}r]+[\frac{۱}{۲}r]=۶k+r \Rightarrow k=r-[\frac{۲}{۳}r]-[\frac{۱}{۲}r]$$

چون $۰ \le r \le ۵$، پس کافی است ۶ مقدار مختلف را برای r به‌ترتیب امتحان کنیم. مثلاً برای $r=۲$ داریم:

$$r=۲ \Rightarrow k=۲-[\frac{۴}{۳}]-[۱]=۰ \xrightarrow{a=۶k+r} a=۶\times ۰+۲ \Rightarrow a=۲$$

نوشتن حالات دیگر را به خودتان واگذار می‌کنیم. به این ترتیب تنها ۶ جواب به‌دست می‌آوریم: ۷، ۵، ۴، ۳، ۲ ، ۰

پاسخ ۲۲

فرض کنید $f(x)=[nx]-[x]-[x+\frac{۱}{n}]-\dots-[x+\frac{n-۱}{n}]$، در این صورت باید ثابت کنیم همواره $f(x)=۰$ (چرا؟). اگر ثابت کنیم $f(x)$ یک تابع متناوب است، کافی است تنها در یک دوره‌ی تناوب آن این حکم را اثبات کنیم. زیرا به دلیل خاصیت توابع متناوب می‌توانیم بگوییم که نتیجه‌ی حاصل برای تمام اعداد حقیقی x برقرار است. چه تابع متناوبی مشابه تابع $f(x)$ تا کنون دیده‌اید؟ در بخش توابع متناوب ثابت کرده‌ایم $g(x)=x-[x]$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=۱$ است. مشابه آن، $f(x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=\frac{۱}{n}$ است. زیرا:

$$\begin{aligned} f(x+\frac{۱}{n}) &= [n(x+\frac{۱}{n})]-[x+\frac{۱}{n}]-[x+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}]-\dots-[x+\frac{۱}{n}+\frac{n-۱}{n}] \\ &= [nx+۱]-[x+\frac{۱}{n}]-[x+\frac{۲}{n}]-\dots-[x+\frac{n-۱}{n}]-[x+\frac{n}{n}] \end{aligned}$$

با توجه به ویژگی جزء صحیح، می‌توان اعداد صحیح را از داخل جزءصحیح خارج کرد. بنابراین:

$$f(x+\frac{۱}{n})=[nx]+۱-[x+\frac{۱}{n}]-[x+\frac{۲}{n}]-\dots-[x+\frac{n-۱}{n}]-[x]-۱ \Rightarrow f(x+\frac{۱}{n})=f(x)$$

پس تابع f با دوره‌ی تناوب $T=\frac{۱}{n}$ متناوب است. اکنون کافی است در یکی از این دوره‌های تناوب رفتار f را بررسی کنیم. مثلاً $x\in[۰,\frac{۱}{n})$ را در نظر می‌گیریم. داریم $۰ \le nx < ۱$، پس $[nx]=۰$ و علاوه بر آن:

$$\left.\begin{array}{l} ۰ \le x < \frac{۱}{n} \Rightarrow [x]=۰ \\ \frac{۱}{n} \le x+\frac{۱}{n} < \frac{۲}{n} \Rightarrow [x+\frac{۱}{n}]=۰ \\ \vdots \\ \frac{n-۱}{n} \le x+\frac{n-۱}{n} < \frac{n}{n}=۱ \Rightarrow [x+\frac{n-۱}{n}]=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=۰-۰-۰-\dots-۰=۰$$

پس برای $x\in[۰,\frac{۱}{n})$ داریم $f(x)=۰$، بنابراین چون f متناوب است، برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $f(x)=۰$