



فصل سوم
توان‌رسانی
و ریشه‌گیری

۱-۳: توان‌رسانی و قواعد آن

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ (۱) $a \times a^2 \times a^3 = a^{1+2+3} = a^6$

پاسخ (۲) الف) x^9 ب) $64x^y$ پ) x^{10} ت) x^{10}

پاسخ (۳) الف) $(AB)^{7+3}$ ب) $(x^2+y)^{10}$ پ) $(a+b)^3$ ت) (m^3+n^2)

پاسخ (۴) الف) $\frac{y \times 2^{10}}{5}$ ب) $\frac{8t}{3}$ پ) $4a^y$ ت) a

پاسخ (۵) الف) $-2m^{x+2y-z} = -2m^4$ ب) $(-6)^{2y-z+x} = (-6)^4$ پ) $\frac{(-2)^9}{2^3} = -2^6 = -64$

پاسخ (۶)

الف) $16^t b^{4t}$ ب) $-125a^6 b^{12}$

پاسخ (۷)

$$\frac{25^n}{5^{2n-3}} = \frac{5^{2n}}{5^{2n-3}} = 5^{2n-(2n-3)} = 5^3 = 125$$

پاسخ (۸)

الف) مثبت است زیرا: $(-3)^4 = 3^4$ ب) منفی است زیرا: $-5^{-2} = -(\frac{1}{5})^2 = -\frac{1}{25}$

پ) مثبت است زیرا: $(-73)^0 = 1$ ت) منفی است زیرا: $(-47)^{-15} = (-\frac{1}{47})^{15} = -(\frac{1}{47})^{15}$

ث) مثبت است زیرا: $(-61)^{-62} = (-\frac{1}{61})^{62} = \frac{(-1)^{62}}{61^{62}} = \frac{1}{61^{62}}$

پاسخ (۹)

الف) $(\frac{2}{3})^{-a} = (\frac{1}{\frac{3}{2}})^a = \frac{2^{-a}}{3^{-a}} = (\frac{2}{3})^a$ ب) $\frac{1}{x^r} = x^{-r} = \frac{1}{x^{-r}} = (\frac{1}{x})^{-r}$

پاسخ (۱۰)

الف) درست ب) درست

پاسخ (۱۱)

الف) $3^6 \times 3^{-4} \times 5^4 - 3^2 \times 5^3 \times 5 = 3^2 \times 5^4 - 3^2 \times 5^4 = 0$ ب) $\frac{2^{-2} \times 5^3 \times 10^{-4}}{2^{-3} \times 5^2 \times 10^{-5}} = 2 \times 5 \times 10 = 100$

پ) $\frac{15^{30}}{45^{15} (3^2 \times 5)^{15}} = \frac{3^{30} \times 5^{30}}{3^{30} \times 5^{15} \times 3^{30} \times 5^{15}} = 5^{15}$ ت) $\frac{(x^4 y^{-5})^{-3}}{(xy)^2} = \frac{x^{-12} y^{15}}{x^2 y^2} = \frac{y^{13}}{x^{14}}$

ث) $\frac{5 \times 10^{-5} + 2 \times 10^{-6}}{10^{-7}} = \frac{10^{-7} (5 \times 10^2 + 2 \times 10)}{10^{-7}} = 500 + 20 = 520$

پاسخ ۱۲

$$\underbrace{1+1+1+\dots+1+1}_{11392} = 1393 \quad \text{الف}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-1} = \frac{6+3+2+1}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 - 2 = 0 \quad \text{ب}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1} + \frac{\frac{1}{5}}{\frac{-(2^{-1} + 3^{-1} + 7^{-1} - 5^{-1})}{(3^{-1} + 2^{-1} - 5^{-1} + 7^{-1})}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} - \frac{1}{5} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1 = 0 \quad \text{پ}$$

$$\frac{-(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1} + 6^{-1} + 7^{-1} + 8^{-1} - 9^{-1})}{8^{-1} + 7^{-1} + 6^{-1} + 5^{-1} + 4^{-1} + 3^{-1} - 9^{-1}} = -1 \quad \text{ت}$$

پاسخ ۱۳

$$v^a + \delta^b = \frac{1}{v^{-a}} + \frac{1}{\delta^{-b}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad \text{الف}$$

$$v^{-2a} + \delta^{-3b} = (v^{-a})^2 + (\delta^{-b})^3 = 2^2 + 3^3 = 4 + 27 = 31 \quad \text{ب}$$

پاسخ ۱۴ کفایت از مخرج کسر، جمله X^{-101} را فاکتورگیری کنیم:

$$\frac{X + X^2 + X^3 + \dots + X^{100}}{X^{-101}(X^{100} + X^{99} + \dots + X)} = \frac{1}{X^{-101}} = X^{101}$$

پاسخ ۱۵

$$\text{الف)} \quad 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-2014} = 2^{-2014}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2013}) = 2^{-2014}(2^{2014} - 1) = 1 - 2^{-2014}$$

$$\text{ب)} \quad A = 6^{-1} + 6^{-5} + 6^{-9} + \dots + 6^{-377} \Rightarrow 6^{-4}A = 6^{-5} + 6^{-9} + \dots + 6^{-381} \Rightarrow 6^{-4}A - A = 6^{-381} - 6^{-1} \Rightarrow A = \frac{6^{-381} - 6^{-1}}{6^{-4} - 1}$$

$$\text{پ)} \quad \frac{3^{-1} + 3^{-2} + \dots + 3^{-1393}}{3^{-1}(3^{-1} + 3^{-2} + \dots + 3^{-1393})} + \frac{5^{-1}(1 + 5^{-1} + 5^{-2} + \dots + 5^{-2014})}{5^{-2014} + 5^{-2013} + \dots + 1} = \frac{1}{3^{-1}} + 5^{-1} = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\text{الف)} \quad 5^{25}(1 + 5 + 5^2) = m \times 5^{25} \Rightarrow m = 1 + 5 + 5^2 = 31$$

$$\text{ب)} \quad 2^{2010}(2^3 - 2^2 + 3 \times 2 - 1) = n \times 2^{2010} \Rightarrow n = 2^3 - 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$$

پاسخ ۱۶

پاسخ ۱۷ برای فهم بهتر، به ترتیب اولویت عمل‌های جبری، از پرانتز استفاده می‌کنیم:

$$A = \left[5^2 + \left[\left(2^{25} \div 3^{20} \right) \div 27 \right] - \left[\left(2^{60} \div 2^{40} \right) \div 2^{15} \right] \right]^{10} \div 2^7 = [5^2 + 3^2 - 2^5]^{10} \div 2^7 = 2^{10} \div 2^7 = 2^3$$

پاسخ ۱۸ به کمک قوانین توان حاصل عبارت a را محاسبه می‌کنیم:

$$a = (2^9)^3 - 2^2(2^3 \times 2^8 \times 2^{10}) - 2^{26} = 2^{27} - 2^{23} - 2^{26} = 2^{23}(2^4 - 1 - 2^3) = 7 \times 2^{23}$$

پاسخ ۱۹

$$r^{ab} = (r^a)^b = (r)^b = r$$

پاسخ ۲۰

$$r^7 ab = (r^3)^{ab} = r^{3ab} = (r^a)^{3b} = r^{3b} = (r^b)^3 = 5^3 = 125$$

پاسخ ۲۱

$$1^{2a(b+1)(c+2)} = 3^{6a(b+1)(c+2)} = (r^a)^{6(b+1)(c+2)} = (5)^{6(b+1)(c+2)} = (5^{b+1})^{6(c+2)} = (3)^{6(c+2)} = (3^{c+2})^6 = 7^6$$

پاسخ ۲۲ ابتدا عبارت‌های a و b را ساده می‌کنیم. در عبارت a ، بین 2^{n+5} و 2^{n+2} عامل 2^{n+2} مشترک است و بین 3^{n+1} و 3^n عامل 3^n مشترک است. با فاکتورگیری به دست می‌آوریم:

$$a = 2^{n+2} \times 3^n (2^2 \times 3 + 1) = 2^{n+2} \times 3^n \times 25$$

به همین ترتیب با فاکتورگیری، عبارت b را به صورت $b = 2^{2n+2} \times 3^{n+1} (2 + 3) = 2^{2n+2} \times 3^{n+1} \times 5$ ساده می‌کنیم.

حال، عبارت $\frac{5b}{a}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{5b}{a} = \frac{5 \times 5 \times 2^{2n+2} \times 3^{n+1}}{25 \times 2^{n+2} \times 3^n} = 2^{2n+2-(n+2)} \times 3^{n+1-n} = 2^n \times 3$$

پاسخ (۲۳) ابتدا طول هر یک از اضلاع را ساده می‌کنیم:

$$AC = 2^{n-1} (2^2 - 2 + 1) = 3 \times 2^{n-1}, \quad BC = 2^{n-1} (2^3 - 2^2 + 2) = 6 \times 2^{n-1}$$

الف) ثابت می‌کنیم بین اضلاع مثلث ABC رابطه‌ی فیثاغورث برقرار است:

$$BC^2 = (6 \times 2^{n-1})^2 = 36 \times 2^{2n-2}$$

$$AB^2 + AC^2 = (3\sqrt{3} \times 2^{n-1})^2 + (3 \times 2^{n-1})^2 = 27 \times 2^{2n-2} + 9 \times 2^{2n-2} = 36 \times 2^{2n-2}$$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$ مثلث ABC در رأس A قائمه است.

ب) مساحت مثلث برابر است با $\frac{1}{2} AB \times AC$ پس می‌توان نوشت:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3} \times 2^{n-1}) \times (3 \times 2^{n-1}) = \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 2^{2n-2} = 9\sqrt{3} \times 2^{2n-3}$$

پاسخ (۲۴)

$$24^2 = (2^3 \times 3)^2 = 2^6 \times 3^2 \Rightarrow x=6, y=2 \text{ (ب)}$$

$$z=21 \text{ (الف)}$$

پاسخ (۲۵)

$$A+2 = \underbrace{2+2}_{2^2} + 2^2 + \dots + 2^n = \underbrace{2^2+2^2}_{2 \times 2^2 = 2^3} + 2^2 + \dots + 2^n = 2^2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} \xrightarrow{A+2=2^{1392}} 2^{n+1} = 2^{1392} \Rightarrow n=1391$$

پاسخ (۲۶)

$$m(1+2+2^2+\dots+2^{2014}) = 2015(2^{2015}-1) \Rightarrow m(2^{2015}-1) = 2015(2^{2015}-1) \Rightarrow m=2015$$

پاسخ (۲۷)

$$X = 2^{\delta_1} \times 2^{\delta_2} \times \dots \times 2^{100} = 2^{\delta_1 + \delta_2 + \dots + 100} = 2^{3775}$$

توجه کنید که حاصل $51+52+\dots+100$ را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$(1+2+3+\dots+100) - (1+2+3+\dots+50) = \frac{100(101)}{2} - \frac{50(51)}{2} = 50(101) - 25(51) = 3775$$

از طرفی مقدار Y را مشابه تمرین (۱۰) محاسبه می‌کنیم:

$$Y = 1+2+2^2+\dots+2^{3774} \Rightarrow Y+1 = 2+2+2^2+\dots+2^{3774} \Rightarrow Y+1 = 2^{3775} \Rightarrow Y = 2^{3775} - 1$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$X - Y = 2^{3775} - (2^{3775} - 1) = 1$$

پاسخ (۲۸)

$$A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2013} \Rightarrow 7A = 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2014}$$

$$\Rightarrow 7A - A = (7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2014}) - (7 + 7^2 + \dots + 7^{2013}) = 7^{2014} - 7$$

$$\Rightarrow 6A = 7^{2014} - 7 \Rightarrow A = \frac{7^{2014} - 7}{6}$$

پاسخ (۲۹)

$$A = 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2013} \Rightarrow 2^2 A = 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2015}$$

$$\Rightarrow 4A - A = 2^{2015} - 2 \Rightarrow 3A = 2^{2015} - 2 \Rightarrow A = \frac{2^{2015} - 2}{3}$$

پاسخ (۳۰)

$$A = 5^3 + 5^6 + 5^9 + \dots + 5^{1392} \Rightarrow 5^3 A = 5^6 + 5^9 + 5^{12} + \dots + 5^{1395}$$

$$\Rightarrow 5^3 A - A = 5^{1395} - 5^3 \Rightarrow 124A = 5^{1395} - 125 \Rightarrow A = \frac{5^{1395} - 125}{124}$$

پاسخ (۳۱)

$$A = 3^{2n+2} \times 2^{2n+2} + 2^{2n+2} \times 3^{2n+2} - 179 \times 2^{2n} \times 3^{2n} = 3^{2n} \times 2^{2n} (9 \times 8 + 8 \times 9 - 179) = 3^{2n} \times 2^{2n} (180 - 179) = 3^{2n} \times 2^{2n}$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{A}{3^{2n}} = 32$ ، با جای گذاری مقدار A خواهیم داشت:

$$\frac{3^{2n} \times 2^{2n}}{3^{2n}} = 32 \Rightarrow 2^{2n} = 32 = 2^5 \Rightarrow 2n = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{2}$$

پاسخ (۳۲)

ابتدا مقادیر a و $b + c$ را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم. درباره‌ی اجزای a داریم:

$$(2^9 \times 6^{100})^2 = (2^9 \times (2 \times 3)^{100})^2 = (2^{109} \times 3^{100})^2 = (2^{109})^2 \times (3^{100})^2 = 2^{218} \times 3^{200}$$

$$a = \frac{2^{218} \times 3^{200}}{2^{216} \times 3^{200}} = \frac{2^{218}}{2^{216}} = 2^2$$

بنابراین عبارت a برابر است با:

به همین ترتیب درباره‌ی $b + c$ می‌توان نوشت:

$$b + c = 2^{1997} \div (2^{501})^4 = 2^{1997} \div 2^{2004} = \frac{2^{1997}}{2^{2004}} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

حال با توجه به این که $ab + ac = a(b + c)$ ، حاصل عبارت مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$ab + ac = a(b + c) = 2^2 \times \frac{1}{128} = \frac{1}{32}$$

پاسخ (۳۳)

$$\frac{a}{b} = a^r b \Rightarrow \frac{a}{b} = (a^b)^r \xrightarrow{a^b = ab} \frac{a}{b} = (ab)^r \Rightarrow a = a^r b^r \Rightarrow a^2 b^r = 1 \Rightarrow ab^r = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b^r}$$

$$a^b = ab \xrightarrow{a = \frac{1}{b^r}} \left(\frac{1}{b^r}\right)^b = \frac{1}{b^r} \times b \Rightarrow b^{-rb} = b^{-1} \Rightarrow -rb = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{r} \xrightarrow{a = \frac{1}{b^r}} a = 4$$

پس حاصل $b^{-a} = 4^{-4} = 16$ برابر است با:

پاسخ (۳۴)

$$\frac{735^{n+2}}{7^{2n} \times 35^n} = \frac{(7^2 \times 3 \times 5)^{n+2}}{7^{2n} \times 5^n \times 7^n} = \frac{7^{2n+4} \times 3^{n+2} \times 5^{n+2}}{7^{3n} \times 5^n} = 7^{4-2n} \times 3^{n+2} \times 5^2$$

برای آن که عدد $7^{4-2n} \times 3^{n+2} \times 5^2$ عددی طبیعی باشد باید توان 7 ، صحیح و نامنفی باشد. پس $4 - 2n \geq 0$ که در نتیجه $n \leq 2$ ، با توجه به صحیح و نامنفی بودن n ، می‌توان دریافت، $n = 0, 1, 2$ قابل قبول است. پس: $A = \{7^4 \times 3^2 \times 5^2, 7^2 \times 3^3 \times 5^2, 3^4 \times 5^2\}$

۲-۳: کاربردهای توان

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ (۱)

الف) $2x + 5 = x \Rightarrow x = -5$

ب) $x - 1 = -x + 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

پ) $5^{3x-7} = 5^2 \Rightarrow 3x - 7 = 2 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

ت) $7^{4x-1} = 7^3 \Rightarrow 4x - 1 = 3 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

ث) $3^{6x+2} = 3^4 \Rightarrow 6x + 2 = 4 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

ج) $6^{7x+1} = 6^3 \Rightarrow 7x + 1 = 3 \Rightarrow 7x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

چ) $(\frac{1}{2})^{4x} = (\frac{1}{2})^6 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

ح) $(\frac{1}{11})^{3x+1} = (\frac{1}{11})^2 \Rightarrow 3x + 1 = 2 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

پاسخ (۲)

الف) $2^t = \frac{16}{5} = 16 \Rightarrow 2^t = 2^4 \Rightarrow t = 4$

ب) $2^{25} = 2^{2x-2+3x-8} \Rightarrow 25 = 5x - 10 \Rightarrow 5x = 35 \Rightarrow x = 7$

پ) $7^x = 7^{3x-2-x} \Rightarrow x = 2x - 2 \Rightarrow x = 2$

ت) $3^{3^{x-1}} = 27^{9^{x-1}} = (3^3)^{9^{x-1}} = 3^{3 \times 9^{x-1}} = 3^{3 \times 3^{2x-2}} = 3^{3^{2x-1}} \Rightarrow x - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x = 0$

ث) $3^{2n} + 3^{2n+2} = 10 \times 3^{20+12} \Rightarrow 3^{2n}(1+9) = 10 \times 3^{32} \Rightarrow 3^{2n} = 3^{30+12} \Rightarrow 2n = 20+12 \Rightarrow n = 16$

ج) $2^{156} + 3 \times 2^{156} = 2^{79x} \Rightarrow 4 \times 2^{156} = 2^{79x} \Rightarrow 2^{158} = 2^{79x} \Rightarrow 158 = 79x \Rightarrow x = 2$

چ) $\frac{3 \times 5^{x+2}}{3 \times 5^{-x}} = 5^{-3} \Rightarrow 5^{x+2+x} = 5^{-3} \Rightarrow 2x + 2 = -3 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

ح) $x = 0$ ($2^0 = 3^0 = 1: \frac{1}{4} \cdot k \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$)

خ) $5^{2x-4} = 2^{3x-6} \Rightarrow 2x - 4 = 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

د) $3 \times 2^{x-1} = 3^x \xrightarrow{\div 3} 2^{x-1} = 3^{x-1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

پاسخ (۳) الف) جواب مسأله سه حالت دارد:

$$\begin{cases} x + 5 = 1 \Rightarrow x = -4 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x + 5 = -1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

توجه کنید که با جای‌گذاری -4 ، -2 و -6 به ترتیب به تساوی‌های $1 = 1^{-2}$ ، $1 = 3^0$ و $1 = (-1)^{-4}$ می‌رسیم که هر سه درست هستند.

ب) با شرط $X-3 \neq 0$ و $X-3 \neq \pm 1$ جواب معادله برابر است با:

$$2X+1=X-1 \Rightarrow X=-2$$

حال هر یک از حالت‌های خاص را بررسی می‌کنیم:

$$X-3=0 \Rightarrow X=3 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } 0^\circ = 1^\circ} 1^0 = 1^0 = 1 \checkmark \Rightarrow \text{Swit} X=3$$

$$X-3=1 \Rightarrow X=4 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } 1^\circ = 1^\circ} 1^1 = 1^1 = 1 \checkmark \Rightarrow \text{Swit} X=4$$

$$X-3=-1 \Rightarrow X=2 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } (-1)^\circ = (-1)^1 = -1 \checkmark \Rightarrow \text{Swit} X=2$$

پس این معادله دارای چهار جواب -2 ، 3 ، 4 و 2 است.

پاسخ ۴) حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

$$\text{حالت اول: } (3410=1) X-1=1 \Rightarrow X=2 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } 1^\circ = 1^\circ} 1^2 = 1 \checkmark$$

$$\text{حالت دوم: } (0 \text{ H40}=0) \Rightarrow 2X-2=0 \Rightarrow X=1 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } 0^\circ = 1^\circ} 1^0 = 1 \times$$

$$\text{حالت سوم: } (3410=-1) \Rightarrow X-1=-1 \Rightarrow X=0 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } (-1)^\circ = 1^\circ} (-1)^0 = 1 \checkmark$$

پس این معادله دارای دو جواب 2 و 0 است.

پاسخ ۵) مانند مسأله‌ی قبل، سه حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\text{حالت اول: } X-2=1 \Rightarrow X=3 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } 1^\circ = 1^\circ} 1^3 = 1 \checkmark$$

$$\text{حالت دوم: } 3X-6=0 \Rightarrow X=2 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } 0^\circ = 1^\circ} 1^2 = 1 \times$$

$$\text{حالت سوم: } X-2=-1 \Rightarrow X=1 \xrightarrow{\text{توجه کنید که } (-1)^\circ = 1^\circ} (-1)^{-3} = 1 \times \quad ((-1)^{-3} = -1)$$

پس این معادله تنها یک جواب $X=3$ را دارد.

پاسخ ۶)

$$\text{الف) } \begin{cases} 2^{X+1} = 2^{32} \\ 3^{Y+2} = 3^{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X+1 = 32 \\ Y+2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 31 \\ Y = 10 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 5^{X+2} = 5^{2X-2} \\ 7^{2Y+1} = 7^{3Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X+2 = 2X-2 \\ 2Y+1 = 3Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 1 \end{cases}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} 2^{2X-2} = 2^{3Y+3} \\ 3^{2X+4} = 3^{5Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X-2 = 3Y+3 \\ 2X+4 = 5Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X-3Y = 5 \\ 2X-5Y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{37}{4} \\ Y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

ت) ابتدا معادله‌ی اول دستگاه را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2^X}{2^Y} \times \frac{3^{X+1}}{3^{Y+1}} = 1 \Rightarrow 2^{X-Y} \times 3^{X-Y} = 1 \Rightarrow 6^{X-Y} = 1 \Rightarrow X-Y=0 \Rightarrow X=Y$$

حال با جای‌گذاری X به جای Y در معادله‌ی دوم دستگاه خواهیم داشت:

$$2^X - 2^X + 3^{X+2} - 3^{X+2} + 5^X = 25 \Rightarrow 5^X = 25 \Rightarrow X=2$$

پس می‌توان دریافت $X=Y=2$.

$$\text{ث) } \begin{cases} 2^{X-2} = 3^{X-2} \\ 5^{Y+1} = 7^{Y+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X-2=0 \\ Y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=2 \\ Y=-1 \end{cases}$$

$$\text{ج) } X=-2, Y=2$$

پاسخ ۷) ابتدا هر یک از معادلات را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 6 \Rightarrow 2^x \times 2 = 6 \xrightarrow{\div 2} 2^x = 3 \\ 3^{y+2} = 18 \Rightarrow 3^y \times 3^2 = 18 \xrightarrow{\div 9} 3^y = 2 \end{cases}$$

حال می توان نوشت:

$$2^x = 3 \xrightarrow{y} (2^x)^y = 3^y \Rightarrow 2^{xy} = 3^y \xrightarrow{3^y=2} 2^{xy} = 2 \Rightarrow xy = 1$$

پاسخ ۸) ابتدا طرف چپ معادله ی اول را ساده می کنیم:

$$5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} = 5^n(1+5+25) = 31 \times 5^n$$

حال می توان نوشت:

$$31 \times 5^n = 31 \times 5^{2m+3} \Rightarrow 5^n = 5^{2m+3} \Rightarrow n = 2m+3$$

$$\begin{cases} n = 2m+3 \\ 3n+2m = 97 \end{cases} \text{ از حل دستگاه خواهیم داشت } n=25 \text{ و } m=11. \text{ بنابراین: } m+n=36$$

پاسخ ۹) اگر طرف راست تساوی را به عوامل اول تجزیه کنیم به تساوی $3^a \times 5^6 \times 7^b = 3^{16} \times 5^{2c} \times 7^4$ می رسیم که با توجه به طبیعی بودن

$$\text{مقادیر } a, b, \text{ و } c \text{ می توان نتیجه گرفت } a=16, b=4, \text{ و } c=3. \text{ بنابراین: } a+c-b=15$$

پاسخ ۱۰) الف) ابتدا عدد A را ساده می کنیم:

$$A = 2^m + 2^{m+1} + 2^{m+2} + 2^{m+3} = 2^m(1+2+2^2+2^3) = 2^m \times 14$$

با توجه به تساوی بالا عدد A همواره بر عدد ۱۴ بخشپذیر است.

ب) عدد B را به صورت زیر دسته بندی می کنیم:

$$B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2016} = (2+2^2+2^3+2^4) + (2^5+2^6+2^7+2^8) + \dots + (2^{2013}+2^{2014}+2^{2015}+2^{2016})$$

با توجه به قسمت (الف)، همه ی پرانتزها بر ۱۴ بخش پذیر هستند پس عدد B بر ۱۴ بخش پذیر است. بنابراین باقی مانده ی تقسیم عدد B بر عدد ۱۴، برابر صفر است.

پاسخ ۱۱) الف) ابتدا عدد A را ساده می کنیم:

$$A = 2^{n+1} \times 5^{n+1} \times 7^n + 7^{n+2} \times 2^{n+2} \times 5^{n+2} + 7^n \times 2^{n+1} \times 5^{n+1} = 2^{n+1} \times 5^{n+1} \times 7^n (2^9 + 7^2 \times 2 \times 5 + 1) = 10^{n+1} \times 7^n \times 1003$$

همان طور که ملاحظه می کنید با توجه به طبیعی بودن ۱۱، عدد A همواره بر $10^2 \times 7 \times 1003 = 702100$ بخش پذیر است.

پاسخ ۱۲) ابتدا حاصل $10^{2013} - 2013$ را محاسبه می کنیم: (توجه کنید که در سمت راست عدد 10^{2013} ، ۲۰۱۳ صفر وجود دارد)

$$\begin{array}{r} 099999 \quad 999910 \\ -x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \\ \hline 2013 \\ \hline \underline{9 \dots 99} 7987 \\ ||| 2009 \end{array}$$

پس مجموع ارقام عدد $10^{2013} - 2013$ برابر است با: $2009 \times 9 + 7 + 9 + 8 + 7 = 18112$

پاسخ ۱۳) باید معادله ی $149 \times 2^9 = 596$ را حل کنیم:

$$149 \times 2^9 = 596 \Rightarrow 2^9 = 4 \Rightarrow \frac{t}{9} = 2 \Rightarrow t = 18$$

پاسخ ۱۴) باید مقدار V را به ازای $t=6$ محاسبه کنیم:

$$\text{هزار تومان } = 180 \left(\frac{0}{8}\right)^6 = 47/18592 = \text{قیمت پس از ۶ سال}$$

پس قیمت موتور سیکلت پس از شش سال حدود ۴۷ هزار تومان است!

پاسخ ۱۵) ابتدا به جدول زیر توجه کنید: (دقت کنید که جرم کربن در هر ۲۰ دقیقه نصف می شود.)

کربن باقی مانده پس از ۶۰ دقیقه = ۱ ساعت	کربن باقی مانده پس از ۴۰ دقیقه	کربن باقی مانده پس از ۲۰ دقیقه	کربن اولیه
$\frac{1}{2} \times 4 = 2$	$\frac{1}{2} \times 8 = 4$	$\frac{1}{2} \times 16 = 8$	۱۶ گرم

با توجه به جدول بالا پس از گذشت یک ساعت $(\frac{1}{2})^3$ گرم از کربن باقی مانده است. بنابراین، پس از گذشت ۱۱ ساعت $(\frac{1}{2})^{11}$ گرم از کربن باقی می ماند.

پاسخ (۱۶) الف) در هر مرحله، هر پاره خط به ۴ پاره خط تبدیل می شود. بنابراین در مرحله ی صفر ۳ پاره خط، در مرحله ی اول 3×4 پاره خط، در مرحله ی سوم $3 \times 4 \times 4$ پاره خط و در مرحله ی ۱۱ ام 3×4^{11} پاره خط داریم.

ب) در مرحله ی صفر ۳ پاره خط به طول ۱ داریم، پس محیط شکل برابر ۳ می باشد. در اولین مرحله ۱۲ پاره خط به طول $\frac{1}{3}$ داریم، پس محیط شکل برابر ۴ خواهد بود. در مرحله ی دوم ۴۸ پاره خط به طول $\frac{1}{9}$ داریم، پس محیط شکل برابر $\frac{16}{3}$ خواهد شد و در مرحله ی ۱۱ ام 3×4^{11} پاره خط به طول $\frac{1}{3^{11}}$ داریم. پس محیط شکل برابر با $3 \times (\frac{4}{3})^{11}$ خواهد بود.

پاسخ (۱۷) پس از ۱۰ سال میزان پول محمود برابر $(1 + \frac{6}{100})^{10}$ و پول شکوفه برابر $(1 + 10\%)^{10}$ می باشد. حال باید معادله ی زیر را حل کنیم:

$$(1 + \frac{3}{50})^{10} = 1 + 10\% \Rightarrow r = \frac{(1 + \frac{3}{50})^{10} - 1}{10}$$

پاسخ (۱۸) پس از ۳ سال میزان بدهی علی به بانک، با محاسبه ی بهره ی آن به صورت ترکیبی برابر است با:

$$40(1 + \frac{15}{100})^3 = 40(1.15)^3 \text{ میلیون}$$

تفاضل مقدار فوق از وام اولیه (۴۰ میلیون) مقدار پولی است که علی بیش تر از وام اولیه به بانک پرداخت کرده است.

$$40(1.15)^3 - 40 = 40((1.15)^3 - 1) = 20/835$$

پس علی حدوداً ۲۱ میلیون بیش تر از مقدار وام خود به بانک پرداخت کرده است.

پاسخ (۱۹)

الف) $2/8562 \times 10^6$

ب) $3/781 \times 10^{-5}$

پ) $1/25 \times 10^9 + 7/6 \times 10^8 = 10^8 (1/25 \times 10 + 7/6) = 10^8 \times 20/1 = 2/01 \times 10^9$

ت) $\frac{7/8 \times 10^6}{1/3 \times 10^{-14}} = 6 \times 10^{20} = 0/6 \times 10^{21}$

ث) $6/4 \times 10^4 \times 5/9 \times 10^{-3} = 37/76 \times 10 = 3/776 \times 10^2$

ج) $(2 \times 0/3 \times 0/5) \times (10^{5-8+17}) = 0/3 \times 10^{14} = 0/3 \times 10^{13}$

پاسخ (۲۰)

$$\frac{21000000}{1/5 \times 10^6} = \frac{2/1 \times 10^7}{1/5 \times 10^6} = 1/4 \times 10 = 14 \text{ روز}$$

پاسخ (۲۱)

$$\frac{2/6561 \times 10^{-23}}{1/6735 \times 10^{-24}} = 1/5871 \times 10 = 15/871$$

پس جرم اتم اکسیژن تقریباً ۱۵ برابر جرم اتم هیدروژن است.



۳-۳: مقایسه‌ی اعداد توان‌دار

پاسخ تمرین‌های تشریحی

پاسخ (۱)

$$\text{الف) } ۱۶^۲ = ۲^۸, ۸^۴ = ۲^{۱۲} \Rightarrow ۸^۴ > ۱۶^۲$$

$$\text{ب) } ۴^{۴۲} = ۲^{۸۴} \Rightarrow ۴^{۴۲} > ۲^{۸۰}$$

$$\text{پ) } ۲۴۳^۷ = ۳^{۳۵}, ۸۱^{۱۰} = ۳^{۴۰} \Rightarrow ۸۱^{۱۰} > ۲۴۳^۷$$

$$\text{ت) } ۱۲۵^{۲۰} = ۵^{۶۰}, ۲۵^{۴۴} = ۵^{۸۸} \Rightarrow ۲۵^{۴۴} > ۱۲۵^{۲۰}$$

$$\text{ث) } ۳۴۳^{۱۳} = ۷^{۳۹}, ۴۹^{۲۰} = ۷^{۴۰} \Rightarrow ۴۹^{۲۰} > ۳۴۳^{۱۳}$$

$$\text{ج) } ۱۳^۳ > ۱۰^۳$$

$$\text{چ) } ۳^۶ = (۳^۲)^۳ = ۹^۳ \Rightarrow ۱۱^۳ > ۳^۶$$

$$\text{ح) } ۲^{۲۷} = (۲^۹)^۳ = ۵۱۲^۳, ۵^{۱۲} = (۵^۴)^۳ = (۶۲۵)^۳ \Rightarrow ۵^{۱۲} > ۲^{۲۷}$$

$$\text{خ) } ۳^{۶۶} = (۳^۶)^{۱۱} = ۷۲۹^{۱۱}, ۲^{۷۷} = (۲^۷)^{۱۱} = ۱۲۸^{۱۱} \Rightarrow ۳^{۶۶} > ۲^{۷۷}$$

$$\text{د) } ۳^{۴۲} = (۳^۶)^۷ = ۷۲۹^۷, ۲^{۶۳} = (۲^۹)^۷ = ۵۱۲^۷ \Rightarrow ۳^{۴۲} > ۲^{۶۳}$$

$$\text{ذ) } ۳^{۲۰۰} = (۳^۲)^{۱۰۰} = ۹^{۱۰۰}, ۲^{۳۰۰} = (۲^۳)^{۱۰۰} = ۸^{۱۰۰} \Rightarrow ۳^{۲۰۰} > ۲^{۳۰۰}$$

پاسخ (۲)

$$\text{الف) } ۰ < ۰/۲ < ۱ \Rightarrow (۰/۲)^۷ > (۰/۲)^۹$$

$$\text{ب) } ۰ < ۰/۳۵ < ۱ \Rightarrow (۰/۳۵)^{۱۷} > (۰/۳۵)^{۱۹}$$

$$\text{پ) } ۰ < \frac{۳}{۵} < ۱ \Rightarrow \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲۰} > \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۳۰}$$

$$\text{ت) } \left(\frac{۷}{۴}\right)^{-۱۰} = \left(\frac{۴}{۷}\right)^{۱۰}, \left(\frac{۷}{۴}\right)^{-۱۵} = \left(\frac{۴}{۷}\right)^{۱۵} \xrightarrow{۰ < \frac{۴}{۷} < ۱} \left(\frac{۴}{۷}\right)^{۱۰} > \left(\frac{۴}{۷}\right)^{۱۵}$$

$$\text{ث) } ۰/۴۵ > ۰/۴۱ \Rightarrow (۰/۴۵)^۷ > (۰/۴۱)^۷$$

$$\text{ج) } \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۷} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۷, \left(\frac{۴}{۳}\right)^{-۷} = \left(\frac{۳}{۴}\right)^۷$$

$$\frac{۳}{۴} > \frac{۲}{۳} \Rightarrow \left(\frac{۳}{۴}\right)^۷ > \left(\frac{۲}{۳}\right)^۷$$

پاسخ (۳)

$$\left. \begin{aligned} ۲^{۹۹} = (۲^۹)^{۱۱} = ۵۱۲^{۱۱}, \quad ۳^{۶۶} = (۳^۶)^{۱۱} = ۷۲۹^{۱۱} \Rightarrow ۳^{۶۶} > ۲^{۹۹} \\ ۸^{۳۳} = ۲^{۹۹} = ۵۱۲^{۱۱}, \quad ۵^{۴۴} = (۵^۴)^{۱۱} = ۶۲۵^{۱۱} \Rightarrow ۵^{۴۴} > ۸^{۳۳} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{|۲^{۹۹} - ۳^{۶۶}|}_{\overline{A}y^{۱۱}} = ۳^{۶۶} - ۲^{۹۹}, \quad \underbrace{|۸^{۳۳} - ۵^{۴۴}|}_{\overline{A}y^{۱۱}} = ۵^{۴۴} - ۸^{۳۳}$$

حال به ساده کردن عبارت A می‌پردازیم:

$$A = [3^{66} - 2^{99} + 2^{99} - 5^{44} + 5^{60} \div 5^{16}] \div (-3)^{65} = (3^{66} - 5^{44} + 5^{44}) \div (-3)^{65} = 3^{66} \div (-3)^{65} = -\frac{3^{66}}{3^{65}} = -3$$

پاسخ (۴)

الف) $1/5 \times 10^{12} = 15 \times 10^{11} \Rightarrow 1/5 \times 10^{12} > 12/1 \times 10^{11}$

ب) $6/25 \times 10^{-7} = 6/25 \times 10^{-6} \Rightarrow 7/65 \times 10^{-6} > 6/25 \times 10^{-7}$

پ) $\begin{cases} 2 \times 3^{101} = 2 \times 3 \times 3^{100} = 6 \times 3^{100} = 6 \times (3^2)^{50} = 6 \times 9^{50} \\ 3 \times 2^{151} = 3 \times 2 \times 2^{150} = 6 \times 2^{150} = 6 \times (2^3)^{50} = 6 \times 8^{50} \end{cases} \Rightarrow 2 \times 3^{101} > 3 \times 2^{151}$

ت) $\begin{cases} 3^{32} - 3^{31} + 3^{30} = 3^{30}(3^2 - 3 + 1) = 7 \times 3^{30} = 7 \times (3^3)^{10} = 7 \times 27^{10} \\ 5^{21} = 5 \times 5^{20} = 5 \times (5^2)^{10} = 5 \times 25^{10} \end{cases} \xrightarrow[27^{10} > 25^{10}]{7 > 5} 7 \times 27^{10} > 5 \times 25^{10}$

پاسخ (۵) عبارت 2^{5n+2} را به صورت 4×3^{2n} و عبارت 3^{2n+1} را به صورت 3×2^{2n} می‌نویسیم. حال می‌توان فهمید: $3^{2n} > 2^{2n}$ و $4 > 3$. با ضرب این ۲ نامساوی خواهیم داشت:

$$4 \times 3^{2n} = 2^{5n+2} > 3 \times 2^{2n} = 3^{2n+1}$$

پاسخ (۶) الف) با توجه به این که $2002 = 14 \times 143$ ، $858 = 6 \times 143$ و $572 = 4 \times 143$. عبارت‌ها را با توان یکسان 143 بازنویسی می‌کنیم در نتیجه می‌توان چنین گفت:

$$\begin{cases} 2^{2002} = (2^{14})^{143} = 16384^{143} \\ 5^{858} = (5^6)^{143} = (15625)^{143} \Rightarrow 2^{2002} > 5^{858} > 11^{572} \\ 11^{572} = (11^4)^{143} = (14641)^{143} \end{cases}$$

ب) می‌دانیم: $7^{50} = 49^{25}$ ، $2^{75} = 8^{25}$ و $3^{100} = 81^{25}$ در نتیجه: $3^{100} > 7^{50} > 2^{75}$

پ) می‌دانیم: $8^{168} > 63^{84}$ و $129^{72} > 126^{72}$

$$8^{168} = 8^{144} \times 8^{24} = 64^{72} \times 2^{24} > 63^{72} \times 2^{24} = 126^{72}$$

از طرفی داریم:

بنابراین $8^{168} > 126^{72}$ همچنین می‌توان دریافت:

$$126^{72} = 63^{72} \times 2^{72} = 63^{72} \times 64^{12} > 63^{72} \times 63^{12} = 63^{84}$$

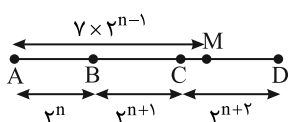
$$128^{72} > 8^{168} > 126^{72} > 63^{84}$$

از این رو می‌توان فهمید ۴ عدد به ترتیب مقابل هستند:

پاسخ (۷) الف) می‌دانیم: $2^7 > 5^3$. حال ۲ طرف را به توان ۳ می‌رسانیم. در نتیجه $2^{21} > 5^9$. از طرفی می‌دانیم: $2^5 > 5^2$ با ضرب این ۲ نامساوی حکم ثابت می‌شود.

ب) می‌دانیم: $2^3 < 3^2$ همچنین $2^{500} = 16^{125} < 27^{125} = 3^{1500}$ با ضرب این ۲ نامساوی ثابت می‌شود: $2^{2003} < 3^{1502}$. حال ثابت می‌کنیم: $3^{1251} < 2^{2003}$ می‌دانیم. $8 = 2^3 > 3$ ، همچنین: $2^{500} = 256^{125} > 243^{125} = 3^{1250}$. پس با ضرب کردن این ۲ نامساوی می‌توان فهمید:

$$2^{2003} > 3^{1251}$$



پاسخ (۸) الف) می‌دانیم طول پاره‌خط AD برابر 7×2^n می‌باشد پس طول AM برابر $3/5 \times 2^n$

می‌باشد که از طول پاره‌خط AC بزرگ‌تر است پس M بین C و D قرار دارد. بنابراین طول MC برابر

$\frac{1}{5} \times 2^n$ یا 2^{n-1} می‌باشد. در نتیجه طول MC دست کم برابر یک سانتی‌متر می‌باشد.

ب) از این که $AD = 112 = 7 \times 16$ می‌توان فهمید: $n = 4$. پس طول BM برابر با $BM = 5 \times 2^{n-1} = 5 \times 8 = 40$ سانتی‌متر می‌باشد.

۳-۴: ریشه گیری

فصل سوم
توان رسانی
و ریشه گیری

پاسخ تمرین های تشریحی

پاسخ (۱)

الف) ۸ ±

ب) ۹/۰ ±

پ) ۱۴ ±

ت) ۱۵ × ۱۰^۲ ±

پاسخ (۲)

الف) ۸

ب) ۹/۰

پ) ۱۴

ت) ۱۵ × ۱۰^۲

پاسخ (۳)

الف) ۲

ب) -۳

پ) ۴x

ت) ۵x^۲

پاسخ (۴)

الف) ۲ ±

ب) ۳ ± ۲ × ۳ = ۶ ±

پ) ۵/۰ ±

ت) وجود ندارد.

پاسخ (۵)

الف) ۲

ب) ۳

پ) ۵/۰

ت) وجود ندارد.

پاسخ (۶)

الف) نادرست

ب) درست

پ) نادرست

ج) نادرست

ث) درست

ت) نادرست (ریشه ی دوم صفر برابر صفر است)

چ) درست

ح) نادرست

خ) درست

پاسخ (۷)

الف) $|x| + x + |-2| = x + x + 2 = 2x + 2$

ب) $|y| + y + |\sqrt{2} - 2| = -y + y + 2 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$

پ) $|2x| + |3y| + |-17| = 2x - 3y + 17$

ت) $|x - y| + x - y = x - y + x - y = 2x - 2y$

پاسخ (۸)

الف) $۲۵^{\frac{۳}{۲}} = (۵^۲)^{\frac{۳}{۲}} = ۵^۳ = ۱۲۵$

ب) $۳۲^{-\frac{۴}{۵}} = (۲^۵)^{-\frac{۴}{۵}} = ۲^{-۴} = (\frac{1}{2})^۴ = \frac{1}{۱۶}$

پ) $۸۱^{\frac{۳}{۴}} = (۳^۴)^{\frac{۳}{۴}} = ۳^۳ = ۲۷$

ت) $(-۲۷)^{\frac{۴}{۳}} = ((-۳)^۳)^{\frac{۴}{۳}} = (-۳)^۴ = ۸۱$

پاسخ (۹)

الف) $۴ = ۲^۲ = ۲^{\frac{۶}{۳}} = (۲^۶)^{\frac{1}{۳}} = (۶۴)^{\frac{1}{۳}}$

ب) $a^{\frac{1}{۶}} = (a^{\frac{1}{۳}})^{\frac{1}{۲}} = (\sqrt[۳]{a})^{\frac{1}{۲}}$

الف) $(10^4 x)^{\frac{1}{2}} = 10^2 x$

ب) $\frac{10^{2a}}{5^{2a}} = 2^{2a}$

پ) $\frac{(x^2 y)^{\frac{1}{3}} (x^2 y^4)^{\frac{1}{3}}}{(x^2 y^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(x^4 y^5)^{\frac{1}{3}}}{(x^2 y^2)^{\frac{1}{3}}} = (x^2 y^3)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} y$

الف) $7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{5}{3}} = 7^{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}} = 7^{\frac{6}{3}} = 7^2 \Rightarrow 7^{\frac{17}{6}} = 7^{\frac{11}{6}} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 7^{\frac{17}{6} - \frac{11}{6}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 7 = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 7^{-2} = \frac{1}{49}$

ب) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{8}} = \frac{2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow 2^{\frac{21}{8}} = \frac{2^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{5}{8} - \frac{21}{8}}}{2^{\frac{5}{8}}} = 2^{-\frac{17}{8}} \Rightarrow x = 2^{-\frac{17}{3}}$

الف) $\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4} x^{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{4} x^{\frac{2}{3}}$

ب) $3 \times \frac{16}{49 \times x^2} = \frac{48}{49} x^{-2}$

پ) $\sqrt{\pi \times 8x^3} = \sqrt{8\pi} x^{\frac{3}{2}}$

الف) $2\sqrt{40(2\sqrt{3})} + 3\sqrt{5(4\sqrt{3})} - 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{5^2 \times 3} - 4\sqrt{15(3\sqrt{3})}$
 $= 2\sqrt{2^2 \times 5\sqrt{3}} + 6\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5^2 \times 3} - 12\sqrt{5\sqrt{3}} = 4\sqrt{5\sqrt{3}} + 6\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 12\sqrt{5\sqrt{3}} = 0$

ب) $5\sqrt[3]{6\sqrt{2^5}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{3^4} \times 2} - 11\sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times 2} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{5^2} \times 2}$
 $= 5\sqrt[3]{2^4 \sqrt{2}} - 3\sqrt[3]{18\sqrt{2}} - 11\sqrt[3]{3\sqrt{2}} + 2\sqrt[3]{5^2 \times 3\sqrt{2}} = 10\sqrt[3]{3\sqrt{2}} - 9\sqrt[3]{3\sqrt{2}} - 11\sqrt[3]{3\sqrt{2}} + 10\sqrt[3]{3\sqrt{2}} = 0$

الف) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \times x^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x \times x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{5}{2}}}} = \sqrt{x \times x^{\frac{5}{4}}} = \sqrt{x^{\frac{9}{4}}} = x^{\frac{9}{8}} = x^{\frac{15}{16}} = \sqrt[16]{x^{15}}$

ب) $\sqrt{\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x}{y}}}} = \sqrt{\frac{x}{y} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{x}{y} \times \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{8}}} = \sqrt{\frac{x \times x^{-\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}}}{y \times y^{-\frac{1}{4}} \times y^{\frac{1}{8}}}} = \sqrt{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{3}{8}}}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{8}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x}{y}}}} \times x^{-\frac{1}{12}} \times y^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}} \times x^{-\frac{1}{12}} \times y^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} \times y^{\frac{1}{12} - \frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{6}} \times y^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{6}}$

الف) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

ب) $\frac{2}{\sqrt[3]{7}} \times \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{2\sqrt[3]{7^2}}{7} = \frac{2\sqrt[3]{49}}{7}$

$$\text{ب) } \frac{7}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{5^2}} \times \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{7\sqrt[3]{5}}{5}$$

$$\text{ت) } \frac{4}{3\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{24} = \frac{1\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{ث) } \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{32}}} = \frac{4}{\sqrt{2+4\sqrt{2}}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{ج) } \frac{27}{\sqrt{27}-\sqrt{3}} = \frac{27}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{27}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{27}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{6} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{چ) } \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{ح) } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{خ) } \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{3^5}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2+\sqrt{3^5}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2(2+\sqrt{3})} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پاسخ ۱۶

$$\text{الف) } \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{2+x} \left(\frac{2(1+x)-x}{2\sqrt{1+x}} \right) = \frac{1}{2+x} \left(\frac{2+2x-x}{2\sqrt{1+x}} \right) = \frac{1}{2+x} \left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

پاسخ ۱۷ ابتدا عبارت درون قدر مطلق را ساده می کنیم:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6\sqrt{6}} = \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}$$

واضح است که این عبارت منفی است پس می توان نوشت:

$$A = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6\sqrt{6}} \times 6 = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2}+6}{6} = \frac{6(\sqrt{2}+1)}{6} = \sqrt{2}+1$$

پاسخ ۱۸

$$\text{الف) } f=9 \Rightarrow d = 0.34 \times \sqrt{9} = 0.34 \times 3 = 1.02 \text{ (متر)}$$

$$\text{ب) } \frac{0.34\sqrt{4f}}{0.34\sqrt{f}} = \frac{2\sqrt{f}}{\sqrt{f}} = 2$$

پس اگر مقدار f چهار برابر شود قطر لوله دو برابر می شود.

پاسخ ۱۹ باید مقدار h را به ازای $t=8$ محاسبه کنیم:

$$t=8 \text{ (سانتی متر)} = 75/8 + 62/5 \sqrt[3]{8} = 75/8 + 62/5 \times 2 = 75/8 + 124 = 200/8$$

پاسخ ۲۰ الف) ابتدا طرف چپ این تساوی را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$3^{0/5} \times 3^{5/6} \times 9^{0/5} \times X^{-0/5} = 3^2 \times 3^{5/6} \times (3^2)^{0/5} X^2 = 3^2 \times 3^{5/6} \times 3 \times X^2 = 3^{1+1+5/6} \times X^2 = 3^{3+5/6} \times X^2 = 3^3 \times X^2$$

$$\frac{1}{96} \times 27^3 = (3^2)^6 \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^3 \quad \text{همچنین طرف راست معادله برابر است با:}$$

$$\frac{7}{3^3} \times \frac{1}{3^2} = \frac{7}{3^5} \quad \text{در نتیجه مسأله به حل معادله ی } 3^3 X^2 = 3^3 \text{ تبدیل می شود، حال می توان نوشت:}$$

$$x^{\frac{-1}{2}} = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2 \Rightarrow x = 9$$

ب) ابتدا طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt[3]{2})^2}{(\frac{1}{2})^2 \times x^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} \times (2^{\frac{1}{3}})^2}{2^{-2} \times x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}}{2^{-2} \times x^{\frac{1}{3}}} = \frac{14}{2^3}$$

حال طرف راست تساوی را ساده می‌کنیم: $2^7 \times (\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^6 = 2^7 (2^{-\frac{2}{3}})^6 = 2^5$

پس مسأله به حل معادله‌ی $\frac{2^{\frac{14}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 2^5$ تبدیل می‌شود:

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{14}{3}}}{2^5} = 2^{\frac{14}{3}-5} = 2^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = (2^{-\frac{1}{3}})^3 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

پاسخ (۲۱) الف) به کمک قواعد توان می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{8}{6}} = 2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$$

ب) ابتدا صورت کسر را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{36} \times \sqrt[4]{9} = (36)^{\frac{1}{3}} \times (9)^{\frac{1}{4}} = (6^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = (2 \times 3)^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{6}}$$

$$\sqrt[6]{48} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

حال، مخرج کسر را به صورت مقابل ساده می‌کنیم:

بنابراین مسأله به محاسبه‌ی کسر $\frac{2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{6}}}{2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}}$ تبدیل می‌شود که حاصل آن برابر با ۳ می‌شود.

پ) نخست عبارت $a^{\frac{2}{3}} b \sqrt{\frac{a}{b}}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(a^{\frac{2}{3}} b) \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = (a^{\frac{2}{3}} b) \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} b \times a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{5}{6}} \times b^{\frac{1}{2}}$$

اکنون مسأله به ساده کردن عبارت $\sqrt{a^{\frac{5}{6}} \times b^{\frac{1}{2}}}$ یا به طور معادل $(a^{\frac{5}{6}} \times b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ منجر می‌شود، پس می‌توان نوشت:

$$(a^{\frac{5}{6}} \times b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{12}} \times b^{\frac{1}{4}} = a(ab)^{\frac{1}{4}} = a\sqrt[4]{ab}$$

ت) همان‌طور که گفتیم کلیه‌ی خواص توان، برای توان‌های کسری هم برقرار است، از این رو نخست هر عبارت را به شکل عبارتی توان‌دار بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{4}{15}} \Rightarrow (\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}})^3 = (a^{\frac{4}{15}})^3 = a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{4}{5}}$$

$$\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{4}{15}} \Rightarrow (\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}})^3 = (a^{\frac{4}{15}})^3 = a^{\frac{4}{5}}$$

در نتیجه کسر اول برابر $a^{-2} = a^{\frac{2}{5} - \frac{12}{5}} = \frac{a^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{12}{5}}}$ می شود. حال برای ساده کردن کسر دوم می توان نوشت:

$$a^3 \times \sqrt{a^2 b} = a^3 \times (a^2 b)^{\frac{1}{2}} = a^3 \times a \times b^{\frac{1}{2}} = a^4 b^{\frac{1}{2}}$$

حال می توان نوشت:

$$\sqrt{a^3 \sqrt{a^2 b}} = (a^3 b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{\frac{1}{4}} \Rightarrow (\sqrt{a^3 \sqrt{a^2 b}})^3 = (a^{\frac{3}{2}} \times b^{\frac{1}{4}})^3 = a^{\frac{9}{2}} \times b^{\frac{3}{4}}$$

همچنین مخرج کسر دوم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$a\sqrt{b} = ab^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt[4]{a\sqrt{b}} = (ab^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \times b^{\frac{1}{8}} \Rightarrow (\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6 = (a^{\frac{1}{4}} \times b^{\frac{1}{8}})^6 = a^{\frac{3}{2}} \times b^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{a^{\frac{9}{2}} b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}} = a^3$$

بنابراین کسر دوم برابر است با: a^3

بنابراین حاصل عبارت برابر با $a^{-2} \times a^3$ یا a^1 خواهد بود.

پاسخ (۲۲) در ابتدا هر یک از عبارت ها را با مفهوم توان کسری ساده می کنیم.

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}} = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}, \quad \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$$

$$\sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{x \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow (\sqrt{x\sqrt{x}})^2 = (x^{\frac{3}{4}})^2 = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}} \times \sqrt[6]{x^5} \times (\sqrt{x\sqrt{x}})^2 = x^{\frac{1}{6}} \times x^{\frac{5}{6}} \times x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{3}{2}} = x^{\frac{5}{2}} = x^2 \sqrt{x}$$

با توجه به مطالب فوق، می توان نوشت:

پاسخ (۲۳) ابتدا سعی می کنیم هر یک از سه عبارت رادیکالی سمت چپ تساوی را ساده کنیم:

$$\sqrt[4]{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = \sqrt[4]{2^4 \times 3 \times (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[4]{\frac{2^{\frac{13}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{13}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{13}{12}} \times 3^{\frac{1}{12}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{12}} = 4\sqrt[6]{2}\sqrt[12]{3}$$

$$\sqrt[3]{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}} = \sqrt[3]{2^5 \times \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{2^{\frac{13}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}} = 2^{\frac{13}{9}} \times 3^{\frac{2}{9}} = 2^{\frac{13}{9}} \times 3^{\frac{2}{9}} = 4\sqrt[9]{2}\sqrt[9]{3}$$

$$\sqrt[3]{12\sqrt{8}} = \sqrt[3]{3 \times 2^2 \times 2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{3 \times 2^{\frac{7}{2}}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{7}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 2 \times 2^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}$$

در نتیجه طرف چپ تساوی را به صورت زیر می توان نوشت:

$$4\sqrt[6]{2}\sqrt[12]{3} + \sqrt[3]{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}} - 11\sqrt[3]{12\sqrt{8}} = 4\sqrt[6]{2}\sqrt[12]{3} + 4\sqrt[9]{2}\sqrt[9]{3} - 22\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}$$

حال با توجه به این که $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{9}$ می توان نوشت: $2\sqrt[6]{2} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{9} = 2\sqrt[6]{18}$

پس تساوی اولیه به صورت $2\sqrt[6]{18} = 2\sqrt[6]{a}$ تبدیل می شود که در نتیجه خواهیم داشت: $a = 18$

پاسخ (۲۴) ابتدا هر کدام از روابط داده شده را ساده می کنیم:

$$x^y \cdot y^x = y^x \Rightarrow x^y = \frac{y^x}{y^x} = y^{x-x} = y^0 = 1, \quad x^{y+1} = (\sqrt{y})^{2+y} \Rightarrow x^{y+1} = (y)^{\frac{2+y}{2}}$$

اکنون با تقسیم رابطه‌ی دوم بر رابطه‌ی اول می توان نوشت:

$$\frac{x^{y+1}}{x^y} = \frac{y^{\frac{2+x}{2}}}{y^{4-x}} \Rightarrow x = y^{\frac{x+2}{2} - (4-x)} = y^{\frac{3x-5}{2}} \quad (1)$$

از آن جایی که در رابطه ی (۱) مقدار x بر حسب y به دست آمده است، کافی است طرفین این تساوی را به توان y برسانیم و آن را با اولین رابطه ی خود مقایسه کنیم:

$$x = y^{\frac{3x-5}{2}} \Rightarrow x^y = y^{\left(\frac{3x-5}{2}\right)y} = y^{4-x}$$

اکنون از تساوی $y^{\frac{y(3x-5)}{2}} = y^{4-x}$ می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{y(3x-5)}{2} = 4-x \Rightarrow y(3x-5) = 8-2x \Rightarrow 3xy - 5y = 8-2x \Rightarrow 3xy + 2x = 5y + 8$$

$$\Rightarrow x(3y+2) = 5y+8 \Rightarrow L = \frac{5y+8}{x(2+3y)} = 1$$